行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 X 成果報告 □期中進度報告

以分解結合法加速重設型選擇權之評價效率

計畫類別：X 個別型計畫　　□ 整合型計畫
計畫編號：NSC 90－2416－H－004－015－
執行期間： 90 年 8 月 1 日至 91 年 10 月 31 日

計畫主持人：陳威光
共同主持人：
計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：□精簡報告　□完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□涉及專利或其他智慧財產權，□一年□二年後可公開查詢

執行單位：國立政治大學金融系

中　華　民　國　92　年　1　月　27　日

摘　　　　要

選擇權評價方式，一般可分封閉解（Closed-Form Solution）與數值方法（Numerical Method）等兩大類。封閉解譬如 Black-Sholes 公式計算速度快，但卻十分缺乏彈性，例如無法評價美式選擇權及大部分的新奇選擇權；相反的，數值分析則相當具有彈性，但在評價時卻會比較耗時。本文結合數值方法中的樹網模型，再輔以封閉解維持應有的彈性，加快計算速度，我們將此方法稱之為分解結合法。本研究利用 Ritchken（1995）的三元樹模型，並搭配分解結合法對各式重設型選擇權來進行評價速度之分析。首先，針對單期單價式與整段區間單價式的重設型選擇權，來推導適用於分解結合法之方法。再以這兩種基本的重設型選擇權為基礎，將相同概念推廣至其他更複雜的重設型選擇權，並且比較分解結合法和樹網模型在評價重設型選擇權二者的評價效率。本文結果顯示，利用分解結合法不但能夠提高計算的速度，同時在某些條件下，還能減少其評價的波動度。

關鍵字：重設型選擇權、三元樹模型、界限選擇權、認購權證、分解結合法

Abstract

This study combines trinomial tree method (Ritchken,1995) with Black-Scholes (B-S, 1973) option pricing formula to value reset options. The results show that with the combination method, the computation speed (cpu-time) is less than that of in Ritchken's trinomial model. When the time step is large, the time saving is very significant. For instance, the combination approach needs only 3 seconds cpu-time, however Ritchken's method needs almost 300 seconds.

Keywords: reset option ,trinomial tree, barrier option, B-S model, combination method

壹、緒論

近年來台灣認購權證市場，除了標準的認購權證外，又增加了重設型認購權證（Reset Warrant）。大華證券在民國 87 年 10 月 22 日開始發行的大華 04 中環，後來緊接著發行的幾檔認購權証，則都具有重設性質的美式認購權証。重設型權證因為履約價格可以向下調整，可以減少投資人的風險，並提高投資人獲利的機會。一時重設型認購權證廣為投資者喜好，而其評價也易發重要。

選擇權評價的方式有二種：封閉解（Closed-Form Solution）及數值方法（Numerical Method）。封閉解如 Black-Sholes 評價公式計算速度很快，對於該選擇權有關避險方面的問題也都能迎刃而解。但相對來說，封閉解並不具有一般性，

亦即並不是每一種選擇權均有公式解，譬如美式選擇權及許多新奇選擇權。數值方法其主要包括樹網模型（Lattice model）、有限差分法(finite difference)與蒙地卡羅模擬法（Monte Carlo Simulation）。這類方法提供比封閉解更具彈性的分析方式，在評價具有相似性質的選擇權時，則有一致性的處理方式，避免運用複雜的數學來推導封閉解的不便，也能獲得令人滿意的結果。但相對而言，不論是樹網模型、有限差分法或是蒙地卡羅模擬，都必須大量仰賴電腦的計算，所以必須耗費較久的時間。

目前業界大都以樹網模型作為主要評價、避險的分析工具。而利用樹網模型評價時，通常會出現兩種不同型態的近似誤差：即分配誤差(Distribution Error)和非線性誤差（Non-Linearity Error）。分配誤差由於樹網模型基本上是利用間斷的二元或三元機率分配來逼近連續的股價對數常態分配。因此當期數少時，分配誤差愈大，增加期數，分配誤差會下降。非線性誤差乃指樹網模型之選擇權價格在某些區域會有非線性或是不連續的現象。例如，在到期日時，執行價格的部份，或是界限選擇權的界限值（barrier）的部份。一旦股價經過這些部份，若是股價有稍微的變動，就會讓選擇權的價格有很大的波動，而這類的跳動就是非線性誤差中的一種。非線性誤差一旦產生，就必須利用增加期數的方式來消除之，而且當期數增加至某一特定數量時，非線性誤差又會再度產生，只是波動的幅度會較前一次來得小。

本論文利用分解結合法的概念，對於重設型選擇權進行分割加速。在有關非線性誤差的部分，本文採用 Ritchken(1995)所提的三元樹模型，並將其與分解結合法來相互結合。本文裡，先針對兩種最基本型態的重設型選擇權，提出加速的概念，再利用此兩種基本型態的重設型選擇權，來推導其他型態的重設型選擇權加速的方法。再以此來比較分解結合法與樹網模型的評價效率。

貳、重設型選擇權評價模型

Boyle and Lau(1994)發現，若以二元樹模型來評價界限選擇權時，因二元樹模型的價格節點可能無法落在界線值上，會發現其收斂狀態相當不穩定，呈現鋸齒狀之收斂現象，亦即有嚴重的非線性誤差。因此 Boyle 及 Lau(1994)利用控制期數的方式，來使某些節點儘量落在界限值上。Derman、Kani、Ergener 和 Bardan（1995）等學者利用插補法的方式來修正評價誤差。

Ritchken(1995)將 Boyle（1986）的三元樹模型加以改良來處理界限選擇權。Ritchken 將三元樹模型加入一個伸展參數（λ），利用此伸展參數，便可以將節點控制在障礙值上，可有效解決鋸齒狀不穩定收斂的現象（即非線性誤差的問題），而不需要固定分割期數。在擬制(psedo−)機率的推導，則是利用選擇權的偏微分方程式（P.D.E.）進行動差的配合，可得

$$P_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}$$

$$P_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}$$

此外，Ritchken 亦針對複雜式障礙選擇權提出了另一套作法。以雙重重設型權證為例，首先給定伸展參數(λ)來解決重設界限之上限所產生的非線性誤差，然後在接近重設界限之下限時，再利用單一伸展參數(γ)來將節點硬性轉到重設下限，再來重新計算機率。

李存修、林岳賢（1999）提出動態拆解法（Dynamic Decomposition Algorithm：DDA）的概念，由程式的角度所發展出一套動態拆解股價樹的演算法。本文有關 Ritchken 三元樹模型評價的部分，即是以動態拆解法作為程式評價之基礎。此因 DDA 比起用 In-Out-Parity 的方式，評價效率較佳。雖然 DDA 比起靜態複製法的評價效率要來得好。但在評價重設型選擇權時，當期數越多（亦即 N 較大）時，仍舊會耗費相當多的時間。所以就必須使用分解結合法，來增進樹網模型的評價效率。

參、分解結合法增進樹網模型評價效率之方法------

一、樹網模型加速評價原理

以下就用標準歐式選擇權來簡單說明分節結合法與三元樹之應用，利用三元樹與 Black-Sholes 模型來結合。在此以 Boyle(1986)所提的三元樹模型作為分析的基礎。假設存在一個 S（股價）=100, K（履約價）=100, r（無險利率）=0.06, σ（股價波動度）=0.3, T（到期期限）=1 年, δ(股利率) = 0.12 的歐式買權，以分割 50 期下的三元樹為例：此時，以三元樹評價出此買權價值為 8.3479，與 BS 模型計算出的買權價值為 8.3756，其為相對誤差 0.33% 。

在 $S_{1,1}$ 、$S_{1,0}$ 、$S_{1,-1}$ 節點背後隱含應該是三個期間為 0.99 年，執行價為 100、的歐式買權。此時，可結合 BS 模型來進行加速計算，可求出對應於 $S_{1,1}$ 、$S_{1,0}$ $S_{1,-1}$ 之買權分別為 11.1632、8.3021、6.0232。並將上面三個買權的價值分別乘上對應節點的機率，並加總後進行二期折現。同樣地，也可將三元樹的期數推展到第 2 期再與 BS 公式解相互進行結合。

二、重設型選擇權之加速評價原理

將上述的分解結合法，利用其加速評價原理來評價重設型選擇權。

1. 單期式重設型選擇權

所謂單期式重設型選擇權，乃是在選擇權的權利期間內的某特定一天（譬如第 90 天）時，若股價低於重設價格，則可調整至新的履約價。至於重設價格若是單一價格，則稱之為單價式重設；若是重設價格有一個以上，則稱之為多價式重設。以下將利用 Ritchken(1995)的三元樹模型進行分析。

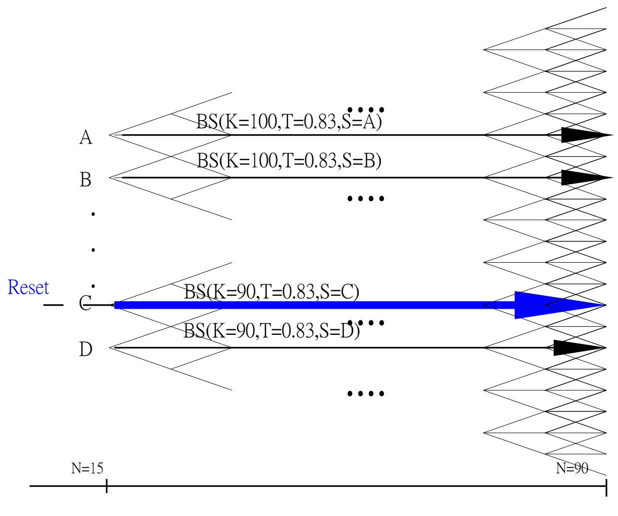
（1）單期單價式重設型選擇權

首先，必須先求出在三元樹模型中，第幾期將會達到重設的條件，即 $\eta=\dfrac{\ln(S(0)/h)}{\sigma\sqrt{t}}$，其中 h 為重設的條件。$\eta$ 通常不會等於零(因為若 η 等於零的話，則三元樹會退化成二元樹)，所以我們令 n_0 為小於 η 的最大整數期數，故 $n_0 \le \eta$，此時再令伸展參數 λ 等於 $\dfrac{\eta}{n_0}$。很明顯地，λ 一定會界於 1 與 2 之間，即 $1\le\lambda<2$。經由伸展參數的設定，就可讓節點落在重設界限上。(如圖 1)

以一個簡單歐式重設型選擇權為例來做說明：S（股價）=100, K（履約價）=100, r（無險利率）=0.06, σ（股價波動度）=0.3, T（到期期限）=1 年，以 N（分割期數）=90 作為分割的期數。若該選擇權並賦予持有人在第 60 天時，若股價低於或等於 90，則將履約價(K)重設至 90。

由上述條件可以知道在第 15 期時，此權証是否進行重設。因此，可將第 15 期的所有節點分成沒有重設的 A 點與 B 點，以及有重設的 C 點與 D 點等二類。只要將 A、B、C、D 等二類的節點分別代入對應的 BS 模型中，就可以得到第 15 期上所有節點之價值，然後再逐一往前推至第 0 期，則可求出權証的價值為 15.3115。由此可知，所需評價的樹狀區域也只剩原來的六分之一。故此方法當然會增進樹狀模型的評價效率。

<圖 1>單期單價重設型選擇權加速評價之概念



（2）單期多價式重設型選擇權

單期多價式權證就以 Ritchken 針對複雜式障礙選擇權提出了另一套方法作為分析的基礎。以雙價重設型權證為例，其一開始就給定伸展參數(λ)來解決重設

界限之上限所產生的非線性誤差。到了快接近重設界限之下限時，再利用單一伸展參數(γ)來將節點硬性轉到重設下限，再來重新計算機率如下：

分解結合法處理單期單價式重設型選擇權，以及處理單期多價式重設型選擇權的方式，基本上是幾乎完全相同的。

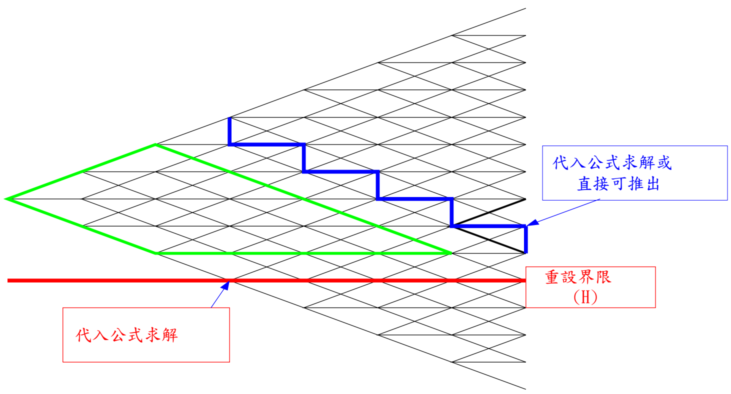
2. 整段期間式重設型選擇權

所謂整段期間式重設型選擇權，乃指在選擇權的全部權利期間內，若股價低於重設價格，則可調整至新的履約價。至於重設價格若是單一價格，則稱之為單價式重設；若是重設價格有一個以上，則稱之為多價式重設。

而此選擇權與上一節所討論的單期式重設型選擇最大的不同，就是在重設期間內，並沒有一個很明確的時間作為切割的時點，使其在切割時間之後就成為只具有歐式或美式選擇權的性質而已。這種現象在整段期間式重設型選擇權最為明顯，因為在整段期間式重設型選擇權下，由於重設的期間涵蓋該選擇權所有存續期間，因此就無法找出一個時點來切割。

首先，對於某些重要的節點都可經由直接或代入公式中得到。例如重設界限上的節點，以及最後一期時，重設界限上兩個節點所形成的梯形線。當求出這些重要的節點的值之後，僅須把此兩個界限中的其他節點一一回推至第 0 期，就可求得此選擇權期初的價值，大概只需計算原先節點的一半左右。而歐式與美式選擇權所應用的概念完全相同，只是在結合的公式上有一些不同。(如圖 2)

<圖 2>整段時期單價重設型選擇權加速評價之概念



3. 起始型部分區段重設型選擇權

所謂起始型部分區段式重設型選擇權，乃指在選擇權從上市起的第一天至某特定日期的權利期間內，例如，在權證上市起的三個月內。若股價低於重設價格，則可調整至新的履約價。

此類的重設型選擇權之評價概念與整段時期重設型選擇權是相類似的。先確定起始型部分區段的最後一期可重設的期數。以分割期數為 100 期為例，則從發行起的三個月內皆可重設的話，則表示在 N=0 到 N=25 皆可重設。亦即從第 0

期至第 25 期是個小型的整段時期重設型選擇權。同樣的，對於某些重要的節點都可經由直接或代入公式中得到。

4. 部分區段式重設型選擇權

所謂部分區段式重設型選擇權，乃指在選擇權的部分權利期間內，若股價低於重設價格，則可調整至新的履約價。至於重設價格若是單一價格，則稱之為單價式重設；若是重設價格有一個以上，則稱之為多價式重設。此類的重設型選擇權之評價概念與整段時期重設型選擇權是相類似的。

5. 多期式重設型選擇權

所謂多期式重設型選擇權，乃指在選擇權的權利期間內有多個特定的時點，若股價在這些特定時點低於重設價格，則可調整至新的履約價。至於重設價格若是單一價格，則稱之為單價式重設；若是重設價格有一個以上，則稱之為多價式重設。

此類的重設型權證應用於分解結合法的評價方法有二種方式；第一、與先前的概念相同，觀察多期式選擇權的規則特性，應用 BS 之封閉解來求出多期重設型權證之價值。第二、以分解結合法與單點單價式重設型選擇權的公式解來相互結合應用，無形之中也可提高了封閉解的彈性。

肆、模擬分析

以重設時點為上市後第三個月的歐式單期單價式重設型買權來做模擬分析，再比較以 Ritchken（1995）的三元樹和應用分解結合法，二者之間在評價效率上有何不同。參數資料為：S（股價）＝100、Ko（原來的履約價）＝100、r（利率）＝0.06、T（存續期間）＝1 年、波動度＝0.3、重設界限＝90、Kn（新的履約價）＝90。在評價準確性以及波動性方面：由於分解結合法也是使用樹網模型作為評價之基礎，所以跟 Ritchken 的三元樹模型相比，二者在波動方向與幅度上是極為相似的。不過，從相對誤差的角度來看，分解結合法似乎比 Ritchken 的三元樹模型在波動度與準確性上似乎好一點。在評價效率方面：由評價所需耗費的時間（cpu-time）來看，分解結合法的評價效率明顯比 Ritchken 的三元樹模型來得好。尤其當分割期數越大時，分解結合法在評價效率上的優勢就更加明顯。譬如在分割 200 期時 Ritchken 需要 15.65 秒 cpu 時間，利用本法只要 0.22 秒。(如表 1）

綜合以上二方面來看，分解結合法不論是在評價準確性及波動度上、或是評價效率上，各方面均優於 Ritchken 的三元樹模型。尤其是在評價效率方面，更達到加速樹網模型評價效率的目的。所以，就此點來看，我們會認為分解結合法的確有其價值所在。

同樣在整段期間單價式選擇權的評價效率方面：由評價所需耗費的時間（cpu-time）來看，分解結合法的評價效率明顯比 Ritchken 的三元樹模型來得好。由附錄圖 3 可知，當期數越大時，分解結合法在評價效率方面，相對 Ritchken 的三元樹模型而言，在節省評價時間上，有顯著的降低評價所需之時間。雖然在此

分解結合的評價效率，不似之前單期式重設型權證在評價上有絕對之優勢。但在此分解結合法的評價效率還是很顯著的。

＜表 1＞單期單價重設型買權

期數	Richken	結合法	封閉解[1]	CPU-time[2] -R	CPU-time-結	相對誤差[3] -R	相對誤差-結
60	15.6536	15.6681	15.4141	0.93	0.05	0.01554	0.016478
100	15.6345	15.6575	15.4141	2.36	0.06	0.0143	0.015791
160	15.3082	15.312	15.4141	8.46	0.17	0.00687	0.006624
200	15.3055	15.3105	15.4141	15.65	0.22	0.00705	0.006721
260	15.5048	15.5073	15.4141	30.97	0.44	0.00588	0.006046
300	15.4895	15.4907	15.4141	45.31	0.5	0.00489	0.004969
360	15.4896	15.4912	15.4141	77.28	0.77	0.0049	0.005002
400	15.3683	15.3691	15.4141	104.91	1.05	0.00297	0.002919
460	15.4788	15.3539	15.4141	157.36	1.48	0.0042	0.003906
500	15.3524	15.3537	15.4141	201.41	1.81	0.004	0.003918
560	15.3605	15.3612	15.4141	278.09	2.47	0.00348	0.003432
600	15.3602	15.3611	15.4141	343.88	3.02	0.0035	0.003438

＜註 1＞此單點單價式重設型選擇權封閉解乃取自陳威光（1999）所推導。

＜註 2＞本論文之 CPU-time 之單位皆為秒

＜註 3＞相對誤差＝｜（模擬值-理論值）/理論值

伍、結論

本文主要利用分解樹狀模型並結合 B-S 公式的技巧，來加速評價重設型認購權證。模擬分析結果顯示，利用此種方法的確能夠有效大幅提高計算的速度，甚至我們也發現在評價某些條件下的選擇權時，利用分解結合法還能夠有效的降低其波動度。無論何種形式的重設型選擇權，分解結合法之評價效率皆優於以 Ritchken 三元樹網模型為基礎的動態拆解法（DDA），而且當分割期數越大時，分解結合法的評價效率之優勢就越明顯。

陸、參考文獻：

（1）王志原（1999），「增進樹狀模型評價重設型選擇權效率之方法」，國立政治大學金融研究所碩士論文。

（2）李存修，林岳賢（2000）「重設選擇權之評價與避險操作」， 中國財務學刊。

（3）陳威光(1999)，「The Valuation and Hedging of Reset Option」，中國財務年會論文。

（4）陳威光、張龍福、王志原（2001）「以分解結合法加速重設型選擇權之評價效率」，二十一世紀全球投資策略研討會論文集，pp.61-87, 2001, 3 月。

（5）Boyle，P.P.(1986)，「Option Valuation Using a Three Jump Process」，*International Options Journal*，3，7.12.。

（6）Boyle，P.P，and S.H Lau(1994)，「Bumping Up Against the Barrier with Binomial Method」，*Journal of Derivatives*，1,4,6-14.。

（7）Boyle, P.P(1997)，「Options: A Monte Carlo Approach」，*Journal of Financial Economics,*，4, 323-338。

（8）Boyle，P.P. (1988)，「A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables」，*Journal of Financial and Quantitative Analysis*，*3*.23, pp.1-12。

（9）Breen，R.(1991)，「The Accelerated Binomial Option Pricing Model」，*Journal of Financial and Quantitative Analysis,*，26, 2, 153-164.。

（10）Cheuk, T. H., and T. C. Vorst(1996)，「Complex Barrier Options」，*Journal of Derivatives*，Fall，8-22.。

（11）Cox, J.、S. Ross and M. Rubinstein(1979)，「Option Pricing: A Simplified Approach」，*Journal of Financial Economics,*，7,，October, 229-264.。

（12）Curran, Michael(1995)，「Accelerating American Option Pricing In Lattices」，*Journal of Derivatives,*，Winter，8-18.。

（13）Derman Emanuel、Iraj Kani、Deniz Ergener、and Indrajit Bardhan（1995），「Enhanced Numerical Methods for Option with Barrier」，*Financial Analysts Journal (Nov-Dec)"*。

（14）Figlewski, S., and B. Gao.（*1999*），「The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing」，*Journal of Financial Economics*，pp313-351。

（15）Ritchken, P.(1995)，「On Pricing Barrier Options」，Journal *of Derivatives* 3,2,19-28.。

計畫成果自評：本研究結果與原計畫預期相符、研究成果具學術及應用價值、適合在學術期刊發表。