3 違約損失模型

本章將由 Wilson(1997a,b) 兩篇文章做爲開端, 建立在評等基礎下 (rating-based) 完整的信用風險損失模型。在 CPV 模型下我們能將投資組合內公司或資產依其特性分成數個部門, 本文爲了研究以台灣上市櫃公司所組成的投資組合其違約損失分配, 故我們將部門別皆視作「產業」。

此外, 爲了將注意力集中於違約機率與總體因子的關聯上, 在建構違約損失模型時, 便將損失變數的兩個參數–違約損失率 (LGD) 及違約曝險額 (EAD) 假設爲固定常數。[5] 在模型建構的過程中, 移轉係數的估計爲本文重點之一, 亦於本章有詳細說明。最後建立一不分評等的違約損失模型, 以期於實證分析時能與評等基礎下的損失模型做一比較。

3.1 評等基礎下損失模型

爲了完整建構出 CPV 模型下的違約損失模型, 可將其內容略分爲三個部分:

- 建立產業投機等級違約率與總體因子模型。
- 估計移轉係數矩陣。
- 模擬條件違約損失分配。

我們將於本節依序介紹之。

3.1.1 產業投機等級違約率與總體因子

CPV模型不同於其他商業化信用風險模型的特色之一, 即是對於違約機率的處理, 其直接以違約機率做爲應變數建立模型並估計之。然一般實際經驗的觀察, 通常較難於信用風險衡量期間 (一季或一年) 發現到投資等級的放款對象有違約

[5] 假設違約損失率爲100%; 違約曝險額允許異質但爲外生給定常數。

事件的產生, 故在引入總體因子時, 我們將產業投機等級違約率做 Logit 轉換後爲應變數, 以總體因子做爲自變數建立線性多元迴歸模型。而其他等級的違約機率, 如何受到總體因子的影響, 則是透過投機等級違約率來予以調整。首先我們先將投機等級違約機率與總體因子的模型建構如下:

$$\ln(\frac{1-P_t}{P_t}) = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \cdots + \beta_K X_{K,t} + \nu_t \tag{7}$$

其中, P_t 爲特定產業於第 t 期投機等級的違約率, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K)$ 爲迴歸模型的待估參數, 係數估計使用的方法是普通最小平方法 (OLS)。$\boldsymbol{X_t} = (X_{1,t}, X_{2,t}, \ldots, X_{K,t})$ 爲特定產業其 K 個總體因子的集合, ν_t 則假設爲獨立且相同的常態分配如下

$$\nu_t \sim N(0, \sigma_\nu)$$

ν_t 表示總體因子無法解釋產業投機等級違約率的部分, 可視爲產業的個別變異 (segemt-specific shock), 此即模型中解釋非系統性風險的部分。(7) 式顯示出產業投機等級違約機率可視爲由多個系統性風險因子對該產業敏感度的加權平均與衝擊項 (surprise) 所共同決定, 而由於每個產業受總體因子影響的情況不同, 爲了能更精確的估算出產業投機等級違約率, 在總體因子的挑選上, 不同產業可有不同的個數與種類的總體因子。[6]

爲了要模擬下一期經濟條件, 我們將總體因子的設定上沿用 CPV 模型的方式, 使用單變數二階自我迴歸模型 (Auto-regressive model), 數學式如下:

$$X_{k,t} = \phi_{k,0} + \phi_{k,1} X_{k,t-1} + \phi_{k,2} X_{k,t-2} + \varepsilon_{k,t} \tag{8}$$

[6]CPV模型除了允許各部門有各自不同的總體變數外, 同時建議一個部門至少要有三個以上的總體因子, 以期能達到較佳的配適效果

其中 $X_{k,t}$ 即爲在第 t 期, 特定產業的第 k 個總體因子,$k = 1, 2, \ldots, K$。而 $X_{k,t-1}$ 與 $X_{k,t-2}$ 爲特定產業其第 k 個總體因子分別在 t-1 期與 t-2 的眞實值。ϕ_k 爲特定產業第k個總體因子利用過去歷史資料經由 AR(2) 模型所估計出的係數; $\varepsilon_{k,t}$ 爲誤差項, 假設其與被解釋變數$X_{k,t}$ 互相獨立, 且呈常態分配, 如下:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$$

而當總體因子 AR(2) 模型的係數估計完成, 在模擬投資組合的損失分配時, 則可利用這些係數配合"衝擊項 (surprise)" ε 模擬未來總體條件。[7]

當總體變數歷史資料與產業投機等級實際違約率資料蒐集完成, 假設共有 t 期資料, 我們即可利用這 t 筆產業投機等級違約率資料經過 Logit 函數轉換, 分別將之與對該產業違約情形具影響力的總體因子過去 t 期資料建立多因子迴歸模型, 以普通最小平方法估計出 $\boldsymbol{\beta}$; 再以 (8) 式 分別對影響各產業的總體因子做 AR(2) 估計, 得到係數 $\boldsymbol{\phi}_k$ 後, 模型的初步估計即告完成。模型估計完成後, 未來即可利用此結果模擬各產業條件投機等級違約率。我們將 (7)(8) 合併重述如下,

$$\begin{gathered}
\ln\left(\frac{1-P_t}{P_t}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \cdots + \beta_k X_{k,t} + \nu_t \\
X_{k,t} = \phi_{k,0} + \phi_{k,1} X_{k,t-1} + \phi_{k,2} X_{k,t-2} + \varepsilon_{k,t} \\
\varepsilon_{k,t} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_k}), \qquad\qquad \nu_t \sim N(0, \sigma_\nu)
\end{gathered} \tag{9}$$

值得一提的是, 由於不同總體因子間存在的相關性 (例如, 當 GDP 成長率高時, 失業率不大)。因此當每個影響每個產業的總體因子決定後, 我們亦需估計所有總體因子間的共變異數矩陣, 以便後續使用模擬總體因子時能將總體因子間相關性予以考慮。

[7]以AR(2) 模型來模擬未來總體經濟條件, 而非預測。

有了上述模型我們可以順利模擬出 t+1 期條件產業投機等級違約率, 然爲了求投資組合的損失分配, 我們除了關心產業投機等級的違約率之外, 亦重視其他等級在不同經濟條件下的違約機率, 而此則需利用移轉係數估計的結果配合模擬的條件投機等級違約率才能獲得, 我們將於下一小節分析之。

3.1.2 估計移轉係數

先前於2.3.3節, 我們已對信用移轉矩陣有簡單的描述, 而本節主要目的則是將信用移轉矩陣引入本文模型。CPV模型的基本假設中, 認爲經濟循環的波動會造成移轉矩陣內各移轉機率 (migration probability) 的隨機波動。我們將由此概念做爲基礎, 進一步將總體經濟如何影響移轉矩陣內各個元素及條件移轉矩陣於投資組合損失分配的應用亦將於此節一併介紹。

相對於條件移轉矩陣是給定某種經濟條件下的移轉矩陣, 無條件移轉矩陣表達的是多期或多年平均移轉機率的概念。遂本文將無條件移轉矩陣即視爲各評等其歷史平均移轉機率所組成的矩陣, 而條件移轉矩陣則將利用無條件移轉矩陣配合投機等級違約機率進一步估計而來。

首先定義幾個符號:

$$N_{ij,t} = \text{特定產業, 第 t 期評等由 i 轉爲 j 的公司數。}$$

$$N_{i,t} = \sum_{j=1}^{D} N_{ij,t} = \text{特定產業, 第 t 期評等爲 i 的總公司數。}$$

$$P_{ij,t} = \frac{N_{ij,t}}{N_{i,t}} = \text{特定產業, 第 t 期公司評等由 i 轉爲 j 的機率。}$$

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} P_{ij,t} = \text{特定產業其公司評等由 i 轉爲 j 的歷史平均移轉機率。}$$

$$P_t = \text{特定產業中, 第 t 期被評爲投機等級公司的違約率。}$$

$$\bar{P} = \text{特定產業中, 投機等級歷史平均違約機率。}$$

其中我們假設評等等級分爲 1,2,...,D 等。D 爲違約等級。$P_{iD,t}$ 即爲特定產業第 i 等級於 t 期的違約機率, 換言之, 若我們定義第 i 等級爲投機等級, 此時 $P_{iD,t} = P_t$, $\bar{P}_{iD} = \bar{P}$。

由於每個產業對總體經濟的衝擊具有不同程度的反應, 因此每個產業都將會有屬於自己的條件移轉矩陣, 藉以反映總體經濟對該產業移轉矩陣內各評等的移轉機率之影響。我們定義其符號爲 $M = (P_{ij})$ 爲特定產業的條件移轉矩陣。[8] 爲了得到各產業在不同經濟情境下的條件移轉矩陣, 我們將分成三個步驟執行之:

1. 首先利用上一節所介紹的總體因子模型, 由 (9) 式所模擬得到在某種經濟條件下, 特定產業下一期的條件投機等級違約率 $\widehat{P}_{t+1}$ 。若假設有 S 個產業, 則在蒙地卡羅模擬中, 模擬一次即可獲得由產業條件投機等級違約率所組成的向量 $\widehat{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{t+1}}$

2. 將 $\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\bar{P}}$ 定義爲風險性指標 (risk index), 利用風險性指標做爲以產業的角度, 衡量總體經濟的狀態。

3. 由過去歷史資料估計各產業的移轉係數 (shift coefficients) 矩陣。

4. 最後, 利用風險性指標與移轉係數矩陣即可進一步微調得到各產業的條件移轉矩陣。

值得一提的是, 在步驟1 中, 每次模擬所得到的向量 $\widehat{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{t+1}}$, 我們可以將其視作是一個總和的情境 (或第二個層次的情境), 在這些總和的情境背後, 有總體經濟因子的模擬在驅動著這些向量。

爲了要得到各產業的條件移轉矩陣, 上述 4 個步驟中, 步驟 1 與 2 我們已於上一小節完整介紹, 接下來我們則必須先估計出各產業每個評等轉換的「移轉係

[8] 產業無條件移轉矩陣爲$\overline{M} = \overline{P}_{ij}$。

數」α_{ij} 。

我們假設產業投機等級違約率 P_t 與產業各評等的移轉機率值 $P_{ij,t}$ 滿足下列關係:

$$\frac{P_{ij,t}}{\overline{P}_{ij}} - 1 = \alpha_{ij}(\frac{P_t}{\overline{P}} - 1) + \eta_{ij,t} \tag{10}$$

表示產業內其他評等移轉機率的變化, 除了受到投機等級違約率的影響外, 亦受到衝擊項 $\eta_{ij,t}$ 的影響, 其表達移轉機率不能被投機等級違約率所解釋的部分。

表達成最小平方法的估計型式:

$$\min_{\alpha_{ij}} \sum_{t=1}^{T} \left[\left(\frac{P_{ij,t}}{\overline{P}_{ij}} - 1 \right) - \alpha_{ij} \left(\frac{P_t}{\overline{P}} - 1 \right) \right]^2 \tag{11}$$

我們可發現移轉係數 α_{ij} 即爲無截距項迴歸模型的待估參數, 可以最小平方法估計得到如下結果:

$$\widehat{\alpha}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{P_{ij,t}}{\overline{P}_{ij}} - 1 \right) \left(\frac{P_t}{\overline{P}} - 1 \right)}{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{P_t}{\overline{P}} - 1 \right)^2} \tag{12}$$

舉例而言: 若評等分類爲10個等級, 且第9等級定義爲投機等級、第10等級 D 爲違約狀態, 經由歷史資料可得到該產業所對應的移轉係數估計值如下表:

表 2: 移轉係數矩陣簡例

$\widehat{\alpha}_{ij}$	下期評等 (j)			
期初評等 (i)	1	2	$\ldots$	D
1	$\widehat{\alpha}_{11}$	$\widehat{\alpha}_{12}$	$\cdots$	$\widehat{\alpha}_{1,D}$
2	$\widehat{\alpha}_{21}$	$\widehat{\alpha}_{22}$	$\cdots$	$\widehat{\alpha}_{2,D}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
9	$\widehat{\alpha}_{91}$	$\cdots$	$\cdots$	1

* 因設定第 9 等級為投機等級, 故 $\widehat{\alpha}_{9,D} = 1$

有了各產業估計的移轉係數 $\widehat{\alpha}_{ij}$, 我們可利用先前建構的總體因子模型進行模擬, 得到下一期產業的條件投機違約率 $\widehat{P}_{t+1}$, 進而計算出式 (10) 迴歸模型配適值如下:

$$\frac{\widehat{P}_{ij,t+1}}{\overline{P}_{ij}} - 1 = \widehat{\alpha}_{ij}(\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}} - 1) \tag{13}$$

移項:

$$\widehat{P}_{ij,t+1} = \left[\widehat{\alpha}_{ij}\left(\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}} - 1\right) + 1\right] \cdot \overline{P}_{ij} \tag{14}$$

$\widehat{P}_{ij,t+1}$ 即為條件移轉矩陣內元素, 模擬一次 $\widehat{P}_{t+1}$ 所配適的結果, 若模擬10000次則會有10000個條件移轉矩陣, 我們將利用這些結果來模擬投資組合的損失分配。

在介紹條件移矩陣如何融入模擬違約損失分配的過程前, 我們就移轉係數內涵再詳加說明。由 (14) 式我們可以知道條件移轉矩陣內各元素其實即為產業風險指標 $\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}}$ 與估計的移轉係數 $\widehat{\alpha}_{ij}$ 計算而來, 而我們可以將產業風險指標 $(\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}})$ 分成下列三種情況討論:

- $\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}} < 1$:

  這樣的情境下, 模擬得到的產業條件投機等級違約率 $\widehat{P}_{t+1}$ 小於歷史平均違

約率, 此時隱含經濟情況應屬於擴張或繁榮的狀態, 應採用一個較低評等下降的可能性及較高評等上升的可能性做爲調整無條件移轉矩陣的方向, 以反應有利的總體經濟情況。

- $\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}} = 1$

  此種情境下, 模擬得到的產業條件投機等級違約率 $\widehat{P}_{t+1}$ 恰巧等於歷史平均違約率, 此時對該產業而言, 經濟條件屬於一般情況, 而在調整條件移轉矩陣時, 則無需做任何改變, 無條件移轉矩陣恰等於條件移轉矩陣。而 (14) 式我們配適條件移轉機率的數學式, 正巧能反應我們的直覺: 當 $\widehat{P}_{t+1} = \overline{P} \longrightarrow \widehat{P}_{t+1} = \bar{P}_{ij}$

- $\frac{\widehat{P}_{t+1}}{\overline{P}} > 1$

  此種的情境下, 模擬得到的產業條件投機等級違約率 $\widehat{P}_{t+1}$ 大於於歷史平均違約率, 總體經濟情況屬於衰退的狀態, 爲了反映現實情況, 我們調整的方向應爲降級的機率提高; 升級的機率減低。

以上三種情境即爲模擬時所有可能的出象, 以此做爲將無條件移轉矩陣調整成條件移轉矩陣時, 配合不同情境應有調整的方向。爲了符合此直覺的調整方向, 移轉係數的正負符號號須予以注意,「降級」移轉係數應爲正數或零;「升級」移轉係數應爲負數或零; 其中若 $i = j$ 正負符號我們不加以限制。即移轉係數應滿足下列條件:

$$\text{當} \;\; i < j \qquad \alpha_{ij} \geq 0\,; \quad \text{當} \;\; i > j \qquad \alpha_{ij} \leq 0 \tag{15}$$

3.1.3 模擬損失分配

模型介紹至此, 我們即可利用產業的條件投機等級違約率與條件移轉矩陣模擬投資組合損失分配, 步驟如下:

1. 以產業投機等級違約率與總體因子建立多因子迴歸模型, 並將參數估計完成, 且估計出總體因子間的共變數述矩陣。
2. 以移轉機率與產業投機等級違約率建構無截距項迴歸模型, 估計產業各評等的移轉係數 $\widehat{\alpha}_{ij}$。
3. 利用 Cholesky 分解總體因子共變異數矩陣, 進一步抽出下一期的總體因子向量 $\boldsymbol{X}_{t+1}$ 。
4. 抽每個產業的 ν_{t+1} , 配合總體因子向量 $\boldsymbol{X}_{t+1}$ 模擬產業的條件投機等級違約率 $\widehat{P}_{t+1}$。
5. 將步驟2. 中的 $\widehat{P}_{t+1}$ 配合移轉係數矩陣得到條件移轉矩陣, 亦即我們可得到每個產業各評等的條件違約機率模擬值。
6. 將步驟5. 所得到的各評等其條件違約機率, 並以之抽出該評等於此次模擬違約的公司, 配合違約曝險額得到此次模擬的投資組合違約損失。
7. 重複步驟3 - 6. 共上萬次, 則可得到投資組合的條件損失分配。

模型介紹至此我們可以發現, 在建構投資組合違約損失分配的過程, 我們雖估計了產業的移轉係數矩陣, 然我們並未對下一期的景氣情況做「預測」, 故我們亦不會有「預測的」下一期條件移轉矩陣產生, 條件移轉矩陣在本文的模型中是模擬的過程, 而非預測的結果。

而如此大費周章的估計移轉係數矩陣的主因爲在現實生活中, 投資等級在風險衡量期間, 幾乎沒有違約事件發生, 導致投資等級違約機率的值大多爲零或極小的數值。因此我們不能仿照處理投機等級的方式將之與總體因子做迴歸, 其往往無法得到理想的估計結果, 故我們藉由移轉係數做爲橋梁, 透過投機等級違約率的波動將總體因子的影響傳遞至其他等級違約機率。

3.2 不分評等損失模型

在上一小節中, 我們以經 Logit 轉換的產業投機等級違約率做爲應變數, 與總體因子建立違約損失模型, 得到給定目前經濟條件下模擬的條件損失分配。於本節則將模型予以簡化, 將隸屬於同一產業的公司視爲相同等級, 直接以 Logit 轉換後的產業整體違約率做爲應變數, 以此與總體因子建立違約損失模型, 進而模擬損失分配。

3.2.1 產業違約率與總體因子

在不考慮評等的情況下, 我們將模型設定爲如下型式:

$$\ln(\frac{1-P_t}{P_t}) = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \cdots + \beta_k X_{k,t} + \nu_t \tag{16}$$

$$X_{k,t} = \phi_{k,0} + \phi_{k,1} X_{k,t-1} + \phi_{k,2} X_{k,t-2} + \varepsilon_{k,t} \tag{17}$$

$$\varepsilon_{k,t} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_k}), \qquad \nu_t \sim N(0, \sigma_\nu)$$

與先前有分評等模型不同的是, 此時 P_t 是產業整體的違約率, 將其以 Logit 函數轉換做爲應變數。$X_{k.t}$ 仍是影響該產業違約情況的總體因子, 由於影響產業的總體因子各不相同, 我們仍保留不同產業可以有不同種類總體因子的彈性。$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K)$ 爲迴歸模型的待估參數, 將以普通最小平方法 (OLS) 估計之。式 (16) 誤差項假設是獨立同質的常態分配:

$$\nu_t \sim N(0, \sigma_\nu)$$

式 (17) 設定是爲了模擬下一期可能總體因子的出象所建立的單因子二階自我迴歸模型 AR(2),[9] 其中 $X_{k,t}$ 即爲在第 t 期, 特定產業其第 k 個總體因子,$k =$

[9] 此與上節中分評等的總體因子設定相同。

$1, 2, \ldots, K$, $\varepsilon_{k,t}$ 爲誤差項, 假設其與被解釋變數$X_{k,t}$ 互相獨立且呈常態分配, 如下:

$$\varepsilon_{k,t} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_k})$$

我們模型設定上可發現, 不分評等的模型除了違約機率設定上的不同, 其他基本假設與分評等模型並無異, 產業間的相關性亦是由總體因子的引入而產生。由於直接以產業違約率的 Logit 函數轉換做爲應變數與總體因子建立模型, 其視產業內所有公司皆爲同一評等, 而經由模型所模擬得到的違約機率即爲產業的條件違約機率, 一體適用於產業內所有的公司, 因此我們則無需再估計條件移轉係數矩陣, 直接以條件違約機率進行損失分配的模擬。

3.2.2 模擬損失分配

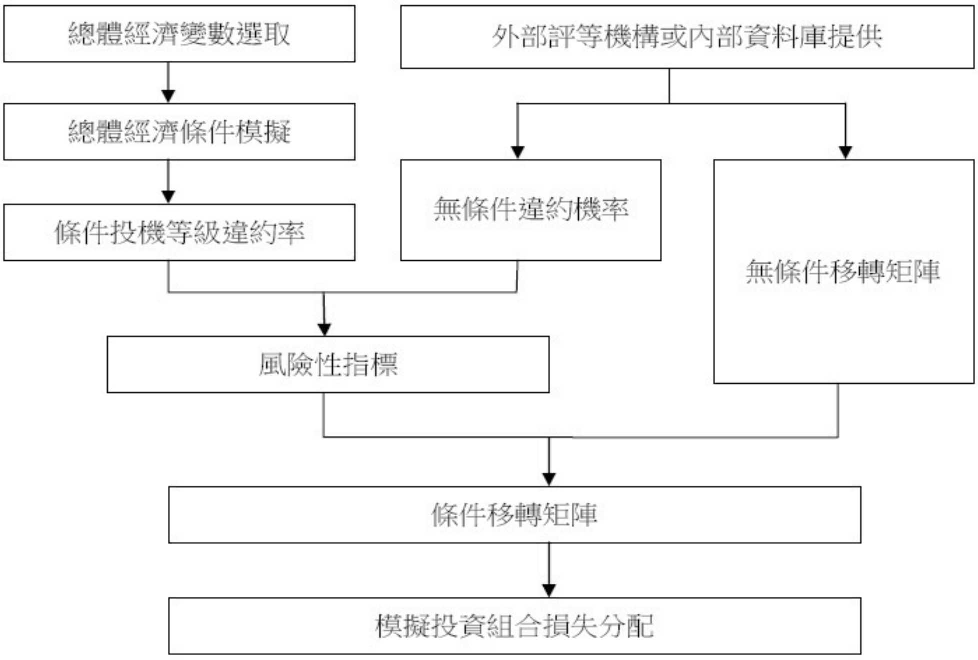
由於我們將產業內公司評等視爲相同, 如此一來模擬步驟能簡化許多, 如下:

1. 以產業違約率與總體因子建立多因子迴歸模型, 並將待估參數估計完成。
2. 利用 Cholesky 分解總體因子共變異數矩陣, 進一步抽出下一期的總體因子向量 $\boldsymbol{X}_{t+1}$ 。
3. 抽每個產業的 ν_{t+1} , 配合總體因子向量 $\boldsymbol{X}_{t+1}$ 模擬產業條件違約率 $\widehat{P}_{t+1}$。
4. 得到 $\widehat{P}_{t+1}$ 後, 以之抽出每個產業於此次模擬中違約的公司。配合違約曝險額得到此次模擬的投資組合違約損失。
5. 重複步驟 2.3.4. 上萬次, 即可得到投資組合損失分配。

3.3 小結

本章以 CPV 模型爲開端出發, 建立評等基礎下的違約損失模型及未分評等的違約損失模型。兩模型各有其優缺點, 前者在分析上顯然較後者細緻, 然在資料蒐

集及處理上則較爲繁瑣。此外前者模型估計的移轉係數, 其正負符號有時可能不符合我們的預期, 建立不分評等的簡化模型來做比較, 以期我們能經由比較獲得更充分的訊息。下頁圖 1. 與圖 2. 分別將模型建構的流程予以呈現, 下一章則將以相同的資料實際模擬兩模型的違約損失分配, 並進一步做比較分析。



*修改自 ： 黃仁德、陳淑郁(2005,信用風險衡量理論與實務 P293)

圖 1: 評等基礎下模型信用風險衡量過程

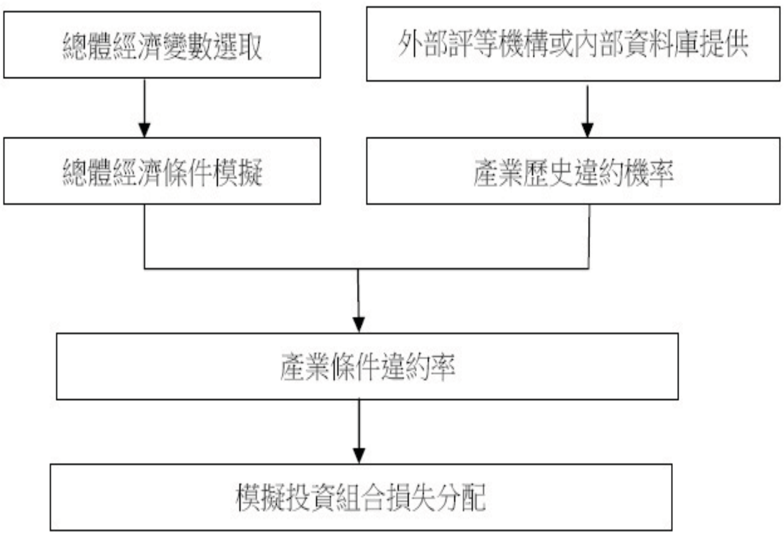


圖 2: 不分評等模型信用風險衡量過程