2 因子模型

商業化的信用損失模型如 KMV 的 PortfolioManager, 其基本架構源自於 Merton 模型。諸如這類的模型皆假設違約事件是屬於 Bernoulli 變數, 並且認爲違約行爲乃是一種因果關係。亦即, 違約的發生與否是一個受到某種因素影響的二元隨機變數。至於違約事件發生的可能性, 就是以違約機率來衡量, 在假設違約事件爲 Bernoulli 變數的情況下, 違約機率就等同於 Bernoulli 變數的參數值。

違約機率是 Basel II 中一項重要的風險參數, 此參數同時也是分析信用損失的重要角色。一般來說, 銀行最常用來決定違約機率的方式是透過各個公司的評等, 而違約機率就是依此評等來定義。評等的方式又分成外部評等與內部評等, 前者依照 Basel II 規定僅適用於標準法之風險權數計算; 後者則是經常透過評等變化所產生的移轉矩陣來計算各評等的歷史違約機率。傳統的 Merton 模型獲取違約機率的方法則不同於從評等獲得違約機率的方式, 而由 Merton 模型所發展出的因子模型則納入評等的訊息, 使違約機率更加精準。以下將先說明傳統 Merton 模型。而本章內容主要參考黃嘉龍 (2008)。

2.1 傳統 Merton 模型

Merton 模型本身來自選擇權中買權 (call option) 的想法。假設一間公司的資產價值 A 等於一簡化的資產結構: 負債 D 加上權益 E, 即 A=D+E。Merton 模型將股東權益視爲持有的買權, 其執行價格即爲 D。因此, 股東可能的報酬可分成兩種情形:

- 若 $A \geq D$, 則股東執行買權, 報酬爲 A-D。
- 若 $A<D$, 則股東不會執行買權, 報酬爲 0。

上述中報酬爲 0 的情況, 代表公司資產價值不足支應負債, 股東不願再繼續經營公司, 遂將公司所有權留給債權人, 這也正是 Merton 模型認定公司違約事件發生的情形, 而違約機率就是 $A< D$ 的機率, 同時 D 也稱爲違約臨界點, 因此只要知道資產價值是否低於負債, 即可判斷公司是否違約。

Merton 模型中假設資產價值得變動過程是來自幾何布朗運動 (geometrix Brownian motion), 因此資產價值可由以下的隨機微分方程式解出

$$A_t - A_0 = \mu_A \int_0^t A_s \mathrm{d}s + \sigma_A \int_0^t A_s \mathrm{d}B_s \tag{2-1}$$

將 (2-1) 式等號兩邊對 t 微分可得

$$\mathrm{d}A_t = \big(\mu_A A_t\big)\mathrm{d}t + \big(\sigma_A A_t\big)\mathrm{d}B_t \tag{2-2}$$

其中, μ_A 以及 σ_A 分別爲資產價值的期望值以及標準差, $\mathrm{d}B_t = \varepsilon\sqrt{t} \sim N(0,t)$, ε 則是標準常態分配。由 It$\hat{o}$ 公式, 可解得資產價值爲

$$A_t = A_0 \exp\bigg[\Big(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\Big)t + \sigma_A \mathrm{d}B_t\bigg] \tag{2-3}$$

假設負債不隨時間改變, 對 (2-3) 式取自然對數後, 違約機率可表示爲

$$\begin{aligned} Pr(A_t < D) &= Pr\bigg[\ln(A_0) + \Big(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\Big)t + \sigma_A\varepsilon\sqrt{t} < \ln(D)\bigg] \\ &= Pr\big(\varepsilon < \tilde{D}_t\big) = \Phi\big(\tilde{D}_t\big) \end{aligned} \tag{2-4}$$

其中, Φ 表示標準常態累積分配函數, $\tilde{D}_t$ 則是

$$\tilde{D}_t \equiv -\frac{\ln\big(A_0/D\big) + \big(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\big)t}{\sigma_A\sqrt{t}}$$

Merton 模型處理違約機率的想法固然簡單, 但實際上處理時卻會遭遇無法直接觀察到資產價值的窘境。Merton (1974) 遂提出以 Black-Scholes 的選擇權評價公式倒推的方式來求解資產價值, 在此不詳加說明[2]。另外, Hanson et al. (2008) 提出將權益 E 作爲違約定義的變通辦法。由於資產價值 A= D + E, 因此若 A<D 等同於 E<0。這代表我們可改以權益 E 的變動過程作爲資產變動的替代項, 可說是大大精簡求算資產價值的繁雜過程。當我們把權益的變動視做股價報酬, 若各公司的股價報酬皆由一個相同的因子作爲解釋變數, 則稱此解釋變數爲共同因子。藉由共同因子, 各公司的股價報酬將得以聯繫並產生相關性, 在信用風險領域中, 這樣的模型設計就是信用風險因子模型, 以下我們將扼要說明之。

[2]關於以 Black-Scholes 的選擇權評價公式求解資產價值可參考黃嘉龍 (2008)

2.2 信用風險因子模型

假設從第 t 期至第 $t+1$ 期的權益 E 設定爲 standard geometric random walk, 依此我們可將 E 的變動過程表示成

$$\ln\big(E_{i,t+1}\big) = \ln(E_{i,t}) + \alpha_i + \xi_{i,t+1} \tag{2-5}$$

其中, $\ln\big(E_{i,t+1}\big) - \ln(E_{i,t})$ 乃權益的變動率, 可以股價報酬率 $R_{i,t+1}$ 表示之。$\xi_{i,t+1}$ 則依照 Vasicek (1987) 爲其引入共同因子後將使各公司股價報酬產生相關性, 我們將 $\xi_{i,t+1}$ 表示如下

$$\xi_{i,t+1} = \beta_i \tilde{X}_{t+1} + \tilde{\varepsilon}_{i,t+1} \tag{2-6}$$

其中, $\tilde{X}_{t+1}$ 爲共同因子並無 i。由於 $\xi_{i,t+1}$ 在 (2-5) 式的功能是用來捕捉股價報酬的隨機性質, 而此隨機性質又可透過 (2-6) 式中的共同因子來捕捉一部份, 因此這樣的設定方式正是直接地將不同公司間部份的隨機性質以共同因子聯繫在一起以致產生相關性。將 (2-6) 式代入 (2-5) 式, 即可將股價報酬率重新以共同因子表示成

$$R_{i,t+1} = \alpha_i + \beta_i \tilde{X}_{t+1} + \tilde{\varepsilon}_{i,t+1} \tag{2-7}$$

其中, β_i 是共同因子對於不同公司股價報酬率的影響程度。進一步地, 我們令 $\tilde{X}_{t+1} \sim N\big(\mu_X, \sigma_X^2\big)$, 及 $\tilde{\varepsilon}_{i,t+1} \sim N\big(0, \sigma_i^2\big)$, 而且兩者相互獨立, 則 $\xi_{i,t+1}$ 的變異數即可表示成

$$\sigma_{\xi_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_X^2 + \sigma_i^2 \tag{2-8}$$

如同前面提過, $\xi_{i,t+1}$ 的功能是用來捕捉各個公司股價報酬率的隨機性質, 這樣的隨機性質其實就是展現在各個公司股價報酬率的波動性, 這一點由觀察 (2-8) 式更可以體會。引入共同因子後, 股價的波動程度可以分成兩的部份: $\beta_i^2 \sigma_X^2$ 以及 σ_i^2 。這兩者分別就是所謂的系統性風險以及個別風險。系統性的風險來自於各個公司面對的共同因子, 因此模型中所有公司面對的系統性波動皆出自同源, 只是受波動後的影響效果不同。而 σ_i^2 才是專屬各個公司自我波動的部份。若我們將 $\tilde{X}_{t+1}$ 以大盤指數作爲代表, (2-7) 式事實上就

是一個 Market Model。更多因子的設定方式可以參考 Bluhm, Overbeck and Wagner (2003)。

以上的因子模型立基在一個因子之下, 因此各個公司股價報酬率的相關性也就僅由一個共同因子來刻畫。我們也可將單因子擴充成多因子, 若考慮 M 個共同因子, 以向量 $\mathbf{F}_{t+1}=\left(X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, ..., X_{t+1}^M\right)$ 表示之, 則所有共同因子間的關係將由下面的變異數-共變異數矩陣所捕捉

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{F}_{t+1}) = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,M} \\ \sigma_{2,1} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sigma_{M-1,M} \\ \sigma_{M,1} & \cdots & \sigma_{M,M-1} & 1 \end{bmatrix}$$

其中, $\sigma_{l,l'}$ 表示兩相異共同因子間的共變異數。由上面的矩陣可知, 在多因子的架構下, 更可以加強各個公司股價報酬率間的相關性。當然, 計算出來的違約事件相關性也會加強許多。然而, 我們所面對的模型也同時複雜了許多。其他更多有關多因子模型的設定可參考 Wilson (1997a,1997b)。回到單因子模型的情境, 透過各個公司股價報酬率以及共同因子的歷史資料, 我們可以將 (2-7) 式中的 α_i、β_i 以及 σ_i 估計出。

有了因子模型後, 緊接著可以進行違約事件的定義。違約事件發生的與否需視公司的股價報酬是否小於某個門檻值, 而違約機率正是股價報酬小於門檻值的機率。決定違約與否後, 將可應用信用風險模型得到信用損失分配以及各種風險指標。以下, 我們將說明違約機率以及違約門檻。

2.3 計算因子模型下的違約門檻與違約機率

稍早我們以權益 E<0 的與否作爲違約事件發生的與否。亦即, 我們以 0 作爲違約與否的門檻值。然而, 我們必須要提出一點, 即使權益 E>0 仍然有可能違約, 因此針對權益 E<0 所定義的違約事件將遺漏更多可能違約的情況。對此, 我們有必要針對違約的門檻

做適度修正[3]。在此, 我們僅簡單設定違約的門檻値爲 C。因此, 當 0<E<C 時, 就認定爲違約。將此門檻概念以報酬率的型式表示成 $\lambda_{i,t+1}=\ln\left(C_{i,t+1}/E_{i,t}\right)$, 當各個公司的股價報酬率 $R_{i,t+1}<\lambda_{i,t+1}$ 時, 則判定公司違約。

將各個公司違約與否的事件定義爲 Bernoulli 變數 L_i, 當 $L_i=1$ 時表示公司違約; 反之, $L_i=0$ 時, 公司不違約。由於對各個公司來說, 違約機率乃是 L_i 變數的期望値, 所以我們可依此來定義違約機率。要找出違約機率的定義必須循序漸進, 我們得先從有條件的違約機率下手, 再對給定條件的變數做積分以消去條件得到無條件違約機率定義式。爲了之後方便分析, 我們先將 (2-7) 式的模型做進一步的簡化, 將 $\tilde{X}_{t+1}$ 以及 $\tilde{\varepsilon}_{i,t+1}$ 轉換成標準常態分配, 則 (2-7) 式可寫成

$$R_{i,t+1}=\mu_i+\gamma_i X_{t+1}+\sigma_i\varepsilon_{i,t+1} \tag{2-9}$$

其中, $\mu_i=\alpha_i+\beta_i\mu_x$ 、$\gamma_i=\beta_i\sigma_X$。

違約事件發生時表示 $R_{i,t+1}<\lambda_{i,t+1}$, 將此改以 (2-9) 式等號右邊來描述, 可以得到 $\mu_i+\gamma_i X_{t+1}+\sigma_i\varepsilon_{i,t+1}<\lambda_{i,t+1}$。進一步地, 將違約事件的發生與否改寫成指標函數的形式 $\mathrm{I}_{\{\mu_i+\gamma_i X_{t+1}+\sigma_i\varepsilon_{i,t+1}<\lambda_{i,t+1}\}}$, 當指標函數 “{ }” 內的條件成立時, 表示違約事件發生, 同時也表示 $L_i=1$; 反之, “{ }” 內的條件不成立時, 表示違約事件沒有發生, $L_i=0$。對此, 我們只要給定共同因子 $X_{t+1}=x_{t+1}$, 再對 L_i 求取條件期望値, 即可得到各公司的條件違約機率 $\bar{\pi}_{i,t+1}\left(x_{t+1}\right)$

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_{i,t+1}\left(x_{t+1}\right)=E\left(L_i \mid x_{t+1}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{I}_{\{\mu_i+\gamma_i x_{t+1}+\sigma_i\varepsilon_{i,t+1}<\lambda_{i,t+1}\}}f\left(\varepsilon_{i,t+1}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{i,t+1}\\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_{i,t+1}-\mu_i-\gamma_i x_{t+1}}{\sigma_i}} f\left(\varepsilon_{i,t+1}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{i,t+1}\\ &= \Phi\left(\frac{\lambda_{i,t+1}-\mu_i-\gamma_i x_{t+1}}{\sigma_i}\right)\end{aligned} \tag{2-10}$$

(2-10) 式中的第二個等號成立乃因指標函數之定義與 Bernoulli 變數 L_i 之間關係的必然結果。第三個等號成立的原因在於, 對文中定義的指標函數積分形同計算該式中積分變

[3]門檻的修正可參閱 Crosbie and Bohn (2003)

數的累積機率。由於先前假設 $\varepsilon_{i,t+1}$ 服從標準常態分配, 因此 (2-10) 式的最後一個等號也是此假設下的必然結果。

觀察 (2-10) 式, 尚有一個問題未解決, 即違約門檻 $\lambda_{i,t+1}$ 仍然未知, 這同時也使得我們無法計算條件下的違約機率, 若我們能夠知道違約機率, 即可反推出違約門檻。在信用評等機構發布的移轉矩陣剛好提供我們長期違約機率, 也就是無條件的違約機率。因此, 只要能夠將 (2-10) 式轉換成無條件的違約機率定義式, 我們隨即能利用信用評等機構所發布的無條件違約機率反推出違約門檻進而推導出條件違約機率。令無條件違約機率爲 π_i, 則無條件違約機率可表示成

$$\begin{aligned}\pi_i = E\big(L_i\big) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{I}_{\{\mu_i+\gamma_i x_{t+1}+\sigma_i\varepsilon_{i,t+1}<\lambda_{i,t+1}\}} f\big(\varepsilon_{i,t+1}\big) f\big(x_{t+1}\big)\mathrm{d}\varepsilon_{i,t+1}\mathrm{d}x_{t+1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\bigg(\frac{\lambda_{i,t+1}-\mu_i-\gamma_i x_{t+1}}{\sigma_i}\bigg) f\big(x_{t+1}\big)\mathrm{d}x_{t+1} \\ &= \Phi\big(\frac{\lambda_{i,t+1}-\mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2+\gamma_i^2}}\big) \qquad (2\text{-}11)\end{aligned}$$

(2-11) 式第三個等號成立是直接來自 (2-10) 式的結果。由於第三個等號後的積分項無法直接求得, 但之前設定 X_{t+1} 與 $\varepsilon_{i,t+1}$ 爲相互獨立的標準常態隨機變數, 因此我們可以直接從第二個等號中的內容直接進行雙變數常態分配的累積機率計算, 透過第二個等號中指標函數裡 "{ }" 中內容的標準化即可得到最後一個等號的結果。由 (2-11) 式, 違約的門檻可透過常態分配累積反函數求得如下

$$\lambda_{i,t+1} = \Phi^{-1}\big(\pi_i\big)\sqrt{\gamma_i^2+\sigma_i^2}+\mu_i \qquad (2\text{-}12)$$

將 (2-12) 式的結果代入 (2-10) 式並加以整理, 即可得到條件違約機率 $\bar{\pi}_i$ 如下所示

$$\bar{\pi}_i\big(x_{t+1}\big) = \Phi\bigg(\frac{1}{\sigma_i}\Phi^{-1}\big(\pi_i\big)\sqrt{\gamma_i^2+\sigma_i^2}-\frac{1}{\sigma_i}\gamma_i x_{t+1}\bigg) \qquad (2\text{-}13)$$

由 (2-13) 式中的條件違約機率可以看出, 條件違約機率的決定必須先得知共同因子 X_{t+1} 的特定值以及無條件違約機率 π_i, 因此移轉矩陣上無條件違約機率的品質將同時影響著條件違約機率的適當性。而評等公司所發布的移轉矩陣確實存在爲人詬病的缺陷, 因此

也影響了無條件違約機率的好壞, 在之後的章節我們將點出評等公司所發布的移轉矩陣其缺點何在, 做扼要說明後, 我們將提出一種修正移轉矩陣的方式來得到無條件違約機率。

至此, 我們從傳統的 Merton 模型出發, 再從中建構因子模型, 其中共同因子是整個因子模型產生相關性的關鍵。將 (2-9) 式的各個公司股價報酬率標準化後, 再令 $\mu_i = 0$ 以及假設 $\sigma_i^2 + \gamma_i^2 = 1$, 則我們可以如下的方式重新詮釋各公司的股價報酬率

$$R_{i,t+1} = \sqrt{\rho_i^2} X_{t+1} + \sqrt{1-\rho_i^2}\varepsilon_{i,t+1} \tag{2-14}$$

另外, (2-13) 條件違約機率也可改寫成

$$\bar{\pi}_i\big(x_{t+1}\big) = \Phi\bigg(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi_i\big) - \sqrt{\rho_i^2}x_{t+1}}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\bigg) \tag{2-15}$$

由 (2-14) 式可看到, 各個公司的股價報酬率標準化後, 被共同因子的影響或解釋的部份正是和共同因子的相關係數 ρ_i。(2-15) 式的條件違約機率中, 也找的到 ρ_i 的蹤跡。因此, 公司報酬率的高低乃至於違約與否都受到了共同因子所影響, 相關性也就此產生。另外, 從共同因子的創造以致產生相關性可得知, 相關性議題事實上正是因子模型的核心, 有此認知後, 我們隨即將焦點置於違約事件以及違約機率的相關性探討。

2.4 因子模型下的相關性探討

爲了要描述或計算公司間違約事件的相關性, 我們首先要知道各個公司違約事件的聯合分配。前面假定過各個公司的違約事件 L_i 乃一服從 Bernoulli 分配的變數, 分配參數值則是違約事件的期望值, 也就是違約機率。在因子模型中, 只要我們給定共同因子的實現值後, 則可得到各個公司的條件違約機率。假設我們給定共同因子 $X_{t+1} = x$, 條件違約率可由原本是共同因子變數的 $\bar{\pi}_i(X_{t+1})$ 變成是 $\bar{\pi}_i(x)$ 的一個固定值。此時條件違約機率因爲已經將共同因子的實現值代入, 因此各個公司條件違約機率之間已獨立, 不存在相關性。有了條件違約機率的固定值後, 我們可以明確的將各個公司違約事件的 Bernoulli 變

數定義出來

$$L_i \mid \bar{\pi}_i(x) \sim B\big(1; \bar{\pi}_i(x)\big) \tag{2-16}$$

上面 (2-16) 式中的 Bernoulli 變數, 因爲代入了共同因子的固定值因而相互獨立, 因此我們可以運用獨立的條件很快地將 N 個公司的違約事件變數相乘以求得 N 個公司有條件違約事件的聯合分配

$$\begin{aligned} &P\big(L_1 = l_1, L_2 = l_2, ..., L_N = l_N \mid X_{t+1} = x\big) \\ &= \prod_{i=1}^{N} \bar{\pi}_i^{l_i}(x)\big(1 - \bar{\pi}_i(x)\big)^{1-l_i} \end{aligned} \tag{2-17}$$

其中, $l_i \in \{0, 1\}$ 乃 L_i 的實現值。由於, (2-17) 式中 N 間公司的違約事件聯合分配乃條件聯合分配, 爲了得到無條件的違約事件聯合分配, 我們需再將 (2-17) 式積分以消去條件, 因此無條件違約事件聯合分配如下所示

$$\begin{aligned} &P\big(L_1 = l_1, L_2 = l_2, ..., L_N = l_N\big) \\ &= \int_{[0,1]^N} \prod_{i=1}^{N} \bar{\pi}_i^{l_i}(x)\big(1 - \bar{\pi}_i(x)\big)^{1-l_i} \mathrm{d}G\big(\bar{\pi}_1(x), \bar{\pi}_2(x), ..., \bar{\pi}_N(x)\big) \end{aligned} \tag{2-18}$$

其中, $G(\cdot)$ 爲 $\big(\bar{\pi}_1(x), ..., \bar{\pi}_N(x)\big)$ 的聯合機率分配, $supp\ G$ 爲 $[0, 1]^N$。若我們令 $z_i = \bar{\pi}_i(x)$, $G\big(\bar{\pi}_1(x), \bar{\pi}_2(x), ..., \bar{\pi}_N(x)\big)$ 也可以多元常態分配 Φ_N 表示, 令 Φ_N 的相關係數矩陣爲 Ψ, 則 $G(\cdot)$ 如下所示

$$G\big(\bar{\pi}_1(x), \bar{\pi}_2(x), ..., \bar{\pi}_N(x)\big) = \Phi_N\Big[\bar{\pi}_1^{-1}\big(z_1\big), ..., \bar{\pi}_N^{-1}\big(z_N\big); \Psi\Big] \tag{2-19}$$

(2-19) 式寫法事實上也解釋了 (2-18) 式中積分的可行性。有了 N 個公司的無條件違約事件聯合分配, 我們只要令 $N = 1$ 就可以非常輕易地得到單一 i 公司的無條件違約事件分配

$$P\big(L_i = l_i\big) = \int_{[0,1]} \bar{\pi}_i^{l_i}(x)\big(1 - \bar{\pi}_i(x)\big)^{1-l_i} \mathrm{d}G\big(\bar{\pi}_i(x)\big) \tag{2-20}$$

有了 (2-20) 式, 終於可以定義兩間公司的違約事件相關性 ρ^*

$$\begin{aligned}\rho^* = \mathrm{Corr}\big(L_i, L_j\big) &= \frac{\mathrm{Cov}\big(L_i, L_j\big)}{\sqrt{\mathrm{Var}(L_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(L_j)}} \\ &= \frac{E\big(L_i L_j\big) - E\big(L_i\big)E\big(L_j\big)}{\sqrt{E\big(L_i\big)\big(1-E\big(L_i\big)\big)}\sqrt{E\big(L_j\big)\big(1-E\big(L_j\big)\big)}} \qquad (2\text{-}21)\end{aligned}$$

透過 (2-20) 的無條件違約事件分配, 我們可以求得 (2-21) 式中的 $E\big(L_i\big)$ 爲

$$\begin{aligned}E\big(L_i\big) &= 1 \times P\big(L_i = 1\big) + 0 \times P\big(L_i = 0\big) \\ &= \int_{[0,1]} \bar{\pi}_i(x) \mathrm{d}G\big(\bar{\pi}_i(x)\big) \\ &= E\big(\bar{\pi}_i(X)\big) \\ &= \pi_i \qquad (2\text{-}22)\end{aligned}$$

以及 (2-21) 式中的 $E\big(L_i L_j\big)$ 爲

$$\begin{aligned}E\big(L_i L_j\big) &= P\big(L_i = 1, L_j = 1\big) \\ &= \int_{[0,1]^2} \bar{\pi}_i(x)\bar{\pi}_j(x) \mathrm{d}G\big(\bar{\pi}_i(x)\bar{\pi}_i(x)\big) \\ &= E\big(\bar{\pi}_i(X)\bar{\pi}_j(X)\big) \qquad (2\text{-}23(\mathrm{a}))\end{aligned}$$

其中, (2-22) 式中的最後一個等號的結果來自 (2-11) 式第一個等號的結果。另外, (2-22) 式與 (2-23) 式中的 $\bar{\pi}_i(X)$ 其實就是 (2-15) 式中的尚未給定共同因子爲固定值時的條件違約機率, 將尚未給定共同因子爲固定值時的 (2-15) 式代入 (2-23) 式後, 可以將 (2-23) 式最後一個等號的結果改寫成

$$\begin{aligned}E\big(L_i L_j\big) &= E\big(\bar{\pi}_i(X)\bar{\pi}_j(X)\big) \\ &= E\left[\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi_i\big) - \sqrt{\rho_i^2}X}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi_j\big) - \sqrt{\rho_j^2}X}{\sqrt{1-\rho_j^2}}\right)\right] \qquad (2\text{-}23(\mathrm{b}))\end{aligned}$$

最後, 將 (2-22)-(2-23(b)) 的結果代回 (2-21) 式, 可以得到兩間公司的違約事件相關係數如下所示

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \operatorname{Corr}\big(L_i, L_j\big) \\
&= \frac{E\big(\bar{\pi}_i(X)\bar{\pi}_j(X)\big) - \pi_i\pi_j}{\sqrt{\pi_i\big(1-\pi_i\big)}\sqrt{\pi_j\big(1-\pi_j\big)}} \\
&= \frac{E\left[\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\pi_i\right)-\sqrt{\rho_i^2}X}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\pi_j\right)-\sqrt{\rho_j^2}X}{\sqrt{1-\rho_j^2}}\right)\right] - \pi_i\pi_j}{\sqrt{\pi_i\big(1-\pi_i\big)}\sqrt{\pi_j\big(1-\pi_j\big)}}
\end{aligned} \tag{2-24}
$$

觀察 (2-24) 式的第二個等號可知, 兩個公司間的違約事件相關性來自共同因子這個變數, 共同因子驅動著各個公司股價報酬率的高低, 因此同時影響了個別公司的違約與否, 使得公司之間的違約相關性可以聯繫。再將焦點放置 (2-24) 式的最後一個等號, 我們可以更詳細地解構共同因子如何聯繫公司之間的違約事件。另外, 假若各個公司的條件違約機率皆相同, 透過 (2-22) 式與 (2-23), 並將結果代入 (2-21) 式, 我們可將違約事件相關性簡化成

$$
\rho^\dagger = \frac{\operatorname{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)}{\pi\big(1-\pi\big)} \tag{2-25}
$$

其中, $\bar{\pi}\big(X\big) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\pi\right)-\sqrt{\rho^2}X}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$。(2-25) 式中, 驅動違約事件相關性的是分子 $\operatorname{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)$, 這一項仍是緊繫在共同因子上, 因此共同因子的變動所導致各個公司條件違約機率的變動正是違約事件相關性的來源。另外, 由於 (2-25) 式的分母 $\pi\big(1-\pi\big)$ 大於 0, 而分子 $\operatorname{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)$, 一定為大於或等於 0 的數, 因此在各公司條件違約機率相同時, 我們可針對不同數值的 $\operatorname{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)$ 分成下列三種情形討論

1. $\operatorname{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big) > 0$, 各公司間的違約事件相關性為正, 這是因為因為假設了違約機率相同時, 公司間的行為將趨於相同。

2. $\operatorname{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)$ 為 0, 則表示給定共同因子的實現值, 因此違約可能性將無法變動, 致使違約事件相關性為 0。

3. $\mathrm{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)$ 等於分母, 亦即 $\mathrm{Var}\big(\bar{\pi}\big(X\big)\big)=\pi\big(1-\pi\big)$, 則相關性將等於 1, 代表公司間的違約行爲完全一致, 一起違約或一起不違約。

2.5 組合資產信用損失分配

截至目前爲止, 我們探討的範圍均是針對單一交易對手, 亦即個別公司的違約與否, 進而分析兩公司間的違約事件相關性爲何。然而, 對於銀行來說, 放款的對象何只一個, 爲了得知銀行面對所有放款對象違約與否的總和行爲, 我們必須將之前所探討的單一公司放寬至所有的公司。因此, 接下來我們要分析的是所有放款對象組成的資產組合, 只要知道資產組合的信用損失分配, 我們立即得以計算出許多信用風險指標。接下來, 我們也將依循因子模型的架構找出資產組合的損失分配並計算其相關的統計量。

假設銀行所面對的資產組合中有 N 個交易對手, 則我們可以將銀行的整體資產的損失率表示成

$$L=\sum_{i=1}^{N} w_i LGD_i L_i \tag{2-26}$$

其中, LGD_i 爲違約損失率。w_i 爲違約曝顯額 (exposure at default) 占總曝顯額比率, 若另單一交易對手的曝顯額爲 EAD_i, 則 $w_i=\frac{EAD_i}{\sum_{i=1}^{N} EAD_i}$。(2-26) 式中整體損失率的三個主要成分就是主導信用損失大小的三個重要參數。在之前的章節, 我們已敍述過 L_i 的性質, w_i 在本文中將其視做外生給定, 因此與其它參數並無相關性可言。最後, LGD_i 則是假設爲 100 %, 因此當資產組合中若有公司違約, 則所有曝顯額將全數損失。而違約損失率之基本性質可參考 Schuermann (2006) 以及 Altman (2006), 在此並不多做介紹。

要如何求得 (2-26) 式中整體資產組合損失率 L 的分配是信用風險模型研究的重點。爲了要了解分配的型態, 必須從分配的平均數、變異數以及各種百分位數下手, 因此接下來我們也將針對整體資產組合損失率 L 找尋其平均數等統計量。由於整體資產組合損失率是由衆多單一交易對手組成, 因此組合之中隨著交易對手數目 N 的增加將會使推導資產組合損失分配越趨困難。所幸 Gordy (2003) 證明以下條件符合時, 整體資產組合損失

率 L 的極限分配 $E\big(L \mid X\big)$ 將可做爲推導損失率分配的替代對象

$$\sum_{i=1}^{N} EAD_i \ \uparrow \ \infty \ \big(N \to \infty\big) \tag{2-27}$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{EAD_N}{\sum_{i=1}^{N} EAD_i}\right)^2 < \infty \tag{2-28}$$

透過 (2-27) 式和 (2-28) 式, 我們可以得到以下定理

$$P\left\{\lim_{N\to\infty} \big[L - E\big(L \mid X\big)\big] = 0\right\} = 1 \tag{2-29}$$

由 (2-27)-(2-29) 式可看出, 即使組合資產中的交易對手很多, 只要每個交易對手的曝顯額占總曝顯額的比率很低, 則每個交易對手的個別行爲將對整體資產組合的影響不大。這意味著個別交易對手的個別風險比起共同因子對於整體風險的影響可說是微乎其微。因此, 在 (2-27) 式以及 (2-28) 式成立下, 我們可以條件資產組合損失率 $E\big(L \mid X\big)$ 作爲整體資產組合損失率 L 的替代變數, 從而透過計算 $E\big(L \mid X\big)$ 的分配得知 L 的分配。有此概念後, 我們可以馬上處理和 $E\big(L \mid X\big)$ 相關的統計量。

- 預期損失 (expexted loss)

  首先, 就資產組合分配的平均數來說, 其實就是資產組合的預期損失。預期損失衡量的是總資產組合中, 所有交易對手造成損失的平均趨勢爲何。由於我們的分析皆建構在違約損失率 LGD_i=100% 以及曝顯額 EAD_i 爲外生的假定下, 預期損失透過 (2-26) 式可以非常輕易地得到, 即是所有交易對手的無條件違約機率之加權和

$$E\big[E\big(L \mid X\big)\big] = E\big(L\big) = \sum_{i=1}^{N} w_i E\big(L_i\big) = \sum_{i=1}^{N} w_i \pi_i \tag{2-30}$$

  若假設所有交易對手的違約機率已知且相同, 令其爲 π。而個別交易對手曝顯額 EAD_i=1, 則上式簡化成

$$E\big[E\big(L \mid X\big)\big] = E\big(L\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} E\big(L_i\big) = \pi \tag{2-31}$$

- 非預期損失 (unexpected loss)

就損失率分配的變異數 $\mathrm{Var}\big(L\big)$而言, 指的是損失波動的幅度。波動幅度越大, 損失的嚴重性越不可測, 因此損失率分配的變異數事實上就是用來衡量非預期損失。由於, 資產組合中的交易對手很多, 計算非預期損失的情況將會更趨複雜。爲了更加了解預期損失中的組成份子, 我們先對 L 的極限分配 $E\big(L \mid X\big)$ 加以處理, 再將所得結果運用至非預期損失之中。透過之前的 (2-15) 式中條件違約機率的形式, $E\big(L \mid X\big)$ 可推導如下

$$
\begin{aligned}
E\big(L \mid X\big) &= \sum_{i=1}^{N} w_i E\big(L_i \mid X\big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{\pi}_i\big(X\big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi_i\big) - \sqrt{\rho_i^2}X}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)
\end{aligned} \tag{2-32(a)}
$$

(2-32) 式的結果仍然是在 LGD_i=100% 假設下。觀察 (2-32) 式, 當 LGD_i=100% 時, 整體資產組合損失率其實就是各個交易對手的條件違約機率加權和。若我們再進一步價假設資產組合中的每位交易對手的 $EAD_i = 1$, 且條件違約機率皆相同, 則 (2-32(a)) 可簡化成

$$
\begin{aligned}
E\big(L \mid X\big) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} E\big(L_i \mid X\big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \bar{\pi}\big(X\big) \\
&= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi\big) - \sqrt{\rho^2}X}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)
\end{aligned} \tag{2-32(b)}
$$

將 (2-32(a)) 式代入整體資產組合損失變異數 $\mathrm{Var}(L)$ 的計算式 $E(L^2)-E(L)^2$, 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(L) &= E(L^2)-E(L)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \cdot E\left[\bar{\pi}_i(X)\right]\left\{1-E\left[\bar{\pi}_i(X)\right]\right\} \\
&\quad + 2\sum_{i}\sum_{j\neq i} w_i \cdot w_j \cdot E\left\{\bar{\pi}_i(X)\bar{\pi}_j(X)-E\left[\bar{\pi}_i(X)\right]E\left[\bar{\pi}_j(X)\right]\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \cdot \pi_i(1-\pi_i) \\
&\quad + 2\sum_{i}\sum_{j\neq i} w_i \cdot w_j \cdot \left\{E\left[\bar{\pi}_i(X)\bar{\pi}_j(X)\right]-\pi_i\pi_j\right\}
\end{aligned}
\tag{2-33}
$$

將 (2-33) 式的結果開根號即可得到非預期損失。另外, (2-33) 式最後一個等號的第一項表示資產組合損失率的變異一部分來自各個交易對手自己的變異。同時, 第二項 “{ }” 中的內容, 其實就是公司與公司之間違約事件的共變異數, 而此共變異數的效果透過 (2-24) 的觀察, 其實正是來自公司與公司之間的違約事件相關性。因此, 我們可以說非預期損失不僅僅受交易對手自我變異影響 , 同時, 公司之間違約相關性也牽涉其中。由此可見, 若忽略相關性, 則可能會低估非預期損失以致在評估整體資產組合損失率時失真。

若假設所有交易對手的條件違約機率皆相同, 而個別交易對手曝顯額 EAD_i=1, 則上式簡化成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(L) &= E(L^2)-E(L)^2 \\
&= E\left[\bar{\pi}(X)\bar{\pi}(X)\right]-\pi^2 \\
&= \mathrm{Var}\left(\bar{\pi}(X)\right)
\end{aligned}
\tag{2-34}
$$

對比 (2-33) 式與 (2-34) 式可發現, (2-34) 式少了 (2-33) 式結果中的第一項, 原因是我們在分析整體資產損失率的變異數時, 焦點皆放置在 $N\to\infty$ 時的極限分配

$E\big(L \mid X\big)$。因此, 當 $N \to \infty$ 時, (2-33) 式結果中的第一項將收斂至 0, 進而我們得到此情形下的整體資產組合損失率變異數就是條件違約機率的變異數。

- 風險值

風險值事實上是整體資產組合損失率分配上的分量函數。對應不同百分位之 α 值, 將可以得到不同的分量。若將 α 值設定很高如 0.999 時, 代表我們關心損失率分配上發生極端損失的情形, 依此訊息我們得以規劃該 α 值下的資本計提應爲多少較爲恰當。令風險值爲整體組合資產損失率的分量函數 $q_\alpha(L)$, 爲了推導風險值, 我們同樣可針對極限分配的風險值 $q_\alpha\big[E\big(L \mid X\big)\big]$ 進行推導。由 Gordy (2003) 中的假設及證明, 可得到以下結果

$$
\begin{aligned}
q_\alpha\big[E\big(L \mid X\big)\big] &= E\big[L \mid q_\alpha\big(X\big)\big] \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot E\big[L_i \mid q_\alpha\big(X\big)\big] \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi_i\big) - \sqrt{\rho_i^2}\, q_\alpha\big(X\big)}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)
\end{aligned} \tag{2-35}
$$

(2-35) 式的第一個等號來自 Gordy (2003) 的 Proposition 4, 這樣的結果告訴我們, $E\big(L \mid X\big)$ 的第 α 百分位數的計算, 可改以計算給定共同因子的第 α 百分位數時下, 所有交易對手的預期損失加權和。否則若直接去計算 $E\big(L \mid X\big)$ 的第 α 百分位數將是一件繁瑣過程。同樣地, 假設 EAD_i=1, 條件違約機率皆相同時, 也可以推得風險值, 然而這種情況較爲簡單, 不需透過 Gordy (2003) 的假設亦可推得。假

若, 在此簡化情形下的風險值爲 $q_\alpha^\dagger(L)=\kappa$, 則以下的式子將會成立

$$\begin{aligned}P\big(L\le\kappa\big)&=P\big[E\big(L\mid x\big)\le\kappa\big]\\&=P\left\{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\pi)-\sqrt{\rho^2}X}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\le\kappa\right\}\\&=P\left\{-X\le\frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\big[\Phi^{-1}(\kappa)\sqrt{1-\rho^2}-\Phi^{-1}(\pi)\big]\right\}\\&=\Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\big[\Phi^{-1}(\kappa)\sqrt{1-\rho^2}-\Phi^{-1}(\pi)\big]\right\}\\&=\alpha\end{aligned}\tag{2-36}$$

由 (2-36) 式, 我們可以解出此簡化情形下的風險值爲

$$q_\alpha^\dagger(L)=\kappa=\Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\big[\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\rho^2}+\Phi^{-1}(\pi)\big]\right\}\tag{2-37}$$

從 (2-35) 式與 (2-37) 式可看出, 風險值的大小受無條件違約機率的影響。當然, 無條件違約機率越大, 各個公司違約事件發生可能性也越大, 因此我們給定某個 α 水準之下時, 隨著無條件違約機率越高, 應當提列的資本也越高。而無條件違約機率是來自移轉矩陣上不同評等所對應的違約機率。所以即使同樣資本規模的公司, 評等越差也應當提列越高的資本。

在上本節中, 我們針對資產組合損失率的極限分配 $E\big(L\mid X\big)$ 推導其預期損失、非預期損失以及風險值。從這三個風險值我們得以判斷損失分配大致的型態爲何, 當 N 越大時, 觀察 $E\big(L\mid X\big)$ 分配的型態就如同看見原本 L 的分配。另外, 截至目前爲止所有推導過的參數或是風險指標, 在不加諸太多條件的情況下, 我們可以發現共同因子所導致的違約相關性幾乎無所不在, 由此可見相關性的重要性實在不可輕忽。在因子模型中, 爲加強相關性, 可將模型做不同設計, 在以下章節我們便以傳染性效果爲例, 將其納入因子模型中後, 藉此以增強相關性。