

2 文獻探討

本研究係針對高一學生上完「複數與複數平面」單元後，施以解題測驗，找出學生常犯的錯誤，將其歸類成主要的錯誤類型。再依這些錯誤類型編製補救教學教案，並使用電腦為輔助教學的工具，進行補救教學活動。因此，在進行研究之前，先行探討相關的文獻。

本章分為五節：第一節是有關概念形成的探討，以期更了解學生數學概念的建構過程；第二節是關於數學解題歷程的論述，冀能從中得知學生解題時的思考過程；第三節是收集解題錯誤類型的研究，作為歸類學生於「複數與複數平面」單元解題錯誤類型的參考；第四節是闡述補救教學的相關理念，探討補救教學實施的原則及方法；第五節是研究有關電腦融入數學教學的相關文獻，以作為設計補救教學活動的依據。

2.1 概念的形成

2.1.1 概念的意義

何謂「概念」？楊弢亮(1992)認為：邏輯學中把我們所要思考的客觀世界的事物及現象叫做思維對象。各個對象間彼此相似或彼此相異的一切性質叫做屬性。任何對象都有許多屬性，其中有些是最根本的、最重要的屬性，叫做本質屬性。本質屬性是某一類對象所共有，可以提供我們作為認識這類對象的標誌，借助於這種本質屬性可以把這一類對象與那一類對象區別開來。所以，概念是反映並且確定客觀對象的一般本質屬性的思維形式。例如，「圓」的概念，只反映著圓的本質屬性：圓周上的點與圓心在同一平面內，而且同圓心的距離(半徑)都等於定長；至於半徑的大小就不是圓的本質性質。

Merrill與Wood(1974)則認為概念是由早已群組在一起的物體、符號或者事件所組成的，因為它們共享了某些相同的特徵。Skemp(1980)也提到概念是把具有相似性、共通性的經驗歸類在一起。一般而言，概念是泛指抽象化的過程、結果，是一種延續性的心智變化，使我們能用已經分類的舊經驗和相似性、共通性來

認知新經驗。

2.1.2 概念的形成

概念是如何形成的呢？國內外學者有以下的研究：

Skemp(1980)提到形成概念的過程主要有五個重要特徵：

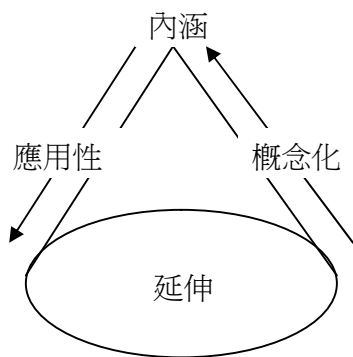
- (1)意識(realization)：意識過程是指一個新的概念，透過環境經由感官輸入概念結構，此時新的概念與概念結構中的任一概念都沒有聯繫上。
- (2)同化(assimilation)：同化過程是指在概念結構中找出與新概念相類似的概念。
- (3)擴張(expansion)：擴張過程是指以概念結構中已有的概念來領悟這新的概念，使其成為概念結構中的一部分。
- (4)分化(differentiation)：分化過程是指分辨新概念與一些已有概念間的異同之處。
- (5)重建(re-construction)：重建過程是指當問題的情境改變時，已建立的概念結構雖具有相關性，卻不適用於此情境，此時必須重建個體的概念結構。

Sowder(1980)則認為概念的獲得(attainment)與同化(assimilation)是概念教學上的第一個變項，「概念的獲得」來自一些正例或非例的呈現，能對新例子作適當的分類或言詞描述，或對其定義作批判；「概念的同化」來自個體以既有的認知結構去辯識或解釋環境中的事物。

Pines (1980)在「概念及概念的獲得」中提到：人類概念的形成有如一個「圓錐形結構」(如圖2-1-1)，圓錐底部的圓形稱為延伸，表示其為概念的延伸部分，包含所有屬於此概念的事例。頂端稱之為內涵，代表萃取出此概念的特質、共同性或定義等規律性。在學習時，由底部概念延伸部分推至頂端內涵部分，此過程稱為概念化，即由事例中發現其共同性，此概念化過程是一種歸納方式。若由頂端概念的內涵部分推至底部概念延伸部分，則是所謂的應用，此過程是一種演繹

方式，即將概念之規律性應用於事例中。由下往上的概念化過程可能導出不正確的概念內涵；同樣地，若是對於概念的內涵特質不清楚的話，則由上往下應用於事例時，就會產生錯誤。

圖2-1-1 圓錐形的概念模型



張景媛(1995)則針對幾何概念的學習提出以下幾點應注意事項：

- (1) 閱讀題目、弄清題意、形成假設、執行計畫、驗證或修正假設是一般數學問題解決的步驟。
- (2) 重述問題、簡化問題、用口語描述幾何圖形是理解的方法。
- (3) 動手操作幾何圖形、多次的觀察以累積不同的經驗形成統整的幾何知識，這是建構正確幾何概念的必要方法。
- (4) 教師的鼓勵能促進學生深入地思考幾何問題，口語的互動能幫助教師發現學生的錯誤概念，也有助於幫學生澄清自己的觀念。
- (5) 認知引導教學、教學棋術、園徑策略等都是幫助學生建構幾何概念的有效方法。

概念思考可以補救我們注意力的不足。我們短時間內的記憶能力相當有限，很顯然一種概念越抽象，就必須記越多有關符號或經驗。在所有理論系統裡，數學是最抽象也最有力的，因此本質上也是最有用。數學學習的問題就出在過於抽象化和一般化。數學的成就確實是一代代中，特殊智慧的人把前代的概念更加抽象化、一般化而得來的。今天的學習者處理的遠非古代發展之初的原始資料，而

是一般教科書中經處理、編排的資料處理系統。一方面這樣做有絕大好處，因為聰明的學生能夠在一年之中學完前人幾個世紀才發展出來的東西；但另一方面也把學生暴露在危機之中。因為這麼一來數學並不是完全能由日常生活環境中學到，只能由數學老師處間接學到。這使學生依賴他的數學老師和教科書編寫者。也許會導致他一生害怕、討厭數學(Skemp, 1987)。這是擔任數學教育工作者，建構學生數學概念時，所特別需要注意的地方。

因此，數學教師教學時，數學概念的引入方式顯得格外重要。楊弢亮(1992)提出以下幾種方式供數學教師參考：

- (1)利用學生的生活經驗：學生在生活和學習過程中，或多或少地都曾經接觸過某些數學概念的具體內容。在引入新概念時，教師要注意利用學生已有的數學概念的具體經驗。教師應注意收集和運用現實生活中能夠反映數學概念的實際模型和事例，舉出了實際事例，也說明這個概念的客觀現實性。
- (2)利用教材所提供的感性材料：可以先用實際事物或模型、圖表使學生獲得關於新概念的直觀形象，再提出概念的定義。
- (3)由定義引入：數學概念也可以先由定義引入，再用感性材料加以證實。
- (4)由舊概念引入新概念：根據新舊知識聯繫的原則，數學概念的引入，可以從種概念引入類概念，採用對比方法，利用逆反關係，運用概念的推廣或特例的聯繫。

李玉文、姚如芬(2006)指出：數學學習應是一個連貫、不間斷的過程，必須要奠定紮實的基礎，才可以往下一個概念邁進。如果學生在學習一個新概念的時候，有某一個部分概念無法理解，將來學生在學習更深一層的概念時，必定會有一個很大的鴻溝，很難跨越過去，更無法在不同概念間做相關性的連結。然而在學習的過程中，如果所獲得的知識能夠與舊知識做恰當的連結，那麼這個知識將不再只是一些片段的記憶，而是一個完整的概念。

2.2 數學解題歷程

數學是研究自具體世界的許許多多特殊事物中抽象化出來的秩序 (order)和形式(form)的一種學問(林清山, 1977)。而解題是數學教學的重心,經由不斷地解題來磨練數學思考,增強學生日後面對問題時,以簡馭繁、以已知推論未知的能力。就解題的意義而言,葉明達、柳賢(2003)綜合歸納美國數學督導協會(NCSM, 1977)、Kilpatrick(1985)和Mayer(1985)等學者的論點指出:解題就是面對特定的目標,卻沒有立即可達的路徑,必須利用所有可獲得的資訊,來完成目標的心路歷程。至於數學解題則是指解題者在面對數學問題時,沒有立即可資利用的算則或方法,必須融會原有的知識與數學概念,並靈活運用策略與方法以求得解答的歷程。

建構論者認為:學習必須由個體主動去建構,所以最佳的學習方式就是動手去做(learning by doing),亦即讓學生透過數學解題來學習數學,因為這不僅讓學生真正處在主動學習的地位,也可經由探索,對數學賦予意義(make sense)。再者,數學解題顯然有助於同學間的合作與互動,由認知活動的社會性來看,這也是成功學習的必要條件(鄭毓信, 1998)。張靜譽(1995)主張從幼稚園到高中的數學課程,都應該以解題、溝通為核心,讓學生利用解題與對談來建構個人的數學思維。

2.2.1 解題的步驟

學生解題是一個過程,不可能一蹴可及,立即獲得答案,必定經過若干的步驟。以下為有關解題步驟的各種文獻:

Mayer(1982)以「鋪地磚」問題來說明數學解題歷程的四個步驟。其問題為:「地磚是以每邊30公分的正方形出售。假如每塊地磚的價錢是\$0.72,那麼一個長7.2公尺寬5.4公尺的矩型房間鋪滿地磚一共要花多少錢?」並以表2-2-1詳加解釋。

表2-2-1 Mayer數學解題的四項步驟

成份	知識類型	地磚問題的例子
問題轉譯	語言知識	7.2公尺長5.4公尺寬的矩型房間
問題整合	事實知識	1公尺等於100公分
	基模知識	面積=長×寬
解題計畫及監控	策略知識	用7.2公尺×5.4公尺來找房間面積。然後以0.3公尺×0.3公尺來找每個地磚的面積。然後用房間的面積除以每個地磚的面積來找所需要地磚的個數，然後將個數乘以0.72美元來求出所需的總價格。
解題執行	程序性知識	$7.2 \times 5.4 = 38.88$ $0.3 \times 0.3 = 0.09$ $38.88 / 0.09 = 432$ $432 \times 0.72 = \$311.04$

其中四個步驟的說明如下：

- (1)問題轉譯(problem representation)：是一種語言知識，透過語文瞭解題意。
- (2)問題整合(problem integration)：事實知識、基模知識，學生應用已具有的數學知識(基模知識)瞭解問題的性質，並且判斷問題中所呈現的資料何者與解決問題有關。
- (3)解題計畫及監控(solution planning and monitoring)：策略知識，將問題分解成幾個小問題，並在解題過程中監控自己，以瞭解自己在進行解題計劃中的哪一個步驟。
- (4)解題執行(solution execution)：程序性知識，實際執行解題計劃，通常是由較簡單的程序進行到較複雜的程序。

Polya在1945年所著的「怎樣解題 (How to solve it)」一書中將數學解題分為四個階段：

- (1)瞭解問題：了解欲求的問題中未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？要求的是什麼？做一個圖，導入適當的計畫。
- (2)擬定計畫：找出未知數和已知數之間的關係，如果找不到，就只得考慮一些輔助問題，想辦法擬定一個解題的計畫。
- (3)實行計畫：實行你所擬定的計畫，校核每一步驟。
- (4)回顧解答：核對所得的解答之正確性。你能把這結果或方法應用到別的問題上去嗎？

Mason, Burton, Stacev(1998)等人將解題分成三個階段：

- (1)進入階段：必需吸收題目給的資訊且了解題目到底在問什麼。並藉回答下列問題建構「進入」的工作。
 - 我的已知是什麼？ (What do I KNOW ?)
 - 我的所求是什麼？ (What do I WANT ?)
 - 我能引入些什麼？ (What can I INTRODUCE ?)
- (2)攻擊階段：數學在這個階段是複雜且多變的。攻擊時我們會想到基本的數學方法—猜想(Conjecturing)，以及令人信服的證明(Justifying)。
- (3)回顧階段：當你得到一個滿意的解答或是要放棄這個問題時，一定要回顧你的過程。有三個詞有助於回顧：
 - 檢查(Check)解答。
 - 反思(Reflect)關鍵的想法與關鍵的時刻。
 - 推廣(Extend)到更一般的情況。

綜合上述，可知解題是一種內在思考的的複雜心理歷程。解題者在面對數學問題時，無法立刻發現獲得正確答案的途徑，必須運用過去所學的知識、概念、原理或經驗，將認知結構重組以求得解答的一種心智歷程(陳哲仁，2004)。

2.2.2 增進解題能力

Schoenfeld在他所著的「數學解題」中強調，影響數學解題成敗的因素有四

項：

- (1)資源：指解題者擁有與解題相關的數學知識，包含數學事實、程序和技巧。
- (2)捷思：指捷思策略，包含簡化問題、畫表格等。
- (3)控制：指著重解題者在解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和如何監控與評估結果等。
- (4)信念系統：指解題者的個人數學觀。其中如何有效地運用資源及採用適當的捷思策略，卻常常是由控制因素所指導，所以Schoenfeld特別在巨觀的解題歷程中，從控制因素的角度來修改Polya的解題行爲，將解題歷程分爲讀題、分析、探索、計畫－執行、驗證、轉移等六個階段。

楊弢亮(1992)指出：解題的教學一方面是教師對學生運用知識進行獨立思考的指導過程，另一方面是使學生牢固掌握基礎知識和基本技能的必要途徑。解題是實現數學教學目的的一種手段，而不是教學目的。而且，教師應該培養學生的解題能力。如何培養解題能力？可從下列幾個方向著手：

- (1)培養計算能力。應重視：
 - <1>簡潔算法及基本技能。
 - <2>通過練習掌握一些基本數據。
 - <3>重要的恒等變形的基本公式及法則。
- (2)培養邏輯思維能力。應有下列基本要求：
 - <1>精確地運用數學語言。
 - <2>言必有據。
 - <3>通曉邏輯的基本知識。
 - <4>思考清晰、周密。
- (3)培養空間想像能力。須達到下列要求：
 - <1>使學生形成空間觀念。
 - <2>使學生掌握空間形式的表達方法。

<3>使學生能進行形象思維。

至於教師增進學生解題執行的教學策略為何？陳李綢(1992)提出以下策略：

- (1)學生需要有答對和答錯的回饋。
- (2)分析學生的錯誤型態，以便針對學生特定缺點加以補救。
- (3)採配合實務的計算數學，由具體而逐漸抽象的教學方法。
- (4)將學生在計算時所犯的錯誤在教學時指出，避免學生犯錯。

「數學解題」是1980年之後，全世界數學教育圈內的熱門課題。1989年美國全國數學教師學會(NCTM)出版的重要文件「中小學數學課程及標準評量」明確指出：「把數學視為解題」。解題教學的重點，在於讓學生自己動腦思考。許多老師認為「學生不習慣思考，也不會思考」是目前數學教育裡最嚴重的問題。「他們要求你教他們最快最有效的解題法，然後死記。」(黃敏晃，1989)。可見數學解題對從事數學教育工作者而言，是一項重要的課題。所以，數學教師應嘗試進行數學解題活動，讓每個學生都成為有思考能力的人。

2.3 解題錯誤類型

人類在學習的過程中，錯誤是難免的。以往教師總以為學生答錯是不小心，或誤解題意。有豐富教學經驗的教師都知道：錯誤並非是無用的，錯誤的價值甚至超越正確的答案，這要看你如何看待錯誤。教師從學生錯誤的解題過程，可以發現學生產生問題的地方，糾正其錯誤的觀念或解題過程，提昇學生的程度。也可以用來改革教材，改進教學方法。所以，不重視學生的解題錯誤是很可惜的，教師應對學生錯誤的解題過程好好研究才對。

今日教學心理學(instructional psychology)的研究指出：學生在學習時會主動建構所學習的材料，也會在建構的過程中產生錯誤概念(misconception)(張景媛，1994)。呂溪木(1983)認為學生錯誤概念的產生，有可能是來自學生日常生活經驗中所學得的，也有些是來自於學生對老師機械式教學的一知半解。鄭毓信(1998)則認為：這些數學學習時常出現的「規律性的錯誤」，並不是由於「疏忽」或「無

知」所造成。與此相反，學生會出現這些錯誤時，往往對自己所造成錯誤的原因並不清楚，從而在類似的情況下這種錯誤就會反覆地出現。因此，對於數學學習障礙學生而言，成功的診斷和補救教學的第一步，即是錯誤分析。本研究的目的，即是希望分析導致學生解題錯誤的類型，並找出造成錯誤思考的原因，再針對其原因實施補救教學，增進學生本單元的學習成效。

2.3.1 解題錯誤的探討

國內外學者針對學生發生解題錯誤的因素做了許多相關的研究，並將錯誤進行分類。為了能夠更瞭解學生產生解題錯誤的原因，茲將相關文獻整理如下：

Mayer(1985)將學生解題的錯誤分成三類：

- (1)遺漏的錯誤(omission error)：是對命題不能完整回憶的結果。
- (2)細節的錯誤(specification error)：指在陳述句中，一個變數轉換成另一個變數的能力不夠所致，如公升要改成公合。
- (3)轉換的錯誤(conversion error)：即無法將關係句的形式轉換成陳述句的形式。

Mayer指出，三種錯誤之中，以轉換的錯誤最嚴重，其原因是很多學生對關係的回憶，缺乏表徵關係語言知識所致。

Radatz(1979)以認知理論中的訊息—過程模式，把數學上的錯誤歸因為：

- (1)語言困難導致錯誤。
- (2)空間訊息獲得的困難。
- (3)不精熟先備的技能、運算和概念。
- (4)不正確的觀念。
- (5)使用不當的規則或策略。

Resnick(1989)的研究指出，錯誤演算規則的產生主要有兩個原因：

- (1)學習者把學過的演算規則類化並外推到其他的情境。例如：將負數乘以負數等於正數的規則運用到加、減運算。

算式： $-A - B = A + B$

- (2)由於遺忘演算公式或規則限制(constraints)的緣故。例如：去括號時，忘了它的運算規則，而直接將括號拿掉。

算式： $A - (B + C) = A - B + C$

楊弢亮(1992)將學生的錯誤歸納為下列幾種：

- (1)概念混淆：如代數式與等式的概念混淆，就會把等式中恆等變形的法則誤用到代數式上去。
- (2)定義不明確：如把點到直線上任意一點的距離的距離當作「點到直線的距離」。
- (3)定理理解不清楚：如混淆了判定定理與性質定理。誤以為原命題成立，逆命題也成立，或沒辦法分辨清楚條件是充分還是必要。
- (4)條件不注意：如在反三角函數關係式 $\sin(\sin^{-1} x) = x$ 中沒注意 $-1 \leq x \leq 1$ 這個條件，產生 $\sin(\sin^{-1} \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ 的錯誤。
- (5)邏輯錯誤：如幾何論證中，或是根據不足，或是推理不合邏輯；在軌跡的探求或證明中，沒有同時說明純粹性和完備性。
- (6)法則不會：如三角函數表的查表法則不會。
- (7)公式記錯：如發生 $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ， $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ 的錯誤。
- (8)計算錯誤：主要是粗心大意或慌亂而造成的。

錯解辨析(九章出版社，1988)一書將學生的錯誤類型分為四大類：

- (1)由於概念不清產生的錯誤：包含概念實質模糊、混淆相似概念及循環定義概念等產生的錯誤。
- (2)由於推理無據產生的錯誤：包含臆造定理、濫用法則、循環論證、論據不足及方法不對等產生的錯誤。
- (3)由於忽視條件產生的錯誤：包含忽視概念中的隱含條件、忽視所使用的定理、公式、法則的適用條件、忽視取值範圍的變化、忽視約束條件中

的隱含條件、忽視條件的充分性與必要性、錯誤理解條件、遺漏或濫加條件、忽視結論特徵中的隱含條件、把給定的一般條件特殊化等產生的錯誤。

(4)由於考慮不周產生的錯誤：包含審題馬虎、形式套用、顧此失彼、忽視特例、以偏概全及檢驗不當等產生的錯誤。

綜合以上有關解題錯誤的文獻，可大致歸納出學生發生錯誤的原因包括：先備知識的不足、將新舊知識做不當的連結或類推、概念混淆或互相干擾、使用錯誤的運算規則、無法了解或誤會題意等，具有相當的共通性。

2.3.2 有關解題錯誤的研究

許多研究者針對數學科的某一單元進行研究，將學生的解題錯誤加以歸類。茲將與本研究有關的研究結論分述如下：

郭汾派(1991)針對國中生文字符號運算歸納出常見的主要錯誤形態：

(1)帶分數模式：此種錯誤比例相當高，有點受國小數學 $7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ 的影響。

例：學生做若 $e+f=8$ ，則 $e+f+g=?$ 時，學生的錯誤答案可能為 $8g$ 。

(2)係數、文字分別處理：當學生符號運算不完全了解時，會認為單項式才是答案，因此強迫自己對不能再進一步合併的多項式，進行合併操作，其中最常見的錯誤是係數、文字分別處理，將不同類項的係數先行運算，再將未知數置於其後。例：學生做 $2a+5b=?$ 時，學生的錯誤答案可能為 $7ab$ 、 $7+ab$ 、 $7(a+b)$ 、 $7+a+b$ 等。

(3)不同類項擺在一起：當學生認為單項式才是答案，又缺乏同類項才可合併的觀念時，他們很容易將不同類項擺在一起，以求得單項式的答案。

(4)不會使用括號：學生對括號一知半解，遇到需要括號的題目，不知道如何使用括號，或者認為有括號、無括號，情況是相同的。例：學生做 $4 \times (n+5)$ 時，學生的錯誤答案可能為 $4n+5$ 、 $n+20$ 。

劉天民(1993)針對國一學生整數與分數四則運算錯誤類型研究指出，學生的錯誤類型其中有：

- (1)學生在進行加減法運算時，誤用乘法運算性質。
- (2)學生將乘方問題當作乘法問題來計算。
- (3)學生在含括號的運算式中，並未考慮括號前後的運算情形。
- (4)學生在處理負數運算時，有主動去掉負號的情形。

林清山、張景媛(1994)提出學生在代數應用題錯誤概念包括如下：

- (1)題轉譯的錯誤概念：包括學生對於關鍵詞的詞義無法充分瞭解、學生對於問題中哪些是無用的條件辨識不清。
- (2)問題整合的錯誤概念：包括缺乏基本的數學概念、無法察覺到所計算出來的答案是否合理、學生不會作假設、學生套用固定的模式而不知隨問題的變化而加以改變等。
- (3)解題計畫及監控的錯誤概念：包括未能理解已知條件與未知條件之間的關係，以致假設與式子不符、無法針對不同的問題採用不同解題策略、學生以為一個題目只有一個解法、學生會受前後題型的影響而採用不當的解題策略等。
- (4)解題執行的錯誤概念：包括在解方程式時會產生移項的錯誤，移項的錯誤多半是因為學生缺乏等號兩邊等值的觀念、學生不習慣使用代入法解聯立方程組、學生在使用消去法時容易產生正負號混淆的情形等。

蘇慧娟(1998)研究國二學生方根概念及運算錯誤類型發現有三項：

- (1)學生初學方根時，暫無法接受有理數的形式以外的數。
- (2)學生學習方根時，會受原有的數學知識影響。
- (3)學生學習方根時，同時學習的內容會產生互相干擾的情況。相似的概念或符號，如平方根與立方根會互相干擾。並指出學生在學習方根時，對於新的符號、概念容易發生錯誤。

李欣潔(2004)在對高中學生做直線方程式錯誤類型之研究中，發現學生發生

錯誤原因有以下的八點：

- (1)對定義及公式的概念不清。
- (2)新舊學習經驗的相互干擾。
- (3)代數與幾何之間，無法作連結。
- (4)忽略題目所給條件，把給定的條件特殊化。
- (5)受題目情境設計、文字敘述及編排方式的影響。
- (6)由題目所給數字產生答案。
- (7)不合邏輯的推論。
- (8)粗心疏忽或明顯的計算錯誤。

陳美卿(2001)歸納學生在複數絕對值概念及運算單元的錯誤原因有：

- (1)因定義概念不清產生的錯誤。
- (2)從實數推廣到複數，性質作了過度的推論。
- (3)使用了錯誤的運算規則。
- (4)不當或過度使用線型基模。
- (5)未能使絕對值與距離這個幾何觀念產生連結。
- (6)粗心計算錯誤。

由以上文獻可知：學生於學習「複數與複數平面」單元前，可能已經累積相當多的錯誤概念或解題錯誤類型，這些都會造成學習本單元時的障礙，或成為解題錯誤的因素。研究者於分析學生的錯誤概念及運算上所使用的錯誤規則，並探討學生錯誤的原因將其歸類時，應將這些研究結論納入考量。

2.4 補救教學相關研究

2.4.1 補救教學的實施

補救教學(remedial instruction)是教師發現學生有學習困難之後，診斷出問題所在，針對問題設計一連串適切合宜的教學活動，幫助學生克服學習障礙，達成該階段的學習目標(洪素敏，2004)。補救教學的對象常為低成就學生，早期諸多

學者對「低成就學生」(under-achievers)的界定為：智力正常，但其實際的學業表現明顯低於其能力水準。近期對於補救教學受教對象之界定，分為三類：一類為學生的實際學業表現明顯低於其應有的能力水準，即原稱之為低成就。另一類為學生的實際學業表現明顯低於其班級平均水準，亦稱之為低成就。最後一類為學生學科成就不及格，且其學業成就表現明顯低於其他學生許多者，稱之為成績低落者(lowachievers)(張新仁，2001)。

補救教學的實施是為幫助學生克服學習障礙，減少學習的無力感、挫敗感，增加學習的成就感與其繼續學習的信心。期望補救教學實施後，學生能夠跟得上原班級的教學進度，並且能夠幫助學生日後的學習，也就是「把每一位學生帶上來」。要能真正達到補救教學的成效，應對補救教學有充分的了解。補救教學是一種「評量—教學—再評量」的循環過程，以期能達到課程教學所擬定的目標。故補救教學為評量後，針對未達成的教學目標所實施的教學(李坤崇、歐慧敏，2006)。

張新仁(2000)把補救教學的歷程分為三個階段。階段一：藉由篩選，診斷出誰需要進行補救教學。階段二：從學生的評量資料，包括學習困難報告、作業、教室觀察記錄等，瞭解學生的學習困難所在，以求對症下藥。階段三：設計符合學生需要的補救教學活動。其歷程大概分三階段：

- (1)轉介過程：補救教學的首要工作在篩選、診斷，以選擇需接受補救教學的學生。
- (2)正式評量：評量的意義乃依據教育目標，分析學生學習行為的所有措施之方法，其重點在於瞭解學生的學習過程中，可能產生的學習困難，找出問題的癥結以對症下藥，進行補救教學。評量的資料來源大致包含：學習困難報告、教室觀察記錄、心理評量等。依據各種評量的方式，可以幫助教師隨時隨地瞭解學生的學習，診斷出學習的困難，以進行事後補救的教學，而達教學目標。
- (3)教學：補救教學是一種診療教學模式，亦稱為臨床教學模式，在事先選

擇好接受補救教學的對象後，再進行教學。其重點是在瞭解學生的學習困難後，精心設計課程內容，慎選教學模式，而符合學生個別需求的教學。當教師認為需要實施補救教學以提升學習成效時，可針對原因的差異，而實施不同的補救教學。高廣孚(1988)在所著「教學原理」一書中，認為教師可有以下四種方式：

- (1)再教學：由於教材太難，或缺乏舊的經驗基礎，以致班上多數同學都不了解，教師必須將該部分教材重新講述一遍。或者，由於教材太簡略，教師對於學生的起點行為沒有十分了解，僅稍作介紹即匆匆帶過，以致多數同學發生學習困難。教師在教學時，就需增補教材，詳加說明。
- (2)增加練習的時間及材料：技能訓練或藝能學科的學習時，學生發生學習困難的原因大致有二：一為沒有充足的練習時間；二為缺乏可供練習的材料。補救之道，就是增加練習時間及多提供練習材料。
- (3)增加課業輔導時間：教師發現學生的學習多數發生困難時，即商請行政單位增排課業輔導時間。
- (4)斟酌增減教材內容：學生若依照學科學習能力分班時，對程度好的班級而言，現行教科書教材可能無法滿足學生的求知欲望，教師可選擇適當的教材補充；對程度差的班級，教師可針對學生程度予以刪減，以增加學生的學習成就感。

補救教學的實施與一般教學不同，更應注意課程的設計。杜正治(1993)認為一般補救教學的課程設計，應考慮下列項目：

- (1)分析基本能力：任何學科目標的達成，需要一定程度的心智能力，包括注意力、理解力、記憶力、觀察力、知覺力以及想像力等。相關能力的不足必然造成學習的困難，因此在設計補救教學課程時，得考量學生的相關能力，再配合教材與教法，如此才能事半功倍。
- (2)評量學科能力：在進行補救教學前，需先針對學科的學習能力進行測試與評量，以作為課程設計的依據。而學科能力的評量大多為成就評量，如

- 語文科目的能力包括單字的記憶與瞭解、句子結構理解、文章閱讀能力等。
- (3)評量學習動機：學習動機往往會影響學習成就，因此在進行補救教學前，教師應先瞭解學生學習動機的強弱。一方面設法對缺乏學習動機的學生提供外在的增強；另一方面可考慮學習動機強的成績低落學生為優先補救的對象。
 - (4)擬定課程目標：課程目標的研擬決定教學方法的選擇，也關係到教學的成效。然而教師在擬定課程目標時，要先了解學生的學習能力，以及學習的客觀條件。此外，課程目標的訂定，務必指出學習對象、學習的內容、行為的標準、教學方法以及評量的方式。
 - (5)選擇適合受試者能力的教材：有效的補救教學課程設計，宜根據學生程度選擇合適的教材，包括有效的學習策略、簡化原有教科書內容、另行編選坊間的教材、自行重新設計教材等。

2.4.2 數學科補救教學的相關研究

由於每一位學生的資質與先備知識均不相同，補救教學一直是教師重要的研究課題，有多篇以補救教學為主題的研究報告，茲選數篇與本研究有關的文獻分述如下：

康木村、吳吉昌(2000)以高師大附中國中部二年級四個班級 30位數學低成就學生為對象，另選取五位數學成績優異者為導生。在寒假及學期間，針對比例與線型函數單元、一元二次方程式單元，實施個別化補救教學。並採市面上出售的電腦輔助教學軟體，作為進一步練習及提高學習動機之用。研究結果發現：學生在數學學習成就及學習態度方面，均有顯著改善。由學生心得報告及訪談中發現，安排在寒假進行補救教學，其學習情緒呈正向反應。

陸正威(2000)以台北縣永和國小六年級資源班的三位學童作為研究對象，採單一受試者實驗設計，進行為期兩個月的數學解決問題實驗教學，並於每次教學後實施「課程本位評量」。研究結果發現：在提高學生數學解決問題能力方面，

有顯著的立即成效及良好的保留效果。此外，在降低學生數學焦慮方面也有正向的反應。

洪素敏(2004)以彰化縣某國小五年級的學生為研究對象，分析學生的分數迷思概念類型。再挑選出測驗分數在10分以下(總分20分)且學習意願較高的學生20人，以具體、半具體(圖形表徵)、口語表徵至抽象符號表徵之教學進程，設計補救教學活動，進行補救教學。研究結果發現：可以改善學生部分的分數迷思概念。也發現培養孩子的自信心，應是補救教學的首要工作之一。

由以上的文獻可以發現：補救教學只要選對方式、做好課程規劃，大多具有一定的成效，是身為教師重要的研究工作。

2.5 電腦融入教學

2.5.1 利用電腦輔助教學

人類的學習是從具體到抽象的過程，不同的媒體具有不同的功能。讓學生實際操作的經驗最能引起學習動機。從學校教育的角度來看，它是輔助各科教師教學、整合教學資源的重要工具。由於資訊科技日漸普及且軟體操作介面親和，目前輔助教學的實施大多利用電腦科技來完成。尤其在數學的教學上，經常利用PowerPoint、GSP、Maple、Excel、Flash等軟體進行輔助教學。因此使用數學軟體輔助數學教學，已經不再是困難重重了(李進福，2006)。

應用電腦為輔助學習工具，以提升學生的學習成效，將「資訊融入教學」已是廿一世紀各國競相發展的趨勢。資訊科技在教學上扮演的角色越來越重要。因此，未來中小學的教師教學、教材呈現，教材儲取、學生學習、同儕互動的方式，將因資訊科技的介入而產生重大的改變(張世明，2005)。

張新仁(2001)指出，國內外常用的補救教學型態或方案如有：資源教室、學習站、套裝學習以及電腦輔助教學。電腦輔助教學的特色如下：

- (1)立即回饋：不論學生的程度、能力、學習動機或學習態度，只要投入學習，電腦即做出適度的反應，提供立即的回饋。

- (2)提高信心：若學生做出正確的反應，電腦立即提供積極增強，大大獎勵一番。若反應錯誤，則提示正確答案。
- (3)容易操作：學習者只要學習按鍵即可，操作方式簡便，易記易學。
- (4)用途廣泛：教師製作的電腦軟體，一方面針對學生的個別需要而設計課程，符合個別教學的原則；另一方面也可針對特殊的觀念與問題，做大量的練習。
- (5)學習者可以自訂進度：低成就學生的學習進度較慢，往往趕不上全班的進度，但電腦教學可依學生個人的能力與程度，循序漸進呈現新的教材。對於低成就的學生，電腦輔助教學可以有效提高學習動機、提昇自我信心、增進基本的運算技巧、解決問題、習得簡單的觀念，以及學習閱讀與寫作等能力。

以學習心理的觀點而言，一般心理學家認為在不同的教學活動中，五官的運用自是不同，但可歸納為視覺70%，聽覺17%，觸覺8%，其餘為嗅覺及味覺。這個分類在傳統的教學活動是很接近的。然而，若利用電腦來輔助教學，則可謂差異很大，經非正式研究分析，視覺應占90%以上，其餘才是聽覺，觸覺、嗅覺及味覺。在這前提下，視覺的應用變得相當重要(洪榮昭，1992)。一般認為結合文字、圖片、動畫、音效的電腦輔助教學較能引起學生學習的興趣，使注意力集中。

Robert Heinich, Micheal Molenda, James D. Russell(1982) 認為電腦有以下優點：

- (1)允許學生以自己的步調去學習。
- (2)即時對個別學習者的學習行為反應，產生快速的增強作用。
- (3)對學習緩慢者，不可避免的錯誤不會暴露於同儕面前，因此不會引起難堪。
- (4)對特別的學習者，教學可以適合的步調進行。
- (5)顏色、音樂及卡通圖畫可加入真實情境，而對訓練實習、實驗活動、模擬等產生援助。
- (6)電腦有持續紀錄的能力使得個別化教學成為可行。

- (7)在資訊爆炸的時代，電腦提供一個隨知識快速擴張的成長空間。
- (8)電腦提供可信賴及持續的教學，從這個學習者到另一個學習者不必考慮老師或訓練人員、日數或地點。
- (9)電腦基礎教學可增進效率及效能。
- (10)電腦逐步影響我們以一個有條理及具邏輯性的方法與之溝通。
- (11)由於電腦的編輯系統越來越容易使用，一般教師也可以發展他們自己製作的電腦學習程式。

2.5.2 電腦輔助教學的成效

以電腦輔助教學在國內外已行之有年，有關其教學成效也有許多的研究。劉信吾(1994)收集國外有關電腦在教學上的成效，經實驗和研究證實的有：

- (1)電腦媒體和其他媒體一樣有效(Clark，1984)。
- (2)電腦的教學效果優於傳統的教室教學(Banger, Drowns & Kulik，1985)。
- (3)在同樣的時間之內，利用電腦可以學得較多的內容(Bright，1983)。
- (4)以電腦學習和傳統方法學習，在延遲回憶方面的回憶量相近，並無顯著差異(Dence，1980)。
- (5)電腦是嶄新的媒體，其新奇性能吸引學生的好奇與興趣，從而激發學生的學習動機(Keller，1983)。
- (6)學生對學習的時間和學習的內容擁有操控權，會感受到自主學習的樂趣，而減少被迫學習的乏味。而且學生對呈現的刺激如能主動反應，學習的效果也會較佳(Allan，1973)。
- (7)學生可以依自己的步調、自己的程度學習，比較符合個別差異的適應原則。
- (8)學生在學習過程中，可以得到立即的回饋，提升學習的興趣，也可以集中或維持注意力(White，1968)。
- (9)提供雙向交談的互動情境。電腦輔助教學由電腦呈現資料供學生閱讀，

亦可由電腦提出問題由學生作答，並立即核對正誤，答對者獲得獎勵，答錯者獲得補救。

(10)最近十年內，雖然各級學校的電腦數量激增，但其對教學方法卻極少影響(Office of Technology Assessment, 1988)。

而國內也有許多關於電腦應用於教學上的研究：

陳英娥(1992)探討電腦輔助教學與解說式教學方式，對國中數學科之相似形和二次函數單元進行補救教學之學習成效，並分析學生經由電腦輔助補救教學後的學習態度及反應。實驗組採電腦輔助教學方式；控制組採解說式教學方式進行補救教學。研究結果發現：實驗組顯著優於控制組，且實驗組學生對採用電腦輔助教學進行補救教學持正向態度。

何政謀(2004)研究以 GSP 設計之活動，進行解二元一次聯立方程組補救教學。發現學生在接受 GSP 設計之教學活動之後，在解特定形式的二元一次聯立方程組問題時，可以將代數問題轉譯成生活情境問題，並由熟悉的生活情境出發，學會解二元一次聯立方程組的方法。並且因為透過動態圖形的呈現，學生對二元一次方程式的係數與圖形的變化，能夠更清楚的認識及產生深刻的印象。經由晤談發現，學生較喜歡電腦輔助教學，而且藉由本研究的教學過程，可以看出學生在學習過程中的思考與提問，比起傳統教學，學生在電腦輔助教學時，會與老師產生較良好的互動及對數學學習有較積極的態度。

陳聖雄(2005)探討高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型，並實施補救教學。而其補救教學活動是以 PowerPoint 為工具作一元二次不等式的動態圖解，藉由電腦繪製函數圖形的輔助及標示不等式所求的區域，使學生更容易了解一元二次不等式和二次函數圖形的聯結。尤其搭配以 Visual Basic 程式所撰寫的二次函數繪圖軟體的動態圖形展示，更能使學生直觀地了解二次函數與 x 軸沒有交點的充要條件。因此學生普遍認為學習內容與教材比起從前變得更生動且有意義，增進學生的學習願。因此，參與此次補救教學活動的學生大多抱持著正面的學習態度。

尤冠龍(2006)研究以幾何繪圖軟體 GSP 融入國中數學教學對學生學習成就與態度影響，認為以引導式探究教學為策略，教導學生學會操作 GSP 軟體來學習數學的電腦輔助教學模式，不論對學生的數學學習成就或學習態度均有正向的幫助。

由上述的研究可證實電腦的確能輔助教師的教學，使學生的學習更具成效。因此，研究者決定利用 PowerPoint 及 GSP 這二套軟體來實施補救教學。此二套軟體操作簡易，也容易學習。多數學校都擁有這二套軟體，且一般老師對此二套軟體有相當的接觸。研究者要利用 PowerPoint 動畫特性，創造出適合「複數與複數平面」單元動態圖解的學習環境，並利用 GSP 軌跡殘留的功能，加深學生對方程式圖形的印象。希望能提供補救教學的另一種教學方式，增進學生於本單元的學習成效。

