4 移轉矩陣的修正

移轉矩陣向來是信用風險分析中的重要對象, 而移轉矩陣概由如 Standard and Poor's 或 Moody's 等信評公司發布的評等資訊所建構而來, 矩陣中的各元素所代表的是評等移動的移轉機率。以 TCRI 的評等種類來說, 分成第 1 等到第 9 等以及違約等級的 D 等, 因此移轉矩陣上的第 1 列第 1 行的元素即表示公司評等爲第 1 等且保持不變的機率爲何, 又例如移轉矩陣上的第 5 列第 10 行則表示公司評等爲第 5 等移轉到第 D 等的機率。由於, 違約機率來自移轉矩陣, 因此計算移轉矩陣的方式勢必會影響到無條件違約機率的數值。然而, 許多發布移轉矩陣的機構皆仰賴 "cohrot" 的方式來計算移轉矩陣, 這種矩陣稱做是「間斷型」移轉矩陣, 這種計算矩陣的方式將會低估評等等級較高的違約機率。相對於「間斷型」移轉矩陣, 這本章中我們要提出「連續型」移轉矩陣來修正這種缺失, 以下將依序介紹「間斷型」移轉矩陣與「連續型」移轉矩陣。

4.1 間斷型移轉矩陣

由移轉矩陣中所揭露的訊息, 可以得知受評公司的債信評等及其評等變換的概率分布狀況。一般來說, 移轉矩陣的計算, 是立基於間斷時間的設定, 而移轉機率則是採取 "cohort" 的估計方式, 說明如下。以一年期的移轉矩陣爲例, 假設在年初時有 N_i 家受評公司被評爲第 i 等級, 其中有 N_{ij} 家公司由第 i 等移轉至第 j 等, 則可得一年期由第 i 等移轉至第 j 的移轉機率估計式爲

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}, \quad j \neq i \tag{4-1}$$

上述的 (4-1) 式即是所謂的 "cohort" 方式。這種方式就是在考慮期間之初, 將相同評等的公司數計算出, 在期間之末再去觀察該評等中, 有多少比例的公司其評等移轉成其他評等, 該比例就是移轉機率。若該評等下的公司總數在期間之初與期間之末皆是相同公司數, 則該評等移轉至其他評等的移轉機率就等於 0 。因此, 我們可以想像到兩種情形

1. 在給定的期間裡, 若評等由第 i 等移至第 $j-1$ 等, 最後再移回 j 等, 則 (4-1) 式

僅能觀察到評等由 i 到 j 的簡易變化, 因此無論期間內評等是如何曲折的變化, 在 “cohort” 的方式下概無法觀察到。

2. 若給定的期間中, 公司評等在期間之末並非違約等級時, 依 (4-1) 式我們可以得到 $\hat{p}_{iD} = \frac{N_{iD}}{N_i} = 0$, 也就是說, 若公司在期間之末的評等不是違約等級, 即使公司曾歷經違約, 仍視公司的違約可能性爲 0 。

由上述第一點, 已經可以看出 “cohort” 估計方式下的缺失。公司評等的移轉所代表是信用評等機構對公司的評價有所變動, 假設受評公司在受評期間曾經歷經評等降級, 而後升至原來評等, 這種情形必然透露出受評公司在觀察期間曾歷經信用變差的狀況。然而, 在 “cohort” 估計移轉機率的方式下, 卻會將這種信用變差的警訊隱蔽, 如此讓資訊棄之不用的估計式實爲計算移轉矩陣的一大缺失。上述第二點則是會導致移轉矩陣上高評等的違約機率爲 0 的不合理結果。高評等的公司其違約機率通常等於 0, 乃是因爲高評等公司無發生違約事件所致。但由移轉矩陣所揭櫫的訊息卻暗示了此等於 0 之機率值的不合理性: 由第 i 等到第 $i-1$ 等的機率爲正, 由第 $i-1$ 等再至違約的機率也爲正, 這暗示了第 i 等將有可能連續降等至違約等級。然而, 由 (4-1) 式可以看出, 高評等公司亦有可能違約的情況將被忽略, 以致高評等的違約機率將等於 0 。由上述方法所計算出的移轉矩陣, 即是所謂的「間斷型」移轉矩陣。何以稱「間斷型」乃因計算移轉機率時, 只考慮觀察期間之初與末, 遂將中間的過程完全棄卻。這表示雖然觀察期爲連續的期間, 但由於計算移轉機率方式使得觀察期如同只有間斷的頭尾兩端的時間點, 因此我們以「間斷型」移轉矩陣稱之。

信評公司亦或銀行內部評等部門必有針對受評公司的完整評等資料, 考慮期間中每個時點評等變換的情形, 並利用這些完整的訊息所得的移轉矩陣便是不同於 (4-1) 式, 而是考慮期間中評等變化的「連續型」移轉矩陣。當然,「連續型」移轉矩陣能夠修正上述兩個缺失, 因此在間斷型移轉矩陣估計式中的瑕疵所造成的缺憾將在連續型的移轉矩陣中找到補償。以下將說明其估計方式, 之後再舉一例說明如何利用估計式計算連續型移轉矩陣。

4.2 連續型移轉矩陣

在正式介紹連續型移轉矩陣之前, 我們首先要說明移轉矩陣與馬可夫鏈 (Markov chain) 的關係。在古典機率論中, 我們所學習到的都是一序列相互獨立的試驗過程。也就是說, 每一次是驗所得到的結果都和下一次試驗的結果相互獨立, 因此每一次所做的試驗不會影響下一次試驗的預測結果。然而, 現代的機率理論卻告訴我們試驗和試驗之間並非完全獨立的, 試驗的結果反而會影響到下一次試驗的預測結果。1907 年, A. A. Markov 開啓這種非獨立試驗過程的研究, 同時這種型態的試驗過程亦稱爲馬可夫鏈 (Markov chain)。以下將扼要說明馬可夫鏈。

假設存在一個狀態空間 $Q = \{1, 2, ..., M\}$, 我們的試驗過程將從狀態空間中的任一狀態開始, 然後下一次試驗的狀態結果將會依本次的狀態之下, 移動至其他狀態或相同狀態。假若現在處於第 i 種狀態, 我們令下次的試驗結果變成第 j 種狀態的機率爲 p_{ij}, 而且此機率僅和現在所處狀態有關, 則我們稱 p_{ij} 爲移轉機率。下一次試驗仍處於相同狀態的機率則以 p_{ii}, 表示之。Howard (1971) 則將馬可夫鏈比喻成睡蓮上的青蛙, 青蛙一開始身處的睡連葉片就是起始狀態, 下一次將會跳動至其他睡蓮葉的機率就是透過移轉機率來描繪。我們若將各種不狀態的移轉機率以矩陣的型式表示時, 此矩陣即稱爲移轉矩陣。以下用一個簡單的例子來說明移轉矩陣的意涵。假設存在一移轉矩陣如下:

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \tag{4-2}$$

上述的移轉矩陣中的第 i 列第 j 行的元素表示給定第 i 種狀態下, 下一次試驗狀態爲 j 的移轉機率爲 p_{ij}。以天氣爲例, 我們假設某個地區的天氣狀態只有三種可能狀態, 第 1 到第 3 三種狀態分別爲下雨天、晴天以及下雪天, 每一種天氣轉變的機率可以上述的矩陣表示。假使想知道今天下雨, 後天下雪的機率爲多少, 我們可利用移轉矩陣求出。給定今天下雨, 明天天氣轉變的各種機率就是 (4-2) 矩陣的第 1 列機率值。例如, 今天下雨且明天下雪的機率就是 p_{13}。而給定今天下雨且後天下雪的可能情形有三種

1. 今天下雨, 明天下雨, 後天下雪。

2. 今天下雨, 明天晴天, 後天下雪。

3. 今天下雨, 明天下雪, 後天下雪。

上述第一種情形的機率值可以表示成 $p_{11} \cdot p_{13}$。其中, p_{11} 表示給定今天下雨, 明天亦下雨的移轉機率。給定此結果, 若要探討後天的天氣, 等同於給定一個明天天氣爲下雨的條件, 因此給定明天下雨且後天下雪的移轉機率就是 p_{13}, 此機率是從另一張完全相同的移轉矩陣上所得到的機率。兩張移轉矩陣分別代表的是今天到明天天氣的移轉機率以及明天到後天天氣的移轉機率。其餘兩種情形亦作相同解釋, 分別可得到 $p_{12} \cdot p_{23}$ 以及 $p_{13} \cdot p_{33}$。最後, 將所有機率相加即得到給定今天下雨且後天下雪的機率爲 $\sum_{i=1}^{3} p_{1i}p_{i3} = p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33}$。由上述的例子, 我們可以看出, 每一個移轉機率事實上都是條件機率的概念, 既有條件, 表示不同條件將出現不同結果, 這就是爲何我們一開始稱馬可夫鏈乃一非獨立的過程。另外, 給定初始狀態後, 只要將考慮的期間適當的切割, 並將相鄰切割點間所對應的移轉矩陣找出, 則初始狀態在期間過後變成某種狀態的可能性將可隨即算出。上面的例子中, 我們所使用的兩個移轉矩陣完全相同, 這種過程又稱爲是齊質 (homogeneous) 馬可夫鏈。若所使用的移轉矩陣在不同切割點有不同的型態, 則稱爲是非齊質 (non-homogenous) 馬可夫鏈。有此概念後, 我們將可套用至信用評等, 進而詮釋信用評等的移轉矩陣以及移轉機率。

將上述的有限狀態空間 $Q = \{1, 2, ..., M\}$ 詮釋成各評等的類型, 因此 M = 10, 爲違約等級。考慮一個非齊質馬可夫鏈 $P(t, u)$。其中, t 與 u 表示期間的頭尾兩端點。我們將期間切割成 r 段, 其中第二個時間點到時點 u 的 r 個切割點代表的是評等變化的各時間點。因此, 我們找出這 r 個移轉矩陣後, 即可得到過了時間點 u 後, 各評等變化後的移轉機率, 及其對應的移轉矩陣。依 Lando and Skødeberg (2002), 移轉矩陣 $P(t, u)$ 的估計

式可如下表示

$$\hat{P}(t,u) = \prod_{i=1}^{r} \left(I + \Delta\hat{A}(T_i)\right) \tag{4-3}$$

此處, T_i 表示在期間 $[t,u]$ 中, 評等變化的時間點。另外,

$$\Delta\hat{A}(T_i) = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta N_1(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{12}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{13}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{1M}(T_i)}{Y_1(T_i)} \\ \frac{\Delta N_{21}(T_i)}{Y_2(T_i)} & -\frac{\Delta N_2(T_i)}{Y_2(T_i)} & \frac{\Delta N_{23}(T_i)}{Y_2(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{2M}(T_i)}{Y_2(T_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{\Delta N_{M-1,1}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{M-1,2}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} & \cdots & -\frac{\Delta N_{M-1}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{M-1,M}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4-4}$$

其中, ΔN_{hj} 表示在時點 T_i 時, 評等由第 h 等移至第 j 等的公司數目, $\Delta N_h(T_i)$ 則是在時點 T_i, 評等由第 h 等移至其他評等的公司總數, 最後 $Y_h(T_i)$ 標示了在時點 T_i「之前」, 評等爲 h 的公司總數。因此, 在上面的矩陣中, 對角線上的元素表示在時點 T_i 原評等爲 h 的公司有歷經評等變動的公司總數, 佔原評等爲 h 的公司總數之比例。對角線外的元素, 則是記錄了原評等變化到不同評等的公司數目佔原評等公司總數的比例。另外, 矩陣 $I + \Delta\hat{A}(T_i)$ 中的列向量總和爲 1 , 這同時也代表了每一個 $I + \Delta A(T_i)$ 都是一個移轉矩陣, 且每一個移轉矩陣皆收納了每間受評公司在任何時點變動評等的訊息。值得注意的是, 矩陣中做後一列除最後一個元素爲 1, 其餘皆爲 0, 代表公司一旦遭逢違約則視其無東山再起之日。

事實上 (4-4) 式的矩陣所要表示的意義即是在每個時點有任何評等變化時, 皆將此訊息納入彙整並計算出一新的移轉矩陣, 再將每個時點發生評等變化所得到之移轉矩陣相乘, 所得便是考慮所有發生評等變化的時間點之移轉矩陣。僅考慮 t 與 u 兩個端點的移轉矩陣, 就是以 (4-1) 式的估計式所計算出來的間斷型移轉矩陣。經由連續型移轉矩陣的估計式以可看出連續型移轉矩陣所擁有的資訊確實比間斷型移轉矩陣多, 最大差別在於我們將時間點 t 與 u 中間的變化以非齊質馬可夫鏈的方式加以串聯整合。了解 (4.4) 式

擁有這樣的意涵, 我們隨即將此式改寫成

$$
\begin{aligned}
\hat{P}(t,u) &= \prod_{i=1}^{r}(I+\Delta\hat{A}(T_i)) \\
&= (I+\Delta\hat{A}(T_1))\cdot(I+\Delta\hat{A}(T_2))...(I+\Delta\hat{A}(T_r)) \\
&= \hat{P}(t,t+1)\cdot\hat{P}(t+1,t+2)\ldots\hat{P}(t+r-1,t+r) \\
&= \prod_{i=1}^{r}\hat{P}(t+i-1,t+i) \qquad (4\text{-}5)
\end{aligned}
$$

(4-5) 式的最後一個等號後代表的是評等發生變化後所得到的多個矩陣相乘。(4-4) 式和 (4-5) 式所得到之移轉矩陣完全相同, 但透過 (4-5) 式, 我們將更可以了解連續型移轉矩陣之功用與意涵。另外, 連續型移轉矩陣另一個額外好處是在資料充足的情形下, 我們透過移轉矩陣的相乘將得以使高評等的無條件違約機率有非 0 的值出現, 以下試舉一例說明之。

- 範例說明

  假設觀察期間爲一年, 評等只有三種等級: $\{A,B,D\}$, 其中 D 爲違約等級。受評公司總數爲 20 間, 且期初 A、B 等公司各有 10 間。評等變化情形如下:

1. 一間 A 等級公司在 1 個月後被評爲 B 等, 且至觀察期結束後皆不改變評等。
2. 一間 B 等級公司在 2 個月後被評爲 A 等, 且至觀察期結束後皆不改變評等。
3. 一間 B 等級公司在 6 個月後被評爲 D 等, 且至觀察期結束後皆不改變評等。

   針對以上三種評等變化情形, 我們可以計算出三個在不同時點所對應的移轉矩陣

$$
\Delta\hat{A}(T_{\frac{1}{12}}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$\Delta\hat{A}(T_{\frac{2}{12}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\hat{A}(T_{\frac{6}{12}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

依此, 藉由 (4-4) 式, 將三個時點對應的移轉矩陣相乘, 可得到完整一年期的移轉矩陣

$$\begin{aligned} \hat{P}(0,1) &= \big(I + \Delta\hat{A}_{(\frac{1}{12})}\big) \cdot \big(I + \Delta\hat{A}_{(\frac{2}{12})}\big) \cdot \big(I + \Delta\hat{A}_{(\frac{6}{12})}\big) \\ &= \begin{bmatrix} 0.90909 & 0.08181 & 0.00909 \\ 0.09091 & 0.81818 & 0.09091 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-6}$$

最後的結果呈現了被評爲 A 等的公司即使沒有歷經違約, 其無條件違約機率也不爲 0, 其中原因乃在於由 A 被評爲 B 以及 B 被評爲 D 的訊息皆藉由移轉矩陣的估計方式納入考量, 若以一般間斷型移轉矩陣的計算方式, 評等爲 A 的公司, 其違約機率必然是 0。由此可見, 利用連續型的移轉矩陣估計式所得到的移轉矩陣將比間斷型方法下所得之移轉矩陣擁有更多可用資訊, 這將對因子模型中的各風險指標造成一些改變。

若考慮違約等級仍可移轉至其他等級, 則將 $\Delta\hat{A}(T_i)$ 改寫並令其爲 $\Delta\tilde{A}(T_i)$:

$$
\Delta\tilde{A}(T_i) = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta N_1(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{12}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{13}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{1M}(T_i)}{Y_1(T_i)} \\ \frac{\Delta N_{21}(T_i)}{Y_2(T_i)} & -\frac{\Delta N_2(T_i)}{Y_2(T_i)} & \frac{\Delta N_{23}(T_i)}{Y_2(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{2M}(T_i)}{Y_2(T_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{\Delta N_{M-1,1}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{M-1,2}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} & \cdots & -\frac{\Delta N_{M-1}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{M-1,M}(T_i)}{Y_{M-1}(T_i)} \\ \frac{\Delta N_{M,1}(T_i)}{Y_M(T_i)} & \frac{\Delta N_{M,2}(T_i)}{Y_M(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{M,M-1}(T_i)}{Y_M(T_i)} & -\frac{\Delta N_M(T_i)}{Y_M(T_i)} \end{bmatrix} \tag{4-7}
$$

最後, 此情形下的連續型移轉矩陣則表示成

$$
\tilde{P}(t,u) = \prod_{i=1}^{r} \left(I + \Delta\tilde{A}(T_i) \right) \tag{4-8}
$$

由此可見, 違約後是否能回較好評的連續型移轉矩陣, 差別在於 $\Delta\hat{A}(T_i)$ 和 $\Delta\tilde{A}(T_i)$ 最後一列的元素之數值是否皆爲 0 亦或 $\tilde{P}(t,u)$ 和 $\hat{P}(t,u)$ 最後一列及最後一行的元素是否爲 1。以下我們將利用實際資料, 針對 (4-7) 計算連續型移轉矩陣, 並以 (4-4) 式計算無條件違約機率。由 (4-4) 式計算後所得的無條件違約機率將運用在模擬的章節中以判斷各個等級的公司是否違約。

4.3 計算連續型移轉矩陣

本文在此選取的資料來自 TCRI 中所有的受評公司, 評等時間從 2000 年 3 月至 2008 年 12 月共 36 季的評等資料。在任何一季中, 只要有一間公司的評等有變化, 我們都將此訊息納入並計算出一個新的季移轉矩陣。若季與季之間沒有任何公司的評等改變, 則我們以單位矩陣表示之。先考慮評等可以由違約等級升至不違約等級的情形, 則我們依 (4-7) 式的估計式來計算連續型移轉矩陣, 計算出此情況下的 36 個季移轉矩陣後, 每 4 季相乘成爲一年期的移轉矩陣, 36 季共可計算出 9 個各年度一年期移轉矩陣。將 9 個一年期移轉矩陣相加在取平均後得到平均一年期移轉矩陣, 最後得到的結果於附錄 A 中的表9 (頁 52) 所示。

另外, 爲了要計算無條件違約機率, 我們採取違約後無法回到較好評等狀態的假設。亦即, 我們將使用 (4-4) 式計算連續型移轉矩陣, 再將各等級的違約機率視爲無條件違約機

率。因此, 若公司曾遭逢違約, 我們則視公司將一直處於違約狀態。依此, 計算出 36 季的移轉矩陣相乘後, 將得到 9 年期的連續型移轉矩陣, 矩陣上最後一行則爲 36 季各個評等 i 的無條件違約機率, 令其爲 p_i^* 。爲了將無條件違約機率化成一季的違約機率我們必須透過一些簡單的轉換。在假設違約後不可回到較好評等的情形下, 若要計算評等 i 一季的無條件違約機率 p_i, 則上述定義的 p_i^* 必須滿足下式

$$\begin{aligned} p_i^* &= p_i + p_i \cdot (1-p_i) + p_i \cdot (1-p_i)^2 + ... + p_i \cdot (1-p_i)^{35} \\ &= 1-(1-p_i)^{36} \end{aligned} \tag{4-9}$$

由 (4-9) 式可以解得評等 i 之一季無條件違約機率 p_i 爲

$$p_i = 1-(1-p_i^*)^{\frac{1}{36}} \tag{4-10}$$

(4-10) 式計算出來的無條件違約機率正是我們在之後模擬章節所要使用的違約機率。各評等的無條件違約機率結果如下所示

表 1: 連續型移轉矩陣下之違約機率

TCRI	無條件 違約機率
1	0.000003
2	0.00002
3	0.0002
4	0.0005
5	0.0018
6	0.0044
7	0.0119
8	0.0214
9	0.0358

由上表可發現, 高評等的無條件違約機率皆不爲 0, 此乃我們運用連續型移轉矩陣下所得到的結果。

4.4 Product-Integration

有了連續型移轉矩陣的概念後, 我們再探 (4-3) 式亦或 (4-8) 式, 兩者的估計型態皆由一個單位矩陣 I 加上 $\Delta\tilde{A}(T_i)$ 或 $\Delta\tilde{A}(T_i)$。事實上, 這樣的型態源自於 Product-integration 的概念。Product-integration 可視作爲非常多趨近於 1 的項相乘。假設 $A(t)$ 爲一隨時間 t 變動的 $M \times M$ 矩陣, 則 $A(t)$ 的 product-integral 可表示成 $P(t,u)$

$$P(t,u) = \prod_{[t,u]} \big(I + dA\big) \equiv \lim_{max|t_i - t_{i-1}| \to 0} \prod \big(I + A(t_i) - A(t_{i-1})\big) \tag{4-11}$$

其中, $s \le t_1 \le t_n \le t$。將 (4-11) 式運用在非齊質馬可夫鏈, 我們可以證明 (4-11) 得到的矩陣上之元素就是移轉機率[6], 針對 Product-integration, 本文不多做說明。另外, Product-integration 在存活分析有大量應用, Aalen and Johansen (1978) 首次正式地將 Product-integration 的概念引進存活分析。其他非正式的文件則可參閱 Cox (1972) 以及 Kalbfleisch and Prentice (1980)。其他有關 Product-integration 的文獻整理可參閱 Gill and Johansen (1990) 和 Gill (1994)。在以下的章節, 我們將利用因子模型來進行信用損失率分配的模擬, 及其各風險指標的計算。

[6]證明可以參閱 Anderson et al. (1993)