

附錄

模糊理論元素簡介

第三章第二節介紹的模糊資料包絡分析法中有用到一些模糊理論的元素，以下將就這些元素做簡介。

一、 模糊數(fuzzy number)

數據並非總是被精確衡量、描述的，現實中數據有時必須透過估計的方式來取得，估計數據的準確性由擁有資訊的多寡來決定，然而在某些狀況下，這些估計的資料無法直接被當成精確數據進行分析，而模糊數透過數學上具有某些已經被發現的特性，我們可以將這些資訊不足的資料轉換成足以用來分析的數據，也就是用模糊數替代這些資料，並以模糊數的型態進行分析。文字上我們以 \tilde{A} 來表達「模糊數 A 」。

二、 歸屬函數(membership function)

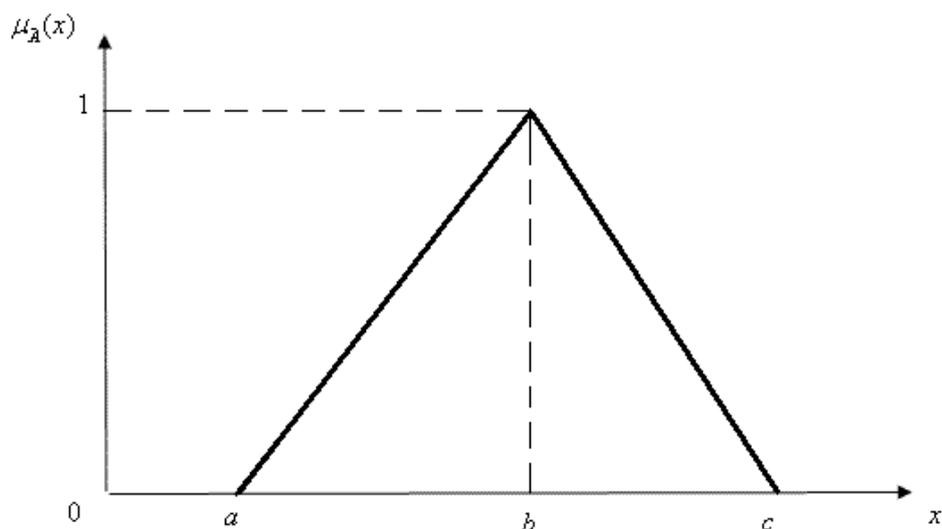
歸屬函數是用來表達某實數隸屬於某模糊數的程度。假設存在一個模糊數： \tilde{A} ，而 x 為一實數，並且為 \tilde{A} 的元素，則 \tilde{A} 的歸屬函數記為 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 。 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的值介於0到1之間， $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 值越高，代表在 x 數值之下，隸屬於 \tilde{A} 的程度越高。以下簡單介紹兩種最常用的模糊數，以及這些模糊數與其歸屬函數的關係：

(一) 三角模糊數(triangular fuzzy number)：

三角模糊數由三個實數組成，以 $\tilde{A}=(a,b,c)$ 為例，其中 $a \leq b \leq c$ ，

此時 \tilde{A} 的歸屬函數 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 可表示如下：

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & ,x \in [a,b] \\ 1 & ,x=b \\ \frac{c-x}{c-b} & ,x \in [b,c] \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$



附錄圖 1：三角模糊數

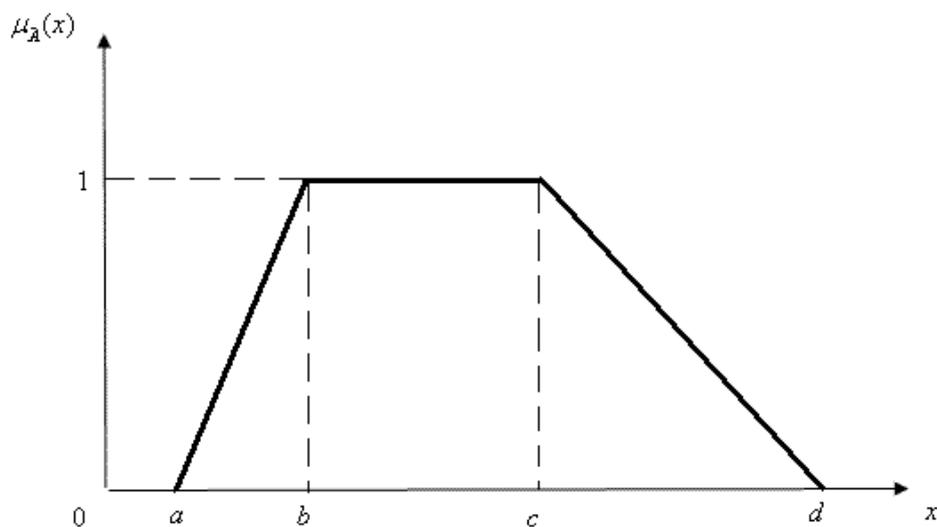
當 x 的值越靠近 b 時，其隸屬於 \tilde{A} 的歸屬函數值越高，表示 x 隸屬於 \tilde{A} 的程度越高。

(二) 梯形模糊數(trapezoidal fuzzy number)：

梯形模糊數由四個精確數值組成，以 $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ 為例，其中

$a \leq b \leq c \leq d$ ， \tilde{A} 的歸屬函數表示如下：

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & ,x \in [a,b] \\ 1 & ,x \in [b,c] \\ \frac{c-x}{c-b} & ,x \in [c,d] \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$



附錄圖 2：梯形模糊數

當 x 的值介於 $[b,c]$ 時，其隸屬於 \tilde{A} 的歸屬函數值有最大值 1，表示在這個情況下， x 隸屬於 \tilde{A} 的程度最高，當 x 小於 b 或大於 c 時，其隸屬於 \tilde{A} 的程度下降。

三、 α -截集(α -cut)

模糊數 \tilde{A} 的 α -截集定義表示如下：

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \forall \alpha \in [0,1]$$

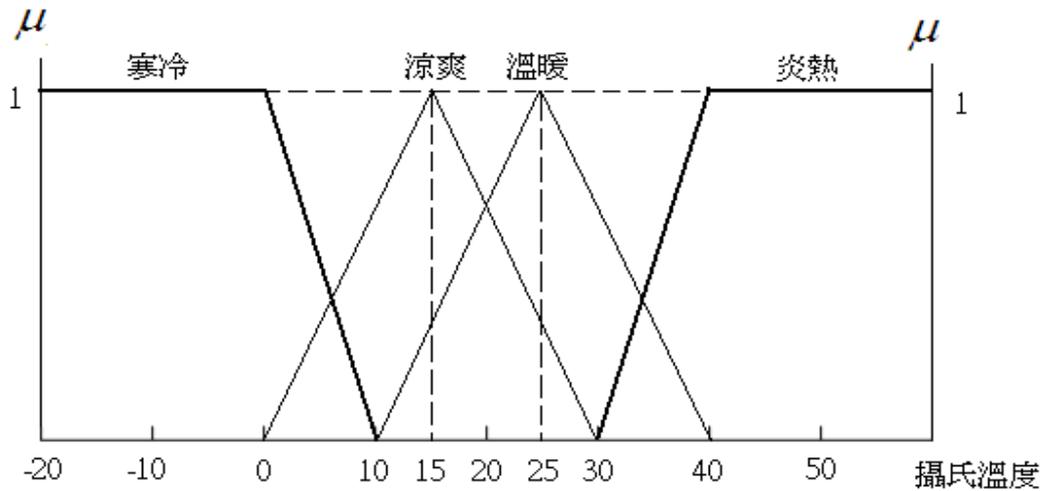
也就是「模糊數之元素中，使其歸屬函數大於等於 α 者」， α 越大時，代表其 α -截集隸屬於 \tilde{A} 的程度越大。先選定一 α -水準，再根據 \tilde{A} 的

歸屬函數，可以求得一群精確數值 x 的集合 (α -截集)，因此透過 α -截集的概念，我們可以將模糊數轉換成精確數值。

四、語意變數(linguistic variable)

日常生活中，經常使用一連串形容詞來描述某件事物的程度，例如描述氣溫時，精確一點我們使用 -4°C 、 90°F ...來衡量，口語上則使用寒冷、涼爽、溫暖、炎熱...來表達，這些口語上的敘述，就是所謂的語意變數。作科學上的研究時，大多數需要使用精確的度量衡數據，如上述的 -4°C 、 90°F ，但是當手邊沒有量測工具，甚至根本就沒有衡量的方法，只能使用語意變數衡量其程度時，模糊理論成為科學研究非常實用的方法。

例如我們將衡量氣溫的語意變數：寒冷、涼爽、溫暖、炎熱，轉換成如下圖的模糊數型態。當氣溫介於攝氏零下 20 度到零度時，隸屬於寒冷的程度為 1；介於零度到 10 度時，隨著氣溫的升高，隸屬於寒冷的程度降低，同時隸屬於涼爽的程度升高……。而當我們說天氣「寒冷」時，當時氣溫可能是介於攝氏零下 20 度到零度之間；說天氣「涼爽」時，當時氣溫可能是介於零度到 30 度……。由此可知，即使我們只知道某天氣溫只被描述成「寒冷」、「涼爽」等語意變數，還是能大概瞭解氣溫是介於多少溫度之間。



附錄圖 3：描述氣溫之模糊語意變數

五、模糊數運算

假設存在兩個三角模糊數 $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ 與 $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ，其加法與乘法運算如下：

(一) 加法： $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ，其中 \oplus 為模糊加法運算子。

(二) 乘法： $\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 = (a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2)$ ，其中 \otimes 為模糊乘法運算子。

常數 N 可以用三角模糊數表示： $\tilde{N} = (N, N, N)$ ，因此模糊數與常數的運算可依上述原則類推。