5　補救教學活動與成效分析

高一年級學生上完「複數與複數平面」單元後，施予測驗，發現有若干部份學習成效不佳，應舉行補救教學以謀求改善。研究者將依據學生的答題情況，予以整理、分析、歸納，找出學生學習此單元時常犯的主要錯誤類型，再針對這些主要的錯誤類型設計補救教學活動，祈能改正錯誤、增進學習成效。補救教學後，研究者將探討所設計的補救教學活動的施行成效。分析學生在補救教學活動後，其空白率是否下降？其答對率是否提高？經過一段時間後，此單元學習內容保留得如何？學生對整個補救教學活動有何看法？是否有需要改善的地方？由於時間及人力的限制，僅對 A、B 兩班共 82 名學生實施補救教學。

5.1 補救教學活動

5.1.1 高一學生「複數與複數平面」單元主要錯誤類型

由上一章的分析結果，可將學生學習此單元時易發生的錯誤，歸納爲下列 11 個主要的錯誤類型：

(1)對複數的定義了解不清。

(2)不知二根式乘、除的運算規則。

(3)不熟悉 i 的 n 次方，或不具「級數」觀念無法順利利用 i 乘冪的特殊性質。

(4)作複數的四則運算時易發生錯誤。

(5)不知複數絕對值的意義，或觀念仍停留在國中「負的變正的，正的還是正的」的錯誤觀念。

(6)不清楚共軛複數的定義或共軛複數與複數絕對值產生混淆。

(7)不會利用複數絕對值的運算性質。

(8)無法將複數正確地對應到複數平面上。

(9)平面幾何能力不足。

(10)尚未建立複數概念。

(11)習慣以整數思考。

5.1.2 補救教學活動設計

「複數與複數平面」單元教學完畢後，施予由研究者自編「複數與複數平面單元解題測驗卷」。就學生試卷上的答題內容，同時對部份學生做進一步的訪談，經整理、歸納、統計及分析以了解其作答時的思考路徑與解題策略。學生產生以上 11 種主要的錯誤類型，應有以下原因：

(1)定義不清，似是而非。

(2)受直觀影響，產生錯誤類推。

(3)無法將複數與複數平面連結。

(4)先備知識不足。

針對以上原因，設計補救教學活動時，應掌握以下方向：

(1)給予明確定義：「複數」對高一的學生而言，是極為陌生、抽象的一個全新的數系，尤其是前二節才將數系擴充至實數，接著又擴充至複數；前一節才介紹直角座標平面，接著馬上又介紹複數平面。對學生而言，似乎緊迫了點。根據研究者多年的教學經驗，剛升上高中的一年級新生，大多有「消化不良」的現象。所以，應給予明確的定義，以免學生因定義不清，觀念產生混淆，日後若要予以更正，將是曠日費時且成效有限。

(2)增進學生有關複數的運算邏輯，更正受直觀影響而產生錯誤類推的運算過程：從上一章的錯誤類型分析，可以發現學生許多解題錯誤是因為對複數的運算邏輯不清所產生的。例如：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 的條件是 a,b 均為正數，由於學生高中以前從未見過根號內的數為負數，便直接將二數相乘。又如：兩複數相除時，以為「等號左邊實部相除＝等號右邊實部，等號左邊虛部相除＝等號右邊虛部」，便將 $\frac{a+bi}{c+di}=e+fi$，拆成 $\frac{a}{c}=e$ 且 $\frac{b}{d}=f$。由於數學概念影響直觀的表現，正確的數學概念引發正確的直觀，若是不正確的數學概念常會引發直觀迷思。因此，在學習數學概念時，若是學生先出現直觀的迷思，對於學習必定是一種阻礙。所以，教師一定要幫助學生克服直觀迷思、建立正確直觀，同時重新建構正確的數學概念(金鈐、王安蘭，2006)。

(3)強化學生對複數和複數平面圖形的連結：讓學生了解複數與複數平面上的位置形成一對一的對應，每一個複數均能在複數平面上標出它所對應的位置。此部份可以利用 PowerPoint 的動態功能，以直覺的影像變化加強學生的概念。至於簡單的複數方程式在複數平面上所形成的圖形，則可利用 GSP 的軌跡殘留功能，讓學生能直觀地判斷並且接受。

(4)適時加強學生的先備知識：從解題測驗發現學生的先備知識不足，是嚴重影響本單元學習的一項因素。因此，於每一次補就教學活動進行前，應先喚起學生的的先備概念。於活動進行時，適時提醒學生該注意常犯錯誤的地方。若發現學生因先備知識不足影響概念吸收時，應予以補充。

依循上述的四個主要的方向，研究者將本次補救教學分成六個活動進行。每一次活動進行前，均先介紹本次活動的主要目的，並於講解後，立即練習學習單上的練習題，以求加深學生印象，收事半功倍之效。以下為補救教學活動的簡要說明：

(1)活動一：複數的定義

活動目標：讓學生清楚複數的定義。

複數的定義為：$Z = a + bi$，a, b 均為實數，則稱 Z 為複數。其中，a 為實部，b 為虛部。並非學生常犯的誤解，以為「前面的數是實部，後面的數是虛部」，或是「虛部為 bi」。進而使學生能利用複數相等的概念，解答含有複數的方程式的問題。希望藉由此教學活動讓學生清楚複數的定義，以利後續的教學。

(2)活動二：複數的四則運算

活動目標：讓學生能夠做正確的複數四則運算。

首先是確立二根號乘、除的運算規則，根號內的數必須為正數。若為負數，須將其改成 $\sqrt{a}i$ ($a > 0$)的形式，才可以相乘、除。其次要介紹二複數加、減時，應實部與實部相加、減，且虛部與虛部相加、減。尤其要提

醒括弧前若爲負號，去刮弧時，括弧內每一數均須變號。例如：$-(a-b)$ $=-a+b$。第三：二複數相乘時，應依分配率展開，且將i^2化爲-1。最後：二複數相除時，應將分子、分母同乘分母的共軛複數。然後分子依分配率展開，分母使用平方差公式化簡，使分母變成有理數。

(3)活動三：i乘冪的性質

活動目標：讓學生了解並活用i乘冪的性質。

介紹i，i^2，i^3，i^4等四個複數，讓學生知道因爲i^4=1。所以，i^n (n爲自然數)每4次方便循環一次，即使次方很大，最後均爲實數或i的一次方。又因爲$i+i^2+i^3+i^4=0$，連續4個i的乘冪相加爲0，連續多個i的乘冪相加，其值亦能輕易求出。

(4)活動四：複數的絕對值

活動目標：讓學生了解絕對值的定義，及在複數平面上所代表的意義。

首先要改正學生國中時「絕對值就是負的變正的，正的還是正的」的錯誤概念。讓學生知道複數絕對值的定義爲「複數在複數平面上相對應的點與原點的距離。」其次，要能比較複數絕對值的大小，絕對值越大者，代表其在複數平面上所對應的點與原點越遠。最後，要使學生明瞭$|z_1-z_2|$爲z_1, z_2二點在複數平面上所對應的點的距離。

(5)活動五：複數絕對值的運算性質

活動目標：讓學生了解利用複數絕對值的運算性質，能使複數絕對值的運算變得較容易，且較不易發生運算錯誤。

採用比較的教學方式，每一題都有二種演算方法。一種是直接將絕對值內的複數化成 $a+bi$ ， a, b 均爲實數的形式，再求其絕對值；另一種是使用複數絕對值的運算性質求值。將此二種不同的運算方式顯示同一張簡報畫面上($|(5-12i)^2\cdot(3+4i)^3|$因爲數字太大除外)，讓學生可以感覺這二種方法的差異。

(6)活動六：複數平面上的圖形

活動目標：藉直角座標系的知識，建立複數平面概念。

利用 PowerPoint 的動態功能，使學生感受到所有符合方程式的複數，在複數平面形成圖形的過程。再透過 PowerPoint 簡報超連結至 GSP，利用 GSP 軌跡殘留及測量二點間距離的功能，使學生更加確定所形成的圖形，以加深印象。

5.2 補救教學前、後測成效分析

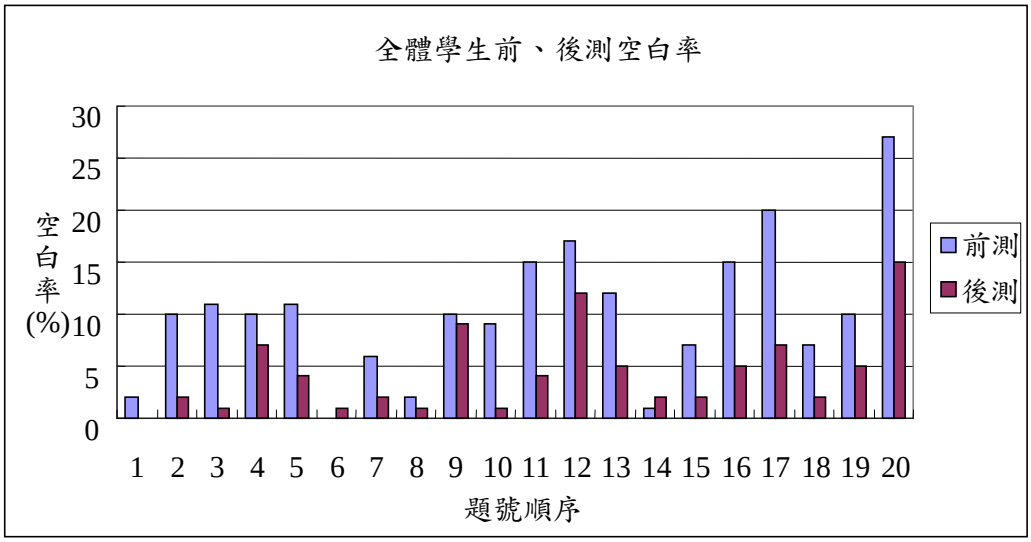
對學生實施補救教學後，經過數日，再施以後測。我們將利用統計軟體對前、後測的結果做檢定，以瞭解補救教學活動，是否能改善學生學習「複數與複數平面」此單元的學習成效？本節將探討前、後測全體學生答題的空白率、答對率，高、低分組後各題的空白率、答對率，及低分組學生個人答題的空白率、答對率改善情況。

5.2.1 未分組成效分析

這一小節將分爲空白率及答對率二部份做分析。

首先針對學生作答時，未答的試題數目做統計分析。下圖爲全體學生補救教學前、後測各題的空白率長條圖：

圖 5-2-1 各題前、後測空白率



由上圖可以發現，大部分試題空白率均明顯下降。下表為每一位學生前、後測未答題數的統計：

表 5-2-1 補救教學前、後測學生未答題數

編號	前測	後測	編號	前測	後測	編號	前測	後測
1	0	0	29	0	0	57	14	11
2	0	0	30	0	0	58	5	0
3	0	0	31	1	0	59	9	1
4	0	0	32	1	0	60	3	0
5	0	0	33	1	0	61	0	0
6	0	0	34	3	0	62	1	0
7	4	0	35	4	0	63	0	0
8	0	0	36	0	0	64	0	0
9	0	5	37	4	2	65	0	0
10	0	0	38	0	0	66	0	0
11	2	1	39	1	0	67	0	0
12	11	2	40	0	0	68	5	1
13	14	4	41	6	6	69	1	1
14	0	0	42	1	1	70	8	3
15	1	0	43	0	0	71	0	0
16	2	2	44	1	0	72	0	0
17	3	0	45	0	0	73	0	0

18	1	0	46	0	0	74	0	1
19	4	1	47	0	1	75	3	1
20	5	4	48	0	0	76	6	6
21	6	4	49	1	0	77	1	1
22	0	0	50	3	0	78	1	0
23	0	0	51	0	0	79	0	0
24	0	4	52	1	0	80	5	1
25	1	0	53	0	0	81	3	0
26	2	0	54	3	0	82	7	2
27	0	0	55	6	7			
28	0	0	56	0	0			

若以每一位學生前測的空白題數減去後測的空白題數，將所得數值作 Z 檢定得：平均數 1.12，Z=7.17 ，P=0.000<0.05，可見經過補救教學後，學生比較熟悉本單元，使得學生個別未答題數明顯降低。

如果以每一題學生是否作答來看呢？下表為每一題學生是否作答及其變化情形的統計：

表 5-2-2 補救教學前、後測每題未答學生數及其改變情形

題號	前測未作答	後測未作答	前測未答 但後測作答	前測作答 但後測未答
1-1	2	0	2	0
1-2	8	2	8	2
1-3	9	1	9	1
1-4	8	6	6	4
2-1	9	3	6	0
2-2	0	1	0	1
2-3	5	2	4	1
2-4	2	1	2	1
3-1	8	7	5	4
3-2	7	1	7	1
3-3	12	3	9	0
3-4	14	10	13	9
3-5	10	4	7	1

4-1	1	2	0	1
4-2	6	2	5	1
4-3	12	4	8	0
4-4	16	6	11	1
4-5	6	2	4	0
4-6	8	4	6	2
4-7	22	12	18	8

由表 5-2-2 可以發現，大部分試題未作答情形已有改善。如果令某位學生對某題作答，其數值爲 0；未答，其數值爲 1。則令

$\begin{cases} H_0 : P_x = P_y \\ H_1 : P_x > P_y \end{cases}$ P_x 爲前測空白率，P_y 爲後測空白率。

$D_i = X_i - Y_i$ X_i 爲前測作答情形，Y_i 爲後測作答情形。

因樣本數 n 已達 82，所以令 $Z = \dfrac{\overline{D} - (P_x - P_y)}{\sigma / \sqrt{n}}$，對每一題空白情形作 Z 檢定得下表：

表 5-2-3 每一題空白情形 Z 檢定

題號	Z 值	顯著性	題號	Z 值	顯著性
1-1	1.423	0.079	3-3	3.160	0.001**
1-2	1.929	0.028*	3-4	0.851	0.199
1-3	2.619	0.005**	3-5	2.169	0.017*
1-4	0.630	0.265	4-1	-1.000	0.160
2-1	2.529	0.007**	4-2	1.650	0.051
2-2	-1.000	0.160	4-3	2.959	0.002**
2-3	1.348	0.091	4-4	3.027	0.002**
2-4	0.575	0.283	4-5	2.038	0.022*
3-1	0.332	0.371	4-6	1.423	0.079
3-2	2.169	0.017*	4-7	1.997	0.025*

（有*者，表該題 P 值<0.05 達顯著水準，有**者，表該題 P 值<0.01 達顯著水準，以下所有的檢定表格亦同。）

觀察上述圖表，研究者有下列幾點發現：

(1)以每一題的作答情形作 Z 檢定，有 10 題達顯著水準，顯示這 10 題空白情況明顯改善。

(2) 1-1,2-3,2-4,4-2 題未達顯著水準的因素，是因爲前測空白人數太少。

(3) 2-2,4-1 題各有一位學生，前測作答，後測卻空白。造成後測空白人數超過前測空白人數。同時也因爲人數少，所以此 2 題 Z 檢定均爲未達顯著水準。

(4) 1-4 題未達顯著水準，顯示此題對部份學生而言，「$\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$」 此式太複雜了。

(5) 3-1 題未達顯著水準，推測學生無法將「x^2+x+2」，又不知何謂「共軛虛根」，以致產生空白。

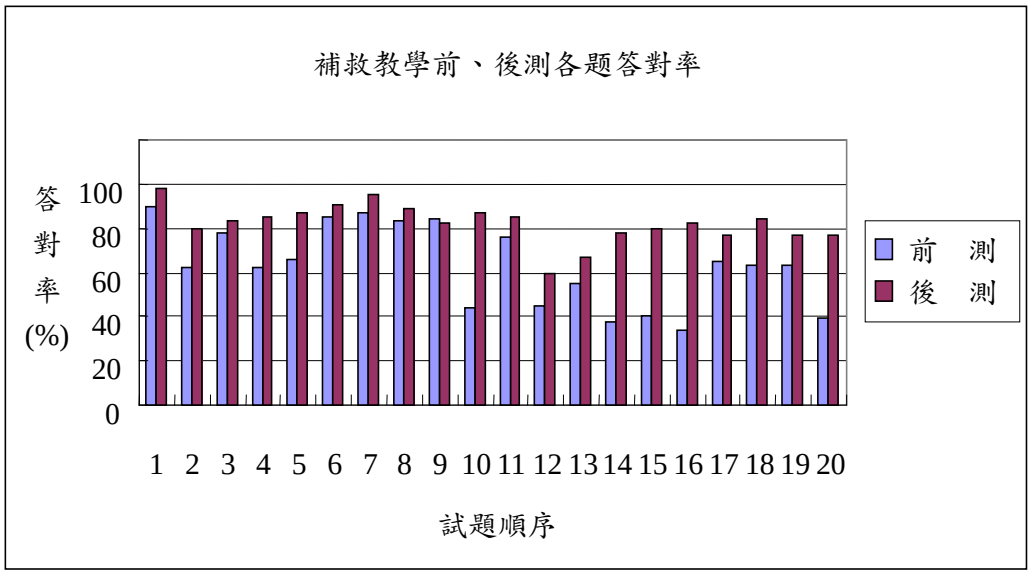
(6) 3-4 題未達顯著水準，其原因是學生不會利用「根與係數」此性質，因此產生空白。

(7) 4-6 題未達顯著標準，可見將複數與複數平面產生連結，對部份學生是困難的。

由以上分析可知：經過補救教學後，學生對「複數與複數平面」這個單元更加熟悉，一方面是因爲不會寫的題目變少了；另一方面因爲作答速度變快，可以有較多的時間思考其他的試題。使得空白率不論是由學生整體作答或試題個別作答情形做檢定，均呈現明顯下降，未作答的試題減少很多。

其次是補救教學後，答對率的分析，下列圖表爲補救教學前、後測各題答對率的長條圖：

圖 5-2-2　各題前、後測答對率



由圖 5-2-2，可知各題答對率明顯提升，其中 3-2,4-1,4-2,4-3 題答對率上升 40%以上。顯示補救教學後，學生更精熟「複數與複數平面」單元的試題。下表為每一位學生前後測答對題數的統計：

表 5-2-4 學生前、後測答對題數

編號	前測	後測	編號	前測	後測	編號	前測	後測
1	20	19	29	10	18	57	4	4
2	19	20	30	11	18	58	13	20
3	12	19	31	11	18	59	11	17
4	12	19	32	16	16	60	15	17
5	13	17	33	19	19	61	20	20
6	19	19	34	5	14	62	18	20
7	10	17	35	10	19	63	19	20
8	18	19	36	19	20	64	17	20
9	13	10	37	4	7	65	15	19
10	12	17	38	13	16	66	16	19
11	11	18	39	4	14	67	19	20
12	6	15	40	17	15	68	7	16
13	1	7	41	7	4	69	11	19
14	19	17	42	7	11	70	9	15
15	12	20	43	20	20	71	15	19

16	9	17	44	19	19	72	19	17
17	10	20	45	20	19	73	18	20
18	18	19	46	14	20	74	9	17
19	6	15	47	16	18	75	12	16
20	6	10	48	11	19	76	5	9
21	8	10	49	9	15	77	12	14
22	14	18	50	12	17	78	15	13
23	18	18	51	17	20	79	11	16
24	6	8	52	13	17	80	7	19
25	10	18	53	20	20	81	10	18
26	11	15	54	8	13	82	6	15
27	14	18	55	6	8			
28	18	18	56	17	18			

觀察表 5-2-4，可知大部分學生的答對題數都是增加的，甚至有增加 10 題以上。顯示補救教學後，大部分學生更了解「複數與複數平面」單元。若以每一位學生後測答對題數減去前測答對題數，將所得數值作 Z 檢定得：平均數差異 4.12，Z=6.047，P=0.000<0.05，可見學生成績明顯改善。如果以每一題學生是否答對來看呢？下表為每一題學生是否答對及其變化情形的統計：

表 5-2-5 補救教學前、後測每題學生未答對人數及其改變情形

題號	前測未答對	後測未答對	前測未答對但後測答對	前測答對但後測未答對
1-1	8	2	8	2
1-2	31	16	22	7
1-3	18	14	9	5
1-4	31	12	21	2
2-1	28	11	20	3
2-2	12	7	10	5
2-3	11	4	8	1
2-4	14	9	10	5
3-1	13	15	6	8
3-2	46	11	36	1
3-3	20	12	13	5

3-4	45	33	16	4
3-5	37	27	20	10
4-1	51	18	35	2
4-2	49	16	35	2
4-3	54	15	40	1
4-4	29	19	17	7
4-5	30	13	23	6
4-6	30	19	16	5
4-7	50	19	34	3

由表 5-2-5 可以發現，大部分試題作答情形已有改善。如果令某位學生對某題答對，其數值爲 1；未答或答錯，其數值爲 0。則令

$$\begin{cases} H_0 : P_x = P_y \\ H_1 : P_x < P_y \end{cases}$$ P_x 爲前測答對率，P_y 爲後測答對率。

$D_i = Y_i - X_i$ X_i 爲前測作答情形，Y_i 爲後測作答情形。

因樣本數 n 已達 82，所以令 $Z = \dfrac{\overline{D} - (P_x - P_y)}{\sigma / \sqrt{n}}$，對每一題的數值作 Z 檢定得下表：

表 5-2-6 每一題答對情形 Z 檢定

題號	Z 值	顯著性	題號	Z 值	顯著性
1-1	1.929	0.029*	3-3	1.916	0.029*
1-2	2.909	0.002**	3-4	2.792	0.003**
1-3	1.700	0.144	3-5	1.853	0.034*
1-4	4.379	0.000**	4-1	6.734	0.000**
2-1	3.829	0.000**	4-2	6.734	0.000**
2-2	1.296	0.099	4-3	8.181	0.000**
2-3	2.400	0.009**	4-4	2.082	0.020*
2-4	1.296	0.099	4-5	3.348	0.000**
3-1	-0.532	0.798	4-6	2.474	0.008**
3-2	7.406	0.000**	4-7	6.128	0.000**

觀察表 5-2-6，研究者有下列幾點發現：

(1)以每一題的作答情形作 Z 檢定，有 16 題達顯著水準，顯示這 16 題學生答題情況明顯改善。

(2)1-3,2-2,2-4 題未達顯著水準，顯示計算長期累積而成的錯誤計算習慣，不易於短期間去除。

(3)3-1 題未達顯著水準，顯示高一的學生尚未熟悉共軛虛根的觀念。

由以上分析可知：經過補救教學後，學生對「複數與複數平面」這個單元更加了解，一方面是對本單元所應學習的內容有進一步的體會；另一方面是補救教學時，老師對學生犯錯的地方特別提醒，使得答對率不論由學生整體作答或試題個別作答情形做檢定，其成效均呈現明顯改善。由此可見，補救教學是具有一定的成效。

5.2.2 分組成效分析

補救教學對前測得分高低不同的學生可能會有不同的影響。為探討這項可能，研究者將前測全體學生成績由高而低依序排序，取前 27 名(32.9%)為高分組，後 27 名為低分組進行分析。下表為全體學生經高、低分組後，前、後測的答對題數統計：

表 5-2-7 高、低分組前後測答對題數

編號（高分組）	前測答對題數	後測答對題數	編號（低分組）	前測答對題數	後測答對題數
1	20	19	17	10	20
43	20	20	25	10	18
45	20	19	29	10	18
53	20	20	35	10	19
61	20	20	81	10	18
2	19	20	16	9	17
6	19	19	49	9	15
14	19	17	70	9	15
13	19	19	74	9	17
36	19	20	21	8	10
44	19	19	54	8	13
63	19	20	41	7	4

67	19	20	42	7	11
72	19	17	68	7	16
8	18	19	80	7	19
18	18	19	12	6	15
23	18	18	19	6	15
28	18	18	20	6	10
62	18	20	24	6	8
73	18	20	55	6	8
40	17	15	82	6	15
51	17	20	34	5	14
56	17	18	76	5	9
64	17	20	37	4	7
32	16	16	39	4	14
47	16	18	57	4	4
66	16	19	13	1	7

以個別學生成績前、後測答對題數作成對樣本 T 檢定得：

(1)高分組：平均數差異 0.52，標準差 1.42，t (26)=1.892，P=0.035<0.05，可見高分組學生成績明顯改善。

(2)低分組：平均數差異 6.19，標準差 3.55，t (26)=9.048，P=0.000<0.05，可見低分組學生成績明顯改善。

國立政治大學 National Chengchi University

5.2.3 低分組成效分析

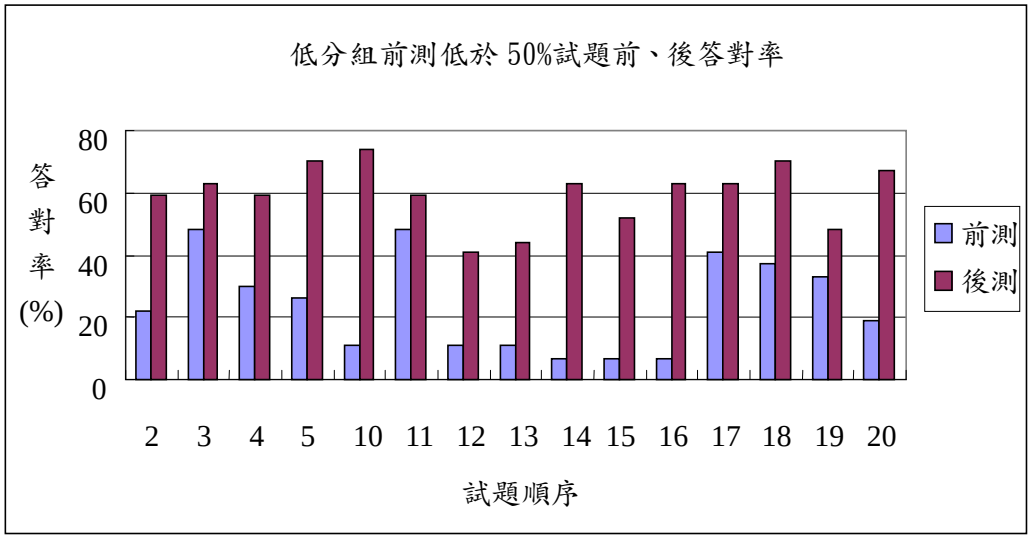
由於低分組平均數差異達 6.19，可見補救教學對低分組學生的學習成效具有極大的改善效果。以下將針對低分組學生，就補救教學成效進行探討。下列圖表爲低分組學生前測答對率低於 50%的試題其答對率及長條圖：

表 5-2-8 低分組前測答對率低於 50%試題

題號	題　　目	前測答對率(%)
1-2	下列何者爲真？(1) $i+\frac{1}{i}=0$ (2) $3i>-3i$ (3) $i^2+\frac{1}{i^2}=0$ (4) $1+i+i^2+i^3+i^4=0$ 。	22
1-3	a，b 爲實數，若 $a(1+2i)+b(1-i)=-3+6i$，則	48

	$2a+b=$_____。	
1-4	x, y 爲實數，若 $\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則 $x=$ _____, $y=$ _____ 。	30
2-1	下列何者錯誤？ (1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{-6}$ (4) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{-2}{3}}$ 。	26
3-2	設 $z=3+5i$ ，則 $\lvert\bar{z}\rvert=$_____。	11
3-3	設複數 $z=3+2i$，則 $z\times\bar{z}$ 之值爲_____。	48
3-4	設 $x^2+3x+1=0$ 二根爲 α ， β ，則下列何者錯誤？ (1) $\alpha+\beta=-3$ (2) $\alpha\beta=1$ (3) α ，β 均爲負數 (4) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=-1$ 。	11
3-5	設 $z=1+i$，$w=4-3i$，則共軛複數 $\overline{z^2\cdot w}=$ _____。（以複數 $a+bi$ 形式表之）。	11
4-1	設 $z_1=2+3i$， $z_2=3-4i$，則 $\lvert z_1-z_2\rvert=$_____。	7
4-2	計算 $\lvert(1+2i)^2(3-4i)\rvert=$_____。	7
4-3	$\left\lvert\frac{4+3i}{6-8i}\right\rvert$ 之值爲_____。	7
4-4	$3, -i, 2i$ 在複數平面對應的點依次爲 A, B, C，則△ ABC 的面積=_____。	41
4-5	設 $z_1=7+4i$ ， $z_2=5-5i$ ， $z_3=-7$ ， $z_4=8i$ ，以上哪一個數在複數平面的位置，距離原點最遠? (1) z_1 (2) z_2 (3) z_3 (4) z_4 。	37
4-6	設複數 $P=3+5i$ 與 $Q=-1+2i$ 是在複數平面上的二點，則 $\overline{PQ}$ 長爲_____。	33
4-7	在複數平面上，滿足 $\lvert z\rvert=1$ 的全體複數 z 形成什麼圖形？ (1)二個點 (2)一直線 (3)菱形 (4)圓形 。	19

圖 5-2-3 低分組前測低於 50%試題前、後測答對率長條圖



以上所列是低分組學生前測時，作答較差的試題。余民寧(1995)於「心理與教育統計學」一書中指出，在改變的顯著性考驗中，研究者關心的是前、後兩次測量中，測量結果發生改變者的次數是否比期望者大，若比期望者大，且大到顯著的程度，則便可以說測量結果已發生明顯的改變。這種考驗方法僅適用在 2×2 的列聯表資料，稱作「McNemar test」。下表是將對這些試題前、後測答對率做 McNemar 檢定的結果：

表 5-2-9 低分組前測答對率低於 50%試題之前、後測答對率 McNemar 檢定

題號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	McNemar Test P 值
1-2	22	59	0.013*
1-3	48	63	0.219
1-4	30	59	0.021*
2-1	26	70	0.002**
3-2	11	74	0.000**
3-3	48	59	0.549
3-4	11	41	0.008**
3-5	11	44	0.022*
4-1	7	63	0.000**
4-2	7	52	0.002**
4-3	7	63	0.000**

4-4	41	63	0.109
4-5	37	70	0.022*
4-6	33	48	0.289
4-7	19	67	0.002**

觀察上述圖表，研究者有下列幾點發現：

(1)由表 5-2-7 及其檢定可知：無論是高分組或低分組補救教學成效均爲顯著，但低分組平均答對率由 35%增加到 66%，可見補救教學對低分組學生必要的。

(2)由表 5-2-8、圖 5-2-3 可知：低分組學生在前測答對率低於 50%的 15 題中，經補救教學後，每一題的答對率均有增加，有 9 題增加 30%以上。由此可知，某些概念經過補救教學後，對低分組的學生而言，會較爲清晰，因此有明顯的進步。

(3)由表 5-2-9 可知：若將低分組前測低於 50%答對率之試題做 McNemar 檢定，除 1-3,3-3,4-4,4-6 題成效不顯著外，其餘各題均有明顯進步。因此，研究者將對這些成效不明顯的試題做探討。下表爲低分組前測答對率低於 50%且前、後測成績差異不顯著試題：

表 5-2-10 低分組前測答對率低於 50%且前、後測成績差異不顯著試題

題號	試　　題	前測答對率(%)	後測答對率(%)
1-3	a，b 爲實數，若 $a(1+2i)+b(1-i)=-3+6i$，則 $2a+b=$_____。	48	63
3-3	設複數 $z=3+2i$，則 $z\times\overline{z}$ 之值爲_____。	48	59
4-4	3，$-i$，$2i$ 在複數平面對應的點依次爲 A，B，C，則△ABC 的面積=_____。	41	63
4-6	設複數 $P=3+5i$ 與 $Q=-1+2i$ 是在複數平面上的二點，則 $\overline{PQ}$ 長爲_____。	33	48

就低分組前、後測成績差異不顯著試題，分析如下：

<1>解 1-3 題時，需先將方程式依分配率展開、重新整理，再利用「二複數相等時，『實部=實部』且『虛部=虛部』。」性質，得二個二元一次方程式，再解此二元一次聯立方程組。經補救教學後，學生大多具有上述觀念，但部分學生於解二元一次聯立方程組時，發生錯誤。顯示剛升上高一的低分組學生，解二元一次聯立方程組的能力尚待加強。

<2>解 3-3 題時，經補救教學後，學生大多知道「$\overline{Z}$」這個符號是代表複數 Z 的共軛複數，但計算 $(3+2i)(3-2i)$ 時，卻發生錯誤。依分配率或平方差公式展開時，$-(2i)^2=-4i^2=-4(-1)=4$，如果同時要將 2 及 i 平方，又要將 i^2 變成-1，同時處理數個運算容易發生錯誤。

<<訪談實例>>

T：$Z\times\overline{Z}$，$\overline{Z}$ 是 3-2i，請問接下來是怎麼算到這個式子 (9-4i)呢？

S：不是 a 的平方減 b 的平方嗎？

T：利用平方差公式，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$？

S：對。

T：b 是 2i，所以他的平方應該是…

S：-4i。

T：應該是-4。

S：…啊！我多寫了一個 i。

<3>1-3,3-3 題大多是因爲計算錯誤，但 4-4,4-6 題則需要具有將複數對應到複數平面的能力，這與學生具備的直角座標先備知識有關，部分學生因爲無法將複數對應到複數平面，而未能得分。

<<訪談實例>>

T：你把 P 點、Q 點寫出來，然後呢？

S：…就把那二個相加。

T：就是要利用二點間距離公式去算？

S：對。

T：你現在能夠寫出來(二點間距離公式)嗎?

S：不太能。

T：不太能？所以你那時候應該是二點距離間公式代錯了？

S：對啊！

<4>部分學生能將 4-4 題中的 $3, -i, 2i$ 對應到複數平面(3,0), (0,-1), (0,2)的位置，或將 4-6 題中的 $3+5i, -1+2i$ 對應到複數平面的(3,5), (-1,2)的位置，但卻無法利用三角形面積公式，將 4-4 題中△ ABC 的面積求出，或利用兩點的距離公式：$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 將 4-6 題中 $\overline{PQ}$ 長求出。

<<訪談實例>>

T：請問你為何這三個點都對，但面積卻算錯了？

S：這個公式我忘記怎麼代了。

<5>4-6 題也可以利用 $|z_1-z_2|$ 等於 $\overline{z_1z_2}$ 長的性質，將 $\overline{PQ}$ 長求出。但學生易受題意影響，朝二點距離方向思考，又因無法順利運用二點間距離公式，而求不出 $\overline{PQ}$ 長。

<<訪談實例>>

T：P 是 3+5i，Q 是-1+2i，請問為什麼 $\overline{PQ}$ 的長度就是把兩個相加？

S：不是相加就是線段嗎？

T：你認為兩個複數在平面上的距離，就是把它們相加？

S：嗯！

<6>由上述分析可知：經補救教學後，學生們對於複數與複數平面的概念有更深刻的了解，研究者認為低分組學生此 4 題答對率改善不明顯的主要原因有以下二點：

1)計算能力不佳，計算錯誤情形嚴重。

2)平面幾何先備能力不足。例如：不熟悉直角座標系、不會求三角形面積，以及無法順利運用二點間距離公式。

5.2.4 低分組學生前、後測個人答題分析

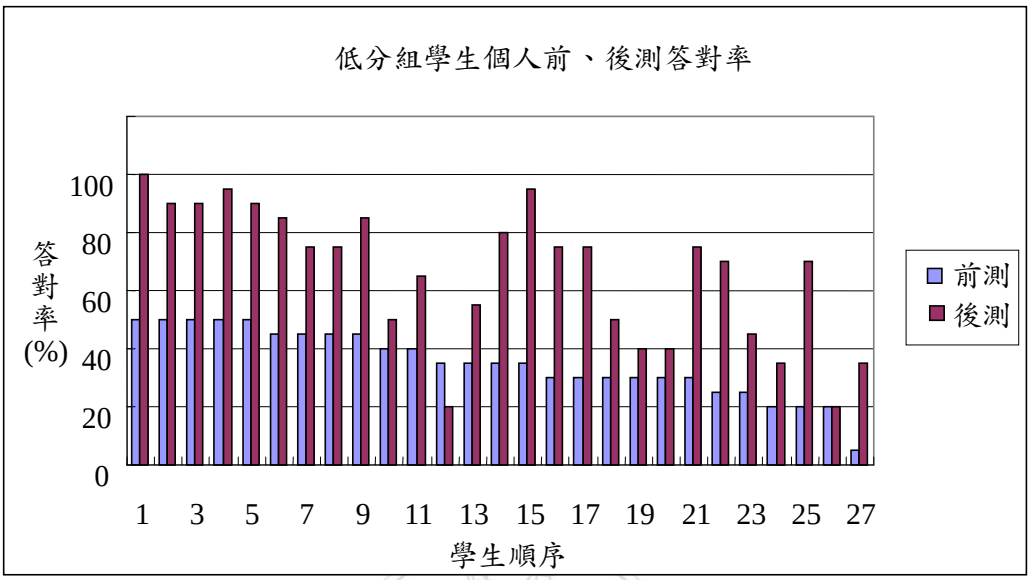
爲了解低分組學生經補救教學後，在「複數與複數平面」單元前、後測的個人表現，特將其前、後測的答題正確率以列表及長條圖表示：

表 5-2-11 低分組學生個人前、後測答題正確率

編號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	答對率上升(%)	編號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	答對率上升(%)
17	50	100	50	80	35	95	60
25	50	90	40	12	30	75	45
29	50	90	40	19	30	75	45
35	50	95	45	20	30	50	20
81	50	90	40	24	30	40	10
16	45	85	40	55	30	40	10
49	45	75	30	82	30	75	45
70	45	75	30	34	25	70	45
74	45	85	40	76	25	45	20
21	40	50	10	37	20	35	15
54	40	65	25	39	20	70	50
41	35	20	-15	57	20	20	0
42	35	55	20	13	5	35	30

68	35	80	45				

圖 5-2-4 低分組學生個人前、後測答對率



觀察上述圖表，研究者分析如下：

(1)後測答對率達 80%以上有 9 位。下表爲這 9 位學生的前、後測答對率及差異情形：

表 5-2-12 低分組後測答對率達 80%以上的學生

編號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	答對率上升(%)	編號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	答對率上升(%)
17	50	100	50	16	45	85	40
25	50	90	40	74	45	85	40
29	50	90	40	68	35	80	45
35	50	95	45	80	35	95	60
81	50	90	40				

分析這 9 位學生的答題資料，研究者有以下發現：

<1>他們對複數的定義已非常清楚。何謂「實部」？何謂「虛部」？不再產生混淆。也明瞭複數絕對值的定義，不再是「負的變正的，正

的還是的」，甚至能夠運用複數絕對值的運算性質，對複雜的複數絕對值運算試題做正確且快速的運算。可見要學習一項新的數學概念，將定義弄清楚是非常重要的，也證實補教教學「給予明確定義」的方向是正確的。

<2>學生於前測時，許多解題錯誤是因為對複數的運算邏輯概念不清所產生的，1-4,2-1 這 2 題更是明顯。後測時，只有 2 位學生 2-1 題發生錯誤，比例很小。所以補救教學時，「增進學生有關複數的運算邏輯，更正受直觀影響而產生錯誤類推的運算過程」是必要的。

<3>由 4-4,4-5,4-6,4-7 題，學生是否能將複數對應到複數平面上。後測時，此 4 題的錯誤大幅減少。可見利用 PowerPoint 的動態功能，可以加深學生對此種對應的印象。而 GSP 的軌跡殘留功能，則能使學生直觀地判斷複數方程式在複數平面上所形成的圖形。

(2)後測答對率低於 40%有 4 位。下表為這 4 位學生的前、後測答對率及差異情形：

表 5-2-13 低分組後測答對率低於 40%的學生

編號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	答對率上升(%)	編號	前測答對率(%)	後測答對率(%)	答對率上升(%)
41	35	20	-15	57	20	20	0
37	20	35	15	13	5	35	30

分析這 4 位學生的答題資料，研究者有發現以下現象：

<1>空白率較高，顯示觀念不夠清晰，及運算速度較慢。

<2>會利用複數的運算性質，但常發生計算錯誤，造成失分。

<3>能將複數對應到複數平面上，但因平面幾何能力不足，因而無法得分。

因先備知識的不足，仍然造成這些學生解題時的錯誤。由於研究者補救教學時間只有二節課，無法對本單元相關的先備知識作太多加強，且計算能力的培養非短時間可大幅增進。此二因素極可能是造成這些學生後

測成績較低，無法大幅提升的主因。

(3)後測答對率上升有 25 位，持平 1 位，下降 1 位。可見補救教學對大多數低分組的學生學習成效是正面的。至於下降的那位學生應多給予關心，了解其數學學習上的困難，適時給予個別輔導，提升其對數學的興趣。

5.3 後測、延後測答題情況分析

爲了了解學生補救教學活動成效的保留情形，於後測之後約一個月舉行延後測。本節將探討全體學生及低分組(仍然是前測答對題數最少的 27 名)學生，在「複數與複數平面」單元後測及延後測答題的相關性及答對率變化情形，並針對低分組學生各題作答的差異情形作分析。

5.3.1 全體學生後測、延後測答題分析

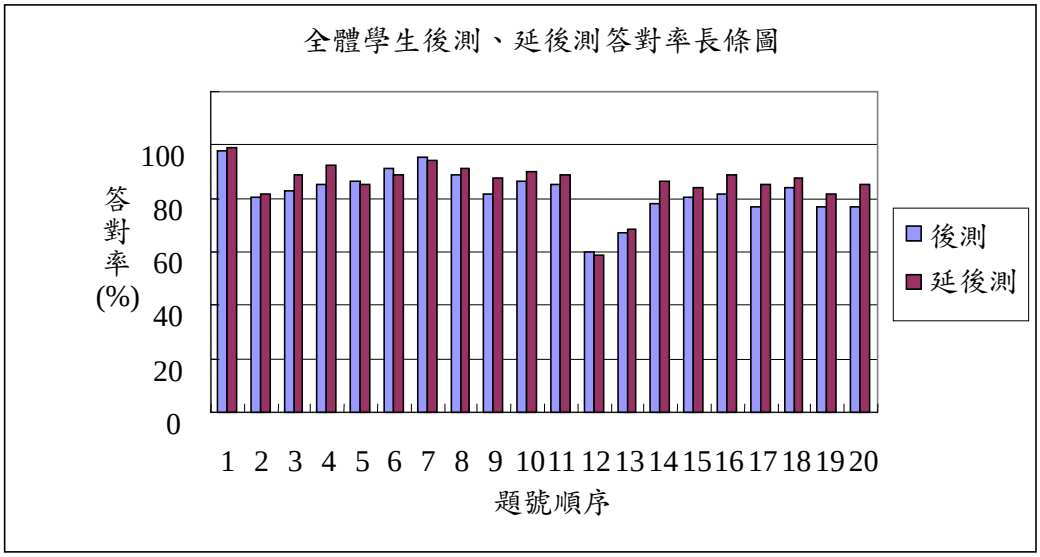
下列圖表爲全體學生後測、延後測答對題數及答對率長條圖：

表 5-3-1 全體學生後測、延後測答對題數

編號	後測	延後測	編號	後測	延後測	編號	後測	延後測
1	19	20	29	18	20	57	4	3
2	20	20	30	18	18	58	20	20
3	19	17	31	18	18	59	17	13
4	19	20	32	16	19	60	17	18
5	17	18	33	19	20	61	20	20
6	19	20	34	14	17	62	20	20
7	17	17	35	19	19	63	20	20
8	19	19	36	20	20	64	20	20
9	10	6	37	7	11	65	19	20
10	17	19	38	16	19	66	19	18
11	18	16	39	14	16	67	20	20

12	15	15	40	15	18	68	16	18
13	7	11	41	4	9	69	19	19
14	17	20	42	11	12	70	15	13
15	20	20	43	20	20	71	19	19
16	17	15	44	19	18	72	17	19
17	20	20	45	19	20	73	20	20
18	19	19	46	20	20	74	17	18
19	15	17	47	18	19	75	16	17
20	10	9	48	19	19	76	9	11
21	10	13	49	15	18	77	14	16
22	18	17	50	17	19	78	13	11
23	18	18	51	20	20	79	16	18
24	8	11	52	17	17	80	19	19
25	18	18	53	20	20	81	18	19
26	15	19	54	13	16	82	15	18
27	18	17	55	8	12			
28	18	18	56	18	17			

圖 5-3-1 全體學生後測、延後測答對率長條圖



若以每一位學生延後測答對題數減去後測答對題數，將所得數值 Z 檢定得：平均數差異 0.72，Z=1.239，P=0.107>0.025，顯示學生成績沒有顯著差別。全體學生後測與延後測成績相關係數 R=0.892，顯示爲高度正相關。可見補救教學的成效經過了一個月左右，全體學生的學習保留得很好。

5.3.2 低分組學生後測、延後測答題分析

下列圖表爲低分組學生後測、延後測答對率變化之 McNemar 檢定及答對率長條圖：

表 5-3-2 低分組後測、延後測答對率之 McNemar 檢定

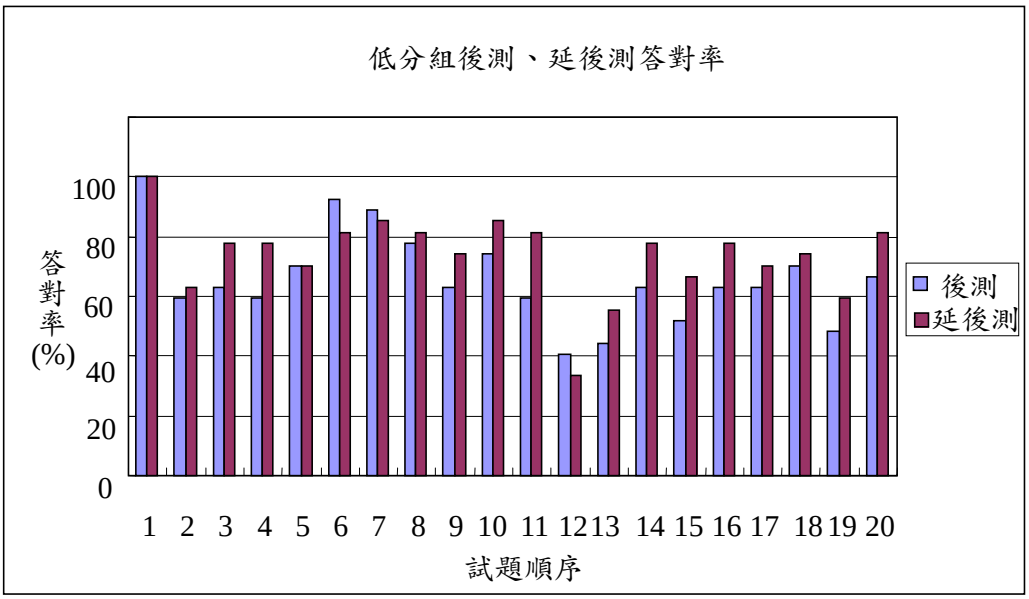
題號	後測 答對率(%)	延後測 答對率(%)	答對率 變化(%)	McNemar Test P 值
1-2	59	63	4	1.000
1-3	63	78	15	0.219
1-4	59	78	19	0.063
2-1	70	70	0	1.000
2-2	93	81	-12	0.375

2-3	89	85	-4	1.000
2-4	78	81	3	1.000
3-1	63	74	11	0.375
3-2	74	85	11	0.375
3-3	59	81	22	0.109
3-4	41	33	-8	0.500
3-5	44	56	12	0.549
4-1	63	78	15	0.125
4-2	52	67	15	0.219
4-3	63	78	15	0.219
4-4	63	70	7	0.625
4-5	70	74	4	1.000
4-6	48	59	11	0.453
4-7	67	81	14	0.289

註：1-1 題後測、延後測答對率均爲 100%，無 McNemar Test P 值。

國立政治大學 National Chengchi University

圖 5-3-2 低分組後測、延後測答對率長條圖



由表 5-3-2 及圖 5-3-2，研究者有下列幾點發現：

(1)每一題後測及延後測的 McNemar Test P 值均大於 0.05，顯示答題情形差異不大。可見補救教學的成效經過了一個月左右，低分組學生的學習保留得很好。低分組學生答對率上升有 15 題，下降有 3 題，持平有 2 題。

(2)答對率上升的試題及上升比率如下表：

表 5-3-3 低分組延後測比後測答對率上升試題

題號	試　　題	後測答對但延後測答錯人數	後測答錯但延後測答對人數	答對率上升(%)
1-2	下列何者爲真？(1) $i+\frac{1}{i}=0$ (2) $3i>-3i$ (3) $i^2+\frac{1}{i^2}=0$ (4) $1+i+i^2+i^3+i^4=0$ 。	4	5	4
1-3	a，b 爲實數，若 $a(1+2i)+b(1-i)=-3+6i$，則 $2a+b=$_____。	1	5	15
1-4	x, y 爲實數，若 $\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則 $x=$ _____, $y=$ _____ 。	0	5	19

2-4	設$\alpha=2+i,\beta=3+i,\gamma=5+6i$，則 $(\alpha+\beta)\gamma=$_____（以複數 $a+bi$ 形式表之）。	3	4	4
3-1	方程式 $x^2+x+2=0$ 的二根爲 (1)二相異實根 (2) 二相等實根 (3)共軛虛根 (4)以上皆非。	1	4	11
3-2	$z=3+5i$，則 $\lvert\bar{z}\rvert=$_____。	1	4	11
3-3	設複數 $z=3+2i$，則 $z\times\bar{z}$ 之值爲_____。	2	8	22
3-5	設 $z=1+i$，$w=4-3i$，則共軛複數 $\overline{z^2\cdot w}=$ _____（以複數 $a+bi$ 形式表之）。	4	7	11
4-1	設 $z_1=2+3i$，$z_2=3-4i$，則$\lvert z_1-z_2\rvert=$_____。	0	4	15
4-2	計算$\left\lvert(1+2i)^2(3-4i)\right\rvert=$_____。	1	5	15
4-3	$\left\lvert\dfrac{4+3i}{6-8i}\right\rvert$之值爲_____。	1	5	15
4-4	3，$-i$，$2i$在複數平面對應的點依次爲 A，B，C，則△ABC 的面積=_____。	1	3	7
4-5	設 $z_1=7+4i$，$z_2=5-5i$，$z_3=-7$，$z_4=8i$，以上哪一個數在複數平面的位置，距離原點最遠? (1) z_1 (2) z_2 (3) z_3 (4) z_4 。	2	3	4
4-6	設複數 $P=3+5i$ 與 $Q=-1+2i$ 是在複數平面上的二點，則 $\overline{PQ}$ 長爲_____。	2	5	11
4-7	在複數平面上，滿足 $\lvert z\rvert=1$ 的全體複數 z 形成什麼圖形？ (1)二個點 (2)一直線 (3)菱形 (4)圓形 。	2	6	15

觀察表 5-3-3 研究者有以下幾點發現：

<1>1-3,1-4 題爲複數基本性質：「二複數相等時，『實部=實部』且『虛部=虛部』」，此觀念已深入學生腦海中，只要小心運算，便能獲得正確答案，所以答對率有較大的上升。

<2>舉行延後測時，適值教授「多項式方程式」單元，加深「實係數二

次方程式的判別式小於 0 時，其根爲共軛虛根」的印象，所以 3-1 題答 對率有較大的上升。

<3>3-2,3-3,3-5,4-1,4-2,4-3 題均爲有關共軛複數與複數絕對值的運算，當學生已清楚此二者的定義及其運算性質後，只要小心運算，便能快速地得到正確答案，所以答對率有較大的上升。

<4>4-6,4-7 題與直角座標系有關，經一段時間的學習後，學生對直角座標系已較爲熟悉，因而對複數平面也較不陌生，同時具實數觀念，遇到有關「數」的問題，不會只考慮整數，所以此 2 題答對率有較大的上升。

(3)答對率下降的試題及下降比率如下表：

表 5-3-4 低分組延後測比後測答對率下降試題

題號	試　　題	後測答對但延後測答錯人數	後測答錯但延後測答對人數	答對率下降(%)
2-2	$z_1 = 3-2i, z_2 = 5+7i$，則 $3z_1 - 2z_2 =$_____。	4	1	12
2-3	求 $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100} =$ (1) i (2)0 (3)1 (4)$-i$。	2	1	4
3-4	設 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 二根爲 α，β，則下列何者錯誤？ (1) $\alpha + \beta = -3$ (2) $\alpha\beta = 1$ (3) α，β 均爲負數 (4) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = -1$。	2	0	8

觀察表 5-3-4 研究者有以下幾點發現：

<1>2-2 題只是一個基本的運算，答錯的學生主要是犯了「括弧前有負號，去刮弧時，只有第一項變號。」這項錯誤，可見要將長期形成的計算錯誤習慣去除是不容易的。

<2>2-3 題是 i 乘冪的性質，有 2 位學生後測答對但延後測卻答錯，一位

是計算錯誤，另一位是寫完後覺得沒把握，又把答案擦掉。

<3>3-4 題是有關「根與係數」與「根號運算的性質」，有 2 位學生後測答對但延後測卻答錯，一位是只由「根與係數」性質確定(1),(2)選項正確，但卻無法判斷(3),(4)選項何者錯誤。另一位忽略 α,β 均為負數，將 $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ 直接合併為 $\sqrt{\alpha\beta}$ 因而發生錯誤，雖然於補救教學時有特別強調，但經一段時間後就遺忘了，可見這一部分，並沒有保留得很好。

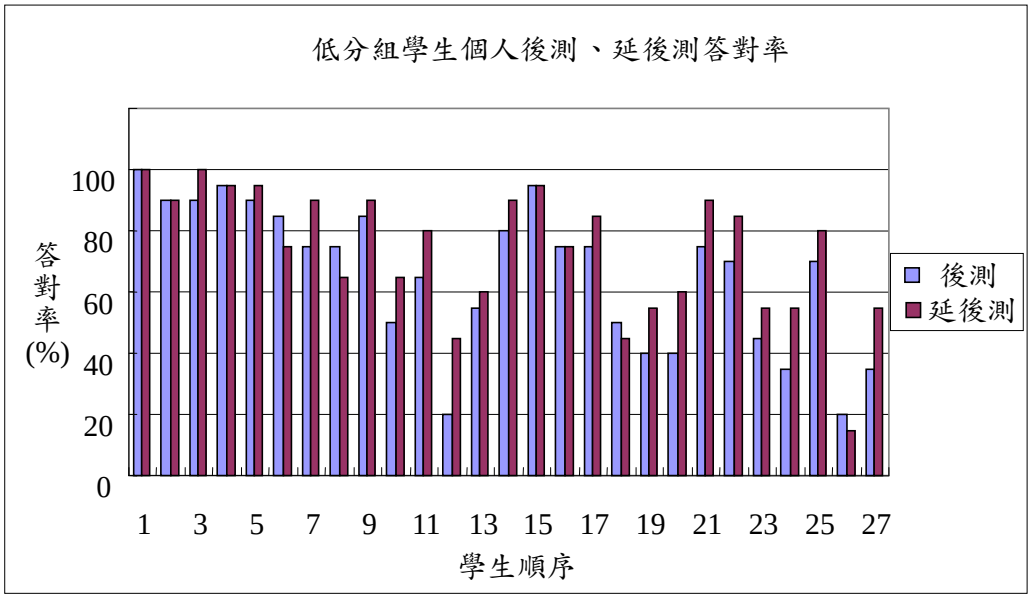
5.3.3 低分組學生後測、延後測個人答題分析

下列圖表為低分組學生後測、延後測個人答題正確率與長條圖：

表 5-3-5 低分組學生後測、延後測答對率

編號	後測答對率(%)	延後測答對率(%)	編號	後測答對率(%)	延後測答對率(%)	編號	後測答對率(%)	延後測答對率(%)
17	100	100	21	50	65	24	40	55
25	90	90	54	65	80	55	40	60
29	90	100	41	20	45	82	75	90
35	95	95	42	55	60	34	70	85
81	90	95	68	80	90	76	45	55
16	85	75	80	95	95	37	35	55
49	75	90	12	75	75	39	70	80
70	75	65	19	75	85	57	20	15
74	85	90	20	50	45	13	35	55

圖 5-3-3 低分組學生個人後測、延後測答對題數長條圖



觀察上述圖表，研究者有下列幾點發現：

(1)延後測答對率比後測答對率上升有 18 位，持平 5 位，下降 4 位。

(2)延後測答對率比後測答對率上升達 20%以上有 4 位。下表為這 4 位學生的答題變化情形：

表 5-3-6 低分組延後測答對率比後測答對率上升達 20%以上學生答題變化

編號	後測 答對率(%)	延後測 答對率(%)	後測答對但 延後測答錯題數	後測答錯但 延後測答對題數
41	20	45	1	6
55	40	60	0	4
37	35	55	0	4
13	35	55	1	5

由表 5-3-6 及這 4 位學生作答情形，研究者發現：答題由錯變對的 19 題次分佈頗為分散，並無集中於某幾題的現象。其中有關共軛複數及複數絕對值運算的題目有 11 題次，根據事後與學生面談得知，學生們對此二觀念已相當程度的「內化」，又由於計算能力已有明顯進步。因此，延後測比後測成績有較高的答對率。

(3)延後測答對率比後測答對率下降有 4 位。下表爲這 4 位學生的答題變化情形：

表 5-3-7 低分組延後測答對率比後測答對率下降學生答題變化

編號	後測 答對率(%)	延後測 答對率(%)	後測答對但 延後測答錯題數	後測答錯但 延後測答對題數
16	85	75	3	1
70	75	65	3	1
20	50	45	3	2
57	20	15	3	2

由表 5-3-7 及這 4 位學生作答情形，研究者發現：答題由對變錯的 12 題次分佈頗爲分散，並無集中於某幾題的現象。其中 3-5 題有 2 題次，均爲計算錯誤。可見高一學生面對稍爲繁瑣的計算，發生錯誤的可能性較高。

5.4 補救教學意見調查

綜合上三節分析，可以發現以 PowerPoint 結合 GSP 電腦軟體的補救教學，對學生在「複數與複數平面」單元的學習有明顯的影響。使學生對數學產生興趣，也增進學習成效。爲了了解學生對補救教學活動的感受及建議，於補救教學活動後，請學生填寫「補救教學活動課後意見調查表」，作爲改進補救教學的參考。

表 5-4-1 學生對補救教學課程意見調查統計

題號	題　　目	平均分數
1	我期待參與這次教學活動。	3.82
2	我覺得以 Powerpoint & GSP 動態教學比起平常的教學，上課的內容更清楚且容易了解。	3.94
3	我喜歡這種以 Powerpoint & GSP 動態教學的學習方式。	4.00
4	我可以適應這種以 Powerpoint & GSP 動態學習的教學方式。	3.89
5	我在課堂上認真地作學習單的練習。	3.87
6	我在這次課程中，比平時更集中精神學習。	3.79
7	我覺得上完這次課程後，我更清楚複數及複數平面的內容。	3.91

8	上完這次課程，我覺得對複數及複數平面的解題是有幫助的。	4.01
9	如果有機會，我願意繼續參與這種 Powerpoint & GSP 的動態教學，學習相關的數學課程。	4.04
10	我希望老師以後常實施這種 Powerpoint & GSP 的動態教學。	3.88

評分標準：

非常同意：5分　　同意：4分　　普通：3分

不同意：2分　　非常不同意：1分

表 5-4-2 節錄部分學生(編號尾數爲 3)對補救教學的感想或建議

編號	感　想　或　建　議
3	那個 feel 不一樣，大家都比平常認真，也會回答問題，這樣的上課方法很有趣。講得有些快，來不及抄。
23	無限新奇。
33	比較容易吸收。
43	個人覺得這種動態教學，是一個非常不錯的教學方法，這可以讓不太了解的人，重新理解它。
53	我覺得老師上好快，我才解一題，連答案都沒看到，就跳到下一頁了。
63	太棒了。
73	在近段考的時候，以這種動態教學還蠻 O.K.的。

由表 5-4-1、表 5-4-2，針對學生的反應，研究者有以下幾點發現：

(1)提高學生學習興趣：因爲大部分學生都沒有接觸過這二種軟體，沒想過數學符號、方程式，甚至圖形可以如此移動。因此，可以吸引學生的注意。學生專心聽講，學習成效自然提升。大多數學生對這種補救教學的方式，都持正面的態度，甚至希望以後的課程多多使用。

(2)學習成效明顯改善：透過 PowerPoint 動態教學過程，有助學生複數概念的形成，了解複數性質的運用，增進將複數對應到複數平面的能力。利用 GSP 的動態幾何及軌跡殘留的特性，讓學生更清楚複數平面幾何圖形形成的過程。有了這二個軟體的幫助，並於進行一個補救教學活動後，立即練習類似問題，使學生剛獲得的概念進一步鞏固。因此，會有一定的學習成效。

(3)仍有改善的空間：補救教學活動仍有一些缺點需要改善。例如：字體不夠大，背景顏色與字體或圖形顏色區別不夠明顯，造成後排同學上課時較爲吃力。另外，由於補救教學時間不易安排，時間較爲匆促，造成講解時速度稍快，學生反應「來不及抄」。雖然上課前已經告訴學生：「不必抄寫演算過程，這些教學檔案，補救教學後老師會傳給大家。」但是，可能是學生平日養成的習慣，一時改不過來，因而造成這項缺失。

國立政治大學 National Chengchi University