3 傳染性效果下的因子模型

違約相關性的效果透過因子模型的設計不斷地影響著模型中的風險參數或風險指標。針對模型做不同違約相關性的加強後, 整體資產組合的損失率分配將會造成不同改變。在之後的章節我們也會看到, 加強相關性的損失率分配將更為右偏。這也意味著加強違約相關性後, 損失分配上的各風險指標將會增加, 尤其是衡量極端損失的風險值更是如此。由於相關性的議題如此重要, 在本節我們將再度利用因子模型設計一個簡單但卻可以增加相關性的模型。在此, 我們考慮的是信用風險中的傳染性效果。

3.1 傳染性效果

在因子模型中, 違約相關性的設計是此類模型的重點。然而, 大部分的信用風險模型都將違約事件相關性設計成對稱的形式, 在本章之前的因子模型也是如此。「對稱相關性」意指整體資產組合中的交易對手皆受相互牽引, 彼此影響[4]。我們姑且以對稱相關性所引發的效果稱為「對稱效果」。除了對稱相關性的效果, 在信用風險因子模型中亦可能存在著所謂的「非對稱相關性」。非對稱相關性所導引出的非對稱性效果就是在本節中所要提出的「傳染性效果」(infectious effects)。相較於對稱效果, 非對稱性效果並不影響整體資產組合中所有的交易對手, 反而是只有單一方向的影響。明確地說, 在資產組合中的某些公司發生違約事件後, 透過共同因子的聯繫, 這些違約事件將會造成其他公司連帶地提高違約事件發生的可能性, 這就是我們所說的傳染性效果。傳染性效果的「傳染」二字事實上正是因為有共同因子作為整體資產組合中交易對手之間的橋樑, 才得以將某些交易對手違約發生的事件再一次地衝擊著其他交易對手。由此可見, 傳染性的效果其實就是另一種違約相關性的設計方式。不同於共同因子直接影響資產組合中的交易對手, 傳染性效果可說是透過共同因子間接地影響其他交易對手, 因此被傳染性效果影響到的交易對手才會改變違約事件的可能性, 散發出傳染效果的交易對手則不會再被受傳染者影響。這也是為什麼我們稱傳染性效果乃是一種非對稱的違約相關性設計。設計傳染性效果的目

[4]對稱相關性的觀點可參考 Basel Committee On Banking Supervision (2004)。

的也是想知道納入這種效果在因子模型中, 將會對我們的信用損失分配的各種風險參數以及風險指標有什麼樣的實質影響。在信用風險模型中, 最先將傳染性風險納入模型的文獻之一便是 Davis and Lo (2001, 以下簡稱 DL 模型) 的文章。DL 模型考慮的整體資產組合中, 任何一間公司的違約事件會影響資產組合中的其他公司。Egloff et al. (2004) 則是將傳染性模型複雜化, 將傳染性的效果設計爲一個類似神經網絡的傳遞機制。交易對手間有複雜的傳染性效果存在, 因此傳染性效果是透過一種更複雜且細緻的相關性來傳遞。Neu and Kühn (2004) 則將傳染性效果放入 CreditMetrics 的模型中。由於 Davis and Lo (2001) 以及 Neu and kühn (2004) 爲本章的傳染性因子模型設立了一個基礎, 因此以下我們將簡單說明 DL 模型的意涵並提出其限制。

Davis and Lo (2001) 針對一個債券資產組合, 設計上述的傳染性效果。DL 模型中假設任何一張債券的違約事件發生將有兩種途徑。一種是債券本身自身的違約事件發生; 另一種則是在資產組合中其他債卷的違約所導致的。假設 p 爲違約機率, n 爲整體資產組合中債券的總數。另外, 假設 q 爲已違約的債券影響其他債券的機率, 亦即一張債券違約事件的發生傳染給資產組合中其他債券的機率爲 q。令整體資產組合中的預期違約機率爲 $E\big[DR\big]$, 則 DL 模型中 $E\big[DR\big]$ 等於

$$E\big[DR\big] = 1 - (1-p)(1-pq)^{n-1} \tag{3-1}$$

觀察 (3-1) 式, 我們發現預期違約機率 $E\big[DR\big]$ 不僅和參數 p 與 q 有關, 也和整體資產組合中債券的總數目 n 有關。當 n 越大時, 在整體資產組合中的每張債券受其他違約債券影響的可能性也就越大, 也就是說 n 越大時, q 也越大, 因此連帶地預期違約率 $E\big[DR\big]$ 也越大, 這樣的結果就直覺來說很容易理解。因爲在 DL 模型中, 假設了違約的債券會影響其他資產組合中的債券, 因此當資產組合裡的債券數目越多, 可能違約的債券數目也會因此增加進而使得受這些違約債券影響的可能性也就越大。DL 模型雖簡單並且直覺, 但在估計參數時卻將涉及許多二元變數加總的最大概似估計, 若資產組合中的債券數目依時間不同而變動, 將使得估計過程變得相當繁雜。由於此估計上的限制, 以下我們將透過因子模型將傳染性效果納入。

3.2 傳染性因子模型

在第二章中, 我們花費一些工夫說明因子模型的架構。在此節中, 我們要利用第二章的因子模型來描繪傳染性風險, 以下我們將非常扼要地簡述第二章的因子模型, 之後我們將直接納入傳染性效果。

假設第 i 公司的股價報酬率爲 $R_{i,t}$, 若此公司的股價報酬率在時點 $t+1$ 時小於某依門檻值 $\lambda_{i,t+1}$, 則我們稱公司 i 違約。亦即,

$$R_{i,t+1} < \lambda_{i,t+1} \quad \Leftrightarrow \quad L_i = 1 \tag{3-2}$$

其中,

$$L_i = \begin{cases} 1, & \text{公司 } i \text{ 違約發生} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

上述的 L_i 乃第二章中定義過的違約與否二元變數, 各個公司的下標 i 皆對應一個所屬的評等, 每個評等則對應一個無條件違約機率 π_i 。公司 i 在時點 $t+1$ 的報酬率可表示如下

$$R_{i,t+1} = \sqrt{\rho_i^2} X_{t+1} + \sqrt{1-\rho_i^2}\varepsilon_{i,t+1} \tag{3-3}$$

在 (3-3) 式中的 X_{t+1} 爲服從標準常態分配的隨機變數, 其爲模型中的共同因子, $\sqrt{\rho_i^2}$ 則是系統性因子對於公司報酬影響程度的衡量權重。$\varepsilon_{i,t+1}$ 亦是標準常態的 i,i,d 隨機變數, X_{t+1} 與 $\varepsilon_{i,t+1}$ 兩者相互獨立。另外, 由之前的推導我們知道各個公司的條件違約機率可以下面的式子表示

$$\bar{\pi}_i\big(X_{t+1}\big) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\big(\pi_i\big) - \sqrt{\rho_i^2} X_{t+1}}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) \tag{3-4}$$

由於公司之間的違約相關性跟 (3-4) 式有莫大關係, 因此在加入傳染性效果後, (3-4) 式將會顯示出相關性的改變。現在我們要將傳染性效果加入因子模型, 再對照 (3-4) 式以觀察其不同之處。

在本文中, 我們考慮的傳染性效果存在於相同的產業之中。也就是說, 在整體資產組合下, 相同產業中若有部分公司違約, 此事件將會導致其他公司的違約發生的可能性提高。另外, 我們又將整體資產組合中的每個產業分成兩大類公司, 第一類公司乃違約事件發生後, 會將此效果傳染其他公司, 我們稱爲傳染性 (infecting) 公司。另一類公司則是受到傳染效果影響的公司, 亦即被傳染 (affected by contagion) 公司。爲簡化說明, 我們將傳染性公司稱爲 I 類公司, 被傳染公司稱爲 C 類公司。有了這樣的區別, 我們隨即可將 (3-3) 式的各個公司股價報酬率分成兩類, 我們先將 I 類公司寫下

$$R^I_{i,t+1} = \sqrt{\rho_i^2} X_{t+1} + \sqrt{1-\rho_i^2}\varepsilon^I_{i,t+1} \tag{3-5}$$

(3-5) 式所表示的是 I 類公司的股價報酬率, 和 (3-3) 式比較僅多了一個 I 上標, 其餘設定則完全無異。這是因爲我們僅假設傳染性的效果是單一方向, I 類公司的違約事件發生的效果會傳遞至 C 類公司, 反之不然。因此, 針對決定 I 類公司違約與否的判定方式上, 並無多加任何設定, 致使 (3-5) 式的股價報酬率設定與第二章無異, 這同時也是爲什麼我們在本章一開始稱傳染性效果乃是一種非對稱相關性設計的原因。而爲了使 I 類公司的傳染性效果影響 C 類公司, 我們在 C 類公司的股價報酬率設計另一因子, 此因子將代表的是 C 類公司承接著 I 類公司違約後的傳染效果。可想而知的是, 這個代表傳染性的因子將會加強 C 類公司和共同因子的相關性。何以如此? 因爲 I 類公司的違約與否將受到共同因子所影響, 因此違約後的所產生的效果必然含有共同因子的訊息並且形成一個傳染性因子, 繼續影響著 C 類公司的股價報酬率, 相關性必然由此設計而增加。

有了以上認知後, 現在我們要設計 C 類公司的股價報酬率。在此, 一個最直接的做法是將 I 類公司實際發生的產業違約率設定成 C 類公司股價報酬率的其中一個因子。從評等資料我們可以得知 I 類公司的違約概況。本文採取的評等資料以台灣經濟新報所發布的評等 (Taiwan Corporate Rating Index, 以下簡稱 TCRI) 爲主, 公司評等可分成 1 至 10 等。其中, 第 1 等爲信用最好的交易對手, 第 10 等則代表違約等級的交易對手, 我們亦可以 D 代表違約[5]。爲了設計 C 類公司股價報酬率, 我們令 $P_{iD,t+1}$ 代表特定產業下,

[5]TCRI 的違約定義乃符合以下條件: (1) 倒閉破產、(2) 重整、(3) 跳票擠兌、(4) 紓困求援、(5) 接

I 類公司於第 t 期評等為 i 且 第 $t+1$ 期轉為違約 (亦即評等為 10) 的公司數占該產業公司總數的比率, 將其標準化為 $\tilde{P}_{iD,t+1}$ 則 C 類公司的股價報酬率可以下式表示

$$R_{j,t+1}^{C} = \sqrt{\tilde{\rho}_j^2}X_{t+1} + \sqrt{1-\tilde{\rho}_j^2}\cdot\varepsilon_{j,t+1}^{C} + \beta_j\cdot\sum_{i=1}^{10}\tilde{P}_{iD,t+1} \tag{3-6}$$

(3-6) 式正是我們納入傳染性效果的 C 類公司股價報酬率。$\tilde{P}_{iD,t}$ 之前含有一個針對評等的加總符號 , 這代表我們考慮的是同個產業下, 每個等級違約的可能性。當把每個等級的違約可能性加總後, 立即成為產業中的違約比率。最後, 傳染性效果的大小是以參數 β_j 來捕捉, 若 β_j 等於 0, 則表示 I 類公司違約所產生的影響不會傳遞到產業中的其他公司, 則模型回到一般的因子模型。

由於產業的違約比率是由 I 類公司所決定, 而 I 類公司在決定產業違約比率時仍然是透過因子模型比較門檻後得到, 這也意味著產業違約比率的決定將受共同因子影響, 所以產業違約比率毫無疑問地也和共同因子之間產生相關性。將產業違約率帶進 C 類公司的股價報酬率後, 共同因子不僅僅是直接聯繫 C 類公司股價報酬率, 更是以產業違約比率的形式將 C 類與 I 類公司的股價報酬率連結起來, 這種聯繫就是傳染性效果。因此, 由傳染性效果可知, 整體資產組合中的 C 類公司對於共同因子的相關性將會因為包含了 I 類公司的違約資訊而以不同面貌呈現。現在我們將加入傳染性效果的 C 類公司條件違約機率以下式表示

$$\bar{\pi}_i^{C}\left(X_{t+1}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\pi_i\right) - \sqrt{\tilde{\rho}_i^2}X_{t+1} - \beta_j\cdot\sum_{i=1}^{10}\tilde{P}_{iD,t+1}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}_i^2}}\right) \tag{3-7}$$

比較 (3-4) 式, (3-7) 式括號中的分子多了一項 $\beta_j\cdot\sum_{i=1}^{10}\tilde{P}_{iD,t+1}$, 這樣的差異說明了 C 類公司的條件違約機率和共同因子的相關性已因為傳染性效果而改變。由於我們將傳染性效果的設定是在同一產業下 I 類公司將會影響 C 類公司, 因此傳染性效果的設計其實

管、(6) 全額下市、(7) 財務吃緊停工、(8) CPA 對繼續經營假設存疑, 以及 (9) 淨值為負。詳細可參考 http://www.tej.com.tw/webtej/doc/crwatch.htm。

不僅是加強共同因子對於 C 類公司的影響, 更是加強產業內的 I 類公司與 C 類公司的相關程度。另外, 不同產業中的 I 類公司間的相關性與之前傳統單因子模型的設定下並無差別, 而不同產業下的 C 類公司卻再也不同。不同產業下, 每一間 C 類公司的股價報酬率都如 (3-7) 式皆多了一項 $\beta_j \cdot \sum_{i=1}^{10} P_{iD,t+1}$, 因此有了傳染性效果後, C 類公司間的相關性也和以往不同。另外, 我們可以將傳染性效果想像成一種二次衝擊。共同因子的改變將會對 I 類公司造成第一波影響, 第二波影響則依第一波影響的大小反映在 C 類公司上。所以, 傳染性效果可以類比成一種骨牌式的效應, 這種效應是單向影響的, 僅由 I 類公司傳遞給 C 類公司, 這也是我們一開始稱傳染性效果爲非對稱相關性效果的原因。

在因子模型下, 傳染性效果不外乎是一種交易對手間違約事件相關性的設計方式, 因此加入傳染性效果的因子模型各個交易對手間違約相關性的推導方式和第二章中 (2-24) 式完全相同, 只是多了一項帶有共同因子訊息的產業違約比率 , 除此之外概念完全相同, 我們不再重複推導。而多了傳染性效果後的各風險指標也是如同第二章中因子模型的推導方式一樣, 我們亦不最贅述。在之後進行整體資產損失率的模擬, 我們將發現有傳染性效果後, 各風險指標的模擬結果皆較高, 尤其是整體資產損失率分配上高風險值將會攀升至更高水準。

3.3 傳染性風險下的公司分類準則

至目前爲止, 傳染性效果在之前的討論算是有了簡單交代。討論中我們主要設定了兩大類公司, 亦即 I 類公司與 C 類公司。這兩類公司分別代表傳染性效果的發送者與接收者。然而, 我們卻沒有說明 I 類公司與 C 類公司的差異爲何? 明確地說, 在整體資產組合中, 我們到底要如何決定哪些公司爲 I 類公司, 哪些公司則是 C 類公司? 在本文中, 我們將以整體資產組合損失中的其中一個組成份子 — 曝顯額, 作爲分類原則。在本文中, 整體資產組合中的所有公司利用因子模型或傳染性因子模型決定是否違約後, 各個公司的違約損失率 LGD_i 以及違約曝顯額 EAD_i 再進一步地決定整體資產組合損失率的大小。由於在本文的分析中, 我們皆假設各個公司的違約損失率 LGD_i=100%, 整體資產組合損

失率的大小將全權由違約曝顯額 EAD_i 來決定。

由上述可知, 整體資產組合中各個交易對手的違約曝顯額對於銀行的來說是一個重要的數字。同時, 在不考慮未動用額度以及表外項目的情形下, 違約曝顯額也代表銀行授信的貸款本金。這種情形也是本文假設違約曝顯額 EAD_i 爲一個已知變數的依據。銀行在進行授信貸款時, 必會評估客戶本身財務狀況是否有足夠的償債能力, 或是其信用評價是否良好, 而評估的過程當然就視銀行本身對客戶是否有足夠的檢視能力。可想而知的是, 針對需借款較大筆額度的客戶, 銀行勢必會特別謹慎處理。一但批准授信, 針對這些貸款額度較大的客戶, 銀行也同時承受著較大的可能違約損失。若是這些大客戶發生違約, 銀行的整體資產損失率將大幅向上攀升。因此, 整體資產組合中違約曝顯額較大的交易對手, 其違約與否不僅僅是和共同因子存在相關性, 同時大客戶的違約與否也反過來檢視著銀行對客戶管理的品質好壞。

在本文中, 我們將整體資產組合中的交易對手進行產業分類, 每個產業中又依違約曝顯額排列大小順序, 將相同產業下違約曝顯額爲前 20% 大的交易對手設定成 I 類公司, 其餘的 80% 的公司則視爲 C 類公司, 違約曝顯額爲前 20% 的即是前面所述的大客戶。若 I 類公司有違約事件發生, 這些事件將會傳達銀行一些重要的訊息 , 即銀行對於大客戶的管理出現漏洞。若大客戶都沒有完善管理, 那麼佔整體資產組合損失 80% 的 C 類公司想必也是岌岌可危。因此, 透過違約曝顯額來分類公司, 此時公司的違約便由銀行管理客戶的概念來反應的另一個潛在危機, 這個危機就是身爲另外 80% 的 C 類公司也可能因爲銀行評估放款的疏失而低估其違約的可能性。

到此, 我們對加入傳染性效果的因子模型有了簡單的交代, 接著我們要回到之前所提出的一個問題焦點 — 無條件違約機率。在決定整體資產組合中的交易對手是否違約時, 需要透過無條件違約機率來計算門檻值。所以, 整個因子模型雖是以相關性設計爲重, 但移轉矩陣上的無條件違約機率在模型中也扮演了重要角色。若無條件違約機率無法反映足夠違約的可能性, 將使得我們低估整體資產違約損失率, 同時也無法提列足夠的資本計提。對此, 我們要在下一章節提出一個修正移轉矩陣的方法, 藉以得到無條件違約機率。