第二章

[定義 2.1]

若 p 是一個在 $m \times n$ 格子(見圖 2.1)上的路徑$(m \leq n)$(見圖 2.2)且被記 $p = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m+n}$ ，其中 a_i 是「 → 」或「 ↑ 」 ， 則

(1) $p_i = a_1 a_2 a_3 \ldots \ldots a_i$ *被稱爲路徑 p 的子路徑*。 (見圖 2.3)

(2) $\overline{p_i} = a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} \ldots \ldots a_{m+n}$

(3) $(a_i)^t = \begin{cases} \rightarrow & 若\ a_i = \uparrow \\ \uparrow & 若\ a_i = \rightarrow \end{cases}$

(4) $(p_i)^t = (a_1)^t (a_2)^t (a_3)^t \ldots \ldots \ldots (a_i)^t$。 (見圖 2.4)

(5)*若對於所有 i =1, 2, …..(m+n)，路徑 p 的子路徑* p_i *滿足：*

$$(\ p_i\ 中「\ \rightarrow\ 」的數量) \geq (\ p_i\ 中「\uparrow\ 」的數量)，$$

則稱 p 爲好路徑。(見圖 2.5)

(6) $y = y(p) = min\{i \mid (p_i\ 中\ \uparrow\ 的數量) > (p_i\ 中\ \rightarrow\ 的數量), i = 1, 2, \ldots, (m+n)\}$。

(見圖 2.6)

(7) $x = x(p) = min\{i \mid (p_i\ 中\ \rightarrow\ 的數量) > (p_i\ 中\ \uparrow\ 的數量), i = 1, 2, \ldots, (m+n)\}$。

(見圖 2.7)

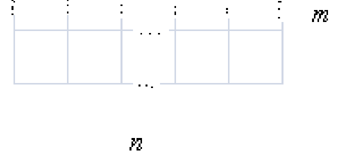


圖2.1 稱之爲 $m \times n$ 的格子

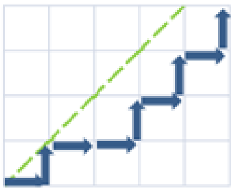


圖2.2 一個在4×5格子上的路徑 p

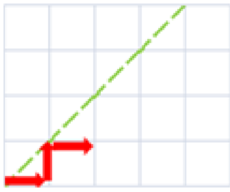


圖2.3 路徑 p 的一個子路徑 p_3

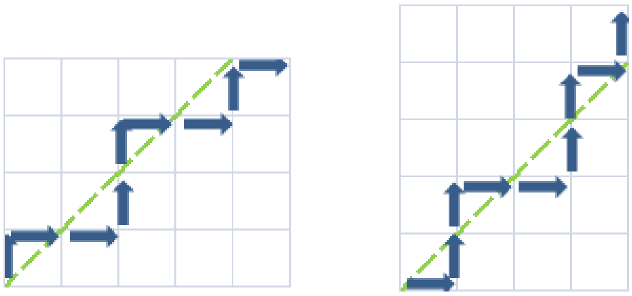


圖 2.4 $p \longrightarrow p^t$

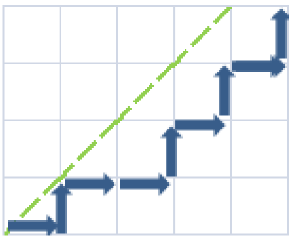


圖 2.5 這是一個4×5格子上的好路徑

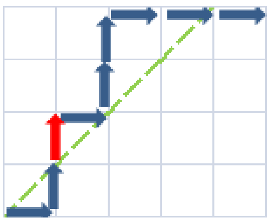


圖 2.6 此路徑的 y 是 3

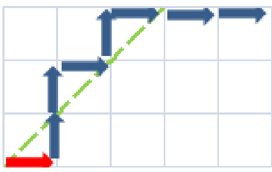


圖 2.7 此路徑的 x 是 1

[定理 2.2]

(1)*若 p 是一個在 m×n 格子上的路徑*$(m \le n)$*，且 p 不是一個好路徑，則 y 存在。*

(2) *若 p 是一個在 m×n 格子上的路徑*$(m < n)$*，則 x 存在。*

『證明』:

(1)假設 *p* 不是一個好路徑，且 *y* 不存在，則對於所有的 *i =1, 2, ….,(m+n)*，

$$(\ p_i\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ) \le (\ p_i\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ ),$$

則 *p* 是一個好路徑，和假設矛盾。

(2) *假設 p 是一個在 m×n 格子上的路徑*$(m < n)$*，且 x 不存在*，則對於所有的 *i =1, 2, …,(m+n)*，

$$(\ p_i\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ ) \le (\ p_i\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ),$$

所以 $n = (\ p_{m+n}\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ ) \le (\ p_{m+n}\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ) = m$，

$$n \le m,$$

與假設矛盾，所以若 *p 是一個在 m×n 格子上的路徑*$(m < n)$*，則 x 存在。*

[定理 2.3]

(1) 若 *p* 爲一路徑且 *y=y(p)*是存在的，則

① $a_y = \uparrow$

② $(\ p_{y-1}\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ) = (\ p_{y-1}\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ )$

③ $(\ p_y\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ) - (\ p_y\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ ) = 1$

④ p_{y-1}*是好路徑*

(2) 若 *p* 爲一路徑且 *x=x(p)*是存在的，則

① $a_x = \rightarrow$

② $(\ p_{x-1}\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ ) = (\ p_{x-1}\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ )$

③ $(\ p_x\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ ) - (\ p_x\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ) = 1$

④ *若對於所有 i =1, 2, …..x-1，路徑*p_{x-1}*的子路徑* p_i *滿足：*

$(\ p_i\text{ 中「}\uparrow\text{ 」的數量}) \ge (\ p_i\text{中「 }\rightarrow\text{」的數量})$

『證明』：

(1) ①假設 $a_y = \rightarrow$

因爲 $(\ p_y\text{中「}\uparrow\text{」的數量}\ ) > (\ p_y\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}\ )$，

則　　$(\ p_{y-1}$ 中「↑」的數量 $) = (\ p_y$ 中「↑」的數量 $) >$

$(\ p_y$ 中「→」的數量 $) = (\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $) + 1 >$

$(\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $)$

所以　　$(\ p_{y-1}$ 中「↑」的數量 $) > (\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $)$

且　　$y\text{-}1 < y$ 矛盾

所以　$a_y =$↑。

②因爲

$$y = min\{i|(p_i 中 \uparrow 的數量) > (p_i 中 \rightarrow 的數量), i = 1,2,\ldots..(m+n)\}，$$

所以

$(\ p_{y-1}$ 中「↑」的數量 $) \leq (\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $)$……….(式子一)，

由①知 $a_y = \uparrow$，且

$(p_y$ 中 ↑ 的數量$) > (p_y$ 中 → 的數量$)$，

所以　　$(p_y$ 中 ↑ 的數量$) - 1 \geq (p_y$ 中 → 的數量$)$，

又因爲　$(\ p_{y-1}$ 中「↑」的數量 $) = (\ p_y$ 中「↑」的數量 $) - 1 \geq$

$(\ p_y$ 中「→」的數量 $) = (\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $)$，

所以可推得　$(p_{y-1}$ 中「↑」的數量 $) \geq (\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $)$……(式子二)，

由(式子一)及 (式子二)得　$(\ p_{y-1}$ 中「↑」的數量 $) = (\ p_{y-1}$ 中「→」的數量 $)$。

③由①② 得

$(\ p_y$ 中「↑」的數量 $) - (\ p_y$ 中「→」的數量 $) = 1$

④因爲

$$y = min\{i|(p_i 中 \uparrow 的數量) > (p_i 中 \rightarrow 的數量), i = 1,2,\ldots..(m+n)\}，$$

所以對所有 $i < y$ (即 $i=1,2,3\ldots.y\text{-}1$)，

$(\ p_i$ 中「↑」的數量 $) \leq (\ p_i$ 中「→」的數量 $)$，

由定義知 p_{y-1}是好路徑。

(2) ①假設 $a_x = \uparrow$

因爲　　$(\ p_x$ 中「→」的數量 $) > (\ p_x$ 中「↑」的數量 $)$，

則　　(p_{x-1}中「→」的數量) = (p_x中「→」的數量) >

(p_x中「↑」的數量) = (p_{x-1}中「↑」的數量) + 1 > (p_{x-1}中「↑」的數量)

所以　　(p_{x-1}中「→」的數量) > (p_{x-1}中「↑」的數量)

且　　　　　　　　　　　x-1 < x 矛盾

所以　$a_x = \rightarrow$。

②因爲

$$x = min\{i \mid (p_i 中 \rightarrow 的數量) > (p_i 中 \uparrow 的數量), i = 1,2,\ldots.(m+n)\}，$$

所以　(p_{x-1}中「→」的數量) ≤ (p_{x-1}中「↑」的數量)……….(式子三)，

已知 $a_x = \rightarrow$，且

$$(p_x 中 \rightarrow 的數量) > (p_x 中 \uparrow 的數量)，$$

所以　　　$(p_x 中 \rightarrow 的數量) - 1 \geq (p_x 中 \uparrow 的數量)$，

又因爲　　(p_{x-1}中「→」的數量) = (p_x中「→」的數量)−1 ≥

(p_x中「↑」的數量) = (p_{x-1}中「↑」的數量)，

所以可推得

(p_{x-1}中「→」的數量) ≥ (p_{x-1}中「↑」的數量)……(式子四)，

由(式子三)及 (式子四)得

(p_{x-1}中「→」的數量) = (p_{x-1}中「↑」的數量)。

③由①② 得

(p_x中「→」的數量) − (p_x中「↑」的數量) = 1

④因爲

$$x = min\{i \mid (p_i 中 \rightarrow 的數量) > (p_i 中 \uparrow 的數量), i = 1,2,\ldots.(m+n)\}，$$

所以對所有 $i < x$ (即 i=1,2,3…, x-1)，

(p_i中「→」的數量) ≤ (p_i中「↑」的數量)。

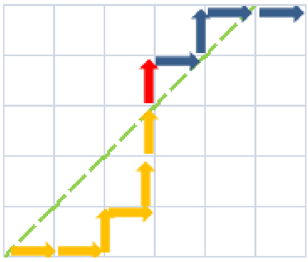


圖 2.8 路徑 p 的 y 是 7， $a_7=\uparrow$， p_6是好路徑

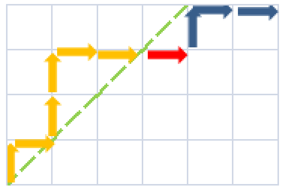


圖 2.9 路徑 p 的 x 是 7， $a_7=\rightarrow$， p_6的子路徑 p_i 滿足：（p_i 中「↑」的數量）≥（p_i 中「→」的數量）

[定義 2.4]

設 r 與 s 為兩正整數，且 $r \le s$

G={所有在 $r\times s$ 格子上的路徑且 $r \le s$}，

G'={所有在 $r\times s$ 格子上的好路徑或所有在 $(r-1)\times(s+1)$ 格子上的路徑}，

則：

下降函數 d 是一個由 G 到 G'的函數，其中 $d: G \rightarrow G'$

$$d(p)=\begin{cases} p & \text{若}p\text{ 是 } r\times s \text{ 格子上的好路徑} \\ (p_y)^t\overline{p_y} & \text{若}p\text{不是 } r\times s \text{ 格子上的好路徑} \end{cases}$$

上升函數 u 是一個由 G'到 G 的函數，其中 $u: G' \rightarrow G$

$$u(p)=\begin{cases} p & \text{若}p\text{ 是 } r\times s \text{ 格子上的好路徑} \\ (p_x)^t\overline{p_x} & \text{若}p\text{ 是在 } (r-1)\times(s+1) \text{ 格子上的路徑} \end{cases}$$

單位函數 $I: G \rightarrow G$ 其中 p 是 $r\times s$ 格子上的路徑

則 $I(p) = p$

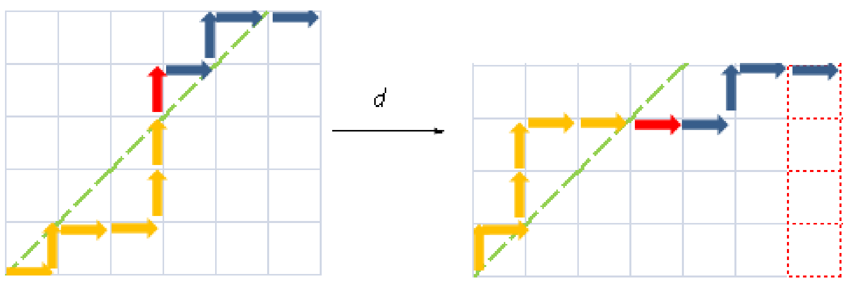


圖 2.10 一個在5×6格子上的路徑 p $\xrightarrow{d}$ d(p)是一個在4×7格子上的路徑

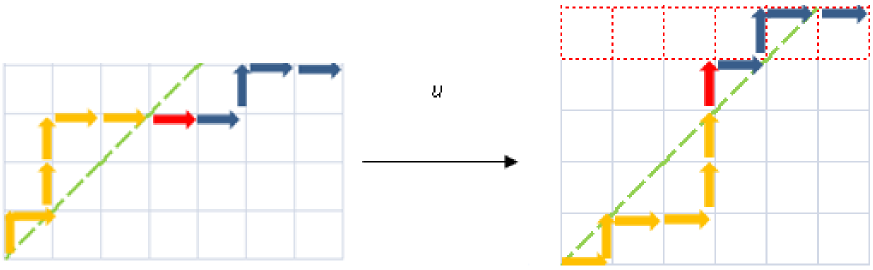


圖 2.11　g是一個在4 × 7格子上的路徑 $\xrightarrow{u}$ u(g)是一個在5 × 6格子上的路徑

[定理 2.5]

(1)若 p 是一個在 m×n 格子上的路徑(m ≤ n)，且 p 不是一個好路徑，則路徑 d(p) 的 x 會等於路徑 p 的 y。

(2)若 p 是一個在 m×n 格子上的路徑(m < n)，則路徑 u(p) 的 y 會等於路徑 p 的 x。

『證明』

(1) p 是一個在 m×n 格子上的路徑($m \le n$)，且 p 不是一個好路徑，

令 p=$a_1a_2a_3 \dots a_j \dots a_{m+n}$，其中 j =y=$y(p)$，則

$$d(p)= (p_j)^t\overline{p_j} ，$$

所以　$d(p)$=$b_1b_2b_3 \dots b_j \dots b_{m+n}$　(註：若 $i \le j$，則b_i=$(a_i)^t$；若 $i > j$，則b_i=a_i)，

因此：

①由*定理 2.3(1)* ①知：因為 $a_j = \uparrow$ 所以 $b_j = \rightarrow$。

②由*定理 2.3(1)* ②知：

(p_{j-1}中「↑」的數量) = (p_{j-1}中「→」的數量)，

所以　*(($d(p))_{j-1}$中的「↑」的數量) = ($(d(p))_{j-1}$中「→」的數量)*

③由*定理 2.3(1)*④知：

p_{j-1}是好路徑，路徑p_{j-1} 的子路徑 p_i，$i = 1, 2, \dots, j-1$ 滿足：

(p_i 中「 → 」的數量) ≥ (p_i 中「↑ 」的數量)，

則對於所有 i =*1, 2, ….,j-1* 路徑$(d(p))_{j-1}$的子路徑 $(d(p))_i$ 滿足：

($(d(p))_i$中「 → 」的數量) ≤ ($(d(p))_i$中「↑」的數量)，

且由①②得　　$(d(p)_j$ 中「$\rightarrow$」的數量$) > (d(p)_j$ 中「$\uparrow$」的數量$)$

所以　　　　「路徑 $d(p)$的 x」$= j$，

又因爲　　　　$j=$「路徑 p 的 y」,

所以可得　　「路徑 $d(p)$的 x」 =「路徑 p 的 y」

(2) p 是一個在 $m\times n$ 格子上的路徑$(m < n)$，

令 $p=a_1a_2a_3 \ldots a_j \ldots a_{m+n}$，其中 $j=(p$ 路徑中的 $x)$，則

$$u(p)=(p_j)^t\overline{p_j}\ ,$$

所以

$u(p)=c_1c_2c_3 \ldots c_j \ldots c_{m+n}$　(註：若 $i\le j$，則$c_i=(a_i)^t$；若 $i>j$，則$c_i=a_i$)，

因此：

①由*定理 2.3(2)①*知：因爲 $a_j=\rightarrow$ 所以 $c_j=\uparrow$。

②由*定理 2.3(2)②*知：

$$(p_{j-1}\text{中「}\rightarrow\text{」的數量}) = (p_{j-1}\text{中「}\uparrow\text{」的數量})，$$

所以　$((u(p))_{j-1}$中的「$\rightarrow$」的數量$) = ((u(p))_{j-1}$中「$\uparrow$」的數量$)$

③由*定理 2.3(2)④*知：

對於所有 $i=1, 2, \ldots, j-1$，路徑p_{j-1} 的子路徑 p_i 滿足：

$$(p_i\text{ 中「}\rightarrow\text{」的數量}) \le (p_i\text{ 中「}\uparrow\text{」的數量})，$$

則對於所有 $i=1, 2, \ldots, j-1$ 路徑$(u(p))_{j-1}$的子路徑 $(u(p))_i$ 滿足：

$$((u(p))_i\text{ 中「}\uparrow\text{」的數量}) \le ((u(p))_i\text{ 中「}\rightarrow\text{」的數量})，$$

且由①②得

$$(u(p)_j\text{ 中「}\uparrow\text{」的數量}) > (u(p)_j\text{ 中「}\rightarrow\text{」的數量})$$

所以　　　　「路徑 $u(p)$的 y」$=j$，

又因爲　　　　$j=$「路徑 p 的 x」,

所以可得　　「路徑 $u(p)$的 y」 =「路徑 p 的 x」

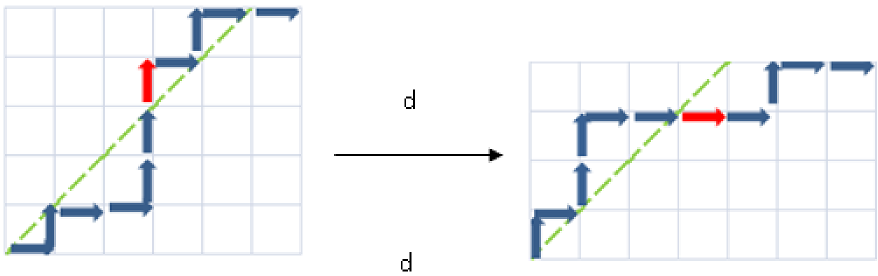


圖 2.12 此路徑 p 的 y 是 7 $\xrightarrow{d}$ 路徑 $d(p)$的 x 也是 7

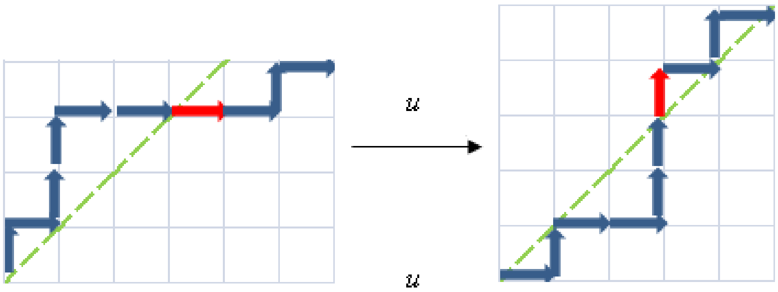


圖 2.13 此路徑 p 的 x 是 7 $\xrightarrow{u}$ 路徑 $u(p)$ 的 y 也是 7

[定理 2.6]

$u \circ d(p) = I_1(p) = p$ ，$d \circ u(p) = I_2(p) = p$ (其中 I_1 爲由 G 到 G 的自等函數；I_2 爲 G' 到 G' 的自等函數)(所以，下降函數「d」和上升函數「u」都是一對一且映成函數)。

『證明』:

(I)令 p 是一個在 $m \times n$ 格子上的路徑($m \leq n$)，

(1)若 p 是一個在 $m \times n$ 格子上的好路徑，則

$$d(p)=p \text{，} u \circ d(p) = u(p) = p = I_1(p) \text{。}$$

(2)若 p 不是一個在 $m \times n$ 格子上的好路徑，

則令 $p = p_y \overline{p_y}$，

所以 $d(p) = (p_y)^t \overline{p_y}$，

由*定理 2.5①*「路徑 $d(p)$ 的 x」會等於「路徑 p 的 y」，

所以 $u \circ d(p) = ((p_y)^t)^t \overline{p_y} = p_y \overline{p_y} = p = I_1(p)$。

由(1)(2)得知 $\forall p \epsilon G$， $u \circ d(p) = p = I_1(p)$，

所以 u 是映成函數且 d 是一對一函數。

(II) 令 p 是 G' 上的一個路徑

(1)若 p 是一個在 $m \times n$ 格子上的好路徑，

則 $u(p)=p$,

$$d \circ u(p) = d(p) = p = I_2(p) \text{。}$$

(2)若 p 是一個在 $(m+1) \times (n-1)$ 格子上的路徑($m \leq n$)，

則令 $p = p_x \overline{p_x}$，

所以 $u(p) = (p_x)^t \overline{p_x}$。

由*定理 2.5②*

「路徑 $u(p)$ 的 y」=「路徑 p 的 x」,

所以 $d \circ u(p) = ((p_x)^t)^t \overline{p_x} = p_x \overline{p_x} = p = I_2(p)$。

由(1)(2)得知 $\forall p \epsilon G'$，

$$d \circ u(p) = p = I_2(p) \text{，}$$

所以 d 是映成函數且 u 是一對一函數。

由 (I) (II) 得 d ,u 兩個皆爲一對一且映成函數，且兩個互爲反函數。

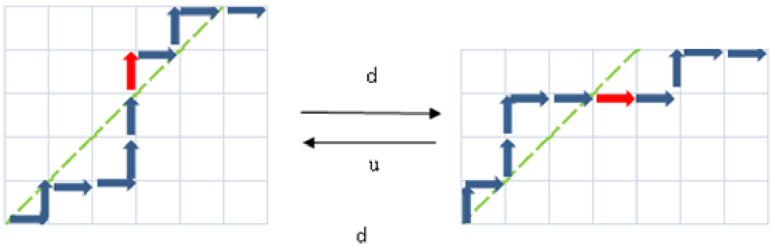


圖 2.14 一個在5×6格子上的路徑 p $\xrightarrow{d}$ d(p)是一個在4×7格子上的路徑

u(d(p))是一個在5×6格子上的路徑 $\xleftarrow{u}$ d(p)是一個在4×7格子上的路徑

[定理 2.7]

每一個在 $m \times n$ 格子上的路徑，都可以經過至多 m 次的 d 函數映射，形成好路徑。

『證明』：

若存在 $m \times n$ 格子上的一個路徑 p，

使得 $d^{m-1}(p)$ 在$(m-(m-1)) \times (n+(m-1))$格子上依然不是好路徑，

則 $d^m(p)$ 在$(m-m) \times (n+m)$格子上，

又因爲所有在在$(m-m) \times (n+m)$格子上的路徑皆爲好路徑，所以$d^m(p)$是一個好路徑。

[定義 2.8]

若 p 是在 $m \times n$ 格子上的一個路徑

k=$k(p)$= $\min\{i \mid d^i(p)$是一個好路徑 , $i = 0,1,2,\ldots\ldots,m\}$，則 k 稱之爲此路徑 p 的**降階數**。

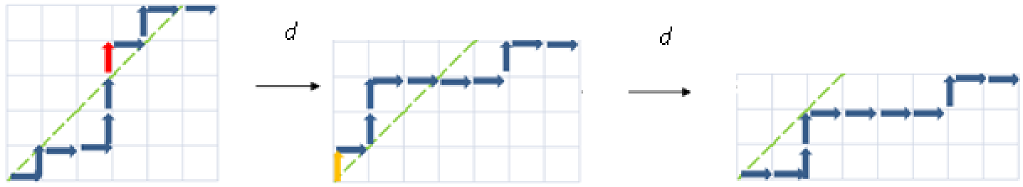


圖 2.15 一個在5×6格子上的路徑 p 一個在4×7 格子上的路徑 $d(p)$ 一個在3×8 格子上的好路徑$d^2(p)$

[定理 2.9]

令 f 是一個函數且 $f: A \rightarrow B$，

$$\boldsymbol{A} = \{所有在\ m \times n\ 格子上的路徑, 且\ m \leq n\}\ ，$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} B_0 ：所有在\ m \times n\ 格子上的好路徑 \\ B_1 ：所有在 (m-1)\times(n+1) 格子上的好路徑 \\ B_2 ：所有在 (m-2)\times(n+2) 格子上的好路徑 \\ \quad\vdots \\ B_m : 所有在 (m-m)\times(n+m) 格子上的好路徑 \end{cases}\ ，$$

若 $f(p)=d^k(p)$， p 是一個在 $m \times n$ 格子上的路徑，k 是路徑 p 的降階數，

則 f 是一對一且映成的函數。

『證明』：

(1) 令 $f(p),\ f(\hat{p})$ 是兩個在 $(m-k)\times(n+k)$ 格子上的好路徑，且 $f(p)= f(\hat{p})$

所以令 $f(p)=\ d^k(p)$，$f(\hat{p}) = d^k(\hat{p})$，

①若 $k=0$， $p=f(p)= f(\hat{p})=\hat{p}$

②若 $k\neq0$

則 $u^k(f(p)) = u^k(f(\hat{p}))$，

因爲 $u^k \circ d^k = I = u^k \circ d^k$ ，

所以 $p=u^k \circ d^k(p)= u^k(f(p)) = u^k(f(\hat{p})) = u^k \circ d^k(\hat{p})=\hat{p}$，

由①②知 f 是一對一函數。

(2) 令 $p\in B$，

且 p 是在 $(m-k)\times(n+k)$ 格子上的好路徑，

則 $u^k(p) \in A$ 是在 $m \times n$ 格子上的路徑，

又因爲 $f(u^k(p)) = d^k\left(u^k(p)\right)= p$ ，

所以 f 是映成函數。

由(1)(2)知 f 是一對一且映成函數。

以下舉兩個實例說明：

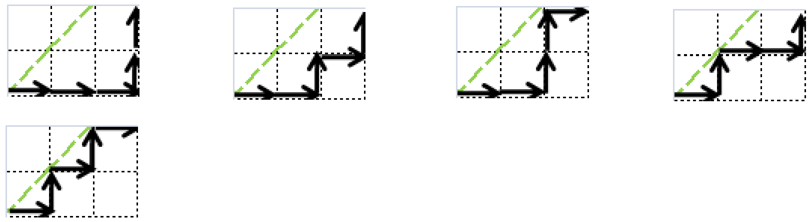
[例題 2.10]

所有2×3格子上的路徑，經由 f 函數作用會變成2×3、1×4或0×5格子上的好路徑。而且是一對一且映成的關係。

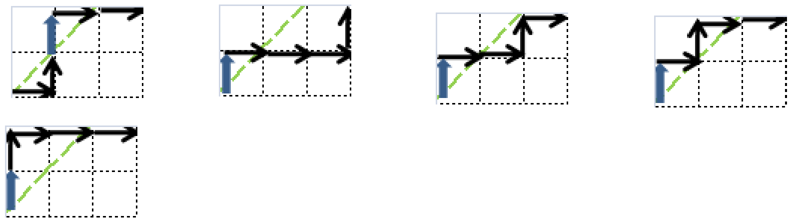
『說明』：

(1) 所有2×3格子上的路徑可分爲好路徑和非好路徑，如下圖：

2×3格子中的好路徑

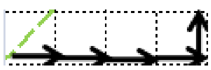


2×3格子上的非好路徑

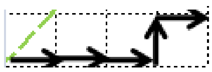


(2) 1×4或0×5格子上的好路徑，如下圖：

1×4格子中所有的好路徑:



1×4-1



1×4-2

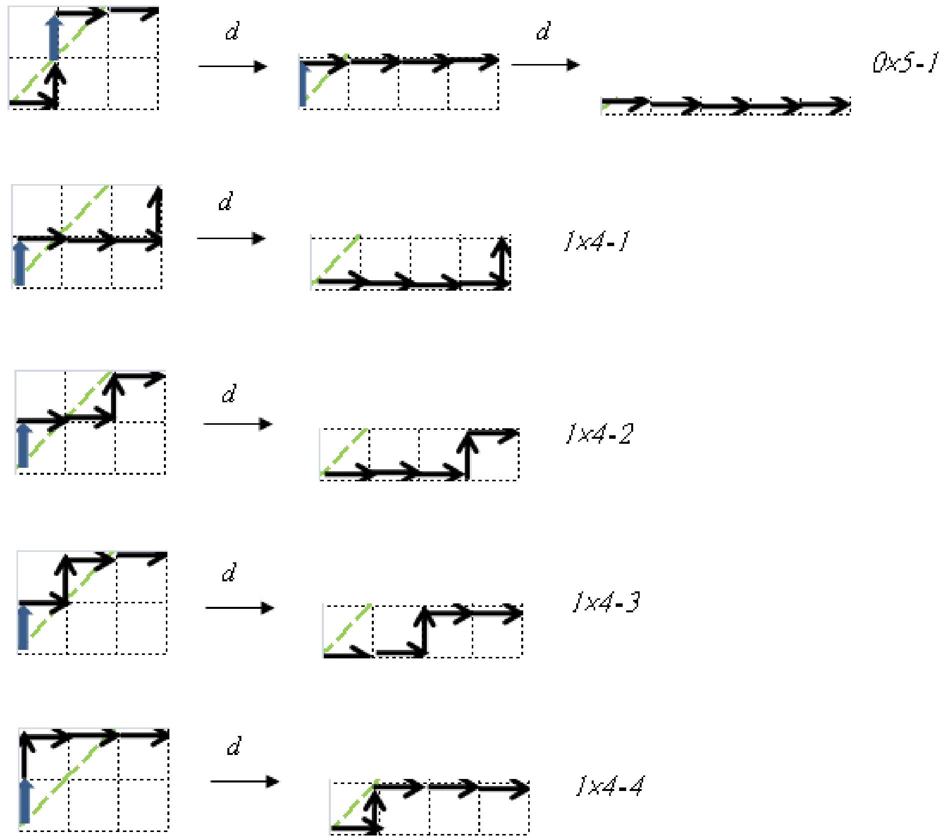
1×4-3

1×4-4

0×5格子中所有的好路徑:

0×5-1

(3) 2×3格子上的非好路徑經過 f 函數作用：



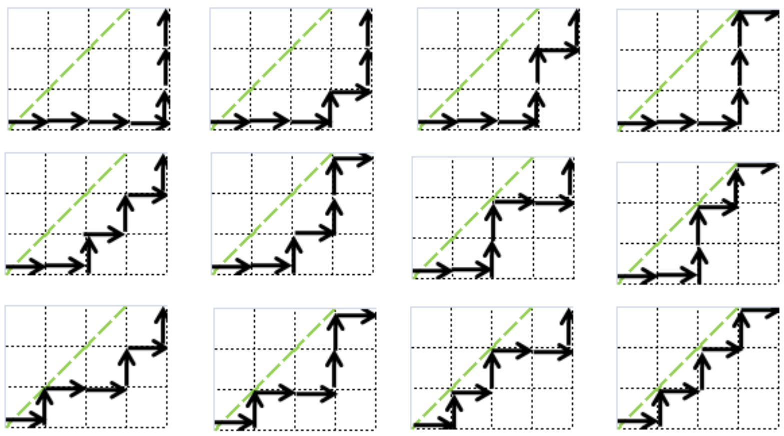
[例題 2.11]

所有3×4格子上的路徑，經由f函數作用會變成3×4、2×5、1×6或0×7格子上的好路徑。而且是一對一且映成的關係。

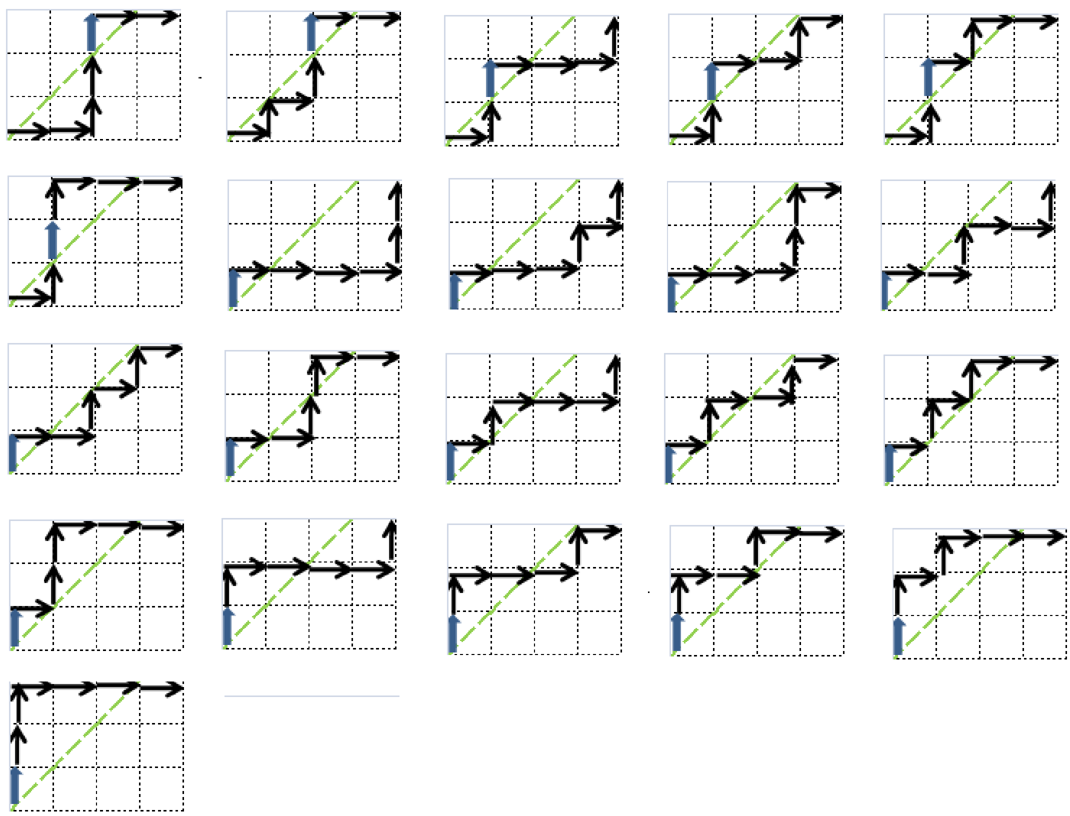
『說明』：

(1) 所有3×4格子上的路徑可分為好路徑和非好路徑，如下圖：

3×4格子上的好路徑

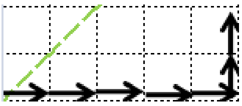


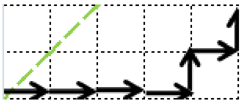
3×4格子上的非好路徑

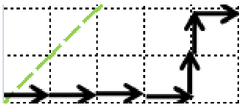


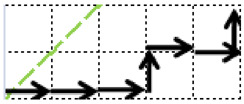
(2) 2×5、1×6或0×7格子上的好路徑，如下圖：

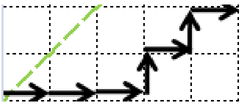
2x5格子上所有的好路徑 ：

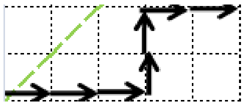

2x5-1

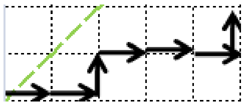

2x5-2

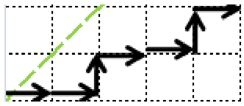

2x5-3

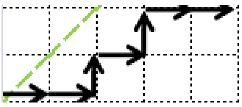

2x5-4

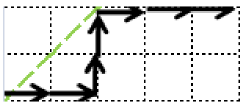

2x5-5

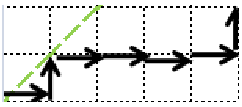

2x5-6

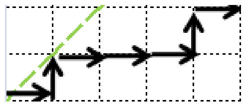

2x5-7

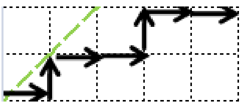

2x5-8

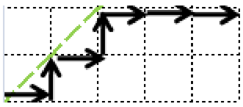

2x5-9


2x5-10

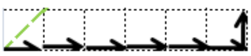

2x5-11

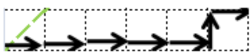

2x5-12

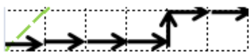

2x5-13

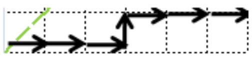

2x5-14

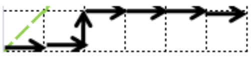
1x6格子上的所有好路徑：

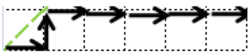

1x6-1


1x6-2

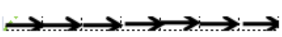

1x6-3


1x6-4

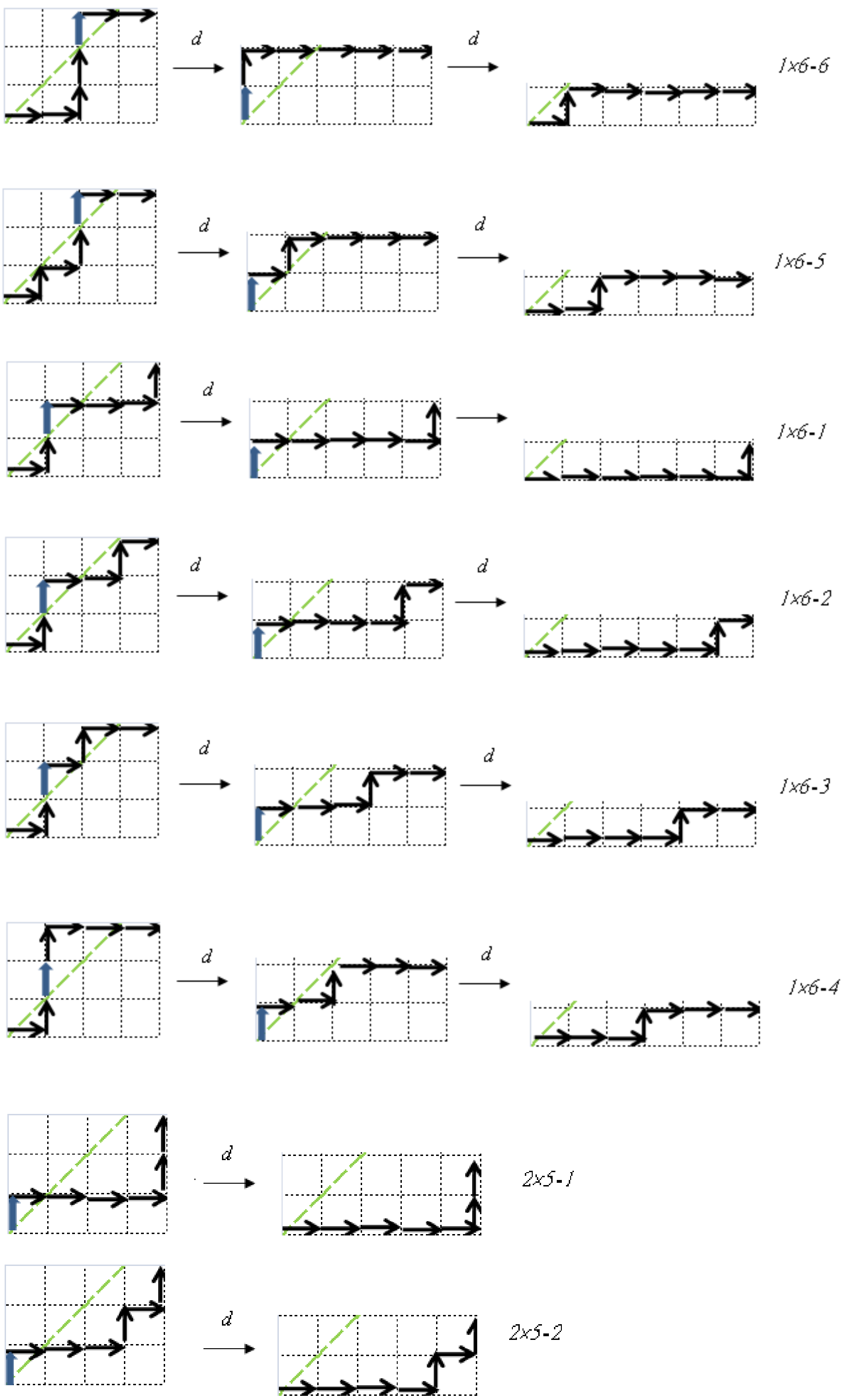

1x6-5

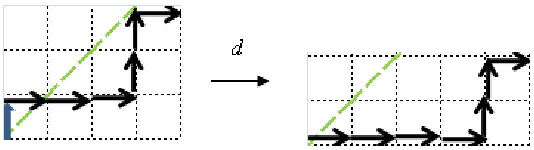

1x6-6

0x7格子上的所有好路徑：

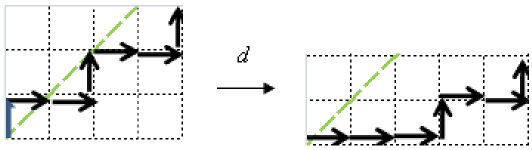

0x7-1

(3) 3 ×4 格子上的非好路徑經過 *f* 函數作用：

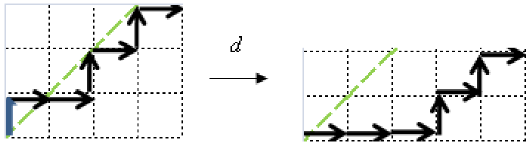




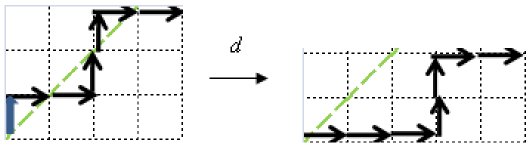
2x5-3



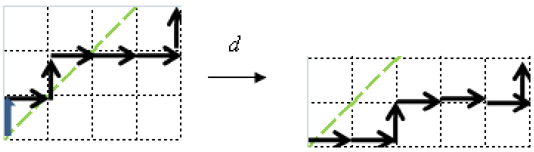
2x5-4



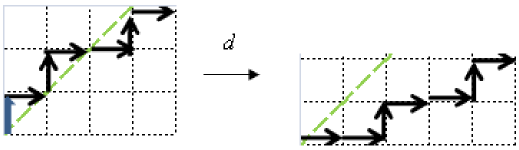
2x5-5



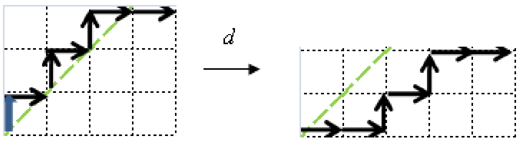
2x5-6



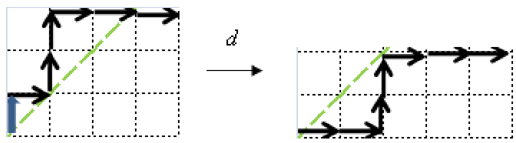
2x5-7



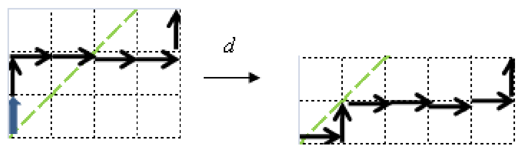
2x5-8



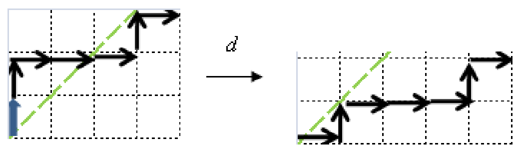
2x5-9



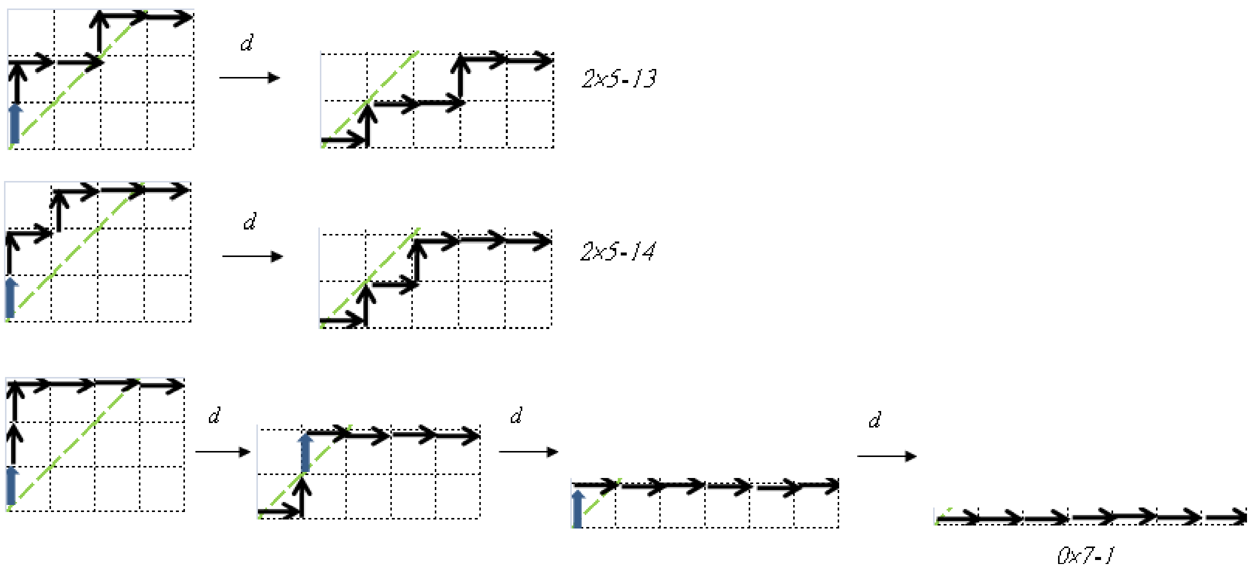
2x5-10



2x5-11



2x5-12


d
2×5-13
d
2×5-14
d
d
d
0×7-1