4　前測結果及其錯誤類型

本章分爲二節：第一節是針對學生在「複數與複數平面解題測驗卷」作答結果的分析，包括各題答對率和空白率的統計，及各題錯誤類型和錯誤原因的探討；第二節爲解題主要錯誤類型及原因的歸類。

4.1 前測結果分析

研究者於 2007 年 10 月底，以「複數與複數平面解題測驗卷」對三個高一班級共 125 名學生作紙筆測驗，並挑選適當的學生作面談。將學生的答題資料，按照其答題情形整理、歸納、分析如下：

4.1.1 各題的答對率及空白率

下表爲此 125 位受測學生各題的作答概況：

表 4-1-1 各題的答對率及空白率

題號	題　目	答對率 (%)	空白率 (%)
1-1	複數 $2i$ -3 的實部爲 (1)$2i$ (2)2 (3)－3 (4)3 。	90.4 (113/125)	0.8 (1/125)
1-2	下列何者爲真？(1) $i+\frac{1}{i}=0$ (2) $3i>-3i$ (3) $i^2+\frac{1}{i^2}=0$ (4) $1+i+i^2+i^3+i^4=0$ 。	64 (80/125)	9.6 (12/125)
1-3	a，b 爲實數，若 $a(1+2i)+b(1-i)=-3+6i$，則 $2a+b$=_____。	81.6 (102/125)	8 (10/125)
1-4	x, y 爲實數，若 $\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則 $x=$ ____, $y=$ ____ 。	60.8 (76/125)	9.6 (12/125)
2-1	下列何者錯誤(1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{-6}$ (4) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{-2}{3}}$ 。	65.6 (82/125)	13.6 (17/125)
2-2	$z_1=3-2i, z_2=5+7i$，則 $3z_1-2z_2=$_____。	83.2 (104/125)	0 (0/125)

2-3	求 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}=$ (1) i (2)0 (3)1 (4) $-i$ 。	80 (100/125)	12.8 (16/125)
2-4	設 $\alpha=2+i,\beta=3+i,\gamma=5+6i$ ，則 $(\alpha+\beta)\gamma=$_____。（以複數 $a+bi$ 形式表之）。	83.2 (104/125)	3.2 (4/125)
3-1	方程式 $x^2+x+2=0$ 的二根為 (1)二相異實根 (2)二相等實根 (3)共軛虛根 (4)以上皆非 。	76.8 (96/125)	13.6 (17/125)
3-2	設 $z=3+5i$ ，則 $\lvert\bar{z}\rvert=$_____。	43.2 (54/125)	9.6 (12/125)
3-3	設複數 $z=3+2i$，則 $z\times\bar{z}$ 之值為_____。	73.6 (92/125)	12.8 (16/125)
3-4	設 $x^2+3x+1=0$ 二根為 α ， β ，則下列何者<u>錯誤</u>？ (1) $\alpha+\beta=-3$ (2) $\alpha\beta=1$ (3) α ， β 均為負數 (4) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=-1$ 。	40 (50/125)	17.6 (22/125)
3-5	設 $z=1+i$ ， $w=4-3i$ ，則共軛複數 $\overline{z^2\cdot w}=$ _____ (以複數 $a+bi$ 形式表之)。	56 (70/125)	15.2 (19/125)
4-1	設 $z_1=2+3i$， $z_2=3-4i$ ，則 $\lvert z_1-z_2\rvert=$_____。	40 (50/125)	4.8 (6/125)
4-2	計算 $\lvert(1+2i)^2(3-4i)\rvert=$_____。	40.8 (51/125)	9.6 (12/125)
4-3	$\left\lvert\dfrac{4+3i}{6-8i}\right\rvert$ 之值為_____。	36 (45/125)	16.8 (21/125)
4-4	3，$-i$，$2i$ 在複數平面對應的點依次為 A，B，C 則 $\triangle ABC$ 的面積=_____。	58.4 (73/125)	24 (30/125)
4-5	設 $z_1=7+4i$ ， $z_2=5-5i$ ， $z_3=-7$ ， $z_4=8i$ ，以上哪一個數在複數平面的位置，距離原點最遠？ (1) z_1 (2) z_2 (3) z_3 (4) z_4 。	61.6 (77/125)	13.6 (17/125)
4-6	設複數 $P=3+5i$ 與 $Q=-1+2i$ 是在複數平面上的二點，則 $\overline{PQ}$ 長為_____。	58.4 (73/125)	17.6 (22/125)
4-7	在複數平面上，滿足 $\lvert z\rvert=1$ 的全體複數 z 形成什麼	34.4 (43/125)	33.6 (42/125)

	圖形？ (1)二個點 (2)一直線 (3)菱形 (4)圓形 。		

由表 4-1-1 研究者有以下幾點發現：

(1)答對率達 80%以上的試題爲：1-1,1-3,2-2,2-3,2-4 等 5 題，1-1,1-3 題是複數的基本定義，2-2,2-4 題是複數的基本四則運算，2-3 題是「i」正整數次方的性質。這幾題都是屬於基本概念或基本運算，所以答對率較高。

(2)答對率低於 50%的題目有：3-2,3-4,4-1,4-2,4-3,4-7 等 6 題，其中 3-2,4-1, 4-2,4-3 題均與絕對值有關，剛升上高一的學生對絕對值的觀念依然是「負的變正的，正的還是正的」，並不了解絕對值的定義，更無法利用絕對值的運算性質。且在運算過程中，有許多錯誤的運算方式，這些因素都是造成這些題目答對率偏低的主因。3-4 這題需配合「根與係數」的觀念，且有一個不易發現錯誤的誘答選項，所以這題的答對率偏低。而 4-7 題是所有試題中，答對率最低的一題，主要的因素應是須將其觀點轉換成複數平面的概念，$|z|$應視爲 z 在複數平面上的對應點與原點的距離。又因爲學生的觀念依然是「去絕對值要加正負」，或對根號不熟悉，解題時依然停留在整數或有理數的觀念，以致本題答對率偏低。

(3)空白率達 15%以上的題目有 3-4,3-5,4-3,4-4,4-6,4-7 等 6 題，其中 3-4 題需配合「根與係數」概念，許多學生發現根無法順利解出，便無從下手，是本題空白率較高的原因。4-4,4-6,4-7 題須將複數轉換成複數平面上的觀念，對部分學生而言，似乎仍有困難，所以這二題的空白率較高。而 3-5,4-3 此二題只需依題義，或利用某些複數運算的性質，便可得到答案。其空白率偏高的原因，可能是覺得太複雜了，沒有信心可以算出正確答案，因此未作答。

4.1.2 各題錯誤類型與錯誤原因

本小節將分析、歸納此 125 位受測學生在「複數與複數平面解題測驗卷」中，每一題作答的情形，並將其錯誤歸類。為了瞭解學生解題時犯錯的真正原因，除了由學生試卷的答題過程分析外，必要時與學生進行面談，以了解學生解題時的思考路徑及解題策略，並進一步分析學生犯錯的可能原因。

1-1 題錯誤類型

題 目	複數 $2i$ -3 的實部為 (1)$2i$ (2)2 (3)－3 (4)3 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	未考慮負號	6	54.5
B	對定義不清楚	4	36.4
C	其他的錯誤	1	9.1

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：不會將 $2i$ -3 移項為(-3)+$2i$ 。

(2)錯誤類型 B：不清楚何謂「實部」？何謂「虛部」？只好用猜的。

<<訪談實例>>

T(教師，以下亦同)：請告訴老師，為什麼答案選(4)？2i-3 的實部是多少？

S(學生，以下亦同))：嗯…不知道。

T：你是猜的嗎？

S：對，用猜的。

1-2 題錯誤類型

題 目	下列何者為真？(1) $i+\frac{1}{i}=0$ (2) $3i>-3i$ (3) $i^2+\frac{1}{i^2}=0$ (4) $1+i+i^2+i^3+i^4=0$ 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)

A	不具「虛數無大小」的觀念	10	30.3
B	計算錯誤	9	27.3
C	對「i」的定義不清楚	10	30.3
D	其他的錯誤	4	12.1

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：將「i」視爲一個未知數，且不知「i」是一個虛數，既不是正數，亦非負數，因此無大小可言。

<<訪談實例>>

T：請問你這一題爲什麼選第二個答案？

S：因爲 $3i=3i$，所以 $3i$ 大於 $-3i$ 。

T：就是正的比負的大嗎？

S：對啊！我覺得是這樣。

T：那麼老師請問你 $3i$ 是正的，還是負的？

S：…

T：i 等於多少？

S：$\sqrt{-1}$ 。

T：那請問你 $\sqrt{-1}$ 是正的，還是負的？

S：負的。

T：$\sqrt{-1}$ 是負的？那 3i 呢？

S：負的。

T：那 $-3i$ 是正的還是負的？

S：正的…(笑)是吧？

T：所以誰大？

S：…(笑)。

T：老師有教過你虛數怎樣？

S：沒有大小。

(2)錯誤類型 B：計算錯誤。

(3)錯誤類型 C：不知$i^2=-1$，$\frac{1}{i}$可以化成$\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$。

<<訪談實例>>

T：請問你如何確定第一個選項$i+\frac{1}{i}\neq 0$？

S：因爲這邊有一個幾分之一(分數)，幾分之一就不等於 0。

T：前面有一個 i，後面有分數加起來就不可能是 0？

S：嗯！

T：第二個選項爲什麼對呢？3i 有比-3i 大嗎？

S：嗯！

T：爲什麼對？3i 有比-3i 大?

S：因爲 i 都消掉了。

1-3 題錯誤類型

題 目	a，b 爲實數，若$a(1+2i)+b(1-i)=-3+6i$，則 2a+b=_____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	利用「『實部=實部』且『虛部=虛部』」性質時發生錯誤	6	46.2
B	二元一次方程組解錯	4	30.8
C	除錯誤類型 B 以外的計算錯誤	2	15.4
D	其他的錯誤	1	7.7

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：將等式展開再整理時，正負號錯誤。

<<訪談實例>>

T：請問你知道這題錯在哪裡嗎？

S：這裡吧！

T：這個應該是…

S：減的吧！

(2)錯誤類型 B：解二元一次聯立方程組時，發生錯誤。

<<訪談實例>>

T：請問這題你想要怎麼做？

S：就是這兩個加起來，另兩個加起來。

T：實部加起來等於-3？

S：對。

T：虛部加起來等於 6？

S：對。

T：…解錯了，你是二元一次方程式解錯。

S：…對。

(3)錯誤類型 C：計算錯誤。

國立政治大學 National Chengchi University

1-4 題錯誤類型

題 目	x, y 爲實數，若 $\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則 $x=$ _____, $y=$ _____ 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	兩複數相除時，以爲「等號左邊實部相除＝等號右邊實部，等號左邊虛部相除＝等號右邊虛部」。	8	21.6
B	分子、分母同乘 $x-yi$，使運算變得複雜而無法算出	9	24.3
C	分子或分母移項時，發生錯誤	2	5.4
D	兩複數相乘展開時發生錯誤	5	13.5
E	未做完	4	10.9

F	其他的錯誤	9	24.3

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：對分式運算規則不清(以為 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$)，將 $\frac{1+3i}{x+yi}$ 分成實部 $\frac{1}{x}=1$，且虛部 $\frac{3i}{yi}=i$，得 $x=1$， $y=3$。

<<訪談實例>>

T：請問為什麼你可以馬上寫出 x=1,y=3 呢？

S：因為我的算法就是這邊消掉，那邊消掉的啊！

T：噢！你把這是子切成兩半，然後左邊的實部和右邊的實部…

S：一樣。

T：你的意思是可以把這個分式($\frac{a+b}{c+d}$)拆開來，拆成這樣($\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$)？

S：對啊，我覺得啦！

T：請問你分式可以這樣拆嗎？

S：…不行，可是我想說整數跟整數，然後 i 跟 i 啊！

T：實部跟實部，i 跟 i？

S：對。

T：你的意思就是拆兩堆？

S：對。

T：分式可以這樣拆兩堆嗎？

S：…不行。

(2)錯誤類型 B：試圖將左式分母有理化，而分子、分母同乘 $x-yi$。如此一來，式子變得複雜，造成無法算出。

<<訪談實例>>

T：這題做一做就沒了(沒做完)，為什麼？

S：因為很多數字都一樣，就不知如何化簡它。

T：因爲它變得很複雜？

S：對啊！算一算太複雜就不想算，也有試過，後來就先試簡單的題目。

T：後來就沒有做了？

S：對。

T：因爲它太複雜了？

S：對。

T：如果這樣乘過來會不會比較好做？

S：沒想到這個。

2-1 題錯誤類型

題 目	下列何者錯誤？(1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{-6}$ (4) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{-2}{3}}$ 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	直接將 $\sqrt{-2}$ 、 $\sqrt{-3}$ 相乘得 $\sqrt{6}$ ，因此選其他答案。	7	28
B	以爲 $\sqrt{6}i\neq\sqrt{-6}$ 或 $\sqrt{\frac{2}{3}}i\neq\sqrt{\frac{-2}{3}}$	11	44
C	計算錯誤	1	4
D	其他的錯誤	6	24

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：對根號相乘定義不清，不知 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 的先決條件爲 a,b 均爲正數。

<<訪談實例>>

T：請問第二個答案爲什麼是對的？

S：這根號裡面不是可以兩個相乘嗎？

T：你知道嗎？兩個根號相乘是有限制的。

S：我不知道。

T：他的限制是裡面兩個是都要是…

S：正數。哦！

T：所以 $\sqrt{-2}$ 不能直接乘 $\sqrt{-3}$ 。

S：那把它變成 i。

T：請問要怎麼變？

S：就是 $\sqrt{2}i$ 。

T：$\sqrt{-3}$ 當然是…

S：$\sqrt{3}i$ 。

T：如此你就可以得到答案，這題答案是多少？

S：$\sqrt{6}$ 。

T：應該是 $-\sqrt{6}$ 。

(2)錯誤類型 B：知道將 $\sqrt{-2}$ 改成 $\sqrt{2}i$，再與 $\sqrt{3}$ 相乘或相除，得 $\sqrt{6}i$ 或 $\sqrt{\frac{2}{3}}i$ 。

但因對複數定義不清楚，不知 $\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$ 或 $\sqrt{\frac{2}{3}}i=\sqrt{\frac{-2}{3}}$ 。

<<訪談實例>>

T：答案只有(2)，但你認爲(3),(4)也都是正確答案，爲什麼？

S：因爲 $\sqrt{-2}$ 變成 $\sqrt{2}i$ ，然後再乘以 $\sqrt{3}$ 所以答案不符。

T：這乘起來應該是 $\sqrt{6}i$ 。

S：嗯。

T：$\sqrt{-6}$ 有沒有等於 $\sqrt{6}i$？

S：…咦！等於。

T：所以這個答案是對的？

S：對。

(3)錯誤類型 C：計算錯誤。

2-2 題錯誤類型

題 目	$z_1 = 3-2i, z_2 = 5+7i$，則 $3z_1 - 2z_2 =$_____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	括弧前有負號去刮弧時，只有第一項變號 例如：$-(a+b) = -a+b$。	10	47.7
B	除錯誤類型 A 以外的計算錯誤	5	23.8
C	其他的錯誤	6	28.6

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：括弧前有負號，去刮弧時，只有第一項變號。例如：

$z_2 = 5+7i$，計算得 $-2z_2 = -2(5+7i) = -10+14i$。

<<訪談實例>>

T：你知道這一題問題在哪裡嗎？

S：乘錯了。

T：$z = 5+7i$，-2z 應該是-10…然後是加還是減？

S：減。

T：因爲要變號，你後面沒有變號。

S：對，只有前面有(變號)。

2-3 題錯誤類型

題 目	求 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}=$ (1) i (2)0 (3)1 (4) $-i$ 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	以為只求 i^{100}	7	77.8
B	其他的錯誤	2	22.2

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：了解 $i+i^2+i^3+i^4=0$ 且 $i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}+i^{n+4}=0$ (n 為自然數)，但卻誤解題意，以為只求 i^{100} ，缺乏「級數」的觀念。

<<訪談實例>>

T： $i^4=1$，100÷4＝25，為什麼就選(3)?

S：因為整除啊！

T：整除就是 1？

S：四次方啊！然後就 1 啊！

T：可是我現在是從一次加兩次，一直加…，加到一百次。

S：是不是像有一題一直消掉、一直消掉？

T：題目是從一次加兩次，一直加…，加到一百次，你這求法是…？

S：只求它的倍數。

T：只求最後那個 i^{100} ？

S：所以是錯嗎？所以答案是零？就是到後來全部都消掉？

T：對。

2-4 題錯誤類型

題 目	設 $\alpha=2+i,\beta=3+i,\gamma=5+6i$，則 $(\alpha+\beta)\gamma=$_____（以複數 $a+bi$ 形式表之）。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	不知 $i^2=-1$ 或 i^2 為其他答案	7	41.2

B	兩複數相乘依分配率展開時發生錯誤	2	11.8
C	計算錯誤	5	29.4
D	其他的錯誤	3	17.6

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：兩複數相乘依分配率展開時，有一項爲$12i^2$，因不知$i^2=-1$或以爲i^2爲其他答案，因而造成錯誤。

<<訪談實例 1>>

T：請問你知道這一題的問題在哪裡嗎？

S：這裡嗎？$6i^2+6i^2$？

T：等於$12i^2$，沒有錯，那你爲什麼又把它分解回來？題目是請你算出來還是因式分解？

S：…因爲我沒辦法變這樣，所以我就想把它變這樣。

T：就把因式分解？

S：對。

T：老師請問你i^2等於多少？

S：-1。

T：所以$12i^2$等於多少？

S：-12。

T：這樣你可以改成 $a+bi$ 了嗎？

S：可以。

<<訪談實例 2>>

T：請問你知道這一題錯在哪裡嗎？

S：知道，這應該是負的。

T：爲什麼它是負的？

S：因爲 $2i \times 6i = -12$ 。

T：一開始應該是 $12i^2$ 。

S：對 $12i^2$ 。

T：因爲 $i^2 = -1 \cdots$ 。

S：對。

(2)錯誤類型 B：因對分配率 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 不熟悉。兩複數相乘展開時，發生錯誤。

(3)錯誤類型 C：計算錯誤。

3-1 題錯誤類型

題 目	方程式 $x^2 + x + 2 = 0$ 的二根爲 (1)二相異實根 (2)二相等實根 (3)共軛虛根 (4)以上皆非 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	判別式計算錯誤	3	25
B	利用十字交乘法解方程式，但發生錯誤。	4	33.3
C	其他的錯誤	5	41.7

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：判別式計算錯誤，因而造成誤解。

<<訪談實例>>

T：請問這一題爲什麼會選(1)？

S：我用判別式求。

T：判別式怎麼算？

S：$b^2 - 4ac$ 。

T：你要不要重算一遍？

S：咦！怪怪的？我幹嘛用加的？

T：所以你是判別式算錯了，對不對？

S：嗯！

(2)錯誤類型 B：嘗試利用十字交乘法解方程式，因分解錯誤，而得實根，造成選項錯誤。

<<訪談實例>>

T：請問你知道這題為什麼錯嗎？

S：我覺得沒有錯。

T：你覺得沒有錯？

S：(笑)

T：知道錯在哪裡嗎？

S：應該是常數項一個正一個負。

T：一個正一個負？

S：嗯！

T：這個是負，這樣乘起來就對了？

S：嗯！

T：可是十字交乘法，這個乘起來要等於誰呢？

S：要等於後面的常數。

T：要等於後面這個 2？

S：…

T：你知道問題到底出在哪裡了嗎？

S：這怎麼分解？

T：他不能分解。

3-2 題錯誤類型

題 目	設 $z=3+5i$ ，則 $\lvert\bar{z}\rvert=$_____。

錯誤類型	錯　誤　的　原　因	人數	答錯人數比率(%)
A	不知絕對值的定義或定義錯誤	35	59.3
B	絕對值計算錯誤	8	13.6
C	絕對值與共軛複數觀念混淆	14	23.7
D	其他的錯誤	2	3.4

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：

<1>不知絕對值的定義。

<<訪談實例 1>>

T：$|\bar{z}| = |3-5i|$，這是對的，然後接下去呢？

S：我忘記了。

T：忘記絕對值怎麼算？

S：對。

<2>絕對值定義錯誤。

<<訪談實例 2>>

T：z 是 3+5i，然後 $|\bar{z}|$ 你的答案只有 3-5i。

S：嗯。

T：3-5i 是什麼意思？

S：因為上面這個(共軛複數符號)，然後中間(負號)要換。

T：因為是共軛複數，所以 3+5i 改成 3-5i？

S：嗯！

T：但是我還有一個絕對值？

S：…咦？對！…可是絕對值的話，如果他前面沒有負的話，應該也是正的。

國立政治大學 National Chengchi University

T：你的意思就絕對值，就把前面的實部變成正的？

S：嗯！

(2)錯誤類型 B：絕對值運算錯誤。

(3)錯誤類型 C：對絕對值的概念停留在實數的絕對值，只改變正、負號；共軛複數則是改變虛部的正負號。兩者產生混淆。

<<訪談實例>>

T：你算出 $\bar{z}=3-5i$ 這是對的，可是題目有絕對值，你怎麼就只有寫 3-5i？

S：因為發現加了絕對值，正負號就改了，改了之號發現和原本一樣，我想怪怪的。

T：所以你認為絕對值就是改正負號？

S：對啊！

3-3 題錯誤類型

題 目	設複數 $z=3+2i$，則 $z\times\bar{z}$ 之值為_____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	$\bar{z}$ 錯誤	6	35.3
B	分配率展開發生錯誤	4	23.5
C	不知 i^2 之值或-4 $i^2\neq 4$	6	35.3
D	其他的錯誤	1	5.9

錯誤類型原因探討：

(1)錯誤類型 A：$\bar{z}$ 寫錯了。

<<訪談實例>>

T：請問你知道這一題錯在哪裡嗎？

S：就是虛數要變號。

T： $z=3+2i$ 的話， $\bar{z}$ 應該是…？

S：3-2i。

T：你寫…

S：我不知道那時候的想法。

T：你現在知道就是虛數變號？

S：嗯！知道了。

(2)錯誤類型 B：因對分配率 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 不熟悉。兩複數相乘展開時，發生錯誤。

<<訪談實例>>

T：請問你知道這一題錯在哪裡嗎？

S：就這個是嗎？

T：這個是什麼？

S：2i 乘 3。

T：2i 乘 3 等於 6i 。

S：嗯！

T：然後，後面應該是…

S:-4…+4？

T：一開始是 $-4i^2$ 。

S：嗯！

T：然後等於+4 喔？

S：嗯！

T：所以是展開的時候…

S：算錯了。

T：其實是有一個公式的，請問有沒有(a+b)(a-b)這個公式？

S：嗯！ T：叫做平方差，他等於 a^2-b^2 。

(3)錯誤類型 C：不知 i^2 之值或-4 $i^2 \neq 4$。

3-4 題錯誤類型

題 目	設 $x^2+3x+1=0$ 二根為α ， β ，則下列何者錯誤？ (1) $\alpha+\beta=-3$ (2) $\alpha\beta=1$ (3)α ，β 均為負數 (4) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=-1$ 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	根與係數公式錯誤	8	15.1
B	α,β 之正負判斷錯誤	17	32.1
C	求出 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=-1$	5	9.4
D	「複數」與「負數」混淆不清	8	15.1
E	其他的錯誤	15	28.3

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：由(1),(2)選項了解需利用「根與係數」此一性質，但公式背錯了。

<<訪談實例>>

T：這一題你好像是要用根與係數的觀念算出來？ S：對。 T：你知道錯在哪裡嗎？ S：不知道，…好像是根與係數公式背錯了。

(2)錯誤類型 B：由判別式大於 0，確定為兩相異實根，以為「相異」就是一正一負。

<<訪談實例>>

T：你求出判別式是 5，爲什麼就可以說一個是正的，一個是負的？

S：判別式是 5？

T：判別式是 5，代表是…？

S：噢！

T：判別式大於 0 代表是一正一負嗎？

S：是啊！

T：應該是兩相異實根吧！

S：兩相異實根？

T：對啊！那就一定是一正一負嗎？

S：我不知道。

T：它只是說相異而已啊！

S：嗯！

T：所以並不能說他一定是一正一負。

S：哦！

(3)錯誤類型 C：$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta$，不知由於$\alpha,\beta$ 均爲負數，$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$，因而得到「-1」這個答案。

<<訪談實例>>

T：請問第四選項，$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ 有什麼限制？

S：不知道。

T：跟剛剛一樣。

S：要正數噢？

T：對，你確定α 是正的？還是負的？

S：不知道。

T：兩個數相乘是正的。

S：所以這兩個數是負的。

T：所以乘的時候又跟剛剛 $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ 一樣，所以這地方要變成…

S：減的(負的)。

(4)錯誤類型 D：將「複數」與「負數」兩個名詞弄混了。

<<訪談實例>>

T：你寫出判別式是正的，就選(3)，為什麼？

S：因為「負」數的話不是要判別式小於 0 嗎？

T：你看一下這個「負」是正負號的負，我們教的是複雜的「複」。

S：那小於 0 是有兩根虛根？

T：對，虛根，複根。

S：哦！…

T：這是比 0 大，比 0 小的意思，這是有 i，沒有 i 的意思。

S：…

T：了解嗎？

S：了解。

國立政治大學 National Chengchi University

3-5 題錯誤類型

題 目	設 $z=1+i$ ， $w=3-4i$ ，則共軛複數 $\overline{z^2\cdot w}=$ _____。 （以複數 $a+bi$ 形式表之）		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	不知道「橫槓」代表共軛複數符號或誤解其意思	14	38.9
B	z^2w 計算正確，但求共軛複數時發生錯誤	2	5.6
C	計算 z^2 時，發生錯誤	6	16.7

D	利用複數運算性質，但發生錯誤	3	8.3
E	其他的錯誤	11	30.1

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：不知道「橫槓」代表共軛複數符號或誤解其意思。

<<訪談實例>>

T：請問你知道這一題錯在哪裡嗎？

S：…

T：$z^2 = 2i$，對的。然後 $w = 4 - 3i$，乘開後是對的。但請問你有沒有看到這一橫？

S：嗯(有)！

T：請問那一橫代表什麼意思？

S：意思是虛數要變號。

T：就是共軛複數？

S：嗯！

T：所以這一題答案是…

S：6-8i。

T：所以這一題是因爲沒有看到那一橫嗎？

S：我那時候不會變號。

T：考試的時候並不知道那一橫的意思？

S：對。

(2)錯誤類型 B：z^2w計算正確，但求共軛複數時發生錯誤。

(3)錯誤類型 C：計算 z^2 時，發生錯誤。例如: $(1+i)^2 = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$

(4)錯誤類型 D：利用複數運算性質，但發生錯誤。

4-1 題錯誤類型

題 目	設 $z_1 = 2+3i$， $z_2 = 3-4i$，則 $\lvert z_1 - z_2 \rvert$=_____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	不知絕對值符號的意義或將誤解其定義	39	56.5
B	求 $z_1 - z_2$ 時，計算錯誤	15	23.2
C	以為 $\lvert z_1 - z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$	4	5.8
D	其他的錯誤	11	15.9

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：不知絕對值符號的意義，所以視而不見。或將誤解其定義，還停留在實數絕對值的觀念。

<<訪談實例>>

T：請問你算到絕對值裡面是-1-7i，為什麼會等於 1-7i?

S：改前面的負號啊！

(2)錯誤類型 B：括弧前有負號去刮弧時，只有第一項變號。例如: $z_2 = 3-4i$，則 $-z_2 = -3-4i$。

<<訪談實例>>

T:請問你知道這一題錯在哪裡嗎？

S：就是 $3i-(-4i)$ 應該等於 $7i$。

T：就是 $-(-4i)$ 應該負負得正，變成正 $4i$？

S：對。

(3)錯誤類型 C：以為 $\lvert z_1 - z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$。

<<訪談實例>>

T：請問為什麼這一題答案是 $\sqrt{13}-5$？

S：不知道。

T：你是不是以為$|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$？

S：好像吧！

T：我們有這個性質嗎？

S：沒印象。

T：我們沒有這個性質。

4-2 題錯誤類型

題 目	計算$\left|(1+2i)^2(3-4i)\right|$＝_____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	不知絕對值符號的意義或誤解其定義	31	50
B	$(1+2i)^2(3-4i)$ 展開化簡時運算錯誤	29	46.8
C	求絕對值時運算錯誤	2	3.2

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：不知絕對值符號的意義或誤解其定義 。

<<訪談實例>>

T：你算到最後是$|7+24i|$，這是對的。然後絕對值卻忽然間消失了？

S：因為之前的絕對值是：裡面是負的話，不管怎樣都會變成正的。

T：可是我們這裡是複數的絕對值，應該是怎麼算？他代表的是什麼意思？

S：根號…

(2)錯誤類型 B： $(1+2i)^2(3-4i)$ 展開化簡時運算錯誤。

<<訪談實例>>

T：請問為什麼你算 $(1+2i)^2$ 等於 -1？

S：因為想說平方，1 的平方是 1，i 的平方是-1。

T：所以是 1-2=-1？

S：對。

T：但是你 2 有沒有平方。

S：啊！對喔！

(3)錯誤類型 C：求絕對值時運算錯誤。

4-3 題錯誤類型

題 目	$\left\|\frac{4+3i}{6-8i}\right\|$之值爲_____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	不知絕對值符號的意義或將其誤解定義	36	61
B	將$\frac{4+3i}{6-8i}$分母有理化，化簡過程發生錯誤	18	30.5
C	其他的錯誤	5	8.5

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：不知絕對值符號的意義或將其誤解定義 。

<<訪談實例>>

T：你算到這裡是$\frac{50i}{100}$，然後取絕對值，答案爲什麼是$\frac{1}{2}i$呢？

S：我不知道。

T：你知道絕對值的意思是什麼嗎？

S：出來都正的。

T：絕對值的意思是出來都正的？

S：嗯！

T：複數取絕對值也是這樣嗎？

S：複數取絕對值…

T：正的出來是正的，負的出來也是正的。那是國中的時候，那是實數啊！

S：嗯！

T：我們現在是複數，i 是正的，還是負的？

S：不知道啊！

T：i 沒有正負可言啊！所以我們的絕對值是這樣定義的嗎？

S：嗯！

T：你知道絕對值是怎樣定義的嗎？

S：…不知道。

T：所以你的問題是出在這邊？

S：對。

(2)錯誤類型 B：將 $\frac{4+3i}{6-8i}$ 分母有理化，化簡過程發生錯誤。較常見如下：分母有理化 $(6-8i)(6+8i)=6^2-8i^2=36+8=44$ 。

4-4 題錯誤類型

題 目	3，$-i$，$2i$ 在複數平面對應的點依次為 A，B，C，則△ ABC 的面積 =_____ 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	A,B,C 三點座標錯誤	4	18.2
B	A,B,C 三點座標正確，但求三角形面積錯誤或不會求面積	9	40.9
C	其他的錯誤	9	40.9

錯誤原因探討：

(1) 錯誤類型 A：將三個複數對應到複數平面時，對應錯誤。所以無法得到正確的三角形面積。

<<訪談實例>>

T：請問 3,-3,i,- i,2 i,-2 i 這是什麼意思啊?

S：因爲題目說要對應啊！

T：所以你是不知道如何把它對映到複數平面上？

S：對啊！

(2) 錯誤類型 B：已正確地將三個複數在複數平面上的對應點求出，但求三角形面積時發生錯誤，或不會求三角形面積。

<<訪談實例 1>>

T：你把相對在複數平面的位置都找出來，這些都是對的，但爲什麼面積是 4?

S：就是能加就加，然後除…

T：三角形的面積公式怎麼算？

S：$a^2+b^2\cdots$

T：三角形的面積公式是這樣算的嗎？

S：底乘高除以 2。

T：所以這一題是求面積的問題噢！

S：嗯！

<<訪談實例 2>>

T：你把圖都畫出來了，這個圖是正確的，爲什麼沒有求面積？

S：是等腰嗎？…不是等腰。

T：你會不會求面積？爲什麼這一題你沒寫完？

S：我不知道。

4-5 題錯誤類型

題 目	設 $z_1=7+4i$，$z_2=5-5i$，$z_3=-7$，$z_4=8i$，以上哪一個數在複數平面的位置，距離原點最遠? (1) z_1 (2) z_2 (3) z_3 (4) z_4。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)

A	已寫出對應於複數平面的座標，但無法判斷哪一點與原點距離最遠。	17	54.8
B	已寫出對應於複數平面的座標點，但判斷哪一點與原點距離最遠時，計算錯誤或數值大小判斷錯誤。	10	32.3
C	求對應於複數平面的座標時發生錯誤	1	3.2
D	其他的錯誤	3	9.7

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：已寫出對應於複數平面的座標，但無法判斷哪一點與原點距離最遠。

<<訪談實例 1>>

T：你把這些點點在複數平面上，為什麼就可以說 z_4 是最遠的？

S：就這樣啊！

T：你沒有去算它？

S：我不知道怎麼算。

國立政治大學 National Chengchi University

<<訪談實例 2>>

T：你把這些點點出來後，為什麼就可以說 z_4 是最遠？

S：因為 z_3 不可能。

T：哪 z_1 、 z_2 有可能嗎？

S：這個不可能。

T： z_2 也不可能？

S：…感覺(不可能)。

(2)錯誤類型 B：已寫出對應於複數平面的座標點，但判斷哪一點與原點距離最遠時，計算錯誤或數值大小判斷錯誤。

<<訪談實例 1>>

T：你把這些點都點出來這是對的，爲什麼你就可以選答案是 z_4 呢？

S：因爲這是 1,2,3,4,5 有 5 格(z_2)。

T：5 格。

S：這是 7 格(指 z_3)。

T：7 格。

S：這也是 7 格(指 z_1)，然後這比較遠。

T：可是這個是斜的，你只算橫的 7 格，直得並沒有算。

S：…

T：請問應該怎麼算？

S：應該橫的、直的、三角形。

T：直角三角形嗎？應該使用什麼公式算？

S：…畢氏定理。

T：而不是一格一格算？

S：嗯！

國立政治大學 National Chengchi University

<<訪談實例 2>>

T：你算出 z_1 是 $\sqrt{65}$ ， z_2 是 $\sqrt{50}$ ，爲什麼你選最大的是 z_4 ？

S：因爲…這個不是大於 z_3 嗎？

T: 請問 z_4 是多少？

S： z_4 是 $8i$ 啊！

T：它的絕對值是多少？

S：…

T：距離原點…

S：8。

T： $\sqrt{65}$ 比 8 大還是小？

S：比 8 小啊！

T：可是 $\sqrt{64}$ 等於 8。

S：嗯！咦？噢？

T：所以 $\sqrt{65}$ 比 8 大。

(3)錯誤類型 C：求對應於複數平面的座標時，發生錯誤。

4-6 題錯誤類型

題 目	設複數 $P=3+5i$ 與 $Q=-1+2i$ 是在複數平面上的二點，則 $\overline{PQ}$ 長為 _____。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	寫出 P、Q 對應於複數平面的座標，但利用兩點距離公式求線段長時，發生錯誤。	5	16.7
B	寫出 P、Q 對應於複數平面的座標，但利用畢氏定理求線段長時，發生錯誤。	7	23.3
C	求 $\lvert P-Q\rvert$，計算錯誤	4	13.3
D	其他的錯誤	14	46.7

錯誤原因探討：

(1)錯誤類型 A：寫出 P、Q 對應於複數平面的座標，但利用兩點距離公式求線段長時，發生錯誤。

<<訪談實例>>

T：你把 P 點、Q 點都寫出來了，然後呢？

S：…就把那二個相加。

T：就是要利用二點距離的公式去算？

S：對。

T：請問你現在能夠寫出來嗎？

S：不太能。

T：不太能？所以你那是後應該是二點距離公式算錯了 ？

S：對啊！

(2)錯誤類型 B：寫出 P、Q 對應於複數平面的座標，但利用畢氏定理求線段長時，發生錯誤。

<<訪談實例>>

T：P 是 3+5*i* 所以 P 點是(3,5)，Q 是-1+2*i* 所以 Q 點是(-1,2)，這是對的。然後，請問你這二點的線段長是多少？

S：就是 3,4,5 三角形。

T：你利用直角三角形？

S：嗯！

T：所以 3 的平方加 4 的平方等於 5 的平方？

S：對。

T：所以答案應該是…

S：5。

T：你是忘了開根號。

S：嗯！看太快了。

(3)錯誤類型 C：以$|P-Q|$方式求線段長，但過程中計算錯誤。

4-7 題錯誤類型

題 目	在複數平面上，滿足 $\lvert z\rvert=1$ 的全體複數 z 形成什麼圖形？ (1)二個點 (2)一直線 (3)菱形 (4)圓形 。		
錯誤類型	錯 誤 的 原 因	人數	答錯人數比率(%)
A	停留在實數絕對值觀念	12	30

	$(\lvert z\rvert = 1 \Rightarrow z = \pm 1)$		
B	停留在整數觀念 $(\lvert 1\rvert = 1, \lvert -1\rvert = 1, \lvert i\rvert = 1, \lvert -i\rvert = 1)$	14	35
C	其他的錯誤	14	35

錯誤原因探討：

(1) 錯誤類型 A：對絕對值的觀念停留在實數取絕對值。

<<訪談實例>>

T：$\lvert z\rvert = 1$，你在這裡畫一個線段 1 跟-1，就選一直線，請問是為什麼？

S：不知道。

T：請問你為什麼會寫出 1 跟-1？

S：因為去絕對值後是正負 1。

T：去絕對值後要加正負號，這是國中的觀念？

S：嗯！

T：可是國中時的 x 是實數，現在的 z 是什麼數？

S：虛數，複數。

T：所以除了正負 1 以外，還有沒有其他的可能？

S：…

(2) 錯誤類型 B：停留在整數觀念。

<<訪談實例>>

T：請問為什麼答案是(3)菱形？

S：因為 z 啊！就是那個點嘛，(絕對值)要等於 1，然後(其他)就一樣。

T：找出這 4 個點？

S：對對對。

T：有沒有別的可能？跟它距離也是 1？

S：…

T：如果你拿一個圓規，圓心在(0,0)，半徑是 1，劃一個圓。那上面那些點(距原點)的距離是多少？

S：1。

T：那些點算不算？

S：算。

T：所以這題的答案應該是…

S：圓形。

4.2 解題錯誤主要類型及原因

由 4.1 節的整理、分析、歸納，可以發現某些題目的錯誤具有相同屬性，類似的錯誤重複發生在不同的題目中，此即本研究所謂的主要錯誤類型，本節將討論這些主要的錯誤類型及其錯誤產生的原因。由於造成學生解題發生錯誤的因素非常複雜，研究者儘可能將其歸類，並探究其原因，以作爲研擬補救教學教材的參考依據。

國立政治大學 National Chengchi University

4.2.1 複數與複數平面解題主要錯誤類型

綜合 4.1 節，可將學生本單元的解題錯誤分爲下列幾個主要的類型 ：

(1)對複數的定義了解不清

<1>有 6 位學生未考慮負號，以爲「沒有 i 的就是實部」。另有 4 位學生以爲「前面是實部；後面是虛部」。

<2>有 10 位學生不具「 虛數無大小」觀念，認爲「正數大於負數」，所以 $3i > -3i$ 。另有 10 位學生，並不清楚「 i 」是什麼？

<3>有 6 位學生利用「『實部=實部』且『虛部=虛部』」性質時，發生錯誤。

<4>有 8 位學生兩複數相除時，以爲「等號左邊實部相除=等號右邊實部；等號左邊虛部相除=等號右邊虛部」。

<5>有 11 位學生以為「 $\sqrt{6}i \neq \sqrt{-6}$ 或 $\sqrt{\frac{2}{3}}i \neq \sqrt{\frac{-2}{3}}$ 」。

<6>有 8 位學生「負數」與「複數」混淆不清。

可見建立一個新的概念是不容易的，學生常常不清楚該新概念的定義是什麼？產生似是而非的見解。

(2)不知二根式乘、除的運算規則

<1>有 7 位學生直接將 $\sqrt{-2}$ 、 $\sqrt{-3}$ 相乘得 $\sqrt{6}$ ，不知二根式乘、除時，根號內的數應均為正數。

<2>有 5 位學生求 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 時，不考慮 α 與 β 是否為正數，直接將 $\sqrt{\alpha}$ 及 $\sqrt{\beta}$ 相乘得 $\sqrt{\alpha\beta}$ 。

顯然受國中根式運算的影響，因為國中時根號內的數必為正數。長期下來，以為二根式乘、除，就是根號內的二數直接乘、除。

(3)不熟悉 i 的 n 次方，或不具「級數」觀念無法順利利用 i 乘冪的特殊性質

<1>2-4 題有 7 位、3-3 題有 6 位學生，不知 $i^2=-1$ 或以為 i^2 為其他答案。

<2>有 7 位學生知道 $i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}+i^{n+4}=0$ (n 為自然數)，卻誤解題意，以為「 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}=$ ？只是求 i^{100} 」，缺乏「級數」的觀念。

學生都知道「 $i=\sqrt{-1}$ 」，但少部分學生不知道「 i^2=-1」。另一方面，級數觀念尚未建立，無法順利利用 i 乘冪的特殊性質。

(4)作複數的四則運算時易發生錯誤

<1>有 10 位學生，括弧前有負號，去刮弧時，只有第一項變號。

例如： $-(a+b)=-a+b$ 。

<2>有 15 位學生二複數相減時，發生錯誤。

<3>1-4 題有 5 位、2-4 題有 2 位、3-3 題有 2 位學生，兩複數相乘展開時發生錯誤。

<4>有 6 位學生計算 z^2 時，發生錯誤。

<5>有 29 位學生將 $(1+2i)^2(3-4i)$ 展開化簡時運算錯誤。

<6>有 18 位學生將 $\frac{4+3i}{6-8i}$ 分母有理化，化簡過程發生錯誤。

<7>有 9 位學生以分子、分母同乘 $x-yi$ 方式，求等式「$\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$」中的 x,y，因爲運算變得複雜而無法算出。同一題有 2 位學生，因爲分子或分母移項時發生錯誤，而無法求得正確答案。

由以上統計，可以發現學生在複數四則運算方面，是非常容易算錯的。學生大多知道基本的運算規則，包括括弧前有負號，去括弧時每一項均需變號、將二複數相乘時須依分配率展開、將分子、分母同乘分母的共軛複數，以便將分母有理化…等。但由於多了一個複數「i」，使得計算變得較爲複雜，且因爲 i^2=-1，與國中時的 x^2 並不相同。學生計算時，需同時注意數個的地方。因此，發生錯誤的機會大增。

(5)不知複數的絕對值的意義

<1>4-1 題有 39 位、4-2 題有 31 位、4-3 題有 36 位學生，不知絕對值符號的意義或將誤解其定義。

<2>4-2 題有 4 位學生，以爲 $|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|$。

由<1>可知有 30 幾位學生並不清楚複數絕對值的定義，或觀念仍停留在國中「負的變正的；正的還是正的」的錯誤觀念。例如：$|z_1-z_2|=\cdots|-1+7i|=1+7i$。至於以爲 $|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|$ 的學生，則是將減法作錯誤的推論。

(6)不清楚共軛複數的定義或共軛複數與複數絕對值產生混淆

<1>3-3 題有 6 位、3-5 題有 14 位學生，不知道「橫槓」代表共軛複數符號或誤解其意思。

<2>3-5 題有 2 位學生，z^2w 計算正確，但求共軛複數時發生錯誤。

<3>3-2 題有 14 位學生，絕對值與共軛複數觀念混淆。

如果複數的定義不清，將影響對共軛複數的認知。而共軛複數的符號，對高一的學生而言，並不熟悉。再者，共軛複數是將複數的虛部變號，與學生國中時「負的變正的，正的還是正的」的觀念，易產生混淆。例如：$z=3+5i$，所以 $|\overline{z}|=3-5i$，或 $|\overline{z}|=|3-5i|=3+5i$。

(7)不會利用複數絕對值的運算性質

由 4-2,4-3 題，可知約有 10 餘位學生並不會利用複數絕對值的運算性質，以致產生第(4)項的錯誤。如果會利用複數絕對值的運算性質，將可大幅縮短計算的時間，也較不會產生計算錯誤。

(8)無法將複數正確地對應到複數平面上

4-4 題有 4 位、4-5 題有 1 位學生無法將複數正確地對應到複數平面上。對某些學生而言，將一個複數的實部視爲 x 座標、虛部視爲 y 座標，仍然是有困難的。

(9)平面幾何能力不足。

<1>4-4 題有 9 位學生，A,B,C 三點座標正確，但求三角形面積錯誤或不會求面積。

<2>4-5 題有 27 位學生，已寫出對應於複數平面的座標，但無法判斷哪一點與原點距離最遠，或判斷哪一點與原點距離最遠時，計算錯誤或數值大小判斷錯誤。

<3>4-6 題有 5 位學生，寫出 P、Q 對應於複數平面的座標，但利用兩點距離公式求線段長時，發生錯誤。

上述學生雖具有將複數對應到複數平面的能力，但卻因爲平面幾何能力不足，而無法將正確答案求出，又從 4-7 題也可以看出部份學生答錯的因素，是因爲平面上二點間距離觀念薄弱。可見先備知識的不足，影響單元學習成效甚巨。

(10)尚未建立複數概念

<1>3-1 題有 4 位學生，試著利用十字交乘法解方程式 $x^2+x+2=0$，但是發生錯誤。另有少數學生以配方法求其解，但卻無法求出。其背後的因素，都可能是尚未建立複數概念。

<2>4-7 題有 12 位學生，其作法爲：$|z|=1 \Rightarrow z=\pm 1$。類似國中時 $|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$，可見尚未建立複數概念。

(11)習慣以整數思考

4-7 題有 14 位學生，其作法只考慮：$|1|=1, |-1|=1, |i|=1, |-i|=1$ 四個數。可見雖然已有複數概念，但仍習慣以整數思考。未考慮例如：

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$ 此類有理數或 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$ 此類實數。

4.2.2 複數與複數平面解題主要錯誤類型的產生原因

由 4.2.1 節所列的十一種主要的錯誤類型，其產生的原因可歸納爲下面幾點：

(1)定義不清，似是而非：

因爲一個複數分爲實部與虛部，對高一的學生而言，是從未見過的，需要一段時間才能適應。$i=\sqrt{-1}$ 與以往「根號內必爲正數」的認知，產生衝突。又 i^2=-1，「某數平方後竟然是負數？」這是許多學生共同的疑問。二複數相乘像是二個一元一次多項式相乘，但卻要記得把 i^2 換成-1，這常讓學生覺得困擾。而共軛複數是將虛部變號，是比較沒有問題的。但若與絕對值一起出現，便會產生混淆。因爲部份學生並不清楚絕對值的定義是：複數對應到複數平面上的位置與原點的距離。其複數絕對值的觀念還停留在國中時「負的變正的，正的還是正的」，因爲國中時所遇到的都是實數，實數取絕對值的結果，確實會有這種現象。一個虛部爲負的複數，其共軛複數也是把虛部改爲正的，這是學生產生混淆的原因。如果學生對複數、共軛複數、複數絕對值的定義不清楚，或似是而非的話，勢必無法進入下一階段的學習。

(2)受直觀影響，產生錯誤類推：

Tirosh 及 Stavy(2001)研究數學和科學概念的學習發現，學生在某些類別問題上的直觀反應模式相當類似。這些認知有時是正確的，對於學習有很大的幫助，而有些是不正確的，則對於學習是一大阻礙。高一的學生由於對根號的運算不熟悉，常有 2+3=5，所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ 的類推。於本單元則有：$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$，所以 $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)\cdot(-3)}=\sqrt{6}$、$3>-3$，所以 $3i>-3i$、$|5-3|=|5|-|3|$，所以 $|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|$ 等較常見的錯誤類推。這些錯誤的類推，都會嚴重影響本單元的學習，而且不容易更正。

(3)無法將複數與複數平面連結：

將複數對應到複數平面上，使複數與平面幾何建立聯繫，對高一的學生是

非常重要的。高一下學期的極式、複數的 n 次方根，都是以此爲基礎。學生無法正確地將複數對應到複數平面上，會影響對複數絕對值的認知，更遑論以後的應用。一部份學生是根本無法將複數對應到複數平面上；另一部份則是常標錯位置。

(4)先備知識不足：

數學的學習是環環相扣的，許多學生都表示：「國中時數學沒學好，造成現在學習的困難，即使下決心要將數學學好，仍然力有未逮，覺得非常痛苦。」相信這是許多將數學視爲最痛苦科目的學生，他們共同的心聲。教學時，常發現學生學習的問題其實是因爲先備知識的不足，並非無法接受新的概念。於解題測驗發現有：依乘法分配律展開發生錯誤、十字交乘法分解錯誤，例如：$x^2+x+2=(x+1)(x+2)$、配分法錯誤、根號化簡發生錯誤、無法比較無理數大小、二元一次方程組解錯、去括弧發生錯誤、指數觀念不足、一元二次方程式判別式錯誤、根與係數公式錯誤、不會求三角形面積、無法判斷與原點距離的遠近、不會求平面上二點的距離、習慣以整數思考…等，尚有一些非系統性的計算錯誤。如果學生因爲先備知識不足，造成無法解題或解題錯誤，將會嚴重打擊學生的學習信心，澆熄學生對數學的熱情。