第五章　一些定理的證明

定理 1 ：若 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 $T_{2k}=\left(t_1,t_2,\cdots,t_{2k}\right)$，是由 $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑為 $(2k,S_{2k})$ 經由路徑轉換(轉換 1(i))得到的(即 $T_{2k}=S_{2k}$)，則由此 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 $T_{2k}=\left(t_1,t_2,\cdots,t_{2k}\right)$，經由路徑轉換(轉換 2(i))得到 $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c,S_{2k}) 必為 $(2k,S_{2k})$ 。

證明： $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑為 $(2k,S_{2k})$ ，經由路徑轉換(轉換 1(i))

得到 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑為 $T_{2k}=S_{2k}$

$\because T_{2k}=S_{2k}\therefore P'=P=(p_0,p_1,\cdots,p_{2k})$ 並且 $\because p_{2k}=0\therefore p'_{2k}=0$ ，

$\therefore c=\max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{j\mid p'_j=0\right\}=2k$ ，

此時 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} 經由路徑轉換(轉換 2(i))對應到

$k\times k$ 正方形的檢查點及路徑 $(c,S_{2k})=(2k,T_{2k})=(2k,S_{2k})$ ($\because T_{2k}=S_{2k}$) 。

定理 2.1： $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c,S_{2k}) 且 $p_{c+1}>0$ ， $M_+=\max\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，

S_{2k} 的部分和向量為 $P=(p_0,p_1,\cdots,p_{2k})$ ，

則 $p_j<i+1$ ， $i=1,2,\cdots,M_+$ ， $L(i)\le j<L\left(i+1\right)$，令 $L(M_+ +1)=2k+1$ 。

證明：給定 i ， $i=1,2,\cdots,M_+$ ，

$\because L(i)\le j<L(i+1)$

$\therefore j\ne L(i+1)$

$\because L(i+1)=\min\limits_{j>c}\left\{j\mid p_j=i+1\right\}$

$\therefore p_j\ne i+1$ (即 $p_j>i+1$ 或 $p_j<i+1$)，

(用反證法來證明 $p_j<i+1$)

$\because p_c = 0$ ，若 $p_j > i+1 > 0 = p_c$

$\therefore \exists\ t,\ j > t > c \ \ni\ p_t = i+1 \ \rightarrow\leftarrow$

$(\because L(i+1) > j > t$ 且 $L(i+1) = \min\limits_{j>c}\left\{ j \mid p_j = i+1 \right\})$

$\therefore p_j < i+1$ ， $i = 1,2,\cdots,M_+$ ， $L(i) \le j < L\left(i+1\right)$ ，令 $L(M_+ +1) = 2k+1$ 。

定理 2.2： $k \times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c, S_{2k}) 且 $p_{c+1} < 0$ ， $M_- = \min\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，

S_{2k} 的部分和向量為 $P = (p_0, p_1, \cdots, p_{2k})$ ，

則 $p_j > i-1$，$i = -1,-2,\cdots,M_-$，$L(i) \le j < L\left(i-1\right)$，令 $L(M_- -1) = 2k+1$。

證明：給定 i ， $i = -1,-2,\cdots,M_-$ ，

$\because L(i) \le j < L(i-1)$

$\therefore j \ne L(i-1)$

$\because L(i-1) = \min\limits_{j>c}\left\{ j \mid p_j = i-1 \right\}$

$\therefore p_j \ne i-1$(即 $p_j > i-1$ 或 $p_j < i-1$)，

(用反證法來證明 $p_j > i-1$)

$\because p_c = 0$ ，若 $p_j < i-1 < 0 = p_c$

$\therefore \exists\ t,\ \ c < t < j \ \ni\ p_t = i-1 \ \rightarrow\leftarrow$

$(\because t < j < L(i-1)$ 且 $L(i-1) = \min\limits_{j>c}\left\{ j \mid p_j = i-1 \right\})$

$\therefore p_j > i-1$，$i = -1,-2,\cdots,M_-$，$L(i) \le j < L\left(i-1\right)$，令 $L(M_- -1) = 2k+1$。

定理 3.1： $k \times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c, S_{2k}) 且 $p_{c+1} > 0$ ， $M_+ = \max\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，經路徑轉換後，得到 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑

$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+}, M_+ = \max\limits_{j>c} \left\{ p_j \right\}$

S_{2k} 的部分和向量為 $P = (p_0, p_1, \cdots, p_{2k})$ ，

T_{2k} 的部分和向量為 $P' = (p'_0, p'_1, \cdots, p'_{2k})$ ，

則 $p'_j = p_j - 2i$ ，$i = 1, 2, \cdots, M_+$ ，$L(i) \le j < L\left(i+1\right)$，令 $L(M_+ + 1) = 2k + 1$ 。

證明：$\because T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+}$ ，$s_{L(i)} = 1$ ，$i = 1, 2, \cdots, M_+$ ，

$$\therefore t_j = \begin{cases} -s_j = -1 & ,\text{若} j = L(i),\ i = 1, 2, \cdots, M_+ \\ s_j & ,\qquad \text{其它} \end{cases},$$

每多做一次的1改成 -1 的轉換(即 F_i 轉換)，對 $L(i)$ 之後的部分和 p_j 與 p'_j 之間的差會多2，

$\therefore p'_j = p_j - 2i$ ，$i = 1, 2, \cdots, M_+$ ，$L\left(i\right) \le j < L(i+1)$，令 $L(M_+ + 1) = 2k + 1$ 。

(見 例 4.1)。

定理 3.2：$k \times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c, S_{2k}) 且 $p_{c+1} < 0$ ，$M_- = \min\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，經路徑轉換後，得到 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑

$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-}$ ，$M_- = \min\limits_{j>c} \left\{ p_j \right\}$ ，

S_{2k} 的部分和向量為 $P = (p_0, p_1, \cdots, p_{2k})$ ，

T_{2k} 的部分和向量為 $P' = (p'_0, p'_1, \cdots, p'_{2k})$ ，

則 $p'_j = p_j - 2i$ ，$i = -1, -2, \cdots, M_-$ ，$L(i) \le j < L\left(i-1\right)$ ，

令 $L(M_- - 1) = 2k + 1$ 。

證明：$\because T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-}$ ，$s_{L(i)} = -1$ ，$i = -1, -2, \cdots, M_-$ ，

$$\therefore t_j = \begin{cases} -s_j = 1 & ,\text{若 } j = L(i),\ i = -1, -2, \cdots, M_- \\ s_j & ,\qquad \text{其它} \end{cases},$$

每多做一次的-1改成1的轉換(即F_i轉換)，對$L(i)$之後的部分和p_j與p'_j

之間的差會多-2，

$\therefore p'_j = p_j - 2i$，$i = -1,-2,\cdots,M_-$，$L(i) \le j < L(i-1)$，令$L(M_- - 1) = 2k+1$，

(見 例 4.2)。

定理 4.1：$k \times k$ 正方形的檢查點及路徑(c, S_{2k})且$p_{c+1} > 0$，$M_+ = \max\limits_{j>c}\{p_j\}$，

$2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑T_{2k}且$p'_{c+1} < 0$，$N_- = \dfrac{p'_{2k}}{2}$，

若$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+}$且$(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1})$，

則$N_- = -M_+$。

證明：$\because N_- = \dfrac{p'_{2k}}{2}$，

(由定理 3.1)

$p'_j = p_j - 2i$，$i = 1,2,\cdots,M_+$，$L(i) \le j < L(i+1)$，令$L(M_+ + 1) = 2k+1$，

$\because L(M_+) \le j = 2k < 2k+1 \therefore i = M_+$且$p_{2k} = 0$，

$\therefore N_- = \dfrac{p'_{2k}}{2} = \dfrac{p_{2k} - 2M_+}{2} = \dfrac{-2M_+}{2} = -M_+$。

定理 4.2：$k \times k$ 正方形的檢查點及路徑(c, S_{2k})且$p_{c+1} < 0$，$M_- = \min\limits_{j>c}\{p_j\}$，

$2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑T_{2k}且$p'_{c+1} > 0$，$N_+ = \dfrac{p'_{2k}}{2}$，

若$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-}$且$(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot G_{N_+} \cdots G_1)$，

則$N_+ = -M_-$。

證明：$\because N_+ = \dfrac{p'_{2k}}{2}$，

(由定理 3.2)

$p'_j = p_j - 2i$，$i = -1, -2, \cdots, M_-$，$L(i) \le j < L(i-1)$，令$L(M_- - 1) = 2k+1$，

$\because L(M_-) \le j = 2k < 2k+1 \therefore i = M_-$ 且 $p_{2k} = 0$，

$\therefore N_+ = \dfrac{p'_{2k}}{2} = \dfrac{p_{2k} - 2M_-}{2} = \dfrac{-2M_-}{2} = -M_-$。

定理 5.1：$k \times k$ 正方形的檢查點及路徑(c, S_{2k})，且 $p_{c+1} > 0$，$M_+ = \max\limits_{j>c}\{p_j\}$的轉折點為$L(i) = \min\limits_{j>c}\{j \mid p_j = i\}$，$i = 1, 2, \cdots, M_+$，

$2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑T_{2k}，且 $p'_{c+1} < 0$，$N_- = \dfrac{p'_{2k}}{2}$ 的轉折點為$L'(-i) = \max\limits_{j>c}\{j \mid p'_{j-1} = -i+1\}$，$-i = -1, -2, \cdots, N_-$，

若$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+}$，而$F_1 \cdots F_{M_+}$為轉換函數 f 所對應的矩陣，且$(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1})$，而$G_{N_-} \cdots G_{-1}$為轉換函數$g$所對應的矩陣，

則$L(i) = L'(-i)$，$i = 1, 2, \cdots, M_+$ (或者$-i = -1, -2, \cdots, N_-$)，

且$G_{N_-} \cdots G_{-1} \cdot F_1 \cdots F_{M_+} = I_{2k}$，

$F_1 \cdots F_{M_+} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1} = I_{2k}$。

證明：$L(i) = \min\limits_{j>c}\{j \mid p_j = i\}$，$i = 1, 2, \cdots, M_+$，

$\therefore p_{L(i)} = i$，

(由定理3.1)

$p'_j = p_j - 2i$，$i = 1, 2, \cdots, M_+$，$L(i) \le j < L(i+1)$，令$L(M_+ + 1) = 2k+1$，

並且 $t_j = \begin{cases} -s_j = -1 & ,\text{若} j = L(i),\ i = 1, 2, \cdots, M_+ \\ s_j & ,\quad\quad\quad \text{其它} \end{cases}$，

$\Rightarrow p'_{L(i)} + 2i = i$

$\Rightarrow p'_{L(i)} = -i$

$(\because t_{L(i)} = -1)$

$\Rightarrow p'_{L(i)-1} = -i+1$ ，

由轉換 1(ii)的註，可得 $p'_{c+1} < 0$ ， $L'(-i) = \max_{j>c}\left\{ j \mid p'_{j-1} = -i+1 \right\}$ ，

$-i = -1, -2, \cdots, N_-$ ($\because$ 由定理4.1得 $N_- = -M_+$) ，

$(\because p'_{L(i)-1} = -i+1)$

$\Rightarrow L'(-i) \ge L(i) \ldots (1)$，

接著要證明 $L'(-i) \le L(i)$ ：

(由定理 2.1)

$\Rightarrow p_j < i+1$ ， $i = 1, 2, \cdots, M_+$ ， $L(i) \le j < L(i+1)$ ，令 $L(M_+ + 1) = 2k+1$ ，

$(\because p'_j = p_j - 2i)$

$\Rightarrow p'_j + 2i < i+1$ ， $i = 1, 2, \cdots, M_+$ ， $L(i) \le j < L(i+1)$ ，

$\Rightarrow p'_j < -i+1$ ， $i = 1, 2, \cdots, M_+$ ， $L(i) \le j < L(i+1)$ ，

$\Rightarrow p'_j < -i+1$ ， $i = 1, 2, \cdots, M_+$ ， $L(i) \le j < 2k+1$ ，

(由定義 $L'(-i) = \max_{j>c}\left\{ j \mid p'_{j-1} = -i+1 \right\}$ ， $-i = -1, -2, \cdots, N_-$)

$\Rightarrow L'(-i) \le L(i) \ldots (2)$

所以，由(1)和(2)得

$L'(-i) = L(i)$ ， $i = 1, 2, \cdots, M_+$ (或者 $-i = -1, -2, \cdots, N_-$) ；

$F_i = R^{(-1)}_{L(i)}$ ， $i = 1, 2, \cdots, M_+$ ，

$G_{-i} = R^{(-1)}_{L(-i)}$ ， $-i = -1, -2, \cdots, N_-$ ，

$\because L'(-i)=L(i)$ ， $i=1,2,\cdots,M_+$ (或者 $-i=-1,-2,\cdots,N_-$) ，

$\therefore F_i=R_{L(i)}^{(-1)}=R_{L'(-i)}^{(-1)}=G_{-i}$ ，

並且 $F_i\cdot G_{-i}=F_i\cdot F_i=I_{2k}$ ， $i=1,2,\cdots,M_+$ ，

$G_{-i}\cdot F_i=F_i\cdot F_i=I_{2k}$ ， $i=1,2,\cdots,M_+$ ，

$$\begin{aligned}
G_{N_-}\cdots G_{-1}\cdot F_1\cdots F_{M_+} &= G_{N_-}\cdots G_{-2}\cdot F_2\cdots F_{M_+}\\
&\vdots\\
&=G_{N_-}\cdot F_{M_+}\\
&=I_{2k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1\cdots F_{M_+}\cdot G_{N_-}\cdots G_{-1} &= F_1\cdots F_{M_+-1}\cdot G_{N_-+1}\cdots G_{-1}\\
&\vdots\\
&=F_1\cdot G_{-1}\\
&=I_{2k}
\end{aligned}$$

定理 5.2： $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c,S_{2k}) ，且 $p_{c+1}<0$ ， $M_-=\min\limits_{j>c}\{p_j\}$ 的轉折點為 $L(i)=\min\limits_{j>c}\{j\mid p_j=i\}$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ，

$2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} ，且 $p'_{c+1}>0$ ， $N_+=\dfrac{p'_{2k}}{2}$ 的轉折點為 $L'(-i)=\max\limits_{j>c}\{j\mid p'_{j-1}=-i-1\}$ ， $-i=1,2,\cdots,N_+$ ，

若 $T_{2k}=f(c,S_{2k})=S_{2k}\cdot F_{-1}\cdots F_{M_-}$ ，而 $F_{-1}\cdots F_{M_-}$ 為轉換函數 f 所對應的矩陣，且 $(c,S_{2k})=g(T_{2k})=(c,T_{2k}\cdot G_{N_+}\cdots G_1)$ ，而 $G_{N_+}\cdots G_1$ 為轉換函數 g

所對應的矩陣，

則 $L\left(i\right)=L'\left(-i\right)$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_{-}$(或者 $-i=1,2,\cdots,N_{+}$) ，

且 $G_{N_{+}}\cdots G_{1}\cdot F_{-1}\cdots F_{M_{-}}=I_{2k}$ ，

$F_{-1}\cdots F_{M_{-}}\cdot G_{N_{+}}\cdots G_{1}=I_{2k}$ 。

證明： $L(i)=\min\limits_{j>c}\{j\mid p_{j}=i\}$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_{-}$ ，

$\therefore p_{L(i)}=i$ ，

(由定理3.2)

$p'_{j}=p_{j}-2i$，$i=-1,-2,\cdots,M_{-}$，$L(i)\leq j<L(i-1)$，令$L(M_{-}-1)=2k+1$，

並且 $t_{j}=\begin{cases}-s_{j}=1 & ,\text{若}j=L(i),\ i=-1,-2,\cdots,M_{-}\\ s_{j} & ,\qquad\qquad \text{其它}\end{cases}$ ，

$\Rightarrow p'_{L(i)}+2i=i$

$\Rightarrow p'_{L(i)}=-i$ ，

$(\because t_{L(i)}=1)$

$\Rightarrow p'_{L(i)-1}=-i-1$ ，

由轉換 1(iii)的註，可得 $p'_{c+1}>0$ ， $L'(-i)=\max\limits_{j>c}\left\{j\mid p'_{j-1}=-i-1\right\}$ ，

$-i=1,2,\cdots,N_{+}$($\because$ 由定理4.2得 $N_{+}=-M_{-}$) ，

($\because p'_{L(i)-1}=-i-1$)

$\Rightarrow L'(-i)\geq L(i)\ldots(1)$，

接著要證明 $L'(-i)\leq L(i)$ ：

(由定理 2.2)

$\Rightarrow p_{j}>i-1$，$i=-1,-2,\cdots,M_{-}$，$L(i)\leq j<L(i-1)$，令$L(M_{-}-1)=2k+1$，

$(\because p'_j = p_j - 2i)$

$\Rightarrow p'_j + 2i > i - 1$ ， $i = -1, -2, \cdots, M_-$ ， $L(i) \le j < L(i-1)$ ，

$\Rightarrow p'_j > -i - 1$ ， $i = -1, -2, \cdots, M_-$ ， $L(i) \le j < L(i-1)$ ，

$\Rightarrow p'_j > -i - 1$ ， $i = -1, -2, \cdots, M_-$ ， $L(i) \le j < 2k+1$ ，

(由定義 $L'(-i) = \max_{j>c} \left\{ j \mid p'_{j-1} = -i - 1 \right\}$ ， $-i = 1, 2, \cdots, N_+$)

$\Rightarrow L'(-i) \le L(i) \ldots (2)$

所以，由(1)和(2)得

$L'(-i) = L(i)$ ， $i = -1, -2, \cdots, M_-$ (或者 $-i = 1, 2, \cdots, N_+$) ；

$F_i = R_{L(i)}^{(-1)}$ ， $i = -1, -2, \cdots, M_-$ ，

$G_{-i} = R_{L(-i)}^{(-1)}$ ， $-i = 1, 2, \cdots, N_+$ ，

$\because L'(-i) = L(i)$ ， $i = -1, -2, \cdots, M_-$ (或者 $-i = 1, 2, \cdots, N_+$) ，

$\therefore G_{-i} = R_{L'(-i)}^{(-1)} = R_{L(i)}^{(-1)} = F_i$ ，

並且 $F_i \cdot G_{-i} = G_{-i} \cdot G_{-i} = I_{2k}$ ， $-i = 1, 2, \cdots, N_+$ ，

$G_{-i} \cdot F_i = G_{-i} \cdot G_{-i} = I_{2k}$ ， $-i = 1, 2, \cdots, N_+$ ，

$$\begin{aligned} G_{N_+} \cdots G_1 \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-} &= G_{N_+} \cdots G_2 \cdot F_{-2} \cdots F_{M_-} \\ &\vdots \\ &= G_{N_+} \cdot F_{M_-} \\ &= I_{2k} \end{aligned}$$

$$F_{-1}\cdots F_{M_-}\cdot G_{N_+}\cdots G_1 = F_{-1}\cdots F_{M_-+1}\cdot G_{N_+-1}\cdots G_1$$

$$\vdots$$

$$= F_{-1}\cdot G_1$$

$$= I_{2k}$$

定理 6.1：$k\times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c,S_{2k})，且 $p_{c+1}>0$，$M_+=\max\limits_{j>c}\{p_j\}$，

經路徑轉換後，得到 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑

$T_{2k}=f(c,S_{2k})=S_{2k}\cdot F_1\cdots F_{M_+}$，$M_+=\max\limits_{j>c}\left\{p_j\right\}$，

S_{2k} 的部分和向量為 $P=(p_0,p_1,\cdots,p_{2k})$，

T_{2k} 的部分和向量為 $P'=(p'_0,p'_1,\cdots,p'_{2k})$，

則 $\max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{j\mid p'_j=0\right\}=c$ 。

證明：$\because L\left(i\right)=\min\limits_{j>c}\{j\mid p_j=i\}$，$i=1,2,\cdots,M_+$，並且 $p_c=0$，$p_{c+1}>0$，

$\therefore p_{c+1}=1$，$L(1)=c+1$，

(由定理 2.1)

$p_j<i+1$，$i=1,2,\cdots,M_+$，$L(i)\le j<L(i+1)$，令 $L(M_++1)=2k+1$，

(由定理 3.1)

$p'_j=p_j-2i$，$i=1,2,\cdots,M_+$，$L(i)\le j<L(i+1)$，

$\Rightarrow p'_j+2i<i+1$，$i=1,2,\cdots,M_+$，$L(i)\le j<L(i+1)$，

$\Rightarrow p'_j<i+1-2i=1-i$，$i=1,2,\cdots,M_+$，$L(i)\le j<L(i+1)$，

$\Rightarrow p'_j<0$，$c+1=L(1)\le j<2k+1$，

又 $\because L(i)>c$，$i=1,2,\cdots,M_+\ \therefore p'_j=p_j$，$j=1,2,\cdots,c$，

$\therefore p'_c=p_c=0$，

$\therefore \max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{ j \mid p'_j = 0 \right\} = c$ 。

註：$\because\ p'_j < 0$ ， $c+1 = L(1) \le j < 2k+1$ ，

所以在檢查點c之後的等腰直角三角形路徑，

都會落在45度對角線的右方。

定理 6.2： $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑(c,S_{2k}) ，且 $p_{c+1}<0$ ， $M_- = \min\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，

經路徑轉換後，得到$2k\times 2k$等腰直角三角形路徑

$T_{2k} = f(c,S_{2k}) = S_{2k}\cdot F_{-1}\cdots F_{M_-}$ ， $M_- = \min\limits_{j>c}\left\{p_j\right\}$ ，

S_{2k}的部分和向量為$P=(p_0,p_1,\cdots,p_{2k})$ ，

T_{2k}的部分和向量為$P'=(p'_0,p'_1,\cdots,p'_{2k})$ ，

則$\max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{ j \mid p'_j = 0 \right\} = c$ 。

證明：$\because L(i) = \min\limits_{j>c}\{ j \mid p_j = i\}$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ，並且 $p_c = 0$ ， $p_{c+1}<0$ ，

$\therefore p_{c+1} = -1$ ， $L(-1) = c+1$ ，

(由定理 2.2)

$p_j > i-1$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ， $L(i)\le j < L(i-1)$ ，令$L(M_- -1) = 2k+1$，

(由定理 3.2)

$p'_j = p_j - 2i$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ， $L(i)\le j < L(i-1)$ ，

$\Rightarrow p'_j + 2i > i-1$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ， $L(i)\le j < L(i-1)$ ，

$\Rightarrow p'_j > i-1-2i = -1-i$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ， $L(i)\le j < L(i-1)$ ，

$\Rightarrow p'_j > 0$ ， $c+1 = L(-1)\le j < 2k+1$ ，

又$\because L(i) > c$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_- \therefore p'_j = p_j$ ， $j=1,2,\cdots,c$ ，

$\therefore p'_c = p_c = 0$ ，

$\therefore \max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{j \mid p'_j = 0\right\} = c$ 。

註：$\because p'_j > 0$ ，$c+1 = L(-1) \le j < 2k+1$ ，

所以在檢查點c之後的等腰直角三角形路徑，

都會落在45度對角線的上方。

定理 7.1：$k \times k$ 正方形的檢查點及路徑(c, S_{2k}) ，且 $p_{c+1} > 0$ ，$M_+ = \max\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，

$2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑T_{2k} ，且 $p'_{c+1} < 0$ ，$N_- = \dfrac{p'_{2k}}{2}$ ，

若$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+}$ ，而$F_1 \cdots F_{M_+}$為轉換函數f所對應的矩陣，且$(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1})$，而$G_{N_-} \cdots G_{-1}$為轉換函數$g$所對應的矩陣，

則(c, S_{2k})且$p_{c+1} > 0$與T_{2k}且$p'_{c+1} < 0$之間的對應關係為一對一且映成

證明：$g(f(c, S_{2k})) = g(S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+})$

(由定理 6.1 得知，檢查點c在路徑轉換的過程，並沒有發生改變)

$= (c, S_{2k} \cdot F_1 \cdots F_{M_+} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1})$

(由定理 5.1 得知，$F_1 \cdots F_{M_+} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1} = I_{2k}$)

$= (c, S_{2k} \cdot I_{2k})$

$= (c, S_{2k})$

$f(g(T_{2k})) = f(c, T_{2k} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1})$ (由定理 6.1 得知，檢查點c在路徑轉換的過程，並沒有發生改變)

$= T_{2k} \cdot G_{N_-} \cdots G_{-1} \cdot F_1 \cdots F_{M_+}$

(由定理 5.1 得知，$G_{N_-} \cdots G_{-1} \cdot F_1 \cdots F_{M_+} = I_{2k}$)

$= T_{2k} \cdot I_{2k}$

$= T_{2k}$

$\therefore (c, S_{2k})$ 且 $p_{c+1} > 0$ 與 T_{2k} 且 $p'_{c+1} < 0$ 之間的對應關係為一對一且映成。

定理 7.2： $k \times k$ 正方形的檢查點及路徑 (c, S_{2k}) ，且 $p_{c+1} < 0$ ， $M_- = \min_{j>c}\{p_j\}$ ，

$2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} ，且 $p'_{c+1} > 0$ ， $N_+ = \frac{p'_{2k}}{2}$ ，

若 $T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-}$ ，而 $F_{-1} \cdots F_{M_-}$ 為轉換函數 f 所對應的矩陣，且 $(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot G_{N_+} \cdots G_1)$ ，而 $G_{N_+} \cdots G_1$ 為轉換函數 g 所對應的矩陣，

則 (c, S_{2k}) 且 $p_{c+1} < 0$ 與 T_{2k} 且 $p'_{c+1} > 0$ 之間的對應關係為一對一且映成。

證明： $g(f(c, S_{2k})) = g(S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-})$

(由定理 6.2 得知，檢查點 c 在路徑轉換的過程，並沒有發生改變)

$= (c, S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-} \cdot G_{N_+} \cdots G_1)$

(由定理 5.2 得知， $F_{-1} \cdots F_{M_-} \cdot G_{N_+} \cdots G_1 = I_{2k}$)

$= (c, S_{2k} \cdot I_{2k})$

$= (c, S_{2k})$

$f(g(T_{2k})) = f(c, T_{2k} \cdot G_{N_+} \cdots G_1)$ (由定理 6.2 得知，檢查點 c 在路徑轉換的過程，並沒有發生改變)

$= T_{2k} \cdot G_{N_+} \cdots G_1 \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-}$

(由定理 5.2 得知， $G_{N_+} \cdots G_1 \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-} = I_{2k}$)

$$= T_{2k} \cdot I_{2k}$$

$$= T_{2k}$$

$\therefore (c, S_{2k})$ 且 $p_{c+1} < 0$ 與 T_{2k} 且 $p'_{c+1} > 0$ 之間的對應關係為一對一且映成。