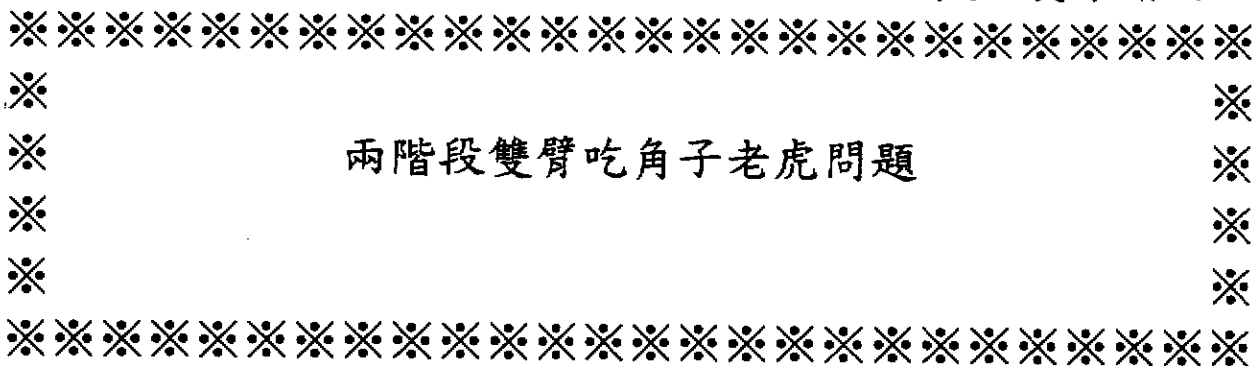


行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告



兩階段雙臂吃角子老虎問題

計畫類別：個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 89-2118-M-004-010-

執行期間：89年8月1日至90年7月31日

計畫主持人：國立政治大學統計系 余清祥博士

執行單位：國立政治大學統計學系

中華民國九十年七月三十一日

兩階段雙臂吃角子老虎問題

計畫編號：NSC89-2118-M-004-010

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

計畫執行人：余清祥 執行單位：政治大學統計系

一、中文摘要

在某疾病的兩個(或多個)藥方中找出較有效者，是臨床實驗中經常遇到的問題；其中吃角子老虎(Bandit)問題的目標在於使得治癒的病人總數最多，與一般直接檢定兩個藥方的療效不同。由於不易求解與不符實際要求，逐次方法在臨床實驗上並不可行，實際的作法是將病人依抵達實驗室的先後順序分組(或階段)，不必在獲得前一病人的結果後再考慮下一位病人。過去的研究(例如 Witmer, 1986 與 Witmer and Clayton, 1988)顯示若採用兩階段式設計，且兩個藥方中一個藥方的療效已知(實際上此一假設並不合理)，則在第一階段中不需使用此一藥方。Yue (1999)改良了療效已知的假設，僅假設其中一個藥方較為人知，也就是說其治癒率的變異數較小。在此假設下，Yue 證明單臂吃角子老虎問題的結果大多仍適用，但其最佳決策的結構依然未知。本研究延續 Yue 的結果，證明了 Berry (1972)及 Pearson (1980)對於最佳決策的猜測，例如在第一階段中若兩個藥方使用次數相同，則必定不是最佳決策。

關鍵詞：雙臂吃角子老虎、兩階段決策、最佳決策。

Abstract

Bandit problems generally are difficult to

solve, even with the Bernoulli response. Other than sequential selection for every observation, separating the medical trial into several stages is a more realistic way of solving the two-armed bandit problem. Since the data can be collected at intervals throughout the trial, there is no need to know the result of previous patients before giving the next patient treatment, and the calculations can thus be simplified. Past work, such as Witmer (1986) and Clayton and Witmer (1988) showed that the well known treatment can be skipped in the first stage and can thus simplify the selection process. However, the assumption that one of the treatments is well known is unrealistic in practice. Yue (1999) extended the idea of two-stage decision by assuming that one of the treatment is better known, or has a smaller prior variance. He showed that the one-armed bandit is a special case under his setting, and most results in the one-armed bandit problem are still valid. However, the structure of optimal strategy in his setting remains unknown. In this study, we will continue searching the optimal strategy and study conjectures of inadmissible decisions by Berry (1972)

Keywords: Two-armed bandit; Two-stage decision; Optimal strategy

二、計劃緣由與目的

吃角子老虎(Bandit)問題可應用於臨床實驗(Clinical trial)，為一群患有某特定疾病的病人在幾種藥方(一般為兩種)中作最適選擇，使得治癒的人數最多。藥方的療效隨著使用次數增加而更清楚，但病人也會因選用較差的藥方，減低了治癒的機會，如何在搜集資訊與選擇較佳藥方(Information vs. Immediate payoff)中取得平衡，是解決吃角子老虎問題的關鍵。

吃角子老虎問題除了可應用於臨床實驗，為一群患有相同疾病的病人尋求最佳的藥方配置(Allocation)，這類的目標設定異於一般的假設檢定，非常適合於決策分析。由於日常生活中的考量多半為在有限的資源(例如：時間、金錢、...)下，選擇可產生最大效用的資源配置(或是投資組合、...)，此一想法與吃角子老虎問題頗為一致，因此其應用範圍並不侷限於醫藥，近年來在經濟學(例如：賽局理論)、心理學與工程等的應用日益增加。

由於吃角子老虎問題的觀察值通常逐次(Sequential；即一次一個)取得，使得本問題非常不易求得最佳解，許多早期根據常識判斷所得的臆測(例如：Berry, 1972；Pearson, 1980)至今仍未驗證。除了不易求解外，因為逐次方法在臨床實驗上並不可行，實際的作法是將病人依抵達實驗室的先後順序分組(或階段)，不必在獲得前一病人的結果後再考慮下一位病人。過去的研究(例如 Witmer, 1988 與 Witmer and Clayton, 1988)顯示若兩個藥方中一個藥方的療效已知(One-armed bandit)，則在第一階段中不需使用此一藥方，可精簡決策流程。然而實際上此藥方療效已知的假設並不合理。

Yue(1999)改良了療效已知的假設，僅假設其中一個藥方較為人知，也就是說其治癒率的變異數較小。在此假設下，Yue 證明單臂吃角子老虎問題的結果大多仍適用，但其最佳決策的結構依然未知。本研究將延續 Yue 的結果，探討 Berry (1972) 與 Pearson (1980)對於最佳決策的猜測，例如在第一階段中若兩個藥方使用次數相同，則必定不是最佳決策。

三、分析步驟

步驟一：單臂吃角子問題的最佳決策

步驟二：雙臂吃角子問題的最佳決策

四、結果與討論

結果一：單臂吃角子問題

因為單臂吃角子問題乃雙臂吃角子問題的特殊情形，由已知的單臂結果或許可獲得雙臂最佳決策的架構，因此本計畫先從單臂問題開始。

假設病人總人數 N 已知，兩臂的成功率為 (θ_1, θ_2) ，且成功率的先驗分配滿足 $\pi_1 = \text{Beta}(\alpha, \beta)$ 及 $\pi_2 = \text{Beta}(c\alpha, c\beta)$ ，其中 $c \geq 1$ ，即我們較確定第二臂的成功率。令 (K_1, K_2) 代表最佳決策在第一階段時，選用第一臂及第二臂的次數。我們發現單臂問題有以下特性：

定理一：若存在整數 K 及 i ($0 \leq i \leq K$)，使得 $\theta_2 = d = \frac{\alpha + i}{\alpha + \beta + K}$ ，則 $(K, 0)$ 不是最佳決策。

結果二：證明 Pearson 的臆測

因為雙臂問題較為複雜，我們先從特例 $\alpha = \beta = 1$ 著手，發現以下結果：

定理二：當兩臂完全相同(即 $c=1$) 與 $\alpha = \beta = 1$ 時，決策 $K_1 = K_2 = K$ 並非最佳，因其劣於 $(K, K-1)$ 及 $(K+1, K-1)$ 。

根據定理二的結果，要證明 $K_1 = K_2 = K$ 並非最佳決策，可與 $(K, K-1)$ 及 $(K+1, K-1)$ 這兩個決策比較。加上定理一的結果，可得出以下定理，也就是證明了 Pearson 的猜測：

定理三：當兩臂完全相同時，決策 $K_1 = K_2 = K$ 並非最佳，因其劣於 $(K, K-1)$ 。

Pearson 的猜測可更進一步推廣到以下的狀況：

定理四：當 $E(\theta_1) \geq E(\theta_2)$ 及 $Var(\theta_1) \geq Var(\theta_2)$ 時，決策 $K_1 = K_2 = K$ 並非最佳。

五、計劃結果自評

本計畫證明了 Pearson(1980)對兩階段雙臂問題最佳決策的臆測，印證了吃角子老虎問題中相同個數的資訊不為最佳之共識，稍有些許貢獻與突破。

然而，此一結果僅在觀察值個數已知下，仍未能推廣到觀察值個數未知的狀況。未來將朝此目標繼續研究，短期目標設為證明兩階段雙臂問題在觀察值個數未知時的結果；中長期目標為朝向解除兩階段或是雙臂的假設，可能的作法是從三階段開始，一步步向逐步分析(Sequential Analysis)，也就是吃角子老虎問題的最原始架構前進。

六、參考文獻

[1] Berry, D. A. (1972), "A Bernoulli Two-armed Bandit," *The Annals of*

Mathematical Statistics, Vol. 43, No. 3, 871-897.

[2] Berry, D. A. and Fristedt, L. (1985), *Bandit Problems: Sequential Allocation of Experiments*, Chapman and Hall, London.

[3] Clayton, M. K. and Witmer, J. A. (1988), "Two-stage Bandits," *The Annals of Statistics*, Vol. 16, No. 2, 887-894.

[4] Pearson, L. M. (1980), *Treatment Allocation for Clinical Trials in Stages*, Ph.D. Thesis, University of Minnesota, U.S.A.

[5] Witmer, J. A. (1986), "Bayesian Multistage Decision Problems," *The Annals of Statistics*, Vol. 14, No. 1, 283-297.

[6] Yue, C. J. (1999), "Generalized Two-stage Bandit Problem," *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 28(9), 2261-2276.