第三章

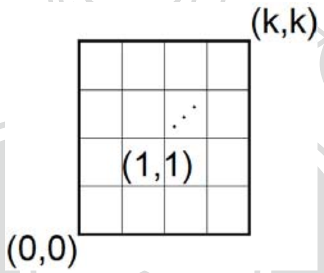
將二項等式$\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i} = 4^k$與路徑問題做對應

3.1 所有通過檢查點(i,i) ， $i=0,1,2,\cdots,k$ 的 $k \times k$ 正方形路徑

$(c,S_{2k})=(2i,S_{2k})$的個數為$\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i}$ ：

所有的$k \times k$正方形檢查點及路徑$(c,S_{2k})=\left(c,s_1,s_2,\cdots,s_{2k}\right)$， $s_j=1$ 或 -1，

$j=1,2,\cdots,2k$ ，為



從座標$(0,0)$開始(第0步)，經由每一步走”上”或”右”，且經過檢查點(i,i)(必落在第$2i$步上) $i=0,1,2,\cdots,k$ ，到達終點(k,k)(總共$2k$步)的方法，

$(c,S_{2k})=\left(c,s_1,s_2,\cdots,s_{2k}\right)$， $s_j=1$ 或 -1， $j=1,2,\cdots,2k$ ，

其中通過檢查點$c=i+i=2i$ ， $s_j=\begin{cases}1 & \text{代表第}j\text{步走上}\\ -1 & \text{代表第}j\text{步走右}\end{cases}$。

而$C_i^{2i}C_{k-i}^{2k-2i}$表示：所有通過檢查點$c=i+i=2i$ ((i,i) ，即檢查點在第$2i$步上)

$i=0,1,2,\cdots,k$ ，到達終點的路徑之個數，其中的C_i^{2i}表示在檢查點$c=2i$之前的$2i$步，為i個上和i個右的排列組合，而C_{k-i}^{2k-2i}表示在檢查點$c=2i$之後的$2k-2i$步，為$k-i$ 個上和 $k-i$ 個右的排列組合。

(Ex： $C_1^2 C_{k-1}^{2k-2}$為所有通過檢查點$c=1+1=2$(即座標上的$(1,1)$)到達終點的路徑之

個數，其中的C_1^2表示在檢查點$c=2$之前的2步， 為1個上和1個右的排列組

合，而C_{k-i}^{2k-2i}表示在檢查點$c=2$之後的$2k-2$步，為$k-1$個上和$k-1$個右

的排列組合。)

$$\therefore \sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i} = C_0^0 C_k^{2k} + C_1^2 C_{k-1}^{2k-2} + \cdots + C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i} + \cdots + C_k^{2k} C_0^0$$

為所有通過檢查點(i,i)， $i=0,1,2,\cdots,k$ 的$k \times k$正方形路徑的個數。

註： $p_{2k}=0$

($\because S_{2k}=\left(s_1,s_2,\cdots,s_{2k}\right)$是由$k$個 1 和$k$個$-1$組成，

$\therefore p_{2k}=s_1+s_2+\cdots+s_{2k}=k-k=0$) 。

$p_c=0$

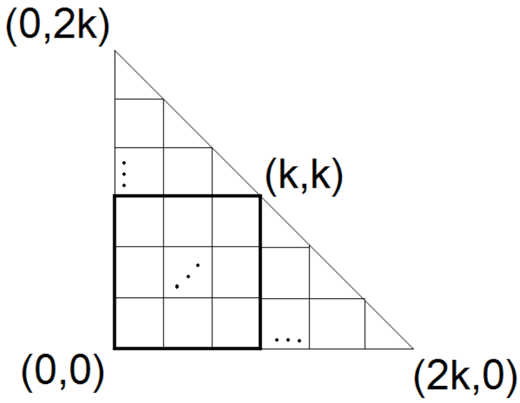
($\because s_1,s_2,\cdots,s_c$ 是由i個 1 和i個-1組成，

$\therefore p_c=s_1+s_2+\cdots+s_c=i-i=0$) 。

3.2 所有 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} 的個數為 $2^{2k}(=4^k)$ ：

所有的 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 $T_{2k}=(t_1,t_2,\cdots,t_{2k})$ ，$t_j=1$ 或 -1，

$j=1,2,\cdots,2k$ ，為



從座標 $(0,0)$ 開始(第 0 步)，經由每一步走”上”或”右”，到達終點

$(p,q),\ p+q=2k$ (即三角形的斜邊上)的方法，

$T_{2k}=(t_1,t_2,\cdots,t_{2k})$ ，$t_j=1$ 或 -1， $j=1,2,\cdots,2k$ ，其中 $t_j=\begin{cases}1 & \text{代表第}j\text{步走上}\\ -1 & \text{代表第}j\text{步走右}\end{cases}$ ，

而 $4^k=2^{2k}=2\cdot 2\cdots 2$ ($2k$ 個 2 相乘)，而每一個 2 代表，

每次的步驟可選”上”或”右”，總共有 $2k$ 個步驟可選，

所以，路徑是由 p 個上和 q 個右來組成，且 $p+q=2k$ ，

$\therefore 2^{2k}(=4^k)$ 為所有 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑的個數。