第一章 前言

1.1 研究動機與目的

筆者任教的學校某次辦理自治市長選舉，選情十分緊張，國二的代表阿佑和國一的代表小欣都不停的拜票、拉票，戰況程度激烈，全校為之瘋狂直到開票，都能夠感受到雙方人馬劍拔弩張的氣氛，最後由小欣勝出。小欣的支持者開心的抱怨說，早就知道會贏，難道不能構想一個好的唱票方式，讓我們在開票的過程中一路都不要輸，讓我們能體會一直不失落的感覺？其實這是個有趣的數學問題。

事實上，一路不要輸的開票問題已經有人利用路徑的方法來處理，稱為一路領先問題，本文為了使用上的方便也將一路不要輸的開票情況稱之為一路領先。譬如說已知小欣得 n 票，阿佑得 m 票，$n > m$，小欣一路領先且勝出的方法數，就如同小欣每得一票記為「→」，阿佑得一票記為「↑」後，在 $m×n$ 格子上走出來的好路徑數，而這種好路徑數的算法：用($m×n$ 格子上所有路徑數)－($m×n$ 格子上所有的非好路徑數)。$m×n$ 格子上的非好路徑在$m \times m$的子格子上取對角線(*如圖 1.1.1*)，此線稱為**副對角線**，並找到跨越此線的第一個向上路徑，並將此路徑之後的所有路徑進行翻轉(*如圖 1.1.2*)，則在 $m×n$ 格子上的非好路徑，轉換為在*(n+1)*× *(m-1)*上的路徑，既然所有在 $m×n$ 格子上的非好路徑，都有一個跨越副對角線的第一個向上路徑，則所有在 $m×n$ 格子上的非好路徑，都可以轉換為在*(n+1)*× *(m-1)*上的路徑。所以小欣得 n 票，阿佑得 m 票，小欣一路領先且勝出的方法數，為$C_n^{m+n} - C_{n+1}^{(n+1)+(m-1)} = C_n^{m+n} - C_{n+1}^{m+n} = C_m^{m+n} - C_{m-1}^{m+n}$。

由此推導出，當小欣得的票數多一票而阿佑的票數少一票，小欣一路領先且勝出的方法數，為$C_{n+1}^{(m-1)+(n+1)} - C_{n+2}^{(m-1)+(n+1)} = C_{n+1}^{m+n} - C_{n+2}^{m+n}$，因此，小欣得至少 n 票且一路勝出的開票方法數，如下式：

$$\sum_{k=0}^{m}(C_{n+k}^{m+n} - C_{n+(k+1)}^{m+n}) = C_n^{m+n} \quad 。$$

國立政治大學 National Chengchi University

但這個方法，對於沒學過組合數學且又沒耐心的國中學生，似乎感覺上要轉好幾個彎，才能瞭解，所以本篇論文找到一個離散的方法，直接說明這種巧妙的對應關係。

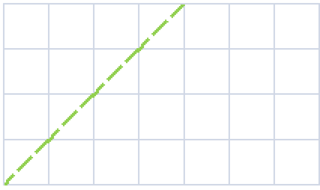

圖1.1.1

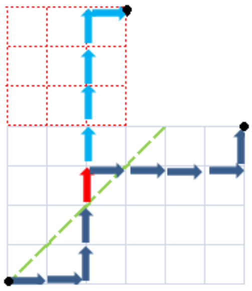

圖 1.1.2

1.2 研究主題

本論文的研究主題爲「一路領先的路徑證明法」，內容是在探索一個良好的摺紙方法，利用壓扁、翻轉，能將「共有$n+m$人投票，<u>小欣</u>至少得 n 票且一路勝出的開票方法數等於<u>小欣</u>得 n 票的所有開票方法數」的巧妙關係「用路徑的對應」說明出來，再用數學的證明，來驗證這個方法的可行性及正確性。

經過老師的指引，和不斷的嘗試，我發現將先進的摺紙方式稍微改變，因爲原來的方法，是找到跨越副對角線的第一個向上路徑，將此路徑之後的所有路徑進行翻轉，這個方法，有一點令人遺憾的是，離我想要的好路徑，似乎越來越遠，因爲轉換之後，路徑圖越長越高，所以我想到的解決方法是，將翻轉後的圖整個再翻轉一次，而兩個步驟合成起來如圖 1.2.1，也就是將 $m{\times}n$ 格子上的非好路徑裡，跨越副對角線的第一個向上路徑，和此路徑之前的所有路徑進行翻轉，可以將此路徑的高度降低一格、寬度增加一格(如圖 1.2.2)，這個漂亮的想法，在我論文發表前，也有人想到利用在一路領先的題目裡，計算「非一路領先的記票方法數」(詳見參考資料 7)，當然經過翻轉後的路徑成爲好路徑的機會就會增加，但如果不幸還是無法成爲好路徑的話，再依原方法做一次，直到成爲好路徑爲止(如圖 1.2.3)，經過多次的實驗，我發現我所嘗試的 $m{\times}n$ 格子上的非好路徑都可經由這樣的方式壓爲好路徑，這樣的方法，似乎可以視爲將一個「小欣得 n 票且不是一路領先的開票方式」，經由巧妙的處理成爲某一個「小欣得至少 n 票且一路領先開票方法」，所以本篇論文將證明這樣的對應關係是一對一且映成。

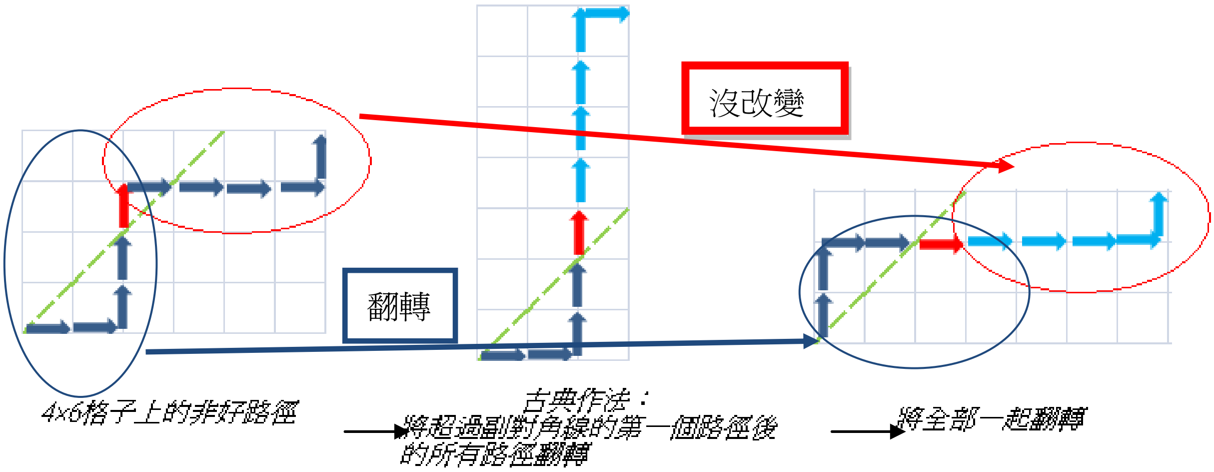

圖1.2.1

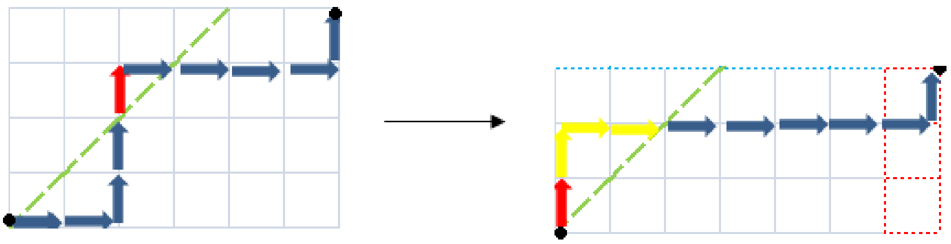

圖1.2.2