# 2、研究方法

## 2.1 模糊數與隸屬度函數

**定義 2.1　隸屬度函數**(吳柏林，2005)

設在論域$U$上給定映射$\mu$，即$\mu:U\to[0,1]$，則說$\mu:U\to[0,1]$確定了$U$上一個模糊(Fuzzy)集合$\tilde{A}$，$\mu_{\tilde{A}}$叫做$\tilde{A}$的隸屬度函數。$\mu_{\tilde{A}}(u)$叫做$u$對$\tilde{A}$的隸屬度，它表示$u$屬於$\tilde{A}$的程度。

**定義 2.2　模糊數**(吳柏林，2005)

設$U$為一論域，令$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$為論域$U$的因子集。$\mu$為一對應到[0,1]間的實數函數，即$\mu:U\to[0,1]$。假若佈於論域$U$之一述句$X$其相對於因子集的隸屬度函數以$\{\mu_1(X),\mu_2(X),\ldots,\mu_n(X)\}$表示，則在離散的情形下，述句$X$的模糊數可表示成：

$$\mu_U(X)=\frac{\mu_1(X)}{A_1}+\frac{\mu_2(X)}{A_2}+\cdots+\frac{\mu_n(X)}{A_n}$$

其中"＋"是或的意思，$\frac{\mu_i(X)}{A_i}$表示述句$X$隸屬於因子集$A_i$的程度。當$U$為連續時，述句$X$的模糊數可表示成：

$$\mu(X)=\int_{x\in X}\frac{\mu_i(X)}{A_i}$$

**例 2.1 消費者對產品售價可接受程度的模糊數表示**

每個人對於產品價格的接受度是不盡相同的。為了解社會大眾對於某件新產品售價的接受度，這家公司隨機訪問 5 人。設論域$U$={1=很便宜，2=便宜，3=價格適中，4=有點貴，5=太貴}，$X$=消費者對產品售價可接受程度，以模糊數表示為$\mu_U(X)$。請他們對預定的售價，在 5 個項目中填上 0~1 之間的數字，代表他們對這項產品"售價的可接受程度"。整理如下表。

對$B$而言，對於此項產品的售價可接受程度的隸屬度函數為

$\{\mu_1(X)=0.1,\mu_2(X)=0.5,\mu_3(X)=0.3,\mu_4(X)=0.1,\mu_5(X)=0\}$，或以模糊數表示為

$\mu_U(X) = \frac{0.1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.1}{4} + \frac{0}{5}$

| 受訪者 | 1=很便宜 | 2=便宜 | 3=價格適中 | 4=有點貴 | 5=太貴 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0.4 | 0.6 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0.1 | 0.5 | 0.3 | 0.1 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0.9 | 0.1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0.8 | 0.2 |
| E | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

**定義 2.3　區間型模糊數**

區間型糊模數為一具有均勻隸屬度函數的模糊數，以閉區間的符號”[ ]”來表示。若 $a$ 、$b \in R$ 且 $a < b$ ，則 $[a, b]$ 表一區間型模糊數，$a$ 稱為 $[a, b]$ 的下界，$b$ 稱為 $[a, b]$ 的上界；若 $a = b$ ，則 $[a, b] = [a, a] = [b, b] = a = b$ 表一實數 $a$（或 $b$）。同樣的，一實數 $k$ 亦可表示為 $[k, k]$ 。

若 $[a, b]$ 為一區間型模糊數，設 $c_0 = \frac{a+b}{2}$ ，$s_0 = \frac{b-a}{2}$ 分別表示其中心及半徑，我們也可以將一區間型模糊數表示成：$[c_0; s_0] \Rightarrow [c_0 - s_0, c_0 + s_0] = [a, b]$ 。

區間型模糊數的概念在日常生活中是常見的，因爲在某些情況下，現有的資訊無法使我們確定真正的值爲何。

**例 2.2　區間型模糊數在生活中的應用**

如果想買一輛 50C.C.的機車來代步，依市場行情大概要三、四萬元。但因為可能有促銷活動，或是老闆給些折扣等因素，在購買之前並無法知道真正的價錢。但可以確信的是應該在五萬元之內可以買到。所以，對一位想買 50C.C.機車的人而言，其價格是一模糊數，可表示為 $[30000, 50000]$ 。

我們確信 50C.C.機車價錢會在 $[30000, 50000]$ 這個區間之內，但卻無法明白指出真正的價錢為何。考慮 $[30000, 50000]$ 這個區間，會比考慮真正的價錢更加明確，至少要帶多少錢是可以更清楚的。

在本研究中對區間型模糊數有兩種不同的表示方法，在使用前會予以說明。

**定義 2.4　區間型模糊數的運算**

設$[a,b]=[c_1;s_1]$及$[c,d]=[c_2;s_2]$為兩區間型模糊數，$c_1$、$c_2$為區間中點，$s_1$、$s_2$為區間半徑，$a$、$c$為區間下界，$b$、$d$為區間上界，則其加減乘運算定義如下：

相加： $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]\Leftrightarrow[c_1;s_1]+[c_2;s_2]=[c_1+c_2;s_1+s_2]$

相減： $[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]\Leftrightarrow[c_1;s_1]-[c_2;s_2]=[c_1-c_2;s_1+s_2]$

相乘：可採用以下三種定義中的任一種：

$[a,b]\times[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]$；

或$[c_1;s_1]\times[c_2;s_2]=[c_1\times c_2;\max\{s_1,s_2\}]$；

或$[c_1;s_1]\times[c_2;s_2]=[c_1\times c_2;\min\{s_1,s_2\}]$

**例 2.3 社會新鮮人收入支出的區間型模糊數運算**

如果一位剛出社會的新鮮人月薪約為 16000 到 23000 元左右，以$[16,23]$表示，單位：千元。但每個月需支出生活雜費 8000 到 1 萬元，即$[8,10]$。房租 6000 元及每天交通費 60 到 120 元，分別以$[6,6]$ 、$[0.06,0.12]$表示。如果每個月要工作 19 到 22 天，以$[19,22]$表示，那這位新鮮人每個月能存下的錢數為：

$$[16,23]-[8,10]-[6,6]-[0.06,0.12]\times[19,22]=[-2.64,7.86]$$

這表示：該名新鮮人每月可能存下 7860 元，或透支 2640 元。

## 2.2　一般傳統上的迴歸分析及模糊迴歸分析

設$\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)\}$爲一組樣本，$x_i\ge 0$ ，$i=1,2,\ldots,n$ ，$R$表示所有實數的集合，$FR$表示所有在實數中的模糊集合。依$x_i$、$y_i$性質的不同，分成下列三種情形：$x_i$、$y_i$均屬於實數、$x_i$屬於實數，而$y_i$屬於區間型模糊數及$x_i$、$y_i$均屬於區間型模糊數。

本文將分述如何求得這三種情形的迴歸方程式及模糊迴歸參數，並敘述相關性質。

(I) $y_i \in R, x_i \in R$

此情形爲一般傳統的線性迴歸分析模式。令由 $x_i$ 所預測的 $\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_i$，$a_0$ 、$a_1 \in R$，利用最小平方估計法，可以估算出使觀測值 $(y_i)$ 及預測值 $(\hat{y}_i)$ 的差平方和最小的係數 $a_0$ 、$a_1$。即式子 $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2$ 有最小值的係數 $a_0$ 、$a_1$，其值如下：

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \text{；} a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}$$

(II) $y_i \in FR, x_i \in R$

設一組模糊樣本 $\{(x_1, \tilde{y}_1), (x_2, \tilde{y}_2), \ldots, (x_n, \tilde{y}_n)\}$，$x_i \in R$，$\tilde{y}_i \in FR$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且 $\tilde{y}_i$ 爲區間型模糊數。此樣本屬於模糊資料，可以建構迴歸模式如下：

(1) 利用區間中點：將區間型模糊數表成〔中心；半徑〕模式

將 $\tilde{y}_i$ 表示成 $\tilde{y}_i = [c_i; s_i]$，$i = 1, 2, \cdots, n$，其中 $c_i$ 、$s_i$ 分別表示 $\tilde{y}_i$ 所代表的區間型模糊數的區間中心及半徑。

將樣本資料 $\tilde{y}_i$ 的中心點 $c_i$ 取出，與 $x_i$ 形成 $n$ 個點的集合 $\{(x_1, c_1), (x_2, c_2), \ldots, (x_n, c_n)\}$。利用最小平方估計法找出一條描述 $x_i$ 及中心 $c_i$ 關係的迴歸直線如下：

$$\hat{C} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot X \tag{2.1}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \text{；} \hat{a}_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}$$

$\hat{a}_0$ 、$\hat{a}_1$ 爲此迴歸直線參數的估計值。

再將樣本資料 $\tilde{y}_i$ 的半徑 $s_i$ 取出，與 $x_i$ 形成 $n$ 個點的集合 $\{(x_1, s_1), (x_2, s_2), \ldots, (x_n, s_n)\}$，利用最小平方估計法找出一條描述 $x_i$ 及半徑 $s_i$ 關係的迴歸直線如下：

$$\hat{S} = \hat{r}_0 + \hat{r}_1 \cdot X \tag{2.2}$$

$$\Rightarrow \hat{r}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \text{；} \hat{r}_0 = \overline{y} - \hat{r}_1 \overline{x}$$

$\hat{r}_0$ 、 $\hat{r}_1$爲此迴歸直線參數的估計值。

所以，符合此模糊資料的模糊迴歸方程式可表示爲：

$$\tilde{Y}(X)=[\hat{a}_0;\hat{r}_0]+[\hat{a}_1;\hat{r}_1]\cdot X \tag{2.3}$$

由於所求出的迴歸直線參數並非一實數値，而是區間帶狀的。這表示落在區間之數均爲可能值，但以隸屬度函數表示，而非傳統實數參數(其隸屬度是 1)。

以〔中心；半徑〕模式所表示的模糊迴歸直線，若半徑愈大，則表示所需考量的可能值範圍愈大，此迴歸直線愈模糊。與傳統方式不同之處，在於不受限於單一數值，能做更靈活的解釋及應用。

(2) 利用區間的下界及上界：將區間型模糊數表成〔下界，上界〕模式

將 $\tilde{y}_i$ 表示成 $\tilde{y}_i=[y_{Li},y_{Ui}]$ ， $i=1,2,\cdots,n$ ，其中 $y_{Li}$ 、 $y_{Ui}$ 分別表示 $\tilde{y}_i$ 所代表區間型模糊數的區間下界及上界。

將樣本資料 $\tilde{y}_i$ 的下界取出，與 $x_i$ 形成 $n$ 個點的集合：$\{(x_1,y_{L1}),(x_2,y_{L2}),\ldots,(x_n,y_{Ln})\}$ ，利用最小平方估計法找出一條關於 $x_i$ 及下界 $y_{L_i}$ 的迴歸直線如下：

$$\hat{Y}_L=\hat{L}_0+\hat{L}_1\cdot X \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow \hat{L}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_{Li}-\overline{y}_L)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\ ；\ \hat{L}_0=\overline{y}_L-\hat{L}_1\overline{x}$$

$\hat{L}_0$ 、 $\hat{L}_1$爲此迴歸直線參數的估計值。

再將樣本資料 $\tilde{y}_i$ 的上界取出，與 $x_i$ 形成 $n$ 個點的集合：

$\{(x_1,y_{U1}),(x_2,y_{U2}),\ldots,(x_n,y_{Un})\}$，利用最小平方估計法找出一條關於 $x_i$ 及上界 $y_{U_i}$ 的迴歸直線如下：

$$\hat{Y}_U=\hat{U}_0-\hat{U}_1\cdot X \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \hat{U}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_{Ui}-\overline{y}_L)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\ ；\ \hat{U}_0=\overline{y}_U-\hat{U}_1\cdot\overline{x}$$

$\hat{U}_0$ 、 $\hat{U}_1$爲此迴歸直線參數的估計值。

根據(2.1)，(2. 4)，(2. 5)，可列出區間中心迴歸直線、區間下界迴歸直線及區間上界迴歸直線如下：

$$\hat{C} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot X$$
$$\hat{Y}_L = \hat{L}_0 + \hat{L}_1 \cdot X$$
$$\hat{Y}_U = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 \cdot X$$

下界及上界的迴歸直線表示了此組區間型模糊資料的分佈範圍，中心的迴歸直線則表示了此組區間型模糊資料的中心變化。理想的情形是希望能仿造(2.3)寫成一模糊迴歸直線如下：

$$\tilde{Y}(X) = [\hat{L}_0, \hat{U}_0] + [\hat{L}_1, \hat{U}_1] \cdot X \tag{2.6}$$

因為(2.6)式中並無法保證 $\hat{L}_1 < \hat{U}_1$ 或 $\hat{L}_0 < \hat{U}_0$，故寫成區間型模糊數 $[\hat{L}_1, \hat{U}_1]$ 及 $[\hat{L}_0, \hat{U}_0]$ 可能造成不合理 (也就是”左大右小”)，所以僅將此三條直線並列。由這三個式子仍然能得到此組模糊資料一合理的預測值。將 $x_i$ 分別代入上界、下界及中心迴歸直線，可得到一區間型模糊數的上界、下界及中心，此即為已知 $x_i$ 所預測的區間型模糊數。

探究無法將三式表示為一條迴歸直線的原因，在於下界及上界迴歸直線並不平行。若下界及上界的迴歸直線不平行，兩直線延伸後會出現一交點。這個交點稱為：模糊迴歸點(Fuzzy Switch Point)。它代表的是下界及上界迴歸直線在這個交點之後會互換角色(見圖 2.1)，即下界迴歸直線成為區間的上界迴歸直線，而上界的迴歸直線成為區間的下界迴歸直線。因為這樣交點的存在，使得迴歸直線中是否 $y_U(X) \geq y_L(X)$ 或 $\hat{L}_0 \leq \hat{U}_0$ 變的不確定。其性質將在下一節中討論。

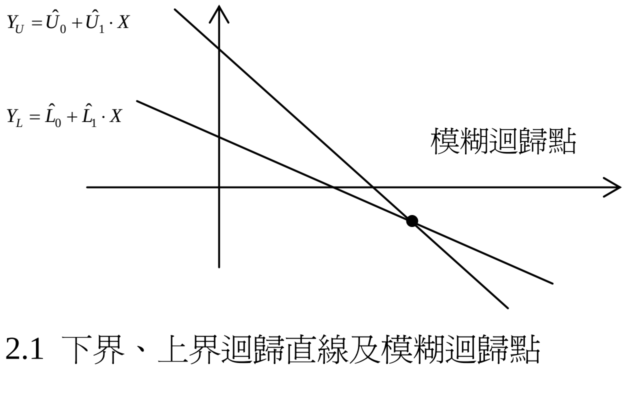


圖 2.1 下界、上界迴歸直線及模糊迴歸點

( III ) $y_i \in FR, x_i \in FR$

若 $x_i$ 和 $y_i$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ ，均爲區間型模糊數。仿照第二種情形，以區間的中心、半徑及下界、上界建構迴歸直線方程式。

設一組模糊樣本 $\{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \ldots, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}$ ， $\tilde{x}_i$ 、 $\tilde{y}_i \in FR$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ 。

(1) 利用區間中心點 $(x_c, y_c)$ ：將區間型模糊數表成〔中心；半徑〕模式

將 $\tilde{x}_i$ 表示成 $\tilde{x}_i = [x_{ci}; r_i]$ ， $\tilde{y}_i$ 表示成 $\tilde{y}_i = [y_{ci}; s_i]$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ 。取出 $\tilde{x}_i$ ， $\tilde{y}_i$ 的中心點，形成資料中心樣本 $\{(x_{c1}, y_{c1}), (x_{c2}, y_{c2}), \ldots, (x_{cn}, y_{cn})\}$ 共有 $n$ 個點。利用最小平方估計法，找出一條關於兩區間中心的迴歸直線如下：

$$Y_c = n + m \cdot X_c \tag{2.7}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ci} - \overline{x}_c)(y_{c_i} - \overline{y}_c)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{ci} - \overline{x}_c)^2} \text{ ； } n = \overline{y}_c - m \cdot \overline{x}_c$$

$m$ 、 $n$ 爲此迴歸直線參數的估計值。

同樣地，將樣本資料 $\tilde{x}_i$ 及 $\tilde{y}_i$ 的區間半徑取出，形成資料半徑樣本 $\{(r_1, s_1), (r_2, s_2), \ldots, (r_n, s_n)\}$ 共有 $n$ 個點。利用最小平方估計法，找出一條關於兩區間半徑的迴歸直線如下：

$$S = k + h \cdot R \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{r})(s_i - \overline{s})}{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{r})^2} \text{ ； } k = \overline{s} - h \cdot \overline{r}$$

$h$ 、 $k$ 爲此迴歸直線參數的估計值。

所以，符合此模糊資料的模糊迴歸方程式可表爲：

$$\tilde{Y}(X) = [n; k] + [m; h] \cdot \tilde{X} \tag{2.9}$$

由於此方程式的參數並非實數值，而是區間帶狀的。表示落在區間之數均有可能，但以隸屬度函數來表示，而非傳統實數參數(隸屬度爲 1)。配合定義 4.2 區間型模糊數的運算，此方程式可提供模糊輸入數值一個模糊預測值。

不同於一般傳統迴歸只能由單一數值確定單一數值，模糊迴歸提供了模糊輸入對應模糊輸出的方式。這項改變，可以使我們納入更多的參考資料，並且呈現出這些資料對結果的影響。在做出決策之前，決策者有更多面向的思考空間及彈性。

(2) 利用區間的下界及上界：將區間模型模糊數表成〔下界，上界〕模式

將 $\tilde{x}_i$ ， $\tilde{y}_i$ 表示成 $\tilde{x}_i = [x_{Li}, x_{Ui}]$ 及 $\tilde{y}_i = [y_{Li}, y_{Ui}]$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ ，其中 $y_{Li}$ 、 $y_{Ui}$ 分別表示 $\tilde{y}_i$ 所代表區間型模糊數的區間下界及上界， $x_{Li}$ 、 $x_{Ui}$ 分別表示 $\tilde{x}_i$ 所代表區間型模糊數的區間下界及上界。

將樣本資料 $\tilde{x}_i$ ， $\tilde{y}_i$ 的下界取出，形成資料下界樣本 $\{(x_{L1}, y_{L1}), (x_{L2}, y_{L2}), \ldots, (x_{Ln}, y_{Ln})\}$ 共有 $n$ 個點。利用最小平方估計法找出一條關於 $x_{L_i}$ 及區間下界 $y_{L_i}$ 的迴歸直線如下：

$$Y_L = \hat{L}_0 + \hat{L}_1 \cdot X_L \tag{2.10}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{L}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{x}_L)(s_i - \overline{y}_L)}{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{x}_L)^2} \text{ ； } \hat{L}_0 = \overline{y}_L - \hat{L}_1 \cdot \overline{x}_L$$

$\hat{L}_0$ 、 $\hat{L}_1$ 爲此迴歸直線參數的估計值。

同樣將樣本資料 $\tilde{x}_i$ ， $\tilde{y}_i$ 的上界取出，形成資料上界樣本 $\{(x_{U1}, y_{U1}), (x_{U2}, y_{U2}), \ldots, (x_{Un}, y_{Un})\}$ 共有 $n$ 個點。利用最小平方估計法找出一條關於 $x_{U_i}$ 及區間上界 $y_{U_i}$ 的迴歸直線如下：

$$Y_U = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 \cdot X_U \tag{2.11}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{U}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{Ui} - \overline{x}_U)(y_{Ui} - \overline{y}_U)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{Ui} - \overline{x}_U)^2} \text{ ； } \hat{U}_0 = \overline{y}_U - \hat{U}_1 \overline{x}_U$$

$\hat{U}_0$ 、 $\hat{U}_1$ 爲此迴歸直線參數的估計值。

由(2.7) ，(2.10)， (2.11)，將區間中心、下界及上界迴歸直線條列如下：

$$Y_c = n + m \cdot X_c$$

$$Y_L = \hat{L}_0 + \hat{L}_1 \cdot X_L$$

$$Y_U = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 \cdot X_U$$

由於無法確定 $\hat{L}_1$ 、$\hat{U}_1$ 及 $\hat{L}_0$ 、$\hat{U}_0$ 的大小，所以無法仿造(2.9)列出單一的模糊迴歸方程式。但此三條直線代表了資料分佈之範圍及中心值的變化，分別代入 $x_{c_i}$ 、 $x_{L_i}$ 、 $x_{U_i}$ 仍可獲得對應數值(可形成區間型模糊數)。所以將三條直線並列，代替單一的模糊迴歸方程式。

同樣地，在下界及上界直線不平行時，延伸之後，存在模糊迴歸點。其性質將在下一節中討論。

## 2.3 區間迴歸的一些性質

在 2.2 節中我們考慮過僅有觀察值具有模糊性，或自變數、觀察值同時具有模糊性的情形。在分別求出區間下界及上界迴歸直線後，若兩線斜率不相等，可以觀察到模糊迴歸點的存在。這個大部分不出現在觀測值，而主要是迴歸直線延伸出去的交點，讓以〔下界，上界〕型式表示的區間型模糊數，無法形成一條簡單的模糊迴歸方程式。關於這個點的性質，分二種情形討論如下：

**1、自變數($x$)爲實數，觀察值($y$)爲區間型模糊數**

性質 2.1 模糊迴歸點存在的充要條件為觀察值區間型模糊數之下界及上界迴歸直線不平行。

證明：若下界及上界迴歸直線不平行，若且唯若兩線必交於一點，此點稱為模糊迴歸點，故得證。

性質 2.2 模糊迴歸點若存在，則唯一存在。

證明：因為只有當下界及上界迴歸直線不平行時，才有模糊迴歸點，而兩條不平行直線至多只有一個交點，故得證。

性質 2.3　在模糊迴歸點的左側或右側，上界及下界直線的角色將會互換，即“預測值上界落在原下界直線，預測值下界落在原上界直線”。

證明：因為當確定自變數 $x$ 時，所取得的應變數 $y$ 為區間型模糊數。其上界為自變數 $x$ 所對應的觀察值最大值 $M$，其下界為自變數 $x$ 所對應的觀察值最小值 $m$，$m \le M$。所以，由上界所形成的迴歸直線 $y_U$ 一定在下界所形成迴歸直線 $y_L$ 的上方(如圖 2.3、2.4)。但由於存在模糊迴歸點，兩直線在其右側或左側的相對位置將會改變：原來在上方的直線變成在下方。即對在模糊迴歸點右側或左側的變數 $x$ 而言，其應變數 $y$ 的預測值上界落在原下界迴歸直線上，而下界落在原上界迴歸直線上，故得證。

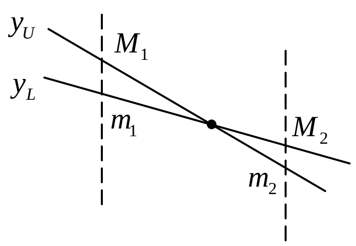


圖 2.2　在模糊迴歸點的右側，預測值 $y = [m_2, M_2]$ 的上界落在 $y_L$ 上，下界落在 $y_U$ 上

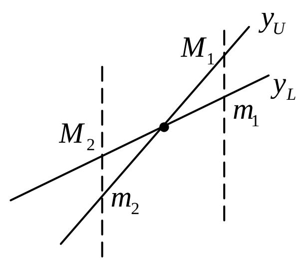


圖 2.3　在模糊迴歸點的左側，預測值 $y = [m_2, M_2]$ 的上界落在 $y_L$ 上，下界落在 $y_U$ 上

性質 2.4　若所蒐集的樣本資料聚集在模糊迴歸點週圍，則只有有限個資料在散佈圖上的位置，位於模糊迴歸點的右側或左側。

證明：若所蒐集的樣本資料聚集在模糊迴歸點週圍，代表某些自變數 $x_i$ 所對應的預測值最大值及最小值差距很小。由性質 2.3，在模糊迴歸點的左測及右側，上下界直線的角色會互換。以圖 2.2 為例，假設 $y_U$ 為觀察值上界所形成的直線，$y_L$ 為觀察值下界所形成的直線。若有無限多個點在模糊迴歸點右側，則觀察值的上界將在 $y_L$ 附近，觀察值的下界將在 $y_U$ 附近。由最小平方估計法的原理可知，$y_L$ 應為觀察值上界所形成的直線，$y_U$ 應為觀察值下界所形成的直線，這與假設矛盾，故得證。

**2、自變數($x$)及觀察值($y$)皆爲區間模糊數**

分為下列四種情況，圖示如下：

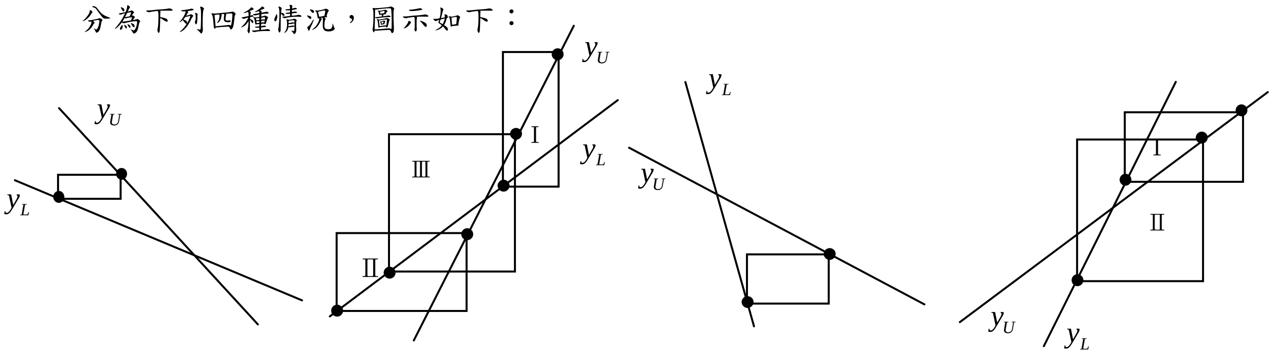


圖 2.4 型Ⅰ　　圖 2.5 型Ⅱ　　圖 2.6 型Ⅲ　　圖 2.7 型Ⅳ

性質 2.5　存在模糊迴歸點的上、下界直線，將平面分成四個部分。

證明：由於存在模糊迴歸點的上下界直線不平行，一直線將平面分成兩部分。不與之平行的另一直線，將每一部分再分割成兩部分，所以共將平面分成四個部分，故得證。

性質 2.6　如圖 2.4 型Ⅰ及圖 2.6 型Ⅲ，兩線所分割的四塊區域中，只有一塊能保持預測值的上界落在原上界直線，下界落在原下界直線。

證明：對每一個區間型模糊數$[x_L, x_U]$而言，所對應的預測值 $y$ 為一區間型模糊數$[y_L(x_L), y_U(x_U)]$，其中 $y_L(x_L) \le y_U(x_U)$。圖形為“對角線右上端落在上界直線，對角線左下端落在下界直線”的長方形區域。由上列圖 2.4、2.6 可知，只能在一塊區域中畫出這樣的取值區域。原因是畫出平行的兩條鉛直線(垂直 $x$ 軸)，靠右側的鉛直線與上界直線的交點，可能低於與下界直線的交點；靠左側的鉛直線與上界直線的交點，可能高於與下界直線的交點。對型Ⅰ及型Ⅲ而言，恰只有一塊區域符合” 靠右側的鉛直線與上界直線的交點高於與下界直線的交點；靠左側的鉛直線與上界直線的交點低於與下界直線的交點”，故得證

性質 2.7　對型Ⅱ及型Ⅳ而言，模糊迴歸點不一定具有將上界迴歸直線轉換為下界迴歸直線的作用。但對型Ⅰ及型Ⅲ而言，模糊迴歸點具有將上界迴歸直線轉換為下界迴歸直線的作用。

證明：對圖 2.5 型Ⅱ及圖 2.7 型Ⅳ而言，圖 2.5 上的區域Ⅲ及圖 2.7 上的區域Ⅱ，兩者皆為包含模糊迴歸點，且保持上界落在原上界迴歸直線，下界落在原下界迴歸直線之區域。對型Ⅰ及型Ⅲ而言，若上下界迴歸直線的角色不互換，這表示被上下界迴歸直線分割的四塊區域，皆具有預測值"上界落在原上界直線，下界落在原下界直線"的性質，這與性質 2.6 矛盾。故得證。

## 2.4 區間模糊迴歸的解釋能力

傳統迴歸分析以解釋係數表示迴歸模型的優劣，研究者認爲區間型模糊數在迴歸預測中的優劣，應該以觀測值區塊面積對於預測值區塊面積的覆蓋比例來判斷。

**定義 2.5　區間型模糊數的長度及模糊區塊**

若 $y=[y_1,y_2]$ 為一區間型模糊數，定義區間型模糊數 $y$ 的長度為 $|y_2-y_1|$。

"模糊區塊" 是指自變數 $x$ 及應變數 $y$ 皆為區間型模糊數時所形成的長方形區域，邊長分別為區間型模糊數 $x$ 及 $y$ 的長度。設自變數 $x=[x_1,x_2]$，應變數 $y=[y_1,y_2]$，由 $x,y$ 所形成的模糊區塊記作：$B[x,y]$。

**定義 2.6　觀測值區塊及預測值區塊**

設自變數 $x=[x_1,x_2]$，觀測值 $y=[y_1,y_2]$ 皆為區間型模糊數，$B[x,y]$ 稱為"觀測值模糊區塊"，簡稱為："觀測值區塊"。其面積定義為：

$$|x_2-x_1|\times|y_2-y_1|$$

設 $\hat{y}=[\hat{y}_1,\hat{y}_2]$ 為依自變數 $x=[x_1,x_2]$ 及模糊迴歸方程式所得的區間型模糊數，$\hat{B}[x,\hat{y}]$ 稱為"預測值模糊區塊"，簡稱為："預測值區塊"。其面積定義為：

$$|x_2-x_1|\times|\hat{y}_2-\hat{y}_1|$$

**定義 2.7　模糊覆蓋率**

以預測值區塊 $\hat{B}[x,\hat{y}]$ (如圖 2.9)與觀測值區塊 $B[x,y]$ (如圖 2.8)的交集面積比上預測值區塊 $\hat{B}[x,\hat{y}]$ 面積(如圖 2.10)，來做為預測值是否能充分代表觀測值的依據。模糊覆蓋率即為”觀測值區塊與預測值區塊交集”佔預測值區塊的比例。

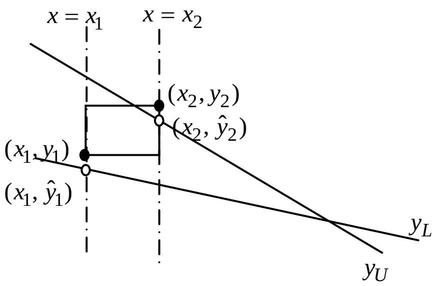

圖 2.8　觀測值區塊 $B[x,y]$

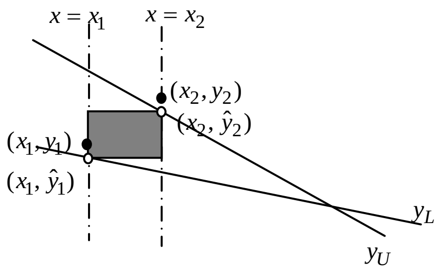

圖 2.9　預測值區塊 $\hat{B}[x,\hat{y}]$

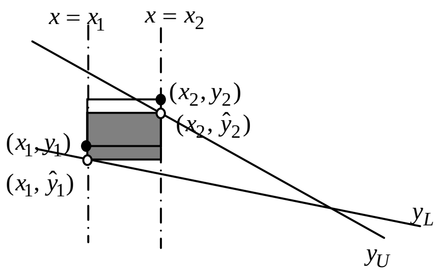

圖 2.10　兩者交集

由定義 2.7 可知，當模糊覆蓋率爲 1 時，表示以區間模糊迴歸求得的預測值區塊完全包含在觀測值區塊中。其值愈大，代表預測值區塊被觀測值區塊覆蓋的比例愈大。