

國立政治大學應用數學系

數學教學碩士在職專班

碩士學位論文

二維聯合分配下條件常態分配

相容性之探討

**Compatibility of normal conditional  
distributions under bivariate distribution**

碩專班學生：蕭惠玲 撰

指導教授：姜志銘 博士

中華民國九十九年一月十五日

## 謝辭

假使沒有好友蘭芬，我想這一切會是一件「不可能的任務」，從一開始主動幫我購買簡章，鼓勵我在本職學能上繼續進修，借我參考書籍分享她的準備經驗，至龍山寺為我祈求考試平安符，並在這三年的求學過程中不斷地為我加油打氣，一直到口試當天，還到校幫我張羅口試的雜務，讓我安心口試。這一路有幸有這麼一位貼心、細心且無私的好友相伴，使我得以實現這個夢想。

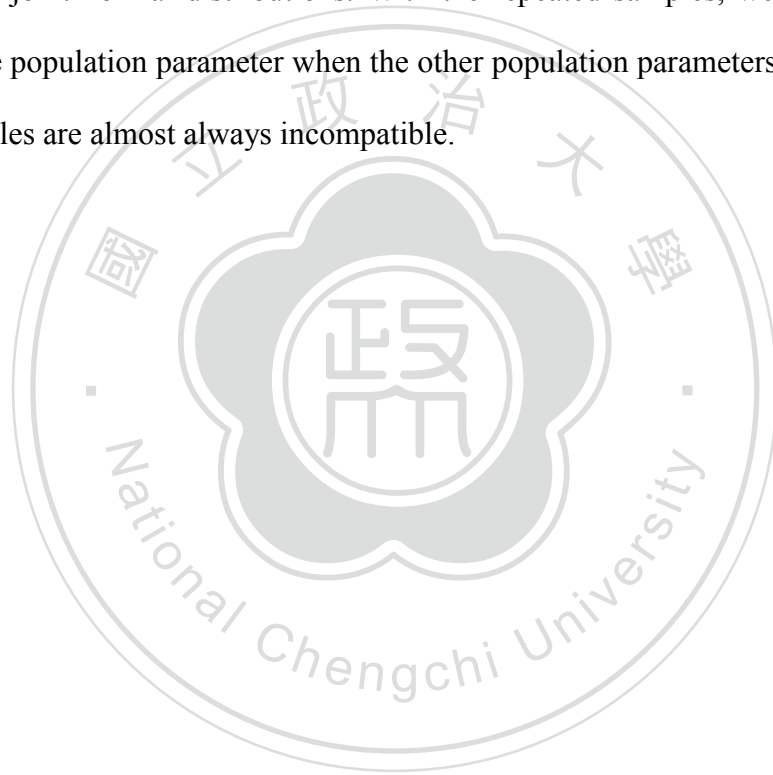
本這篇論文的產出，衷心感謝我的指導老師 姜志銘主任，主任本身系務非常繁忙，但每次的「論文指導」，除了體貼在職的我的下班時間外，甚至幾次指導我修正論文內容至晚上九、十點才離校。在主任嚴謹、踏實的治學態度的薰陶及不辭辛勞地指導下，我的論文終能順利完成。此外，也要感謝郭錕霖學長，從一開始引領我入門—為我授業，並在過程中耐心地提供我論文研究的建議—為我解惑，彷彿我的第二位指導老師。更要感謝的，是參與本篇論文口試的委員—宋傳欽老師及陳重弘老師，您的指導及建議，使我的論文更加完備。

在論文研究及學校工作兩頭煎熬的時候，感謝好友曉琪、珮琪，妳們總是在我最需要的時候，替我分擔、解憂，為我加油打氣，讓我調適好心情後，能再繼續迎戰工作、學生及課業等種種問題和壓力。

最後要感謝我摯愛的家人，這段時間的奔波，若不是父、母親無限的支持、寬容及協助，先生的體貼、包容、及溫馨的接送，弟弟育仁及時的為我處理棘手的程式問題並不厭煩的協助我突破瓶頸，妹妹惠茹的鼓勵及兩位可愛寶貝的貼心陪伴，實難以完成。感恩上天賜福於我的一切，正因為有你們，才讓我的生命更加完整，願將此成果及喜悅與你們分享。

## Abstract

Arnold and Press (1989) provide the theory about the compatibility of two conditional densities. In this research, we use their results to find the sufficient conditions of the compatibility of two conditional densities, which have the normal form. New sufficient conditions are also given if we further assume that corresponding joint density is normal. In addition, we use computer to generate two different samples from two different conditional normal distributions, which are from two different joint normal distributions. With the repeated samples, we provide the ranges of one population parameter when the other population parameters are fixed so that the samples are almost always incompatible.



Keywords : Compatible ; Normal Conditional Distribution

## 中文摘要

根據 Arnold and Press (1989) 提出檢驗兩個條件分配是否滿足相容條件的理論內容，本研究推論出，當給定二個條件機率密度函數的形式為常態 (normal) 時，如何判斷這兩個條件常態分配是否相容的充要條件，並進而推論出這兩個條件常態分配對應的聯合機率密度函數亦為常態分配的條件。我們更進一步透過電腦模擬方法，提供兩個不同聯合常態分配下所分別得到的兩組不同條件分配樣本，據以推得當對應的母數相差到何種程度時，可判定這兩組樣本其原始母體不同。



關鍵詞：相容性；條件常態分配

## 目次

|   |     |
|---|-----|
| Abstract  | i   |
| 中文摘要  | ii  |
| 1. 簡介   | 1   |
| 1.1 研究動機  | 1   |
| 1.2 研究目的  | 1   |
| 1.3 研究架構  | 2   |
| 2. 條件常態分配相容性的理論探討   | 3   |
| 3. 不相容條件常態分配的探討   | 18  |
| 4. 結論   | 48  |
| 附錄  |     |
| 附錄 A 資料模擬之計算式   | 49  |
| 附錄 B 變數線性轉換不影響相容性之證明  | 50  |
| 附錄 C 固定 $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ 及 $\rho_1$ ，且當 $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ 的值改變時，觀察<br>不可判別的 $\rho_2$ 值的區間變化圖     | 52  |
| 附錄 D 固定 $\sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ，且當 $\rho_1 = \rho_2$ 的值改變時，觀察<br>不可判別的 $\sigma_1^2$ 值的區間變化圖 | 95  |
| 參考文獻  | 101 |

# 1. 簡介

## 1.1 研究動機

當兩個隨機變數  $X$  與  $Y$  的聯合機率密度函數(joint probability density function) 為  $f(x, y)$ ，有了聯合機率密度函數，便可由  $f(x, y)$  求得  $X$  與  $Y$  的邊際機率密度函數(marginal probability density function)  $f_X(x)$  及  $f_Y(y)$ ，並進一步由  $f(x, y)$  及  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$  可算出二個條件機率密度函數(conditional probability density function)  $f(y|x)$  及  $f(x|y)$ 。但反過來，當我們有兩個隨機變數  $X$  與  $Y$  的條件機率密度函數時，是否也可以返回去找到兩個隨機變數  $X$  與  $Y$  的的聯合機率密度函數是什麼呢？對此，本研究針對兩元常態分配  $(X, Y)$ ，他們的聯合機率密度函數為

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

.....(1.1)

的狀態下作相關探討。其中  $\mu_1$  表示隨機變數  $X$  的平均； $\sigma_1$  表示隨機變數  $X$  的標準差； $\mu_2$  表示隨機變數  $Y$  的平均； $\sigma_2$  表示隨機變數  $Y$  的標準差； $\rho$  表示兩隨機變數  $X$  及  $Y$  的相關係數。

## 1.2 研究目的

給定兩個條件機率密度函數分別為  $f(y|x)$  及  $f(x|y)$ ，若存在一個聯合機率密度函數使得它的條件機率密度函數亦分別為  $f(y|x)$  及  $f(x|y)$ ，則此時我們稱這兩個條件分配是相容的 (compatible)。Arnold and Press (1989) 提出檢驗兩個條件分配是否滿足相容條件的判斷方式。

本論文在第 2、3 節中將根據兩個條件分配滿足相容的條件，探討下面三個問題：

**問題 2.1** 當給定二個條件分配的形式為常態 (normal) 時，在什麼狀態下會讓這兩個條件分配是相容的？亦即兩個條件分配的平均數及變異數的形式為何，會使得這兩個條件分配滿足相容性？

**問題 2.2** 若兩個條件常態分配是相容的，則代表這兩個條件分配的聯合分配存在，此時聯合分配的機率密度函數為何？若這個聯合分配的機率密度函數不為常態，能否對相容的條件常態分配做更多的限制，使得聯合分配為常態？

**問題 3.1** 在兩個條件常態分配下所得之兩個樣本，實務上，在何種條件下，可以判斷這兩個樣本來自不同的聯合常態分配？

### 1.3 研究架構

本研究第 1 節簡述研究背景與動機。第 2 節將以理論推導方式，完整地回答問題 2.1 及 2.2。第 3 節透過電腦模擬的方式，回答問題 3.1。最後在第 4 節做結論。

## 2. 條件常態分配相容性的理論探討

Arnold and Press (1989) 證明出檢驗兩個條件分配是否滿足相容條件的判斷方式：

若兩個條件機率密度函數  $g_1(x|y)$  和  $g_2(y|x)$  是相容的  $\Leftrightarrow$  滿足下列二個條件：

$$(1) N_1 = N_2, \text{ 其中 } N_1 = \{(x, y) | g_1(x|y) > 0\} \text{ 及 } N_2 = \{(x, y) | g_2(y|x) > 0\}. \dots(2.1)$$

$$(2) \text{ 存在 } x \text{ 的函數 } u(x) \text{ 和 } y \text{ 的函數 } v(y), \text{ 使得 } \frac{g_1(x|y)}{g_2(y|x)} = u(x) \cdot v(y), \text{ 對所有的}$$

$$(x, y) \in N \equiv N_1 = N_2, \text{ 且 } \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx < \infty \text{ 或 } \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v(y)} dy < \infty \right). \dots\dots\dots(2.2)$$

$$\text{在前述情形下, 可推得聯合機率密度函數 } f(x, y) = g_2(y|x) \cdot \frac{u(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx} \dots\dots(2.3)$$

的條件機率密度函數分別為  $g_1(x|y)$  及  $g_2(y|x)$ 。

**問題 2.1** 當給定二個條件分配的形式為常態 (normal) 時, 在什麼狀態下會讓這兩個條件分配是相容的? 亦即兩個條件分配的平均數及變異數的形式為何時, 會使得這兩個條件機率分滿足相容性?

當二個條件分配的形式為常態且滿足(2.1)及(2.2)時, 我們發現條件分配的平均數除以條件分配的變異數是一個二次函數, 而且條件分配的變異數的倒數是一個二次函數。此結果可用以下定理[2.1]來表示：

**【定理 2.1】** 若二個條件常態分配分別為

$$X|Y = y \sim N(\mu_1(y), \sigma_1^2(y)), \sigma_1^2(y) \neq 0, \forall y \in R,$$

$$Y|X = x \sim N(\mu_2(x), \sigma_2^2(x)), \sigma_2^2(x) \neq 0, \forall x \in R, \text{ 且相容, 則其充分}$$

必要條件為：



$$\sigma_1^{-2}(y) = d_1 + e_1 y + e_2 y^2, \quad \mu_1(y) = \sigma_1^2(y)(d_2 + e_3 y + e_4 y^2) \cdots \cdots (2.4)$$

$$\sigma_2^{-2}(x) = d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2, \quad \mu_2(x) = \sigma_2^2(x)(d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2) \cdots \cdots (2.5)$$

$$\sigma_1^{-2}(y) > 0, \quad \forall y \in R \cdots \cdots (2.6)$$

$$\sigma_2^{-2}(x) > 0, \quad \forall x \in R \cdots \cdots (2.7)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx < \infty$ , 其中

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}} \exp \left( \frac{(d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2)^2}{2(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)} - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x \right) \cdots (2.8)$$

**【證明】：**

假設給定二個條件常態分配分別為

$$X | Y = y \sim N(\mu_1(y), \sigma_1^2(y)), \quad \sigma_1^2(y) > 0, \quad \forall y \in R,$$

$$Y | X = x \sim N(\mu_2(x), \sigma_2^2(x)), \quad \sigma_2^2(x) > 0, \quad \forall x \in R, \quad \text{且相容, 則其充分必要條件,}$$

依 (2.1) 及 (2.2), 為:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x|y)}{f(y|x)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu_1(y))^2}{2\sigma_1^2(y)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2(x)} \cdot \exp\left(-\frac{(y-\mu_2(x))^2}{2\sigma_2^2(x)}\right)} \\ &= \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu_1(y))^2}{2\sigma_1^2(y)} + \frac{(y-\mu_2(x))^2}{2\sigma_2^2(x)}\right) \\ &= \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(\frac{-x^2 + 2x\mu_1(y) - \mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2 - 2y\mu_2(x) + \mu_2^2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \\ &= \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)}\right) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \cdot \exp\left(\frac{-x^2 + 2x\mu_1(y)}{2\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2 - 2y\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \\ &= \sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)}\right) \cdot \exp\left(\frac{-x^2 + 2x\mu_1(y)}{2\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2 - 2y\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \end{aligned}$$

$$= \sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)}\right) \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2(y)} + \frac{x\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2}{2\sigma_2^2(x)} - \frac{y\mu_2(x)}{\sigma_2^2(x)}\right)$$

.....(2.9)

$$\text{令 } k(x, y) = \frac{-x^2}{2\sigma_1^2(y)} + \frac{x\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2}{2\sigma_2^2(x)} - \frac{y\mu_2(x)}{\sigma_2^2(x)}$$

.....(2.10)

$$\text{則(2.9)就可以寫成 } \sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)}\right) \cdot \exp(k(x, y))$$

.....(2.11)

( $\Rightarrow$ ) 必要條件

根據(2.2)， $k(x, y)$  必可以寫成只有  $x$  函數和  $y$  函數的相加形式，而且兩個條件機率密度函數  $f(x|y)$ 、 $f(y|x)$  相除之後的結果，所有和  $x$  有關的函數，積分後的值一定是有限(finite)的，如下之關係：

$$k(x, y) = k_1(x) + k_2(y) \text{ 且 } \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)} + k_1(x)\right)] dx < \infty$$

也就是說  $k(x, y) = k_1(x) + k_2(y)$  當對  $k(x, y)$  的  $x$  變數作偏微分時，結果必只是一個關於  $x$  的函數，因此

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x, y) = -\frac{x}{\sigma_1^2(y)} + \frac{\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_2^2(x)}\right) - y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_2(x)}{\sigma_2^2(x)}\right)$$

.....(2.12)

因為(2.12)是一個關於  $x$  的函數，但式子中卻仍有變數  $y^2$  及  $y$  出現，代表

$$\frac{1}{\sigma_1^2(y)} + \frac{\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)}$$

這兩項中可能有  $y^2$  及  $y$ ，為了讓  $\frac{y^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_2^2(x)}\right) - y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_2(x)}{\sigma_2^2(x)}\right)$  消

失，因此  $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_2^2(x)}\right)$  及  $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_2(x)}{\sigma_2^2(x)}\right)$  必為  $x$  的一次函數，所以可將該式內的項目表

示成

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_2^2(x)}\right) = c_1 x + c_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_2(x)}{\sigma_2^2(x)}\right) = c_3 x + c_4 \end{cases}$$

.....(2.13)

將(2.13)積分後， $\sigma_2^{-2}(x)$ 及 $\mu_2(x)$ 表示成

$$\begin{cases} \sigma_2^{-2}(x) = \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_5 \\ \mu_2(x) = \sigma_2^{-2}(x) \cdot \left[ \frac{1}{2}c_3x^2 + c_4x + c_6 \right] \end{cases} \quad (2.14)$$

再將(2.14)的結果代入(2.12)，則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} k(x,y) &= -\frac{x}{\sigma_1^2(y)} + \frac{\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)} + \frac{y^2}{2} \cdot (c_1x + c_2) - y \cdot (c_3x + c_4) \\ &= x \cdot \left( -\frac{1}{\sigma_1^2(y)} + \frac{c_1}{2}y^2 - c_3y \right) + \left( \frac{\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)} + \frac{1}{2}c_2y^2 - c_4y \right) \end{aligned}$$

由於對 $k(x,y) = k_1(x) + k_2(y)$ 的 $x$ 變數作偏微分時，結果必只是一個關於 $x$ 的函數，則 $y$ 函數的部份就會變成常數，因此 $\frac{\partial}{\partial x} k(x,y)$ 後，和 $y$ 函數有關的部份，

就用常數 $c_7$ 、 $c_8$ 來取代，即

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sigma_1^2(y)} + \frac{1}{2}c_1y^2 - c_3y = c_7 \\ \frac{\mu_1(y)}{\sigma_1^2(y)} + \frac{1}{2}c_2y^2 - c_4y = c_8 \end{cases}$$

此時 $\sigma_1^{-2}(y)$ 及 $\mu_1(y)$ 可表示成

$$\begin{cases} \sigma_1^{-2}(y) = \frac{1}{2}c_1y^2 - c_3y - c_7 \\ \mu_1(y) = \sigma_1^2(y) \cdot \left[ -\frac{1}{2}c_2y^2 + c_4y + c_8 \right] \end{cases} \dots\dots\dots(2.15)$$

為了讓式子更簡易，令 $\frac{1}{2}c_1 = e_2$ 、 $-\frac{1}{2}c_2 = e_4$ 、 $-c_3 = e_1$ 、 $c_4 = e_3$ 、 $c_5 = d_3$ 、 $c_6 = d_4$ 、 $-c_7 = d_1$ 、 $c_8 = d_2$ ，因此

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-2}(y) &= \frac{1}{2}c_1y^2 - c_3y - c_7 \\ &= d_1 + e_1y + e_2y^2 \dots\dots\dots(2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1(y) &= \sigma_1^2(y) \left( -\frac{1}{2}c_2y^2 + c_4y + c_8 \right) \\ &= d_2 + e_3y + e_4y^2 \dots\dots\dots(2.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{-2}(x) &= \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_5 \\ &= d_3 - 2e_4x + e_2x^2 \dots\dots\dots(2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2(x) &= \sigma_2^2(x) \left( \frac{1}{2} c_3 x^2 + c_4 x + c_6 \right) \\ &= \sigma_2^2(x) \left( d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2 \right) \dots \dots \dots (2.19)\end{aligned}$$

將(2.16)、(2.17)、(2.18)、(2.19)的結果代入(2.9)中

$$\begin{aligned}\frac{f(x|y)}{f(y|x)} &= \sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)}\right) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} d x^2 + d x + \frac{1}{2} d y^2 - d y\right) \\ &= \sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)}\right) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} d_1 x^2 + d_2 x\right) \cdot \frac{1}{\sigma_1(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_1^2(y)}{2\sigma_1^2(y)}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} d_3 y^2 - d_4 y\right) \\ &= u(x) \cdot v(y)\end{aligned}$$

其中  $u(x) = \sigma_2(x) \cdot \exp\left(\frac{\mu_2(x)}{2\sigma_2^2(x)} - \frac{1}{2} d_1 x^2 + d_2 x\right)$ ，將(2.18)、(2.19)代入可得

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}} \exp\left(\frac{(d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2)^2}{2(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)} - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x\right), \text{ 故 } \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx < \infty.$$

( $\Leftarrow$ ) 充分條件

由(2.10)

$$\begin{aligned}k(x, y) &= -\frac{1}{2} (d_1 + e_1 y + e_2 y^2) + x(d_2 + e_3 y + e_4 y^2) + \frac{y^2}{2} (d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2) - y(d_4 + e_3 - \frac{1}{2} e_1 x^2) \\ &= \left(-\frac{1}{2} d_1 x^2 + d_2 x\right) + \left(\frac{1}{2} d_3 y^2 - d_4 y\right) \\ &= k_1(x) + k_2(y)\end{aligned}$$

因此  $k_1(x) = \left(-\frac{1}{2} d_1 x^2 + d_2 x\right)$ ， $k_2(y) = \left(\frac{1}{2} d_3 y^2 - d_4 y\right)$  代入(2.11)

所以(2.9)可表示成  $u(x) \cdot v(y)$ ，且

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}} \exp\left(\frac{(d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2)^2}{2(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)} - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x\right) \quad \text{得證} \blacksquare$$

從定理[2.1]中我們知道，當二個條件分配的形式為常態則相容的充分必要條件為：條件分配的平均數除以條件分配的變異數的是一個二次函數，而且條件分配的變異數的倒數是一個二次函數以及(2.6)、(2.7)、(2.8)式。，接下來我們想要了解這些充要條件能否簡化？亦即若進一步細分常態條件分配的變異數是否為常數下，這兩個二次函數在什麼形式下，可以得到條件分配相容性的充分必要條件？結果如下：

**【推理 2.1】**

(a) 若兩個條件常態分配之變異數皆為正的常數，則

$$X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2+e_3y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right), Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4+e_3x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right),$$

為相容的充要條件為  $e_3^2 - d_1d_3 < 0$ 。

(b) 若兩個條件常態分配之變異數皆不為常數，則

$$X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2+e_3y+e_4y^2}{d_1+e_1y+e_2y^2}, \frac{1}{d_1+e_1y+e_2y^2}\right),$$

$$Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4+e_3x-\frac{1}{2}e_1x^2}{d_3-2e_4x+e_2x^2}, \frac{1}{d_3-2e_4x+e_2x^2}\right),$$

為相容的充要條件為  $e_2 > 0, e_1^2 - 4e_2d_1 < 0, e_4^2 - e_2d_3 < 0$ 。

(c) 若兩個條件常態分配之變異數，一為正的常數，另一為非常數，則

必為不相容。

**【證明】：**

在定理[2.1]中，二個條件常態分配分別為

$$X|Y=y \sim N(\mu_1(y), \sigma_1^2(y)), \sigma_1^2(y) \neq 0, \forall y \in R,$$

$$Y|X=x \sim N(\mu_2(x), \sigma_2^2(x)), \sigma_2^2(x) \neq 0, \forall x \in R,$$

則其平均數及變異數的形式須為：

$$X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3y + e_4y^2}{d_1 + e_1y + e_2y^2}, \frac{1}{d_1 + e_1y + e_2y^2}\right), \forall y \in R$$

$$Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3x - \frac{1}{2}e_1x^2}{d_3 - 2e_4x + e_2x^2}, \frac{1}{d_3 - 2e_4x + e_2x^2}\right), \forall x \in R$$

並滿足  $\sigma_1^{-2}(y) > 0, \forall y \in R, \sigma_2^{-2}(x) > 0, \forall x \in R$ ，以及  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx < \infty$  的條件，

這兩個條件分配才會是相容的，其中

$$\sigma_1^{-2}(y) = d_1 + e_1y + e_2y^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = e_2 = 0 & \text{且 } d_1 > 0 \dots\dots\dots(2.20) \\ e_2 > 0 & \text{且 } e_1^2 - 4e_2d_1 < 0 \dots\dots\dots(2.21) \end{cases}$$

$$\sigma_2^{-2}(x) = d_3 - 2e_4x + e_2x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = e_4 = 0 & \text{且 } d_3 > 0 \dots\dots\dots(2.22) \\ e_2 > 0 & \text{且 } e_4^2 - e_2d_3 < 0 \dots\dots\dots(2.23) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{d_3 - 2e_4x + e_2x^2}} \exp\left\{\frac{(d_4 + e_3x - \frac{1}{2}e_1x^2)^2}{2(d_3 - 2e_4x + e_2x^2)} - \frac{d_1}{2}x^2 + d_2x\right\} dx < \infty \dots\dots\dots(2.24)$$

兩個條件分配的精確度(變異數的倒數)(precison)若是一次，圖形是一條直線，則  $\sigma_1^{-2}(y)$  和  $\sigma_2^{-2}(x)$  的值會含蓋到負的，就不可能大於 0，所以只有常數和二次的可能。因此要讓  $\sigma_1^{-2}(y) > 0, \sigma_2^{-2}(x) > 0$  有四種可能搭配情形，【情形一】：(2.20) 和 (2.22)，【情形二】：(2.20) 和 (2.23)，【情形三】：(2.21) 和 (2.22)，【情形四】：(2.21) 和 (2.23)，就此四種可能情形再加上 (2.24) 的條件，做以下分析：

**【情形一】**

如果 (2.20) 和 (2.22) 的條件成立，即  $\begin{cases} e_1 = e_2 = 0, d_1 > 0 \\ e_2 = e_4 = 0, d_3 > 0 \end{cases}$ ，此時兩個條件分

配為  $X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right)$ ， $Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right)$ ，他們的變異數皆為

常數。再將值代入  $u(x)$  可得  $u(x) = \frac{1}{\sqrt{d_3}} \exp\left(\frac{(d_4 + e_3x)^2}{2d_3} - \frac{d_1}{2}x^2 + d_2x\right)$

$$u(x) \propto \exp\left(\left(\frac{e_3^2}{2d_3} - \frac{d_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{e_3d_4}{d_3} + d_2\right)x\right)$$

$$\text{所以 } \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx < \infty \Leftrightarrow \frac{e_3^2}{2d_3} - \frac{d_1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow e_3^2 - d_1d_3 < 0$$

因此若兩個條件分配之變異數皆為常數，則  $X|Y$  與  $Y|X$  為相容的充要條件為

$e_3^2 - d_1d_3 < 0$ ，故(a)得證。

### 【情形二】

如果(2.20)和(2.23)的條件成立，即 
$$\begin{cases} e_1 = e_2 = 0, d_1 > 0 \\ e_2 > 0, e_4^2 - e_2e_3 < 0 \end{cases}$$

因為(2.23)中，除了  $e_4^2 < e_2e_3$  且要求  $e_2 > 0$ ，但(2.20)中的  $e_2 = 0$ ，矛盾 ( $\rightarrow \leftarrow$ )，

所以此情形不可能成立。

### 【情形三】

如果(2.21)和(2.22)的條件成立，即 
$$\begin{cases} e_2 > 0, e_1^2 - 4e_2d_1 < 0 \\ e_2 = e_4 = 0, d_3 > 0 \end{cases}$$

因為(2.21)中，除了  $e_1^2 < 4e_2d_1$  且要求  $e_2 > 0$ ，但(2.22)中的  $e_2 = 0$ ，矛盾 ( $\rightarrow \leftarrow$ )，

所以此情形不可能成立。

由情形二及情形三，故(c)得證。

### 【情形四】

如果(2.21)和(2.23)的條件成立，即 
$$\begin{cases} e_2 > 0, e_1^2 - 4e_2d_1 < 0 \\ e_2 > 0, e_4^2 - e_2d_3 < 0 \end{cases}$$
，此時兩個條件

分配為  $X|Y = y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3y + e_4y^2}{d_1 + e_1y + e_2y^2}, \frac{1}{d_1 + e_1y + e_2y^2}\right)$ ，

$Y|X = x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3x - \frac{1}{2}e_1x^2}{d_3 - 2e_4x + e_2x^2}, \frac{1}{d_3 - 2e_4x + e_2x^2}\right)$ ，他們的變異數皆不為常數。

再將條件代入  $u(x)$  可得

$$\begin{aligned}
u(x) &\propto \exp\left(\frac{d_4^2 + e_3^2 x^2 + \frac{1}{4} e_1 x^4 + 2d_4 e_3 x - e_1 e_3 x^3 - e_1 d_4 x^2 - d_1 d_3 x^2 + 2d_1 e_4 x^3 - d_1 e_2 x^4 + 2d_1 e_4 x^3 - 4d_2 e_4 x^2 + 2e_2 d_2 x^3}{2(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)}\right) \\
&\Rightarrow u(x) \propto \exp\left(\frac{\left(\frac{1}{4} e_1^2 - d_1 e_1\right) x^4 + (-e_1 e_3 + 2d_1 e_4 + 2e_2 d_2) x^3 + (e_3^2 - e_1 d_4 - d_1 d_3 - 4d_2 e_4) x^2 + (2d_4 e_3 + 2d_2 d_3) x + d_4}{2(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)}\right) \\
&\Rightarrow u(x) \propto \exp\left(\left(\frac{e_1^2}{8e_2} - \frac{d_1}{2}\right) x^2 + \left(\frac{-e_1 e_3}{2e_2} + d_2 + \frac{e_4 e_1^2}{4e_2^2}\right) x + \left(\frac{e_3^2}{2e_2} - \frac{e_1 d_4}{2e_2} - \frac{e_1^2 d_3}{8e_2^2} - \frac{e_1 e_3 e_4}{e_2^2} + \frac{e_1^2 e_4^2}{2e_2^3}\right)\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{\left(2d_4 e_3 + \frac{e_1 e_3 d_3}{e_2} - \frac{e_1^2 e_4 d_3}{e_2^2} + \frac{e_3^2 e_4}{e_2} - \frac{2e_1 d_4 e_4}{e_2} - \frac{4e_1 e_3 e_4^2}{e_2^2} + \frac{e_1^2 e_4^3}{e_2^3}\right) x + \left(d_4 - \frac{e_3^2 d_3}{e_2} + \frac{e_1 d_4 d_3}{e_2} + \frac{e_1^2 d_3^2}{4e_2^2} + \frac{2e_1 e_3 e_4 d_3}{e_2^2} - \frac{e_1^2 e_4^2 d_3}{e_2^3}\right)}{2e_2 x^2 - 4e_4 x + 2d_3}\right)
\end{aligned}$$

所以  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx < \infty \Leftrightarrow \frac{e_1^2}{8e_2} - \frac{d_1}{2} < 0$   
 $\Leftrightarrow e_1^2 - 4e_2 d_1 < 0$  (即為(2.21)), 因此不需再加任何限制條件。  
因此若兩個條件分配之變異數皆不為常數, 則  $X|Y$  與  $Y|X$  為相容的充要條件為  
 $e_2 > 0, e_1^2 - 4e_2 d_1 < 0, e_4^2 - e_2 d_3 < 0$ , 故(b)得證。 ■

**問題 2.2** 若兩個條件常態分配是相容的, 則代表這兩個條件分配的聯合分配存在, 那這個聯合分配的機率密度函數為何? 若這個聯合分配的機率密度函數不為常態, 能否對相容的條件常態分配做更多的限制, 使得聯合分配為常態?

我們發現應該可以, 結果可以由以下兩個引理[2.1]、[2.2]來表示:



**【引理 2.1】**

如果兩個條件分配的樣子符合推理[2.1]-(b)的形式，

$$\text{亦即} \begin{cases} X | Y = y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3 y + e_4 y^2}{d_1 + e_1 y + e_2 y^2}, \frac{1}{d_1 + e_1 y + e_2 y^2}\right) \\ Y | X = x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2}{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}, \frac{1}{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}\right), \\ e_2 > 0, e_1^2 - 4e_2 d_1 < 0, e_4^2 - e_2 d_3 < 0 \end{cases}$$

則聯合分配的機率密度函數  $f(x, y)$  與下列式子

$$\exp\left([1, x, x^2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & d_4 & -\frac{d_3}{2} \\ d_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{d_1}{2} & -\frac{e_1}{2} & -\frac{e_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}\right) \text{ 成比例，亦即}$$

$$f(x, y) \propto \exp\left([1, x, x^2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & d_4 & -\frac{d_3}{2} \\ d_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{d_1}{2} & -\frac{e_1}{2} & -\frac{e_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}\right) \dots\dots\dots (2.25)$$

**【證明】：**

由(2.3)

$$\Rightarrow f(x, y) \propto g_2(y|x) \cdot u(x)$$

$$\Rightarrow f(x, y) \propto \sqrt{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)\left(y - \frac{d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2}{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}\right)^2\right)$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2}} \cdot \exp\left(\frac{(d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2)^2}{2(d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2)} - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x\right)$$

$$\text{令 } A = d_3 - 2e_4 x + e_2 x^2, B = d_4 + e_3 x - \frac{1}{2} e_1 x^2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x, y) \propto \exp\left(\frac{-1}{2} A\left(y - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{B^2}{2A} - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x\right) \\ &\Rightarrow f(x, y) \propto \exp\left(\frac{-1}{2} Ay^2 + yB - \frac{B^2}{2A} + \frac{B^2}{2A} - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x\right) \\ &\Rightarrow f(x, y) \propto \exp\left(\frac{-1}{2} Ay^2 + yB - \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 x\right) \\ &\Rightarrow f(x, y) \propto \exp\left([1, x, x^2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & d_4 & -\frac{d_3}{2} \\ d_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{d_1}{2} & -\frac{e_1}{2} & -\frac{e_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

得證 ■

### 【引理 2.2】

如果兩個條件分配的樣子符合推理[2.1]-(a)的形式，

$$\text{亦即} \begin{cases} X | Y = y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3 y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right) \\ Y | X = x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3 x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right) \\ e_3^2 - d_1 d_3 < 0 \end{cases}$$

，則聯合分配為常態分配。

### 【證明】：

(1) 若將推理[2.1]-(a)的條件( $e_1 = e_2 = e_4 = 0$ )代入(2.25)，得知滿足

推理[2.1]-(a)它的聯合機率密度函數為

$$f(x, y) \propto \exp\left([1, x, x^2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & d_4 & -\frac{d_3}{2} \\ d_2 & e_3 & 0 \\ -\frac{d_1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}\right), \text{此式展開後只有 } x^2, y^2,$$

$xy$ 及常數項，因此符合常態分配的形式。

(2) 但若將推理[2.1]-(b)的條件代入(2.25)，滿足推理[2.1]-(b)的聯合

$$\text{分配為 } f(x, y) \propto \exp \left[ 1, x, x^2 \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & d_4 & -\frac{d_3}{2} \\ d_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{d_1}{2} & -\frac{e_1}{2} & -\frac{e_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}, \text{ 此式展開後的}$$

項目除了有  $x^2$ 、 $y^2$ 、 $xy$ 、 $x$ 、 $y$  和常數項外，尚有  $x^2y^2$ 、 $x^2y$ 、 $xy^2$  項，所以並不符合常態分配的形式。

得證 ■

此推導結果與 Arnold et al. (1999) 的結果是符合的。

由引理[2.2]知道，兩個常態條件分配符合推理[2.1]-(a)的型式，亦即

$$\begin{cases} X | Y = y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3 y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right) \\ Y | X = x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3 x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right) \\ e_3^2 - d_1 d_3 < 0 \end{cases}, \text{ 則聯合分配為常態分配，且聯合機率密度函數如}$$

(1.1)，因此我們將討論如何進而推得(1.1)式中的  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  及  $\rho$ 。

**【引理 2.3】**

$$\text{若滿足 } \begin{cases} X | Y = y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3 y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right) \\ Y | X = x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3 x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right) \\ e_3^2 - d_1 d_3 < 0 \end{cases},$$

$$\text{則 } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left( \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right) \dots\dots\dots (2.26)$$

，其中  $\rho = \frac{e_3}{\sqrt{d_1 d_3}}$

$$\mu_1 = \frac{d_2 d_3 + e_3 e_4}{d_1 d_3 - e_3^2} = \frac{1}{1 - \rho^2} \left( \rho \frac{d_4}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{d_2}{d_1} \right)$$

$$\mu_2 = \frac{d_1 d_4 + e_3 d_2}{d_1 d_3 - e_3^2} = \frac{1}{1 - \rho^2} \left( \rho \frac{d_2}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{d_4}{d_3} \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1 \left(1 - \frac{e_3^2}{d_1 d_3}\right)}}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{d_3 \left(1 - \frac{e_3^2}{d_1 d_3}\right)}}$$

**【證明】：**

我們先來了解條件分配與聯合分配均數之間的關係，在二元常態分配下，聯

合分配的機率密度函數為  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left( \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$ ，條件分配機率密

度函數為  $X | Y = y \sim N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2))$ ，

$Y | X = x \sim N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2))$ ，

所以

$$\frac{d_2}{d_1} = \mu_1 - \frac{\rho \sigma_1 \mu_2}{\sigma_2} \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\frac{e_3}{d_1} = \frac{\rho \sigma_1}{\sigma_2} \dots\dots\dots (2.28)$$

$$\frac{1}{d_1} = \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\frac{d_4}{d_3} = \mu_2 - \frac{\rho \sigma_2 \mu_1}{\sigma_1} \dots\dots\dots (2.30)$$

$$\frac{e_3}{d_3} = \frac{\rho \sigma_2}{\sigma_1} \dots\dots\dots (2.31)$$

$$\frac{1}{d_3} = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \dots\dots\dots(2.32)$$

將(2.28)代入(2.27)

$$\frac{d_2}{d_1} = \mu_1 - \frac{e_3}{d_1} \mu_2 \dots\dots\dots(2.33)$$

將(2.31)代入(2.30)

$$\frac{d_4}{d_3} = \mu_2 - \frac{e_3}{d_3} \mu_1 \dots\dots\dots(2.34)$$

$$\Leftrightarrow \mu_2 = \frac{d_4}{d_3} + \frac{e_3}{d_3} \mu_1 \dots\dots\dots(2.35)$$

將(2.35)代入(2.33)

$$\begin{aligned} \frac{d_2}{d_1} &= \mu_1 - \frac{e_3}{d_1} \left( \frac{d_4}{d_3} + \frac{e_3}{d_3} \mu_1 \right) = \mu_1 \left( 1 - \frac{e_3^2}{d_1 d_3} \right) - \frac{e_3 d_4}{d_1 d_3} \\ \Rightarrow \mu_1 &= \frac{\frac{d_2}{d_1} + \frac{e_3 d_4}{d_1 d_3}}{1 - \frac{e_3^2}{d_1 d_3}} = \frac{d_2 d_3 + e_3 e_4}{d_1 d_3 - e_3^2} \dots\dots\dots(2.36) \end{aligned}$$

將(2.36)代入(2.35)

$$\mu_2 = \frac{d_4}{d_3} + \frac{e_3}{d_3} \left( \frac{d_2 d_3 + e_3 e_4}{d_1 d_3 - e_3^2} \right) = \frac{d_1 d_3 d_4 - e_3^2 d_4 + e_3 d_2 d_3 + e_3^2 d_4}{d_3 (d_1 d_3 - e_3^2)} = \frac{d_1 d_4 + e_3 d_2}{d_1 d_3 - e_3^2}$$

將(2.29)除以(2.32)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d_3}{d_1} &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{d_3}{d_1}} &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dots\dots\dots(2.37) \end{aligned}$$

將(2.37)代入(2.28)

$$\rho = \frac{e_3}{d_1} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{e_3}{d_1} \cdot \sqrt{\frac{d_1}{d_3}} = \frac{e_3}{\sqrt{d_1 d_3}} \dots\dots\dots(2.38)$$

將(2.37)代入(2.31)

$$\rho = \frac{e_3}{d_3} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{e_3}{d_3} \cdot \sqrt{\frac{d_3}{d_1}} = \frac{e_3}{\sqrt{d_1 d_3}} \dots \dots \dots (2.39)$$

(2.38)與(2.39)的結果相同，又加上

$$\begin{aligned} e_3^2 - d_1 d_3 &< 0 \\ \Rightarrow e_3^2 &< d_1 d_3 \\ \Leftrightarrow \rho^2 &< 1 \end{aligned}$$

將上述的式子整理如下：

當有一群資料 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ，利用迴歸的方式 $Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \varepsilon$  及

$X = \alpha' + \beta'x + \varepsilon'$ ，估算 $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$ 、 $d_4$ 、 $e_3$ 的值，再由 $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$ 、 $d_4$ 、 $e_3$ 的值即可反推 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\rho$ ，並得知他的聯合分配

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left( \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

，其中  $\rho = \frac{e_3}{\sqrt{d_1 d_3}} \Rightarrow e_3 = \rho \sqrt{d_1 d_3}$

$$\mu_1 = \frac{d_2 d_3 + e_3 e_4}{d_1 d_3 - e_3^2} = \frac{1}{1 - \rho^2} \left( \rho \frac{d_4}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{d_2}{d_1} \right)$$

$$\mu_2 = \frac{d_1 d_4 + e_3 d_2}{d_1 d_3 - e_3^2} = \frac{1}{1 - \rho^2} \left( \rho \frac{d_2}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{d_4}{d_3} \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1 \left( 1 - \frac{e_3^2}{d_1 d_3} \right)}}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{d_3 \left( 1 - \frac{e_3^2}{d_1 d_3} \right)}}$$

得證 ■

### 3. 不相容條件常態分配的探討

**問題 3.1** 在兩個條件常態分配下所得之兩個樣本，實務上，在何種條件下，可以判斷這兩個樣本來自不同的聯合常態分配？

若兩個條件分配  $X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2+e_3y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right)$ ， $Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4+e_3x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right)$ ，且  $e_3^2 - d_1d_3 < 0$ ，則由引理[2.3]對應之  $X, Y$  的聯合分配為(2.23)。前述兩個條件機率的平均數都為一次函數且一次項的係數乘以精確度(變異數的倒數)皆為  $e_3$ 。但在實務上，即使兩組資料亦即  $(x_1^{(1)} | y_1^{(1)}), \dots, (x_n^{(1)} | y_n^{(1)})$  及  $(y_1^{(2)} | x_1^{(2)}), \dots, (y_m^{(2)} | x_m^{(2)})$  來自相同母體，因為抽樣誤差的因素，從第一組  $n$  筆資料中得到的  $e_3$  的估計值，即  $\hat{e}_3^{(1)}$  與從第二組  $m$  筆資料中得到的  $e_3$  的估計值，即  $\hat{e}_3^{(2)}$  通常會有所不同(見附錄 A)。但若兩組資料分別來自兩個條件分配且這兩個條件分配是相容的，一般而言  $\hat{e}_3^{(1)}$  會接近  $\hat{e}_3^{(2)}$ ，反過來，若兩組資料分別來自兩個條件分配且這兩個條件分配是不相容的， $\hat{e}_3^{(1)}$  與  $\hat{e}_3^{(2)}$  一般而言會有較大的差距。若兩個條件隨機變數不相容(此時兩個條件隨機變數分別來自兩個不同母體)時，是否可由樣本判斷？因此本節將藉由電腦資料的模擬，回答問題 3.1 的問題，討論在什麼樣的情況下，可以判別此兩個條件隨機變數是不相容的，意即兩組模擬資料是來自不同的母體。我們的程式設計採用的是 Matlab 6.5，方式如下：

在二元常態分配  $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_1\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_1\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$  下，每次隨機抽取 10000 個樣本，亦

即  $(x_1^{(1)} | y_1^{(1)}), \dots, (x_{10000}^{(1)} | y_{10000}^{(1)})$ ，利用迴歸方式，在  $X|Y=y$  條件下產生估計值

$\hat{e}_3^{(1)}$ ；同時，在二元常態分配  $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_3^2 & \rho_2\sigma_3\sigma_4 \\ \rho_2\sigma_3\sigma_4 & \sigma_4^2 \end{pmatrix}\right)$ ，每次亦隨機抽取 10000

個樣本，亦即  $(y_1^{(2)} | x_1^{(2)}), \dots, (y_{10000}^{(2)} | x_{10000}^{(2)})$ ，一樣利用迴歸方式，在  $Y | X = x$  條件

下產生估計值  $\hat{e}_3^{(2)}$ ，然後計算  $\log \frac{\hat{e}_3^{(2)}}{\hat{e}_3^{(1)}}$ ，共進行 500 次，取  $\log \frac{\hat{e}_3^{(2)}}{\hat{e}_3^{(1)}}$  的平均值(設為

$x$ )，並取  $\log \frac{\hat{e}_3^{(2)}}{\hat{e}_3^{(1)}}$  值的標準差(設為  $s$ )，則此估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95%信賴區間約為

$[x-1.96s, x+1.96s]$ 。藉由(2.28)及(2.29)可推得  $e_3^{(1)} = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}$ ，藉由(2.31)

及(2.32)可推得  $e_3^{(2)} = \frac{\rho_2}{(1-\rho_2^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_3\sigma_4}$ ，所以  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}} = \log \frac{\rho_2(1-\rho_1^2)\sigma_1\sigma_2}{\rho_1(1-\rho_2^2)\sigma_3\sigma_4}$ ，因此若

兩個條件分配是來自相同的母體，則  $\log \frac{\hat{e}_3^{(2)}}{\hat{e}_3^{(1)}}$  的值會接近於 0，反之，若兩個條件

分配是來自不同的母體，則  $\log \frac{\hat{e}_3^{(2)}}{\hat{e}_3^{(1)}}$  的值可能會遠離 0。因為

$\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}} = \log \frac{\rho_2(1-\rho_1^2)\sigma_1\sigma_2}{\rho_1(1-\rho_2^2)\sigma_3\sigma_4}$ ，其中變數  $\rho_i$ 's 及  $\sigma_j$ 's、會影響  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  之值，因此就

分別調整  $\rho_i$ 's 及  $\sigma_j$ 's 這兩個變數來做探討。值得注意的是在模擬資料估算  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$

即  $\log \frac{\rho_2(1-\rho_1^2)\sigma_1\sigma_2}{\rho_1(1-\rho_2^2)\sigma_3\sigma_4}$  之值時，因為有可能  $\sigma_3$  與  $\sigma_1$ ， $\sigma_4$  與  $\sigma_2$  的值不同，但是卻造

成  $\sigma_3 \cdot \sigma_4 = \sigma_1 \cdot \sigma_2$  (此狀態顯然是不相容的)。附錄 B 之定理 B.1 證得，若

$X | Y = y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3 y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right)$ ， $Y | X = x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3 x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right)$ ，則  $X | Y$  及  $Y | X$  與

$aX + b | Y = y$  及  $aY + b | X = x$  (亦即  $aX + b | aY + b = ay + b$  及

$aY + b | aX + b = ax + b$ ) 具有相同的相容性(均僅決定於  $e_3^2 - d_1 d_3 < 0$ )，因此若

$\sigma_2 \neq \sigma_4$ ，可透過適當的線性轉換可使  $aY + b$  的標準差  $\sigma_4^* = \sigma_2$ ，因此以下的模擬  
僅討論  $\sigma_2 = \sigma_4$  (或  $\sigma_1 = \sigma_3$ )。

模擬探討的狀態可分為以下幾種情形：



Case A：討論可判別(不相容性)的  $\rho_2$  值區間

固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, 2, \dots, 10$ ,  $\rho_1 = 0.1$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下, 觀察  $\rho_2$  的區間變化, 特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。以下亦稱此範圍為可判別的  $\rho_2$  值區間。

同樣的方式, 在固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, 2, \dots, 10$  的情形下,  $\rho_1$  的值分別為 0.3、0.5、0.7、0.9、0.07、0.05、0.04、0.03 時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下, 觀察  $\rho_2$  的區間變化, 特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即為可判別的  $\rho_2$  值區間。

Case B：討論可判別(不相容性)的  $\sigma_1^2$  值區間

(1) 固定  $\sigma_3^2 = 1, 2, \dots, 10$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下, 觀察  $\sigma_1^2$  的區間變化, 特別是當  $\sigma_1^2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。以下亦稱此範圍為可判別的  $\sigma_1^2$  值區間。

(2) 固定  $\sigma_3^2 = 1, 2, \dots, 10$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 0.2$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下, 觀察  $\sigma_1^2$  的區間變化, 特別是當  $\sigma_1^2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即為可判別的  $\sigma_1^2$  值區間。

(3) 固定  $\sigma_3^2 = 1, 2, \dots, 10$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 0.3$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下, 觀察  $\sigma_1^2$  的區間變化, 特別是當  $\sigma_1^2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即為可判別的  $\sigma_1^2$  值區間。

以上模擬的結果將以圖表方式呈現，圖表中

縱軸：表示  $\log \frac{\hat{e}_3^{(2)}}{\hat{e}_3^{(1)}}$  的值；

橫軸：在 CaseA 的情形中表示  $\rho_2$  的值，在 CaseB 的情形中表示  $\sigma_1^2$  的值，

MEAN：表示  $x$ ；

U：表示  $x+1.96s$ ；

L：表示  $x-1.96s$ ；

TE：表示  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的實際值。

模擬討論如下：

#### Case A：討論可判別(不相容性)的 $\rho_2$ 值區間

模擬結果發現：

當  $\rho_1=0.1$ ， $\sigma_1^2=\sigma_3^2=1$ ， $\sigma_2^2=\sigma_4^2$  且  $\sigma_2^2$  值變動，亦即  $\sigma_2^2=1, 2, \dots, 10$ ，得到能判別兩組樣本來自不同母體的  $\rho_2$  區間均相同。

當  $\rho_1=0.3$ ， $\sigma_1^2=\sigma_3^2=1$ ， $\sigma_2^2=\sigma_4^2$  且  $\sigma_2^2$  值變動，亦即  $\sigma_2^2=1, 2, \dots, 10$ ，得到能判別兩組樣本來自不同母體的  $\rho_2$  區間均相同。

當  $\rho_1=0.003$ ， $\sigma_1^2=\sigma_3^2=1$ ， $\sigma_2^2=\sigma_4^2$  且  $\sigma_2^2$  值變動，亦即  $\sigma_2^2=1, 2, \dots, 10$ ，得到能判別兩組樣本來自不同母體的  $\rho_2$  區間均相同。

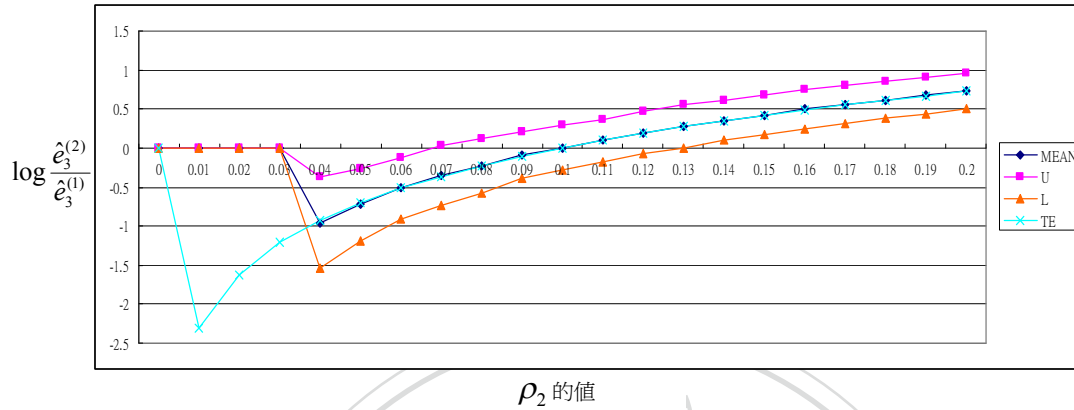
因此以下只呈現  $\sigma_1^2=\sigma_3^2=1$ ， $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$ ，

$\rho_1=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.07, 0.05, 0.04, 0.03$  時，分別得到能判別兩組樣本來自不同母體的  $\rho_2$  區間。其餘情形請詳見附錄 C。

模擬結果如下：

圖 3-1：不相容性的變化圖

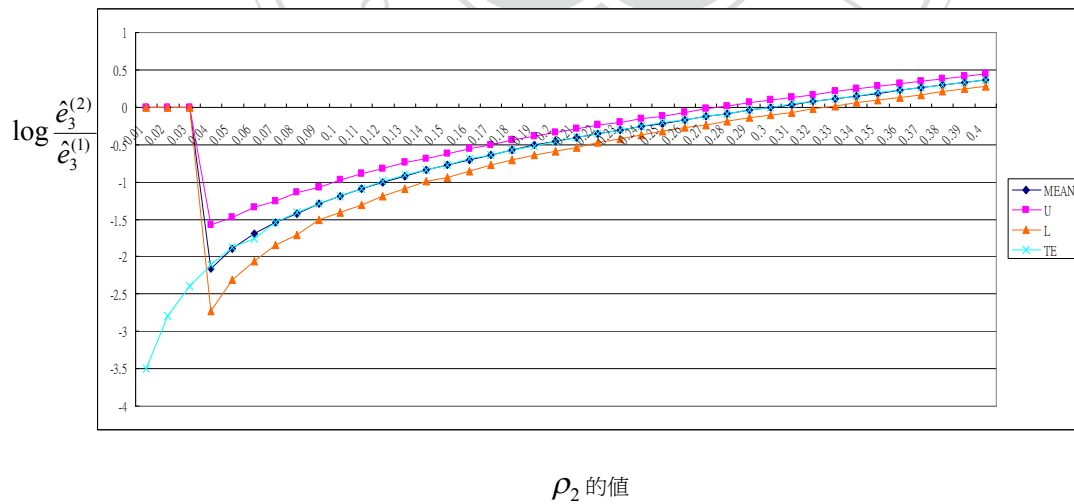
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-2：不相容性的變化圖

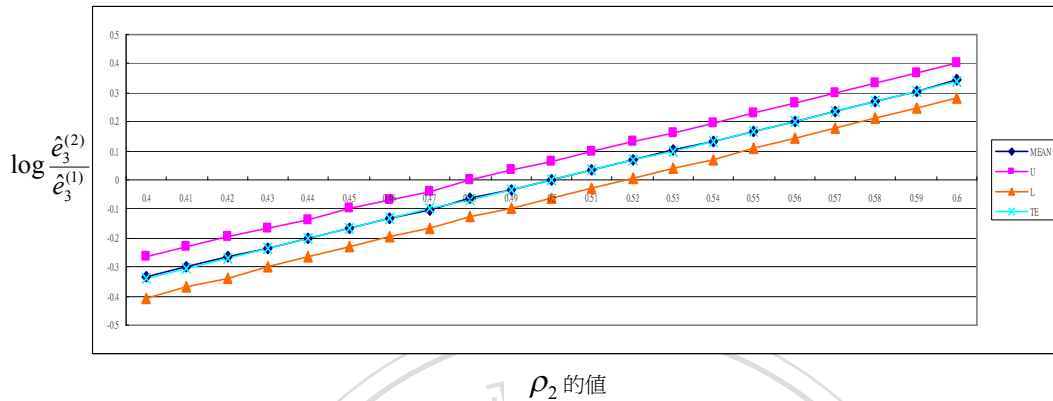
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.01 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-3：不相容性的變化圖

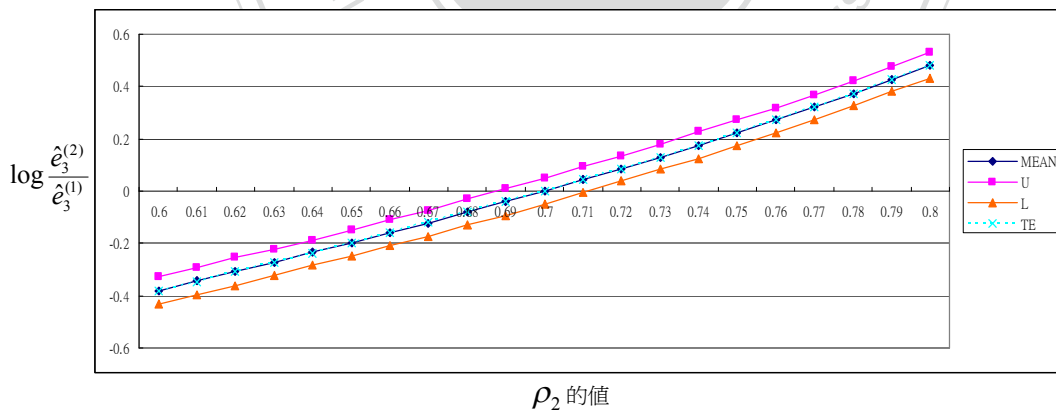
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-4：不相容性的變化圖

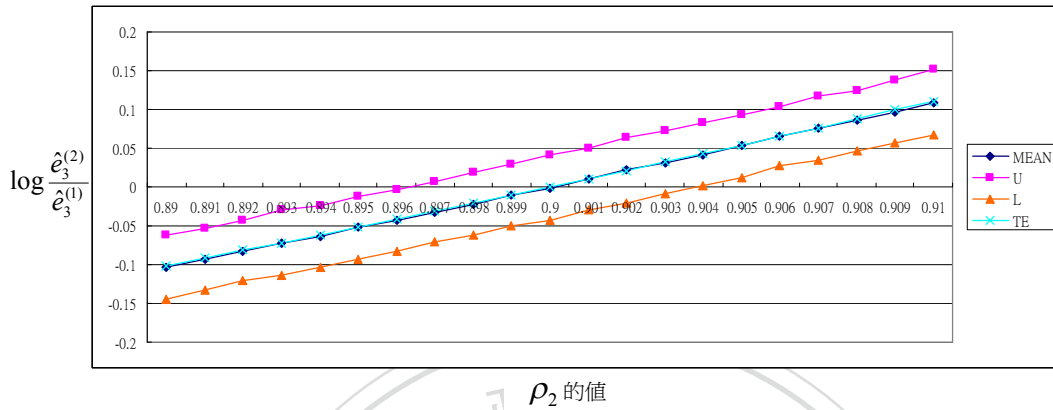
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-5：不相容性的變化圖

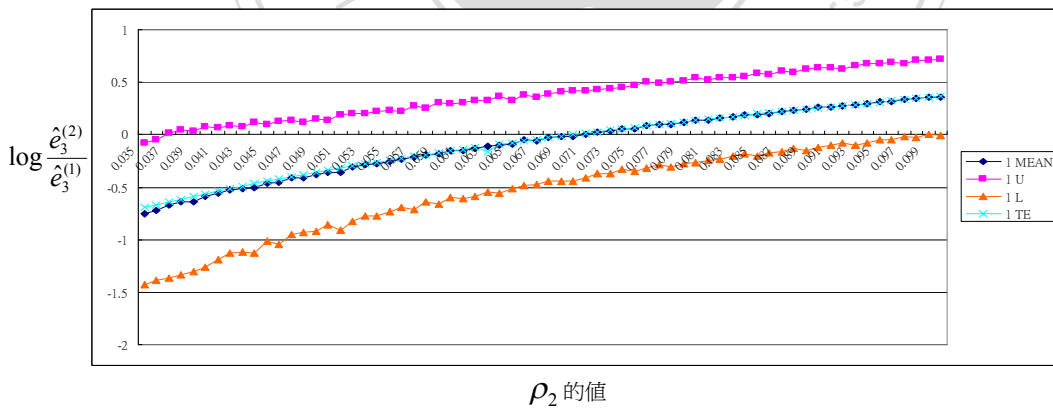
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-6：不相容性的變化圖

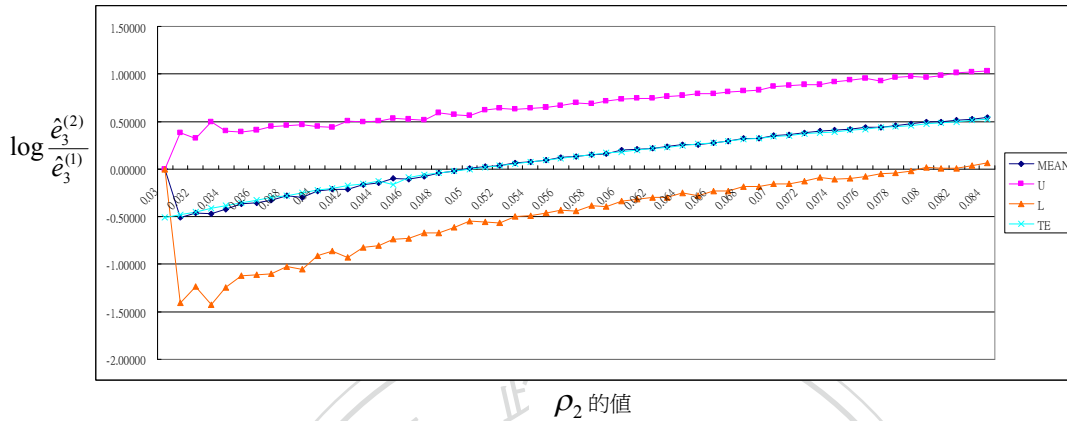
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-7：不相容性的變化圖

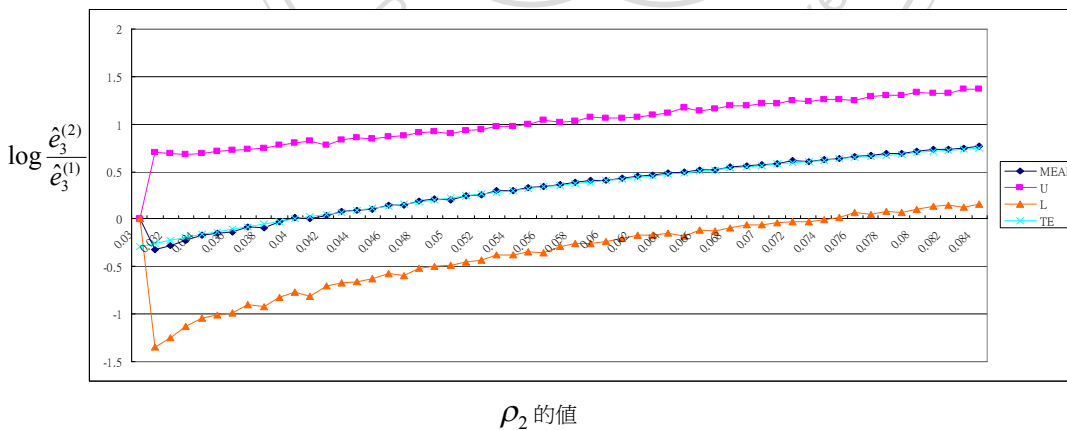
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-8：不相容性的變化圖

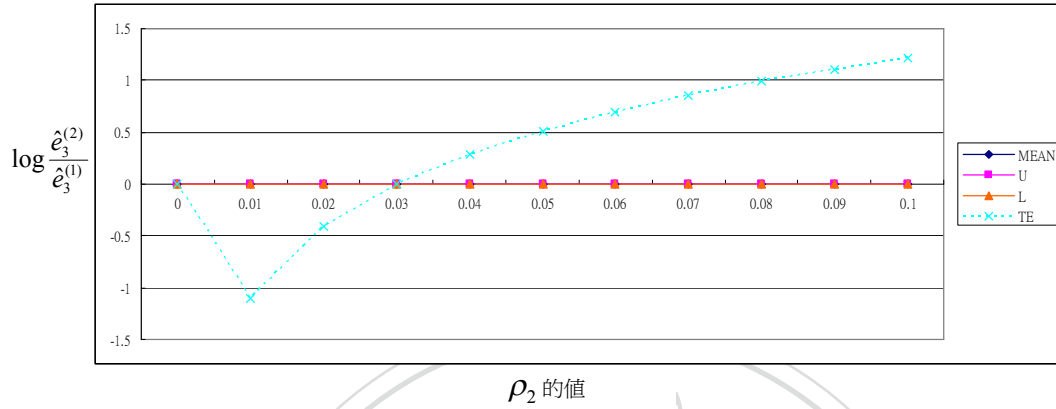
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-9：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95%的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

將模擬資料的結果圖 3-1~圖 3-9 進一步整理可得下表(3-1)：

表 3-1：假設  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$  (或 2, 3, ..., 10)， $\rho_1$  值變動下，

對應的不可判別及可判別的  $\rho_2$  值區間

| $\rho_1$ 值 | 不可判別的 $\rho_2$ 值區間                   | 可判別的 $\rho_2$ 值區間 <sup>1</sup>  |
|------------|--------------------------------------|---------------------------------|
| 0.04       | 0.031 ~ 0.075 (包含於 $0.04 \pm 0.04$ ) | (0.075, 1)                      |
| 0.05       | 0.03 ~ 0.08 (包含於 $0.05 \pm 0.03$ )   | (0.08, 1)                       |
| 0.07       | 0.036 ~ 0.099 (包含於 $0.07 \pm 0.04$ ) | (0.099, 1)                      |
| 0.1        | 0.07 ~ 0.13 (亦即 $0.1 \pm 0.03$ )     | (0.04, 0.07) $\cup$ (0.13, 1)   |
| 0.3        | 0.27 ~ 0.33 (亦即 $0.3 \pm 0.03$ )     | (0.04, 0.27) $\cup$ (0.33, 1)   |
| 0.5        | 0.48 ~ 0.52 (亦即 $0.5 \pm 0.02$ )     | (0.04, 0.48) $\cup$ (0.52, 1)   |
| 0.7        | 0.69 ~ 0.71 (亦即 $0.7 \pm 0.01$ )     | (0.04, 0.69) $\cup$ (0.71, 1)   |
| 0.9        | 0.896 ~ 0.904 (亦即 $0.9 \pm 0.004$ )  | (0.04, 0.896) $\cup$ (0.904, 1) |

由表 3-1 可得知，當  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$  以及  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$  (或 2, 3, ..., 10)，但  $\rho_1$  值變動，不可判別的  $\rho_2$  值區間也跟隨著變動，但可簡化(亦即在最差的情況下)為不可判別的  $\rho_2$  值區間全都落在  $(\rho_1 - 0.04, \rho_1 + 0.04)$  區間內。利用  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  (或  $\sigma_3$  及  $\sigma_4$ ) 的對稱性，可得以下結論：當  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2$  及  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ ，且變異數值介於 1 到 10 之間，則當  $\rho_1 \geq 0.04$  時，不可判別的  $\rho_2$  值包含於  $(\rho_1 - 0.04, \rho_1 + 0.04)$ ，此即為簡化的(或最差的)區間。

<sup>1</sup> 當  $\rho_2$  值很小時，部分的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在，故無法判別兩組樣本是否來自不同母體。



**Case B：討論可判別(不相容性)的 $\sigma_1^2$ 值區間**

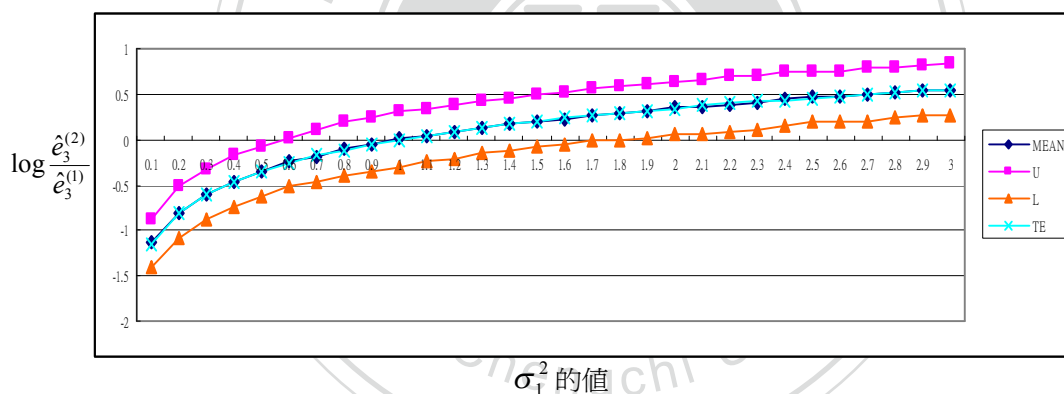
Case B-(1)：

固定 $\sigma_3^2=1, 2, \dots, 10$ ， $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$ ， $\rho_1=\rho_2=0.1$ 時，在估計 $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$ 的95%信賴區間下，觀察 $\sigma_1^2$ 的區間變化，特別是當 $\sigma_1^2$ 的值在什麼範圍內，會使得估計 $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$ 的95%信賴區間值不包含0。以下亦稱此範圍為可判別的 $\sigma_1^2$ 值區間。

模擬結果如下：

圖 3-10：不相容性的變化圖

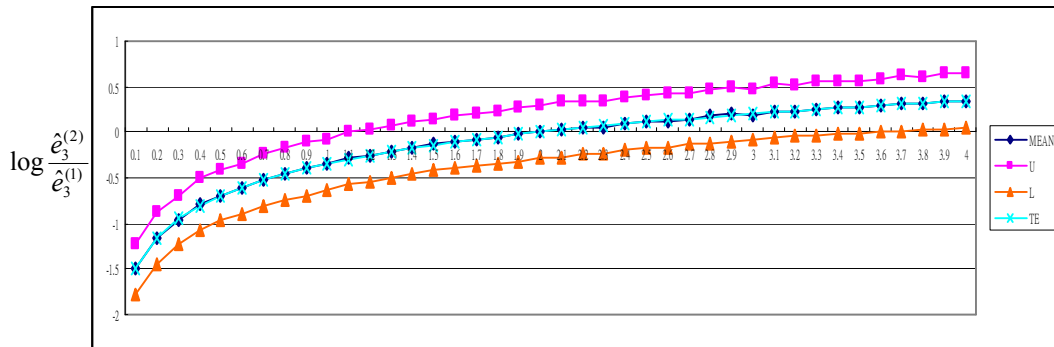
( $\sigma_3^2=1$ ， $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$ ， $\rho_1=0.1$ ， $\rho_2=0.1$ ， $\sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 3$ )



在95%的信心水準下，發現 $\sigma_1^2$ 的值在0.5~1.9這個區間外時，信賴區間的值不包含0。

圖 3-11：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=2, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 4)$$

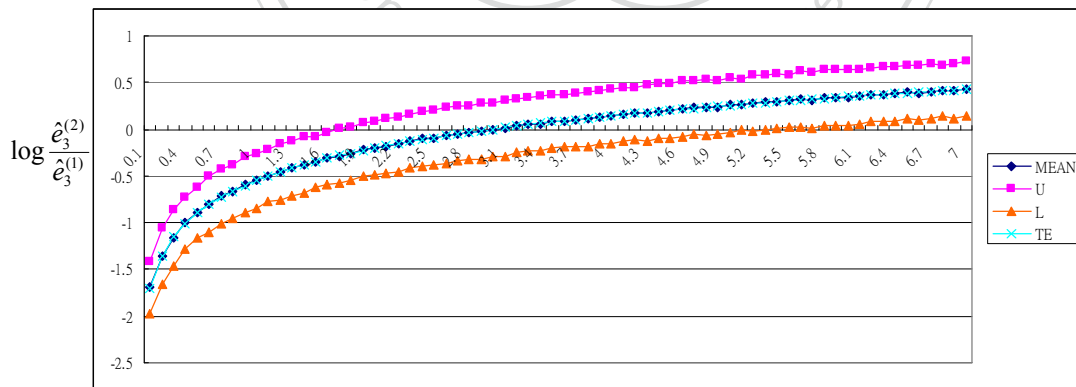


$\sigma_1^2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 1.1~3.7 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-12：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=3, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 7)$$

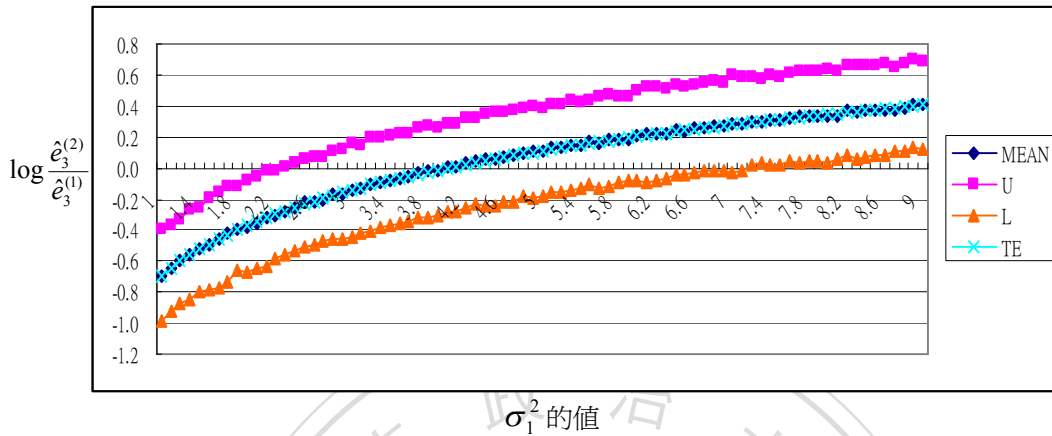


$\sigma_1^2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 1.6~5.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-13：不相容性的變化圖

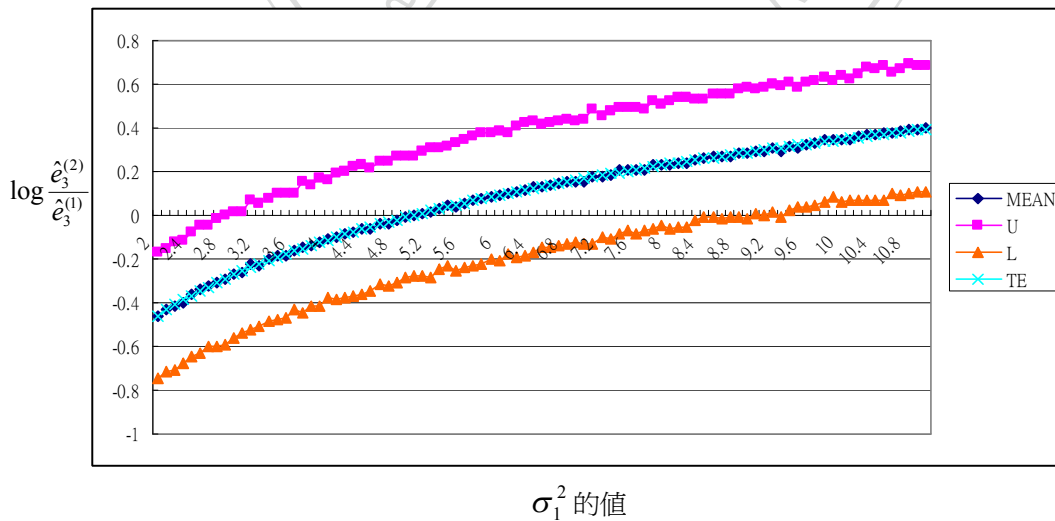
$$(\sigma_3^2=4, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=1, 1.1, \dots, 9)$$



在 95%的信心水準下，發現 $\sigma_1^2$ 的值在 2.2~7.2 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-14：不相容性的變化圖

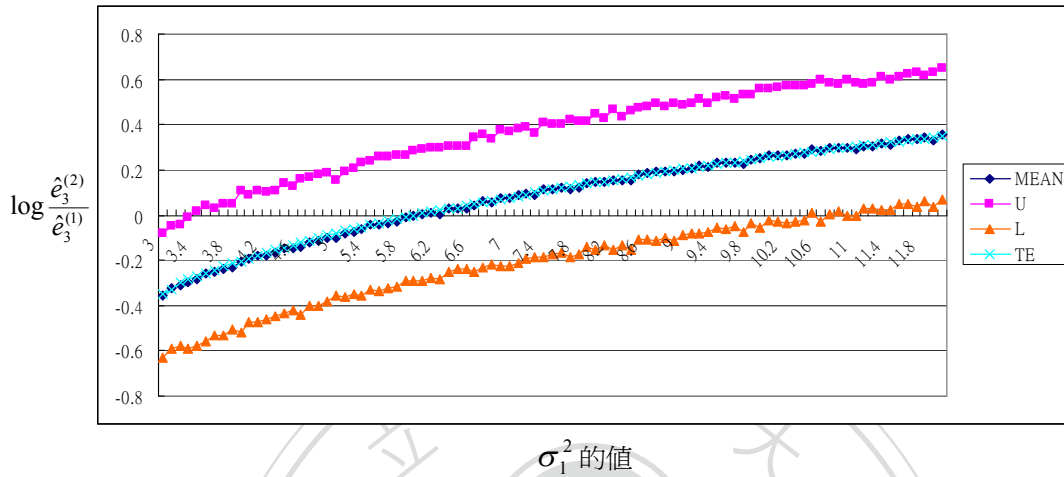
$$(\sigma_3^2=5, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=2, 2.1, \dots, 11)$$



在 95%的信心水準下，發現 $\sigma_1^2$ 的值在 2.8~9.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-15：不相容性的變化圖

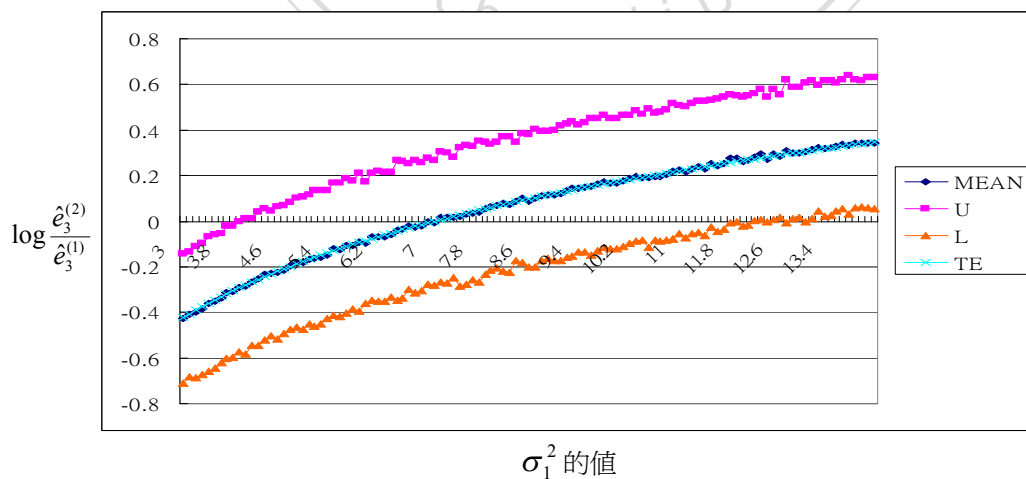
$$(\sigma_3^2=6, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=3, 3.1, \dots, 12)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 3.3~11.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-16：不相容性的變化圖

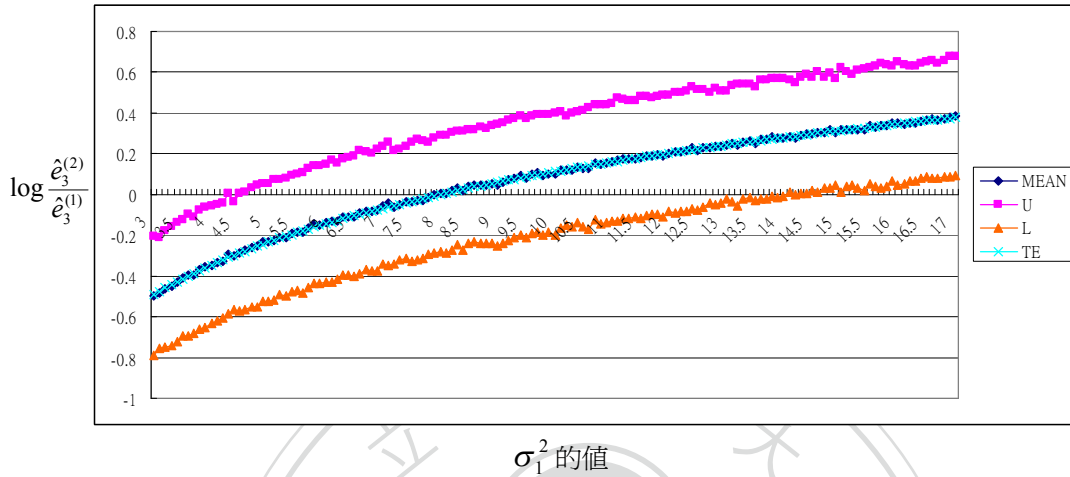
$$(\sigma_3^2=7, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=3, 3.1, \dots, 14)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 3.9~12.1 個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-17：不相容性的變化圖

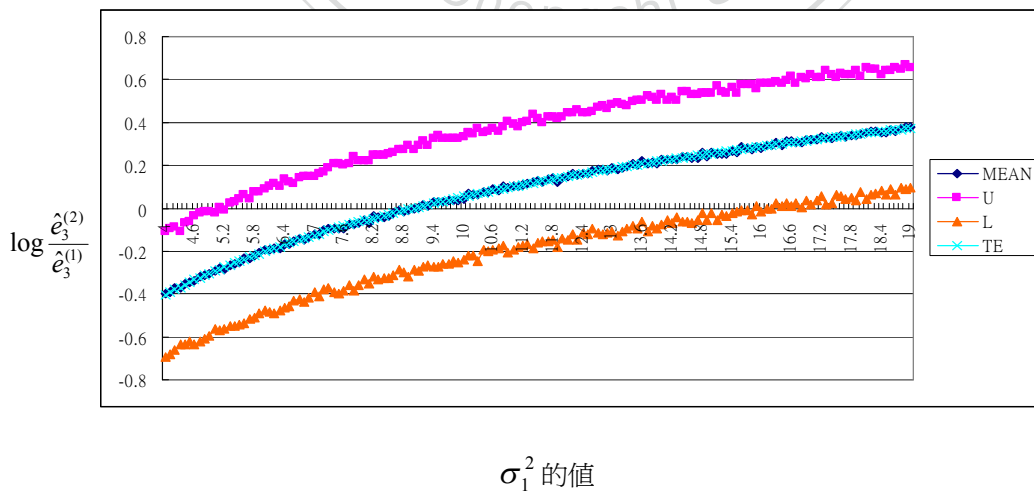
$$(\sigma_3^2=8, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=3, 3.1, \dots, 17)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 4.2~14.3 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-18：不相容性的變化圖

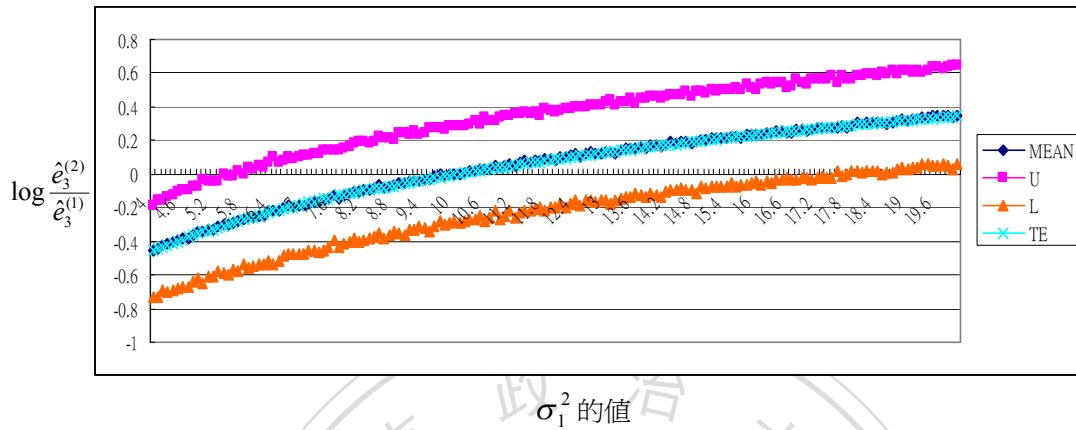
$$(\sigma_3^2=9, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=4, 4.1, \dots, 19)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 5.2~16.3 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-19：不相容性的變化圖

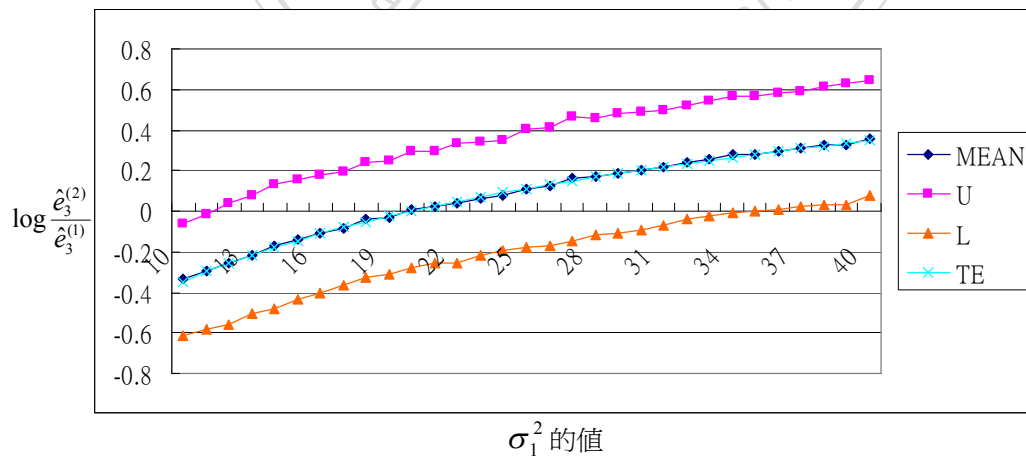
$$(\sigma_3^2=10, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=4, 4.1, \dots, 20)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 5.6~17.9 個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-20：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=20, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.1, \rho_2=0.1, \sigma_1^2=10, 10.1, \dots, 40)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 11~36 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

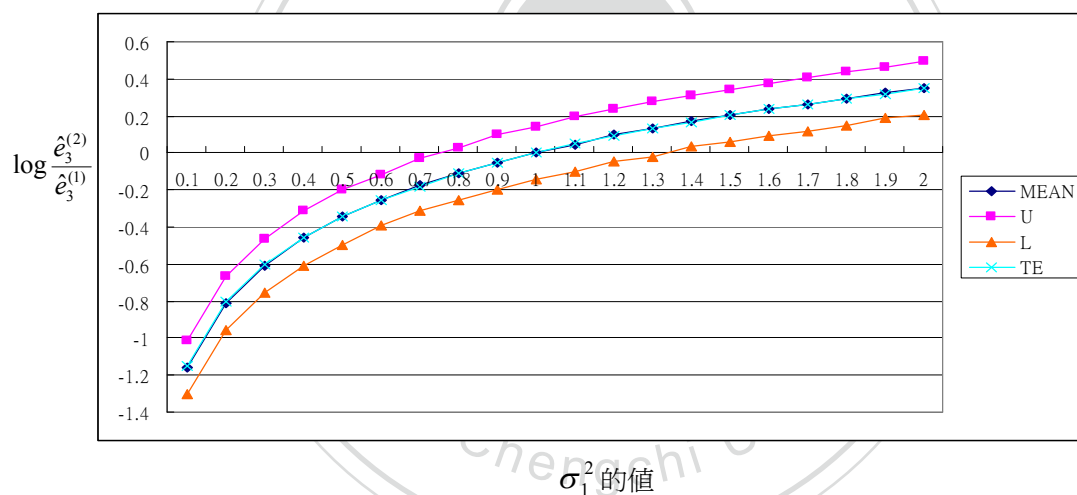
Case B-(2) :

固定  $\sigma_3^2=1, 2, \dots, 10$  ,  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$  ,  $\rho_1=\rho_2=0.2$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\sigma_1^2$  的區間變化，特別是當  $\sigma_1^2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即為可判別的  $\sigma_1^2$  值區間。

模擬結果如下：

圖 3-21：不相容性的變化圖

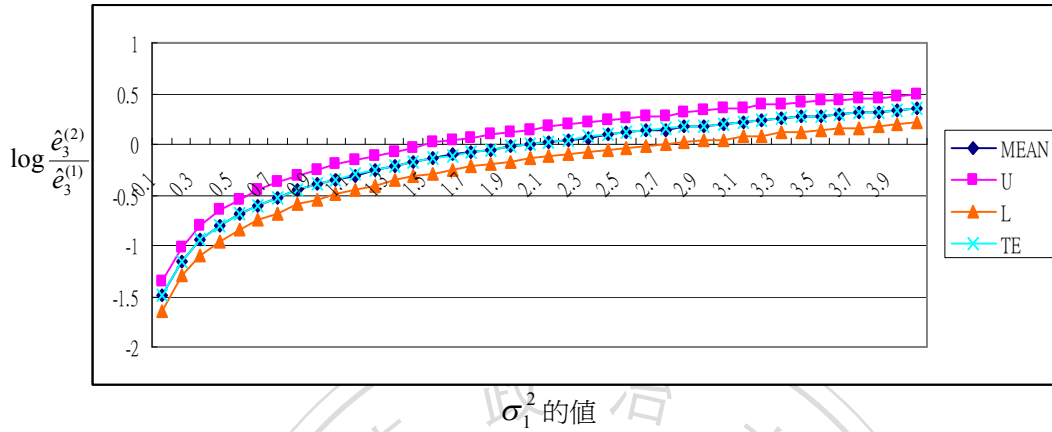
( $\sigma_3^2=1$  ,  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$  ,  $\rho_1=0.2$  ,  $\rho_2=0.2$  ,  $\sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 2$ )



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.7~1.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-22：不相容性的變化圖

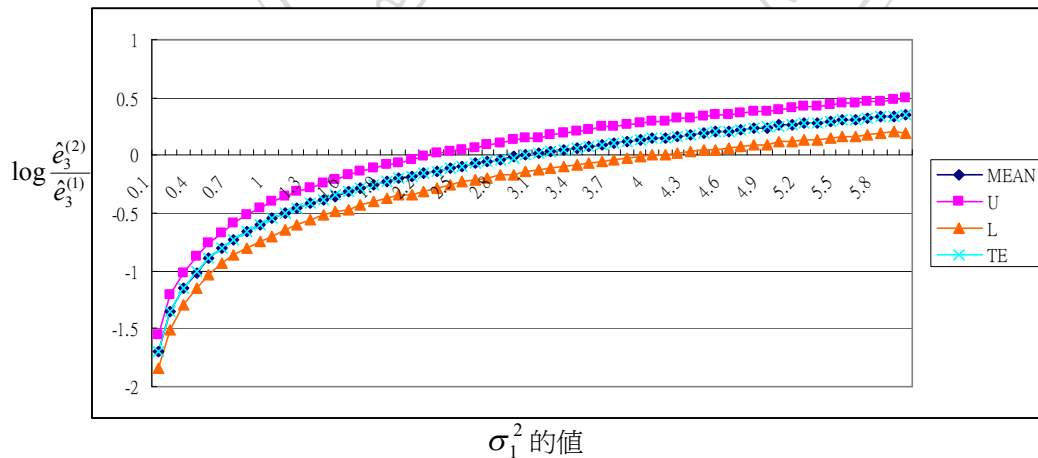
$$(\sigma_3^2=2, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 1.4~2.7 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-23：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=3, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 6)$$

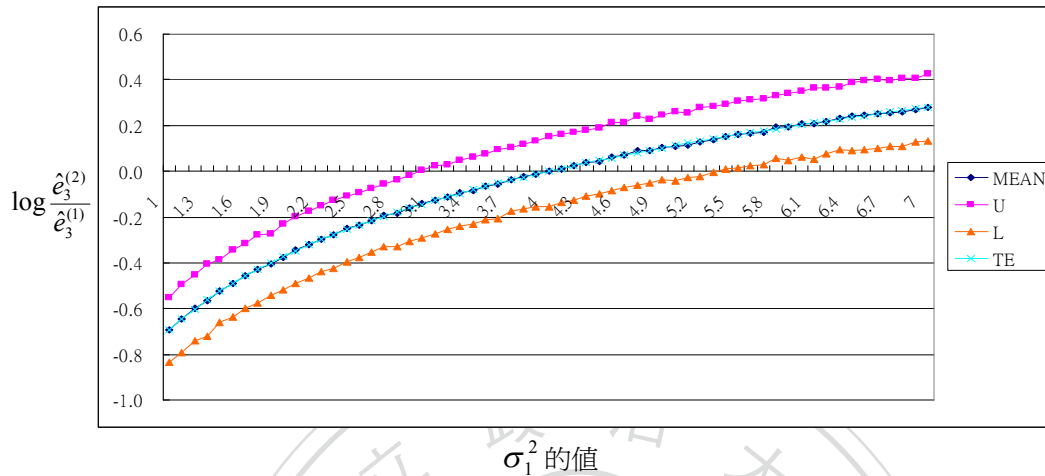


在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 2.2~4.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



圖 3-24：不相容性的變化圖

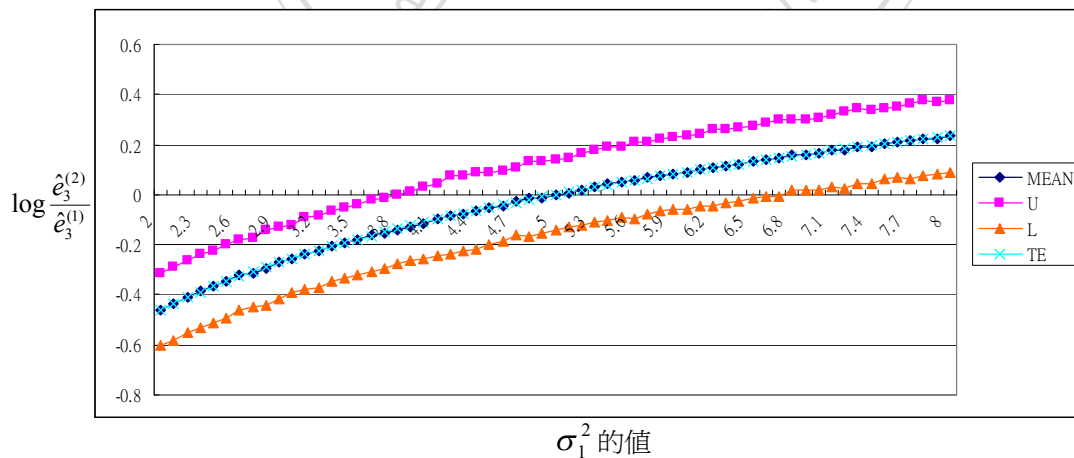
$$(\sigma_3^2=4, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2=1, 1.1, \dots, 7)$$



在 95%的信心水準下，發現 $\sigma_1^2$  的值在 2.9~5.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-25：不相容性的變化圖

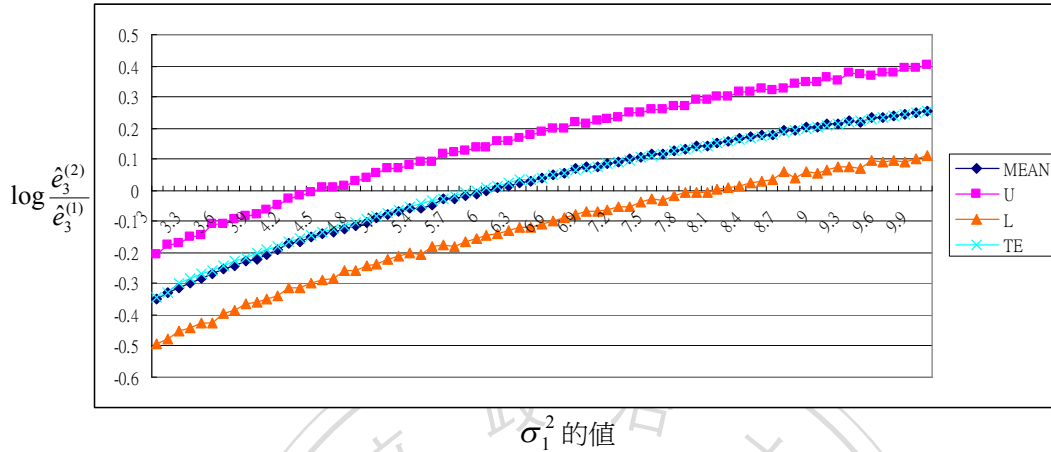
$$(\sigma_3^2=5, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2=2, 2.1, \dots, 8)$$



在 95%的信心水準下，發現 $\sigma_1^2$  的值在 3.7~6.8 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-26：不相容性的變化圖

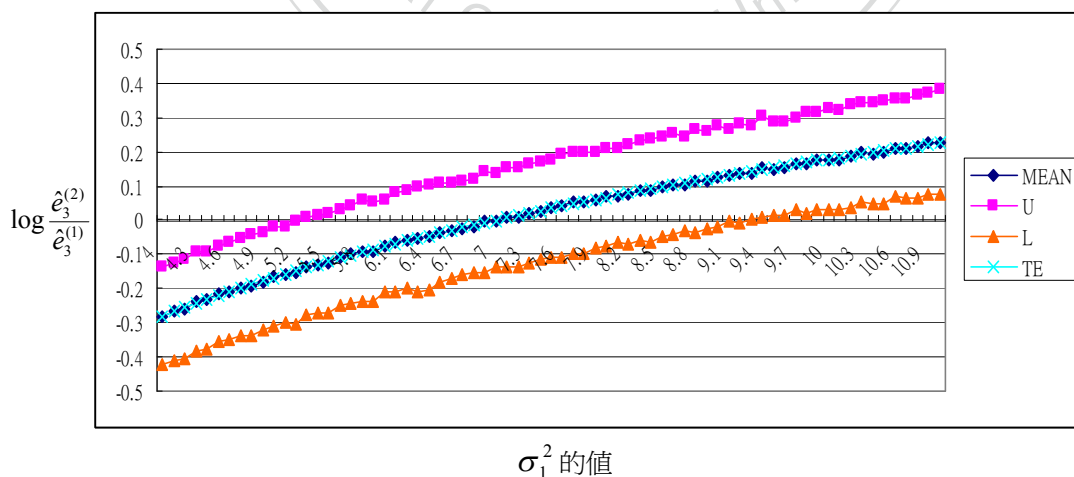
$$(\sigma_3^2=6, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2=3, 3.1, \dots, 10)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 4.4~8.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-27：不相容性的變化圖

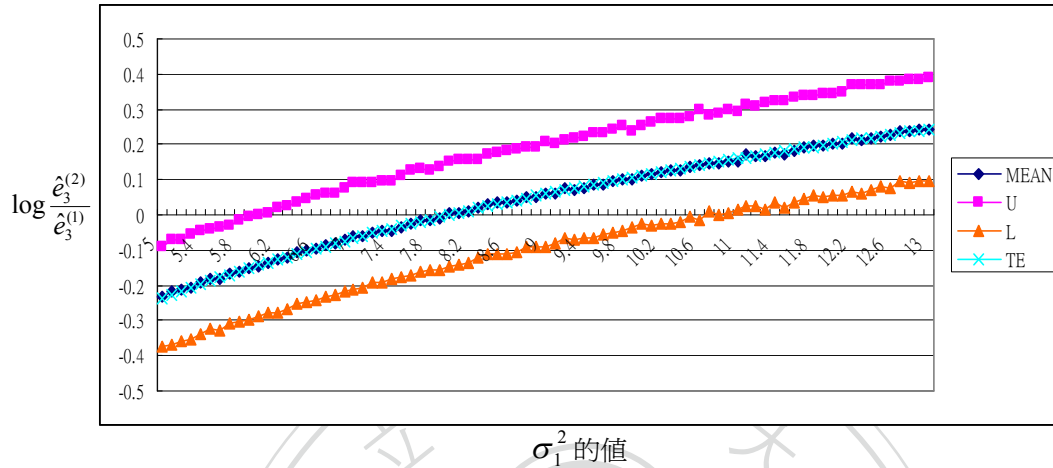
$$(\sigma_3^2=7, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2=4, 4.1, \dots, 11)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 5.2~9.3 個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-28：不相容性的變化圖

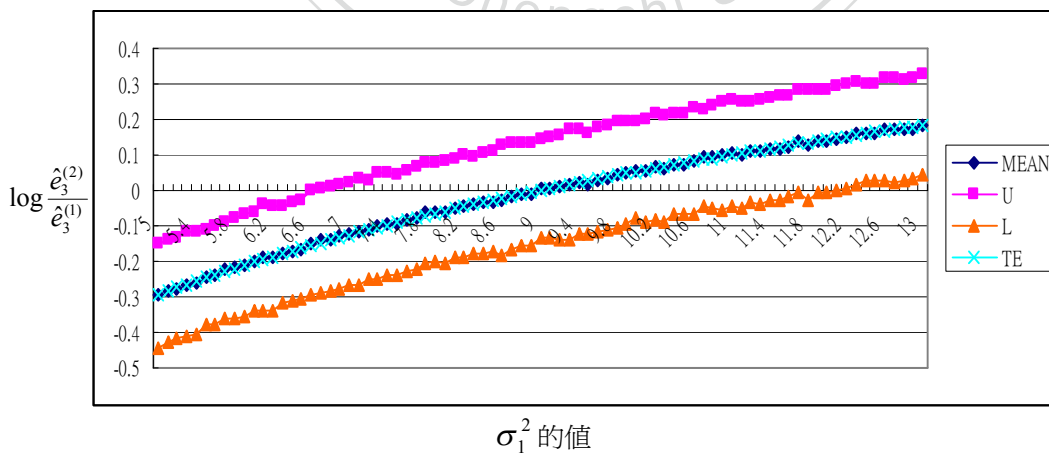
$$(\sigma_3^2=8, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2 = 5, 5.1, \dots, 13)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 6~10.9 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-29：不相容性的變化圖

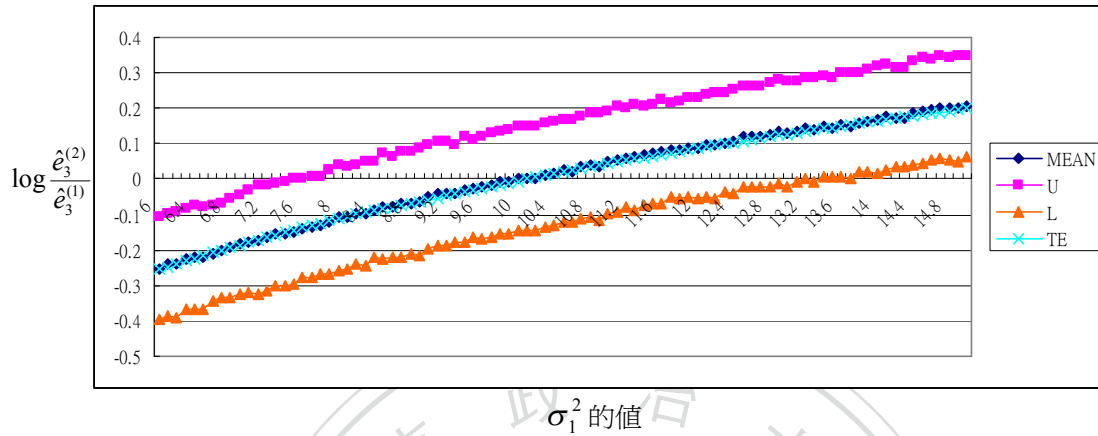
$$(\sigma_3^2=9, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2 = 5, 5.1, \dots, 13)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 6.6~12.2 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-30：不相容性的變化圖

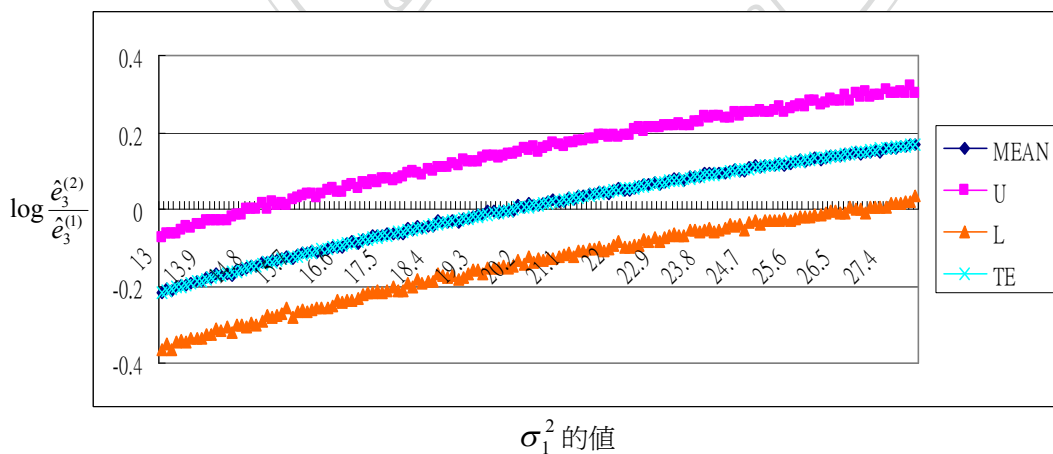
$$(\sigma_3^2=10, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2 = 6, 6.1, \dots, 15)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 7.4~13.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-31：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=20, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.2, \rho_2=0.2, \sigma_1^2 = 13, 13.1, \dots, 28)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 14.9~27.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

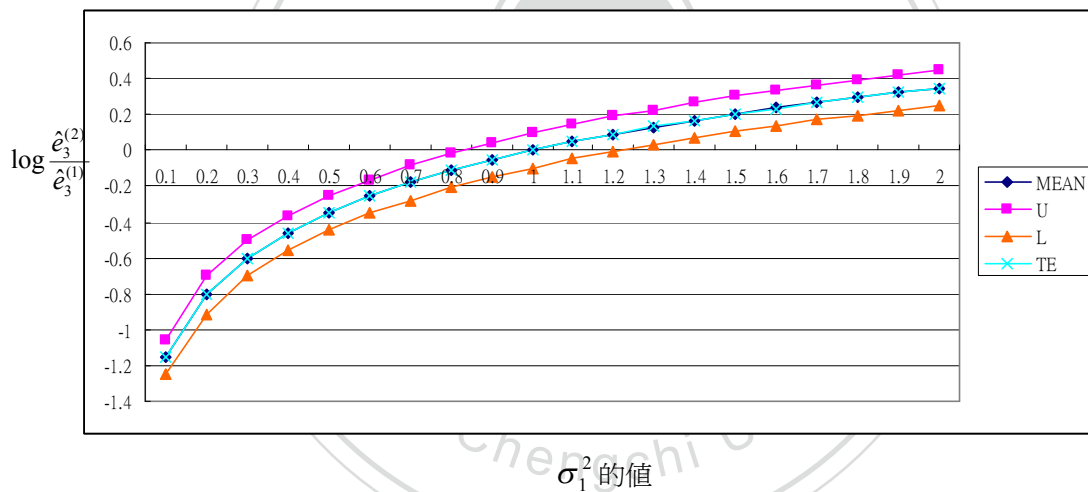
Case B-(3) :

固定  $\sigma_3^2=1, 2, \dots, 10$  ,  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$  ,  $\rho_1=\rho_2=0.3$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\sigma_1^2$  的區間變化，特別是當  $\sigma_1^2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即為可判別的  $\sigma_1^2$  值區間。

模擬結果如下：

圖 3-32：不相容性的變化圖

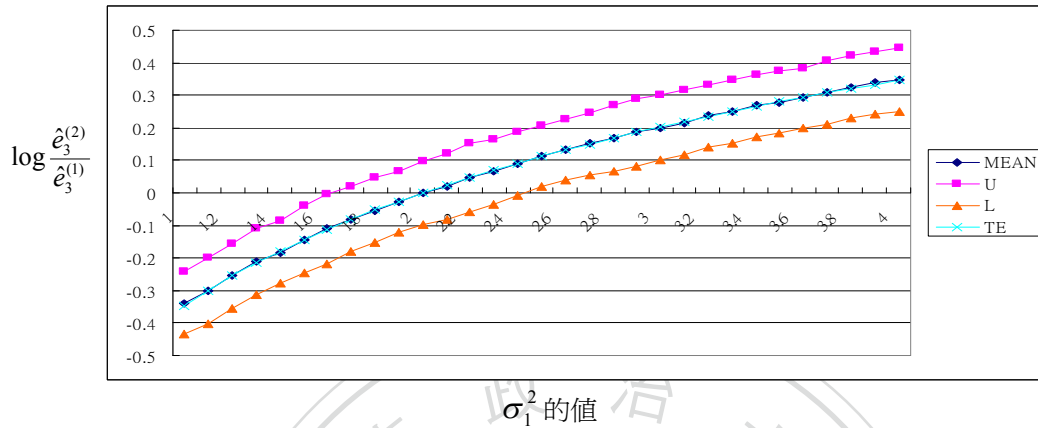
( $\sigma_3^2=1$  ,  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$  ,  $\rho_1=0.3$  ,  $\rho_2=0.3$  ,  $\sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 2$ )



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.8~1.3 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-33：不相容性的變化圖

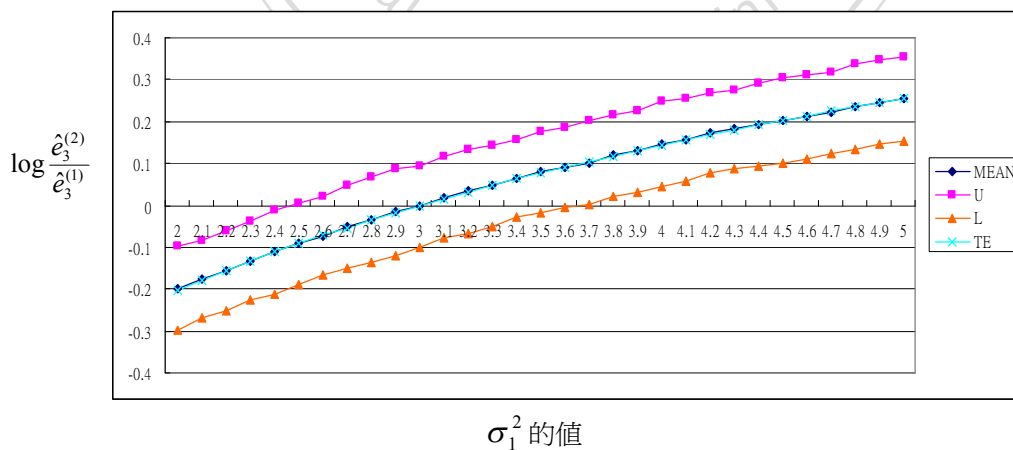
$$(\sigma_3^2=2, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2=1, 1.1, \dots, 4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 1.6~2.5 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-34：不相容性的變化圖

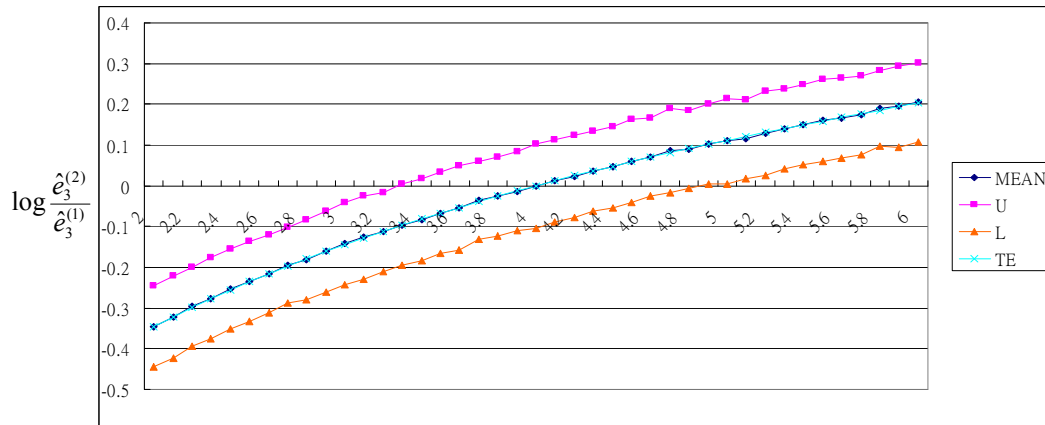
$$(\sigma_3^2=3, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2=2, 2.1, \dots, 5)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 2.4~3.7 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-35：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=4, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2=2, 2.1, \dots, 6)$$

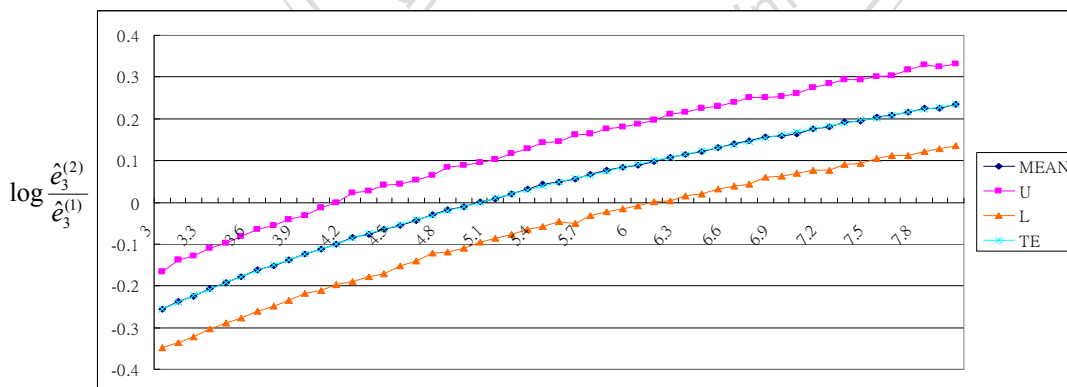


$\sigma_1^2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 3.2~4.9 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-36：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=5, \sigma_2^2=\sigma_4^2=1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2=3, 3.1, \dots, 8)$$

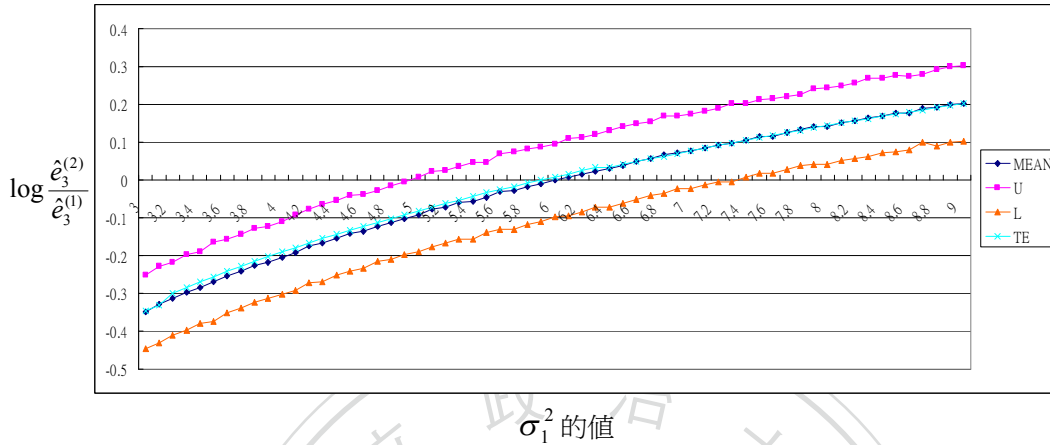


$\sigma_1^2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 4.1~6.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-37：不相容性的變化圖

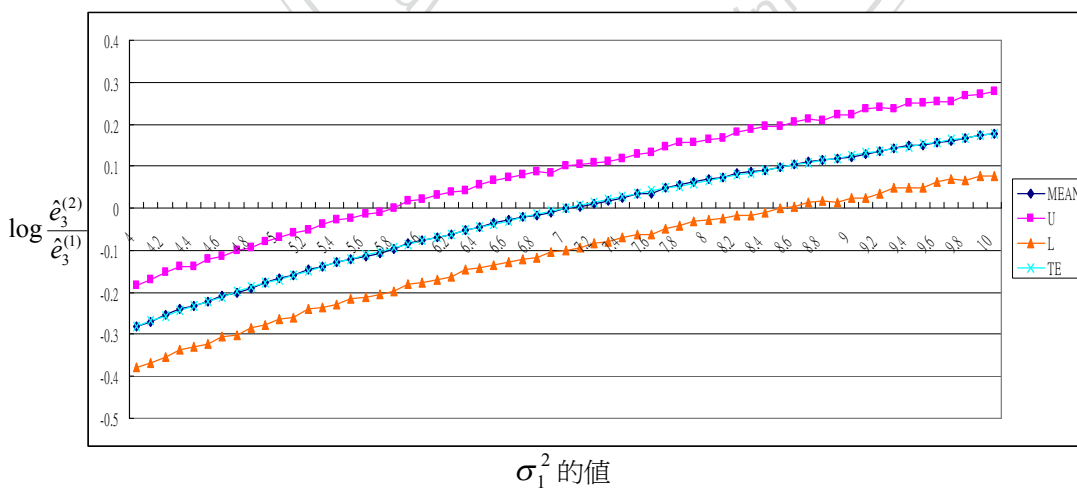
$$(\sigma_3^2=6, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2 = 3, 3.1, \dots, 9)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 4.9~7.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-38：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=7, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2 = 4, 4.1, \dots, 10)$$

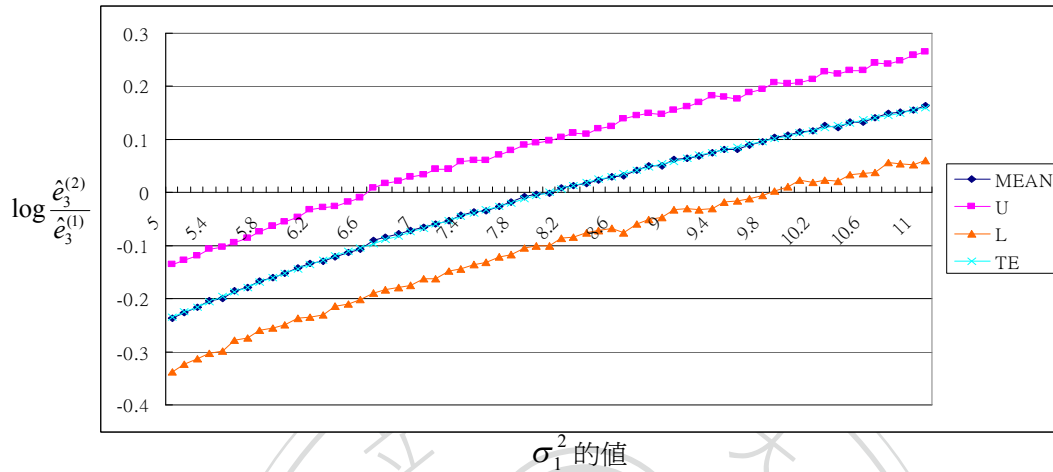


在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 5.7~8.5 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



圖 3-39：不相容性的變化圖

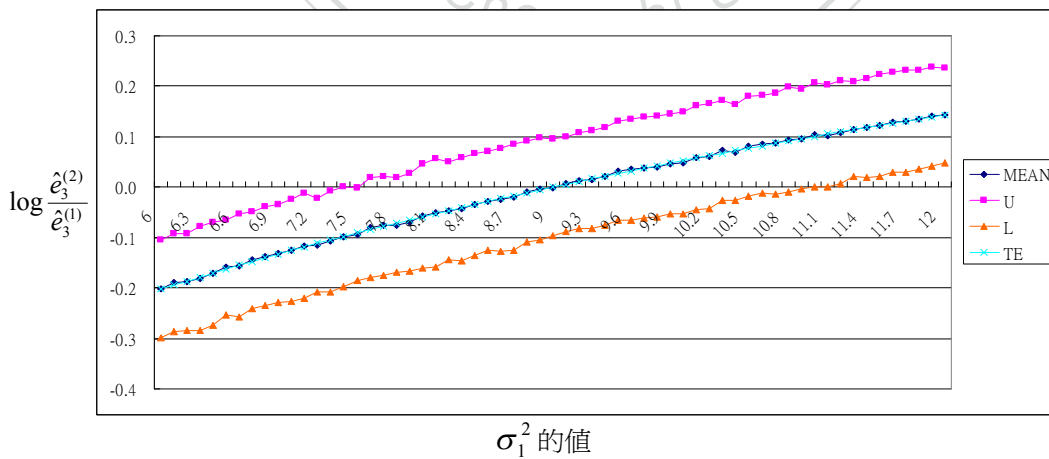
$$(\sigma_3^2=8, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2 = 6, 6.1, \dots, 12)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 6.5~9.8 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-40：不相容性的變化圖

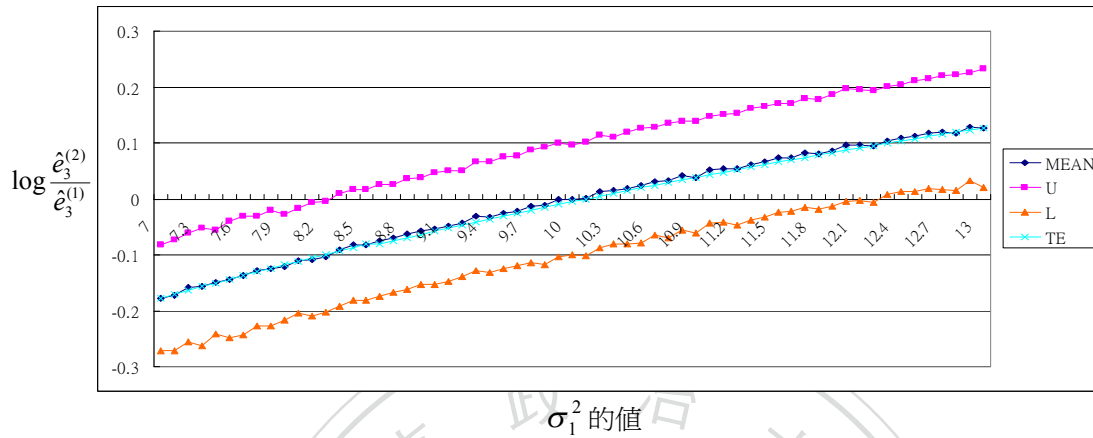
$$(\sigma_3^2=9, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2 = 6, 6.1, \dots, 12)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 7.5~11.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-41：不相容性的變化圖

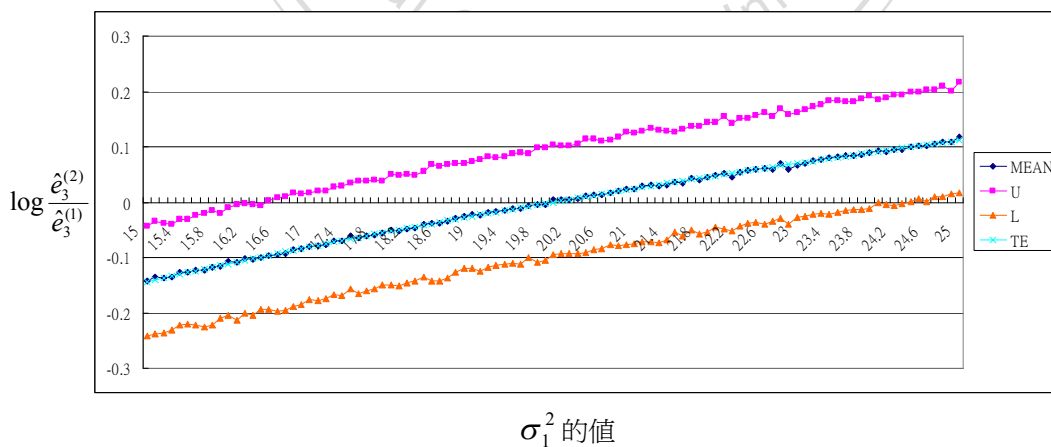
$$(\sigma_3^2=10, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2 = 7, 7.1, \dots, 13)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 8.2~12.3 個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 3-42：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2=20, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1=0.3, \rho_2=0.3, \sigma_1^2 = 15, 15.1, \dots, 25)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 16.4~24.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

將模擬資料的結果圖 3-10~圖 3-42，進一步整理可得下表(3-2)：

表 3-2：假設  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ， $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$ ，或  $\rho_1 = \rho_2 = 0.2$ ，或  $\rho_1 = \rho_2 = 0.3$ ，

$\sigma_3^2$  值變動下，對應的不可判別及可判別的  $\sigma_1^2$  值區間

| $\sigma_3^2$<br>值 | $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$        |                                  | $\rho_1 = \rho_2 = 0.2$        |                                   | $\rho_1 = \rho_2 = 0.3$       |                                   |
|-------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
|                   | 不可判別<br>的 $\sigma_1^2$ 值<br>區間 | 可判別的 $\sigma_1^2$ 值區間            | 不可判別<br>的 $\sigma_1^2$ 值<br>區間 | 可判別的 $\sigma_1^2$ 值區間             | 不可判<br>別的 $\sigma_1^2$<br>值區間 | 可判別的 $\sigma_1^2$ 值區間             |
| 1                 | 0.5~1.9                        | $(0.1, 0.5) \cup (1.9, \infty)$  | 0.7~1.4                        | $(0.1, 0.7) \cup (1.4, \infty)$   | 0.8~1.3                       | $(0.1, 0.8) \cup (1.3, \infty)$   |
| 2                 | 1.1~3.7                        | $(0.1, 1.1) \cup (3.7, \infty)$  | 1.4~2.7                        | $(0.1, 1.4) \cup (2.7, \infty)$   | 1.6~2.5                       | $(0.1, 1.6) \cup (2.5, \infty)$   |
| 3                 | 1.6~5.4                        | $(0.1, 1.6) \cup (5.4, \infty)$  | 2.2~4.1                        | $(0.1, 2.2) \cup (4.1, \infty)$   | 2.4~3.7                       | $(0.1, 2.4) \cup (3.7, \infty)$   |
| 4                 | 2.2~7.2                        | $(0.1, 2.2) \cup (7.2, \infty)$  | 2.9~5.4                        | $(0.1, 2.9) \cup (5.4, \infty)$   | 3.2~4.9                       | $(0.1, 3.2) \cup (4.9, \infty)$   |
| 5                 | 2.8~9.4                        | $(0.1, 2.8) \cup (9.4, \infty)$  | 3.7~6.8                        | $(0.1, 3.7) \cup (6.8, \infty)$   | 4.1~6.1                       | $(0.1, 4.1) \cup (6.1, \infty)$   |
| 6                 | 3.3~11.1                       | $(0.1, 3.3) \cup (11.1, \infty)$ | 4.4~8.1                        | $(0.1, 4.4) \cup (8.1, \infty)$   | 4.9~7.4                       | $(0.1, 4.9) \cup (7.4, \infty)$   |
| 7                 | 3.9~12.1                       | $(0.1, 3.9) \cup (12.1, \infty)$ | 5.2~9.3                        | $(0.1, 5.2) \cup (9.3, \infty)$   | 5.7~8.5                       | $(0.1, 5.7) \cup (8.5, \infty)$   |
| 8                 | 4.2~14.3                       | $(0.1, 4.2) \cup (14.3, \infty)$ | 6~10.9                         | $(0.1, 6) \cup (10.9, \infty)$    | 6.5~9.8                       | $(0.1, 6.5) \cup (9.8, \infty)$   |
| 9                 | 5.2~16.3                       | $(0.1, 5.2) \cup (16.3, \infty)$ | 6.6~12.2                       | $(0.1, 6.6) \cup (12.2, \infty)$  | 7.5~11.1                      | $(0.1, 7.5) \cup (11.1, \infty)$  |
| 10                | 5.6~17.9                       | $(0.1, 5.6) \cup (17.9, \infty)$ | 7.4~13.4                       | $(0.1, 7.4) \cup (13.4, \infty)$  | 8.2~12.3                      | $(0.1, 8.2) \cup (12.3, \infty)$  |
| 20                | 11~36                          | $(0.1, 11) \cup (36, \infty)$    | 14.9~27.1                      | $(0.1, 14.9) \cup (27.1, \infty)$ | 16.4~24.4                     | $(0.1, 16.4) \cup (24.4, \infty)$ |

根據模擬結果可以發現，當  $\sigma_3^2$  的值增加時，不論  $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$  或  $\rho_1 = \rho_2 = 0.2$ ，或  $\rho_1 = \rho_2 = 0.3$ ，由本表及其他更進一步的模擬(見附錄 D 的表 D-1)，不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間都涵蓋於  $(\frac{\sigma_3^2}{2}, 2\sigma_3^2)$ ，且  $\rho_1 = \rho_2$  值愈大，對應的不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間愈小，而且當  $\rho_1 = \rho_2$  的值放大 k 倍時，對應的不可判別的  $\sigma_1^2$  值的

區間寬度縮小約  $\frac{1}{k}$  倍(見附錄 D 的表 D-1)，我們可得如下的結論：當  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ ，且  $\rho_1 = \rho_2$  的絕對值為  $0.1 \times k$ ， $k=1, 2, \dots, 9$ ，則當  $\sigma_3^2$  由 1 增加到 20 時，不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間，不會超過  $(\frac{\sigma_3^2}{2}, 2\sigma_3^2)$  的區間，且對應的不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間寬度約為  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 0.1$  時所對應不可判別的  $\sigma_1^2$  值區間寬度的  $\frac{1}{k}$  倍。



#### 4. 結論

當給定二個條件分配的形式為常態 (normal) 時，我們推得這兩個條件常態分配是相容的充要條件。若對兩個條件常態分配的變異數進一步限制為正的常數，不僅相容的充要條件可進一步簡化，我們亦推得對應的聯合機率密度函數為常態，且母數也很容易得到。我們亦利用電腦資料模擬的方式，提供兩個不同聯合常態分配下所分別得到的兩組不同樣本，相關結論如下：

- (1) 當兩個母體所對應的兩個隨機變數的變異數值分別相等 (即  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2$  及  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ )，而變異數值介於 1 到 10 之間，且當某一母體的相關係數至少為 0.04 (例如  $\rho_1 \geq 0.04$ ) 時，則不可判別的另一母體的相關係數 (即  $\rho_2$ ) 值，亦即簡化的 (或最差的) 區間為第一母體相關係數值  $\pm 0.04$ ，亦即  $(\rho_1 - 0.04, \rho_1 + 0.04)$ 。
- (2) 當兩母體所對應的某一隨機變數 (例如 Y) 的變異數相等時 (即  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ )，而這兩母體的相關係數的值相等且絕對值為 0.1 的整數倍數 (倍數  $k=1, 2, \dots, 9$ )，且當其中一母體之另一隨機變數 (即 X) 的變異數 (例  $\sigma_3^2$ ) 由 1 增加到 20 時，則另一母體所對應相同的隨機變數 (即 X) 的變異數 (即  $\sigma_1^2$ ) 之不可判別值區間，會包含在  $(\frac{\sigma_3^2}{2}, 2\sigma_3^2)$  區間，且對應的不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間寬度約為  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 0.1$  時所對應不可判別的  $\sigma_1^2$  值區間寬度的  $\frac{1}{k}$  倍。

## 附錄 A：資料模擬之計算式

在  $X|Y=y$  的條件下產生  $n$  筆資料： $(x_1^{(1)} | y_1^{(1)}), \dots, (x_n^{(1)} | y_n^{(1)})$ ，因為

$$X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2 + e_3 y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right), \quad x = \hat{\alpha}' + \hat{\beta}'y + \varepsilon', \varepsilon' \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \hat{d}_1 = \frac{n-2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}'y_i)^2}, \quad \hat{d}_2 = \hat{\alpha}' \cdot \frac{n-2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}'y_i)^2}$$

$$\hat{e}_3^{(1)} = \hat{\beta}' \cdot \frac{n-2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}'y_i)^2}, \quad \text{其中}$$

$$\hat{\alpha}' = \bar{x} - \hat{\beta}'\bar{y} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2}, \quad \hat{\beta}' = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

然後在  $Y|X=x$  的條件下產生  $m$  筆資料： $(x_1^{(2)} | y_1^{(2)}), \dots, (x_m^{(2)} | y_m^{(2)})$ ，因為

$$Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4 + e_3 x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right), \quad y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \hat{d}_3 = \frac{m-2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2}, \quad \hat{d}_4 = \hat{\alpha} \cdot \frac{m-2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2}$$

$$\hat{e}_3^{(2)} = \hat{\beta} \cdot \frac{m-2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2}, \quad \text{其中}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{(\sum_{i=1}^m y_i)(\sum_{i=1}^m x_i)^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)(\sum_{i=1}^m x_i y_i)}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}$$

因此，從第一組  $m$  筆資料中得到的  $\hat{e}_3^{(1)}$  與從第二組  $n$  筆資料中得到的  $\hat{e}_3^{(2)}$  通常會有所不同。

■

## 附錄 B：變數線性轉換不影響相容性之證明

### 【定理 B.1】

$$\text{若兩個條件機率滿足引理[2.1]之條件} \left\{ \begin{array}{l} X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2+e_3y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right) \\ Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4+e_3x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right), \text{此時兩條件} \\ e_3^2 - d_1d_3 < 0 \end{array} \right.$$

機率具相容性。若兩個條件機率經過相同的線性轉換則新的條件機率仍然滿足相容性，亦即  $aX+b|Y=y$  及  $aY+b|X=x$  仍滿足相容性。

### 【證明】：

二元常態分配的線性轉換為

$$X|Y=y \sim N\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$aX+b|Y=y \sim N\left(a\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)\right) + b, a^2\sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$\text{令 } Y' = aY + b \Leftrightarrow Y = \frac{Y' - b}{a}$$

$$aX+b|Y'=y' \rightarrow aX+b|Y = \frac{y' - b}{a} \sim N\left(a\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{y' - b}{a} - \mu_2\right)\right) + b, a^2\sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$\rightarrow aX+b|Y = \frac{y' - b}{a} \sim N\left(a\mu_1 + \rho \frac{a\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{y' - b}{a} - \mu_2\right) + b, a^2\sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

由前面的研究我們知道當二個條件機率滿足相容性時，形式為

$$X|Y=y \sim N\left(\frac{d_2+e_3y}{d_1}, \frac{1}{d_1}\right), Y|X=x \sim N\left(\frac{d_4+e_3x}{d_3}, \frac{1}{d_3}\right),$$

$$\text{並且滿足 } e_3^2 - d_1d_3 < 0 \text{ (其中 } e_3^2 - d_1d_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{e_3}{d_1} \cdot \frac{e_3}{d_3} < 1)$$

由線性轉換的性質

$$aX + b | aY + b \sim N(a\mu(\frac{y' - b}{a}) + b, a^2\sigma^2(\frac{y' - b}{a}))$$

$$aY + b | aX + b \sim N(a\mu(\frac{x' - b}{a}) + b, a^2\sigma^2(\frac{x' - b}{a}))$$

可轉化為

$$a_1X + b_1 | a_2Y + b_2 \sim N(a_1(\frac{d_2}{d_1} + \frac{e_3}{d_1}(\frac{y' - b}{a_2}) + b_1, \frac{a_1^2}{d_1}))$$

$$a_2Y + b_2 | a_1X + b_1 \sim N(a_2(\frac{d_4}{d_3} + \frac{e_3}{d_3}(\frac{x' - b}{a_1}) + b_2, \frac{a_2^2}{d_3}))$$

$$\Rightarrow a_1X + b_1 | a_2Y + b_2 \sim N(a_1(\frac{d'_2}{d'_1} + \frac{e'_3}{d'_1}y' + b_1, \frac{1}{d'_1}))$$

$$a_2Y + b_2 | a_1X + b_1 \sim N(a_2(\frac{d'_4}{d'_3} + \frac{e'_3}{d'_3}x' + b_2, \frac{1}{d'_3})), \text{發現轉換後亦符合相容的形式,}$$

但須再進一步檢查：1. 兩式中的  $e'_3$  是否相等？2. 是否滿足  $\frac{e'_3}{d'_1} \cdot \frac{e'_3}{d'_3} < 1$ ？

$$1. y' \text{ 的係數為 } \frac{e'_3}{d'_1}, e'_3 = \frac{e_3}{d'_1} \cdot d'_1 = \frac{a_1 e_3}{a_2 d_1} \cdot \frac{d_1}{a_1^2} = \frac{e_3}{a_1 a_2}$$

$$x' \text{ 的係數為 } \frac{e'_3}{d'_3}, e'_3 = \frac{e_3}{d'_3} \cdot d'_3 = \frac{a_2 e_3}{a_1 d_3} \cdot \frac{d_3}{a_2^2} = \frac{e_3}{a_1 a_2}$$

因此兩式中的  $e'_3$  是相等的。

$$2. \frac{e'_3}{d'_1} \cdot \frac{e'_3}{d'_3} = \frac{\frac{e_3^2}{a_1^2 a_2^2}}{\frac{d_1}{a_1^2} \cdot \frac{d_3}{a_2^2}} = \frac{e_3^2}{d_1 d_3} < 1 \Leftrightarrow e_3^2 < d_1 d_3, \text{即 } \frac{e'_3}{d'_1} \cdot \frac{e'_3}{d'_3} < 1.$$

得證 ■



附錄 C：固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$  及  $\rho_1$ ，且當  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$  的值改變時，觀察不可判

### 別的 $\rho_2$ 值的區間變化圖

除第 3 節 Case A 中討論的：當  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ，

$\rho_1 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.07, 0.05, 0.04, 0.03$  時， $\rho_2$  的區間變化外，尚有下列情形：

固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ， $\rho_1 = 0.1$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

同樣的方式，在固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$  的情形下， $\rho_1$  的值分別為 0.3、0.5、0.7、0.9、0.07、0.05、0.04、0.03 時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

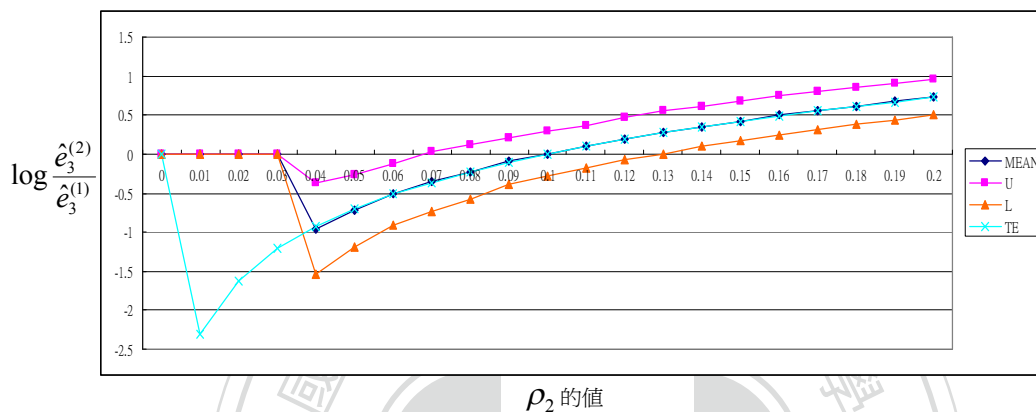
模擬結果如下：

(1) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ,  $\rho_1 = 0.1$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信

賴區間下, 觀察  $\rho_2$  的區間變化, 特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-1：不相容性的變化圖

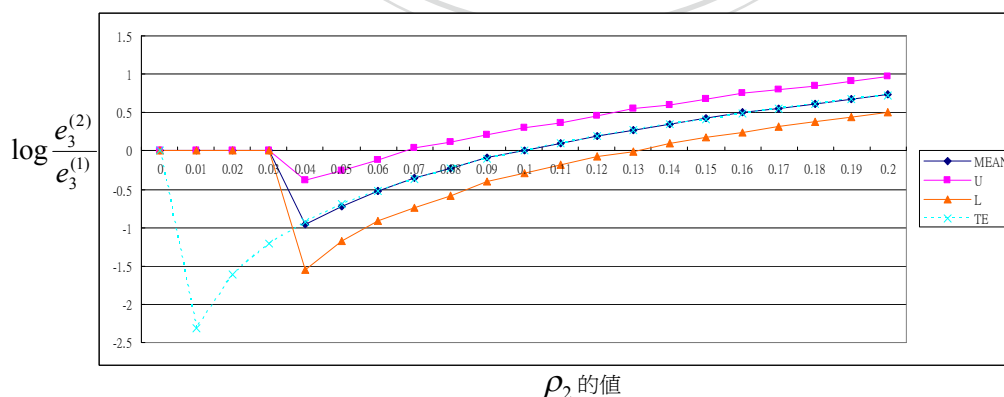
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 0 \sim 0.2$ )



在 95% 的信心水準下, 發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時, 信賴區間的值不包含 0。

圖 C-2：不相容性的變化圖

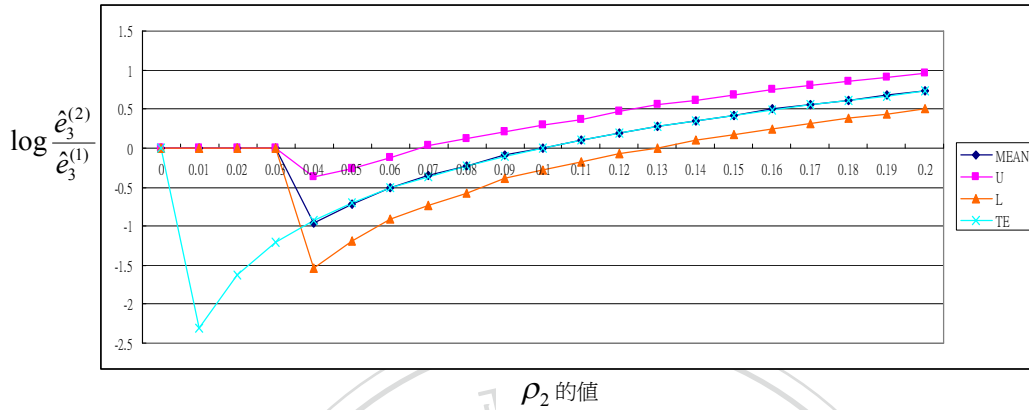
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 3$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 0 \sim 0.2$ )



在 95% 的信心水準下, 發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時, 信賴區間的值不包含 0。

圖 C-3：不相容性的變化圖

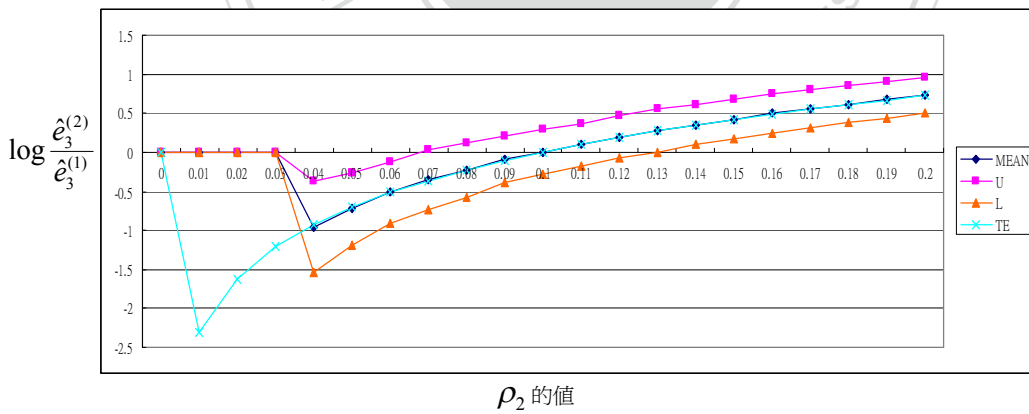
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-4：不相容性的變化圖

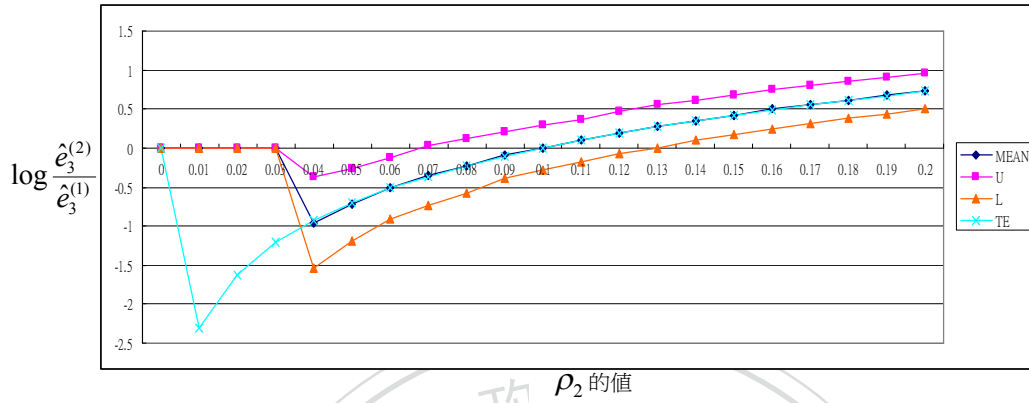
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-5：不相容性的變化圖

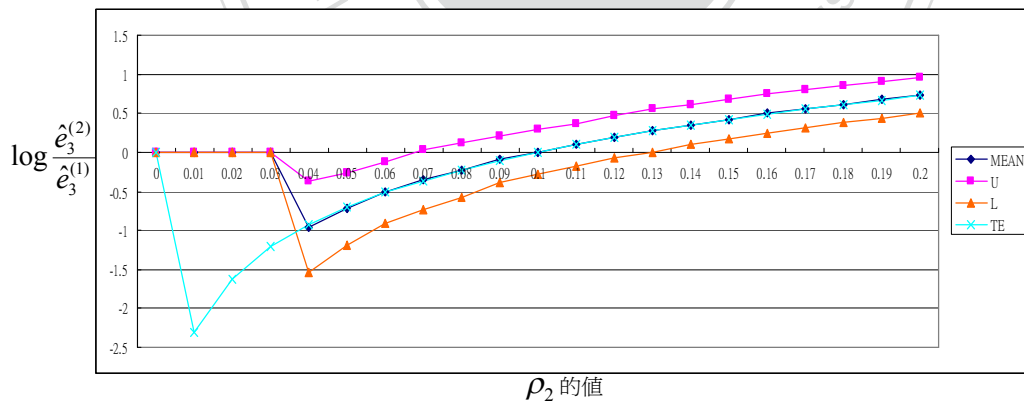
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-6：不相容性的變化圖

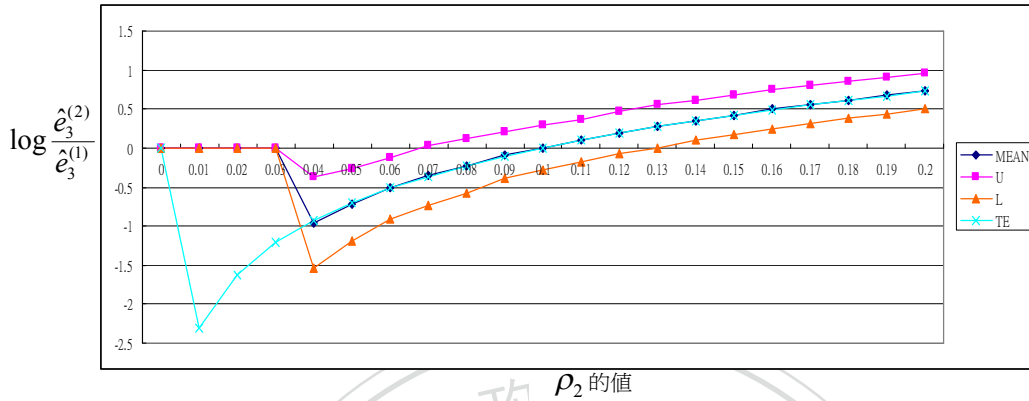
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-7：不相容性的變化圖

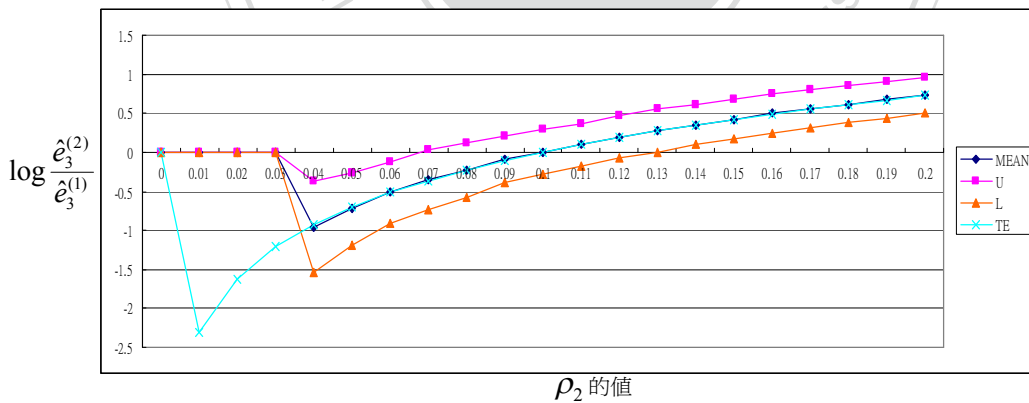
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 8, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-8：不相容性的變化圖

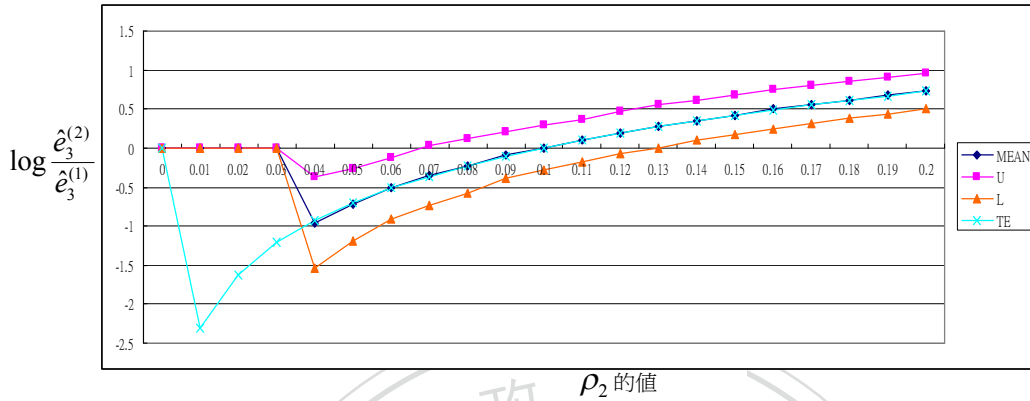
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 9, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-9：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 10, \rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0 \sim 0.2)$$

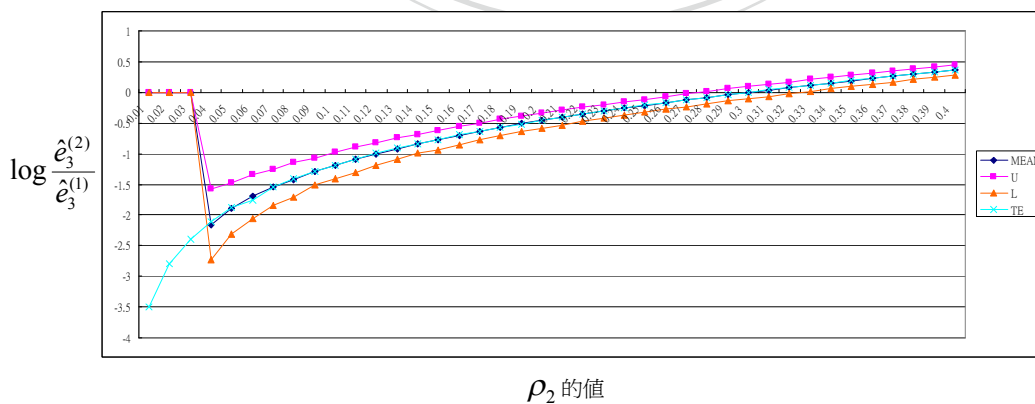


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.07~0.13 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(2) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10, \rho_1 = 0.3$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-10：不相容性的變化圖

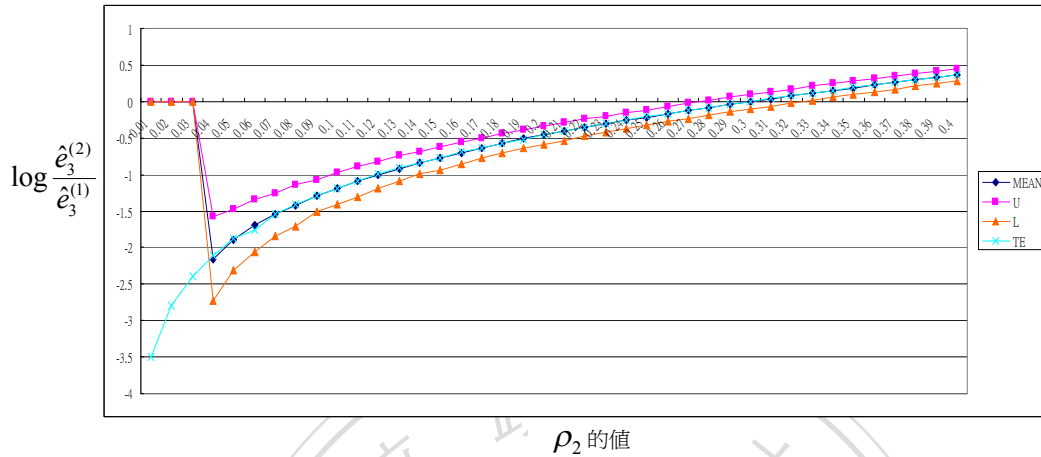
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-11：不相容性的變化圖

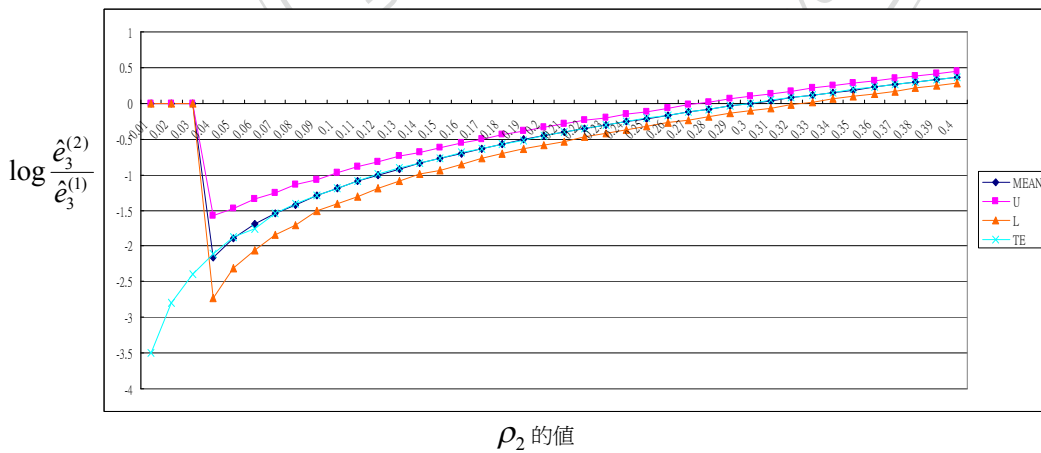
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 3, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-12：不相容性的變化圖

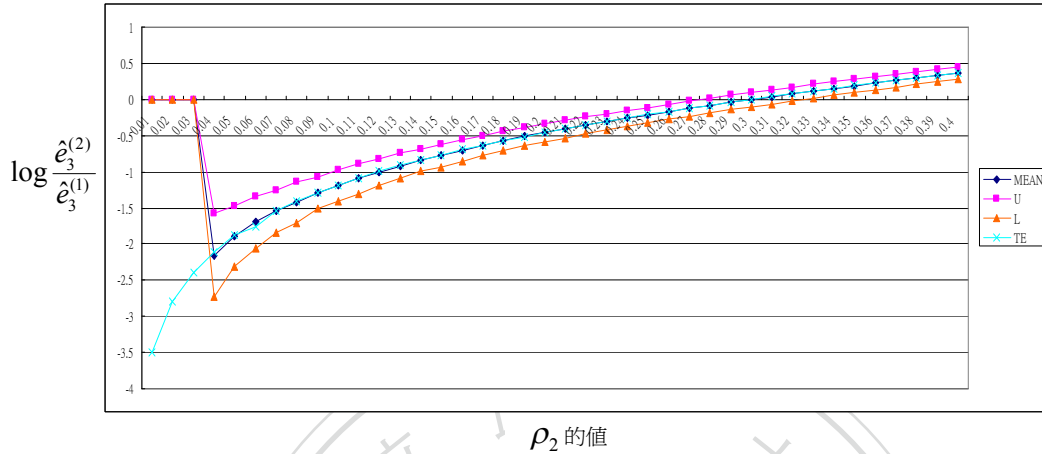
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-13：不相容性的變化圖

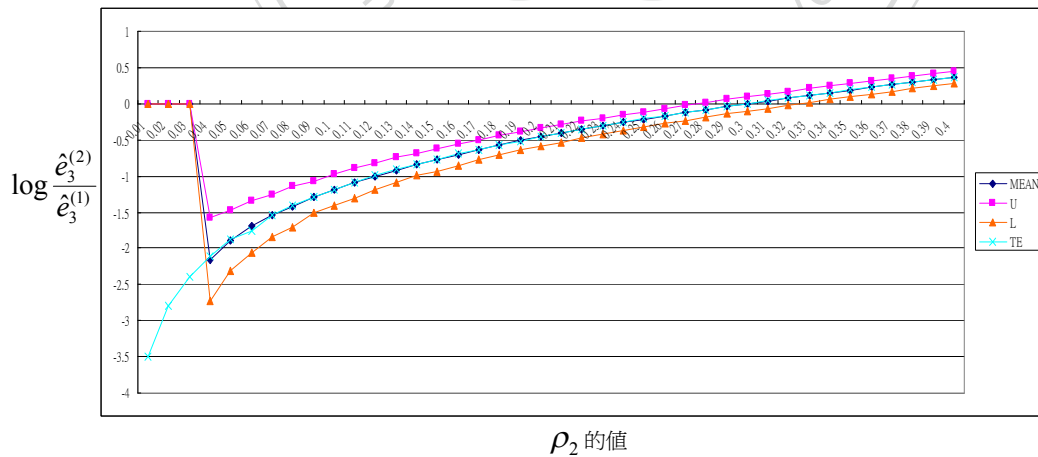
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-14：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$

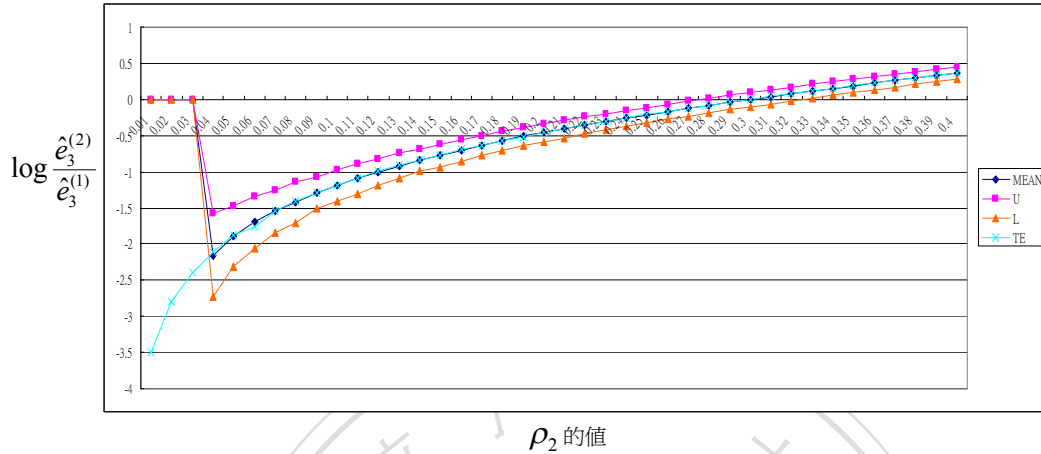


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



圖 C-15：不相容性的變化圖

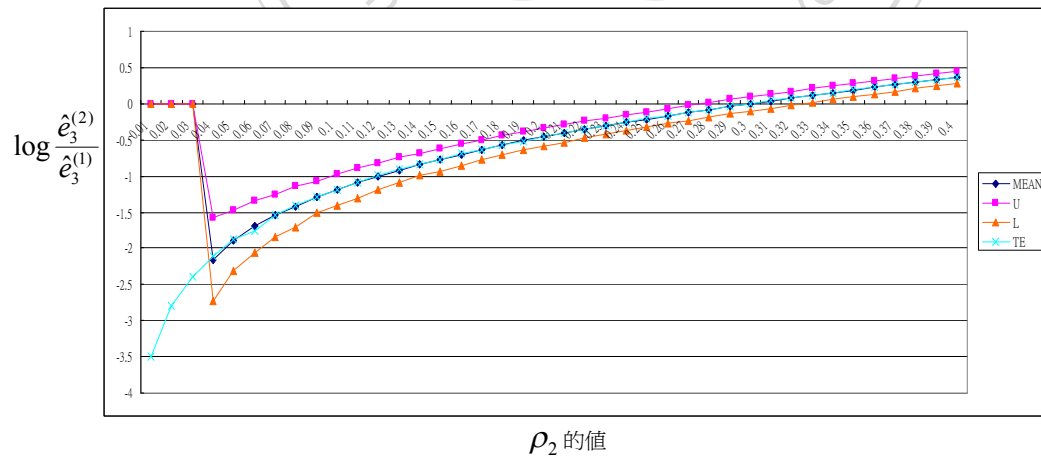
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-16：不相容性的變化圖

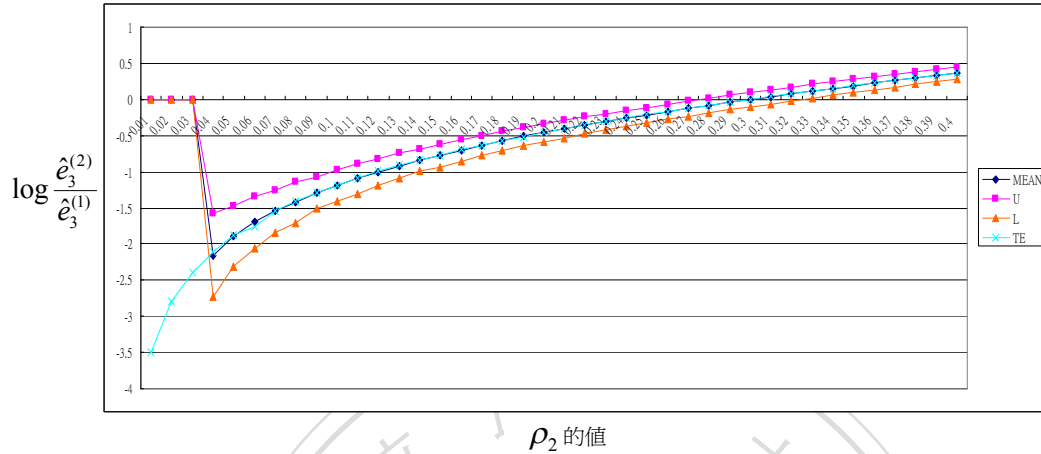
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 8, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-17：不相容性的變化圖

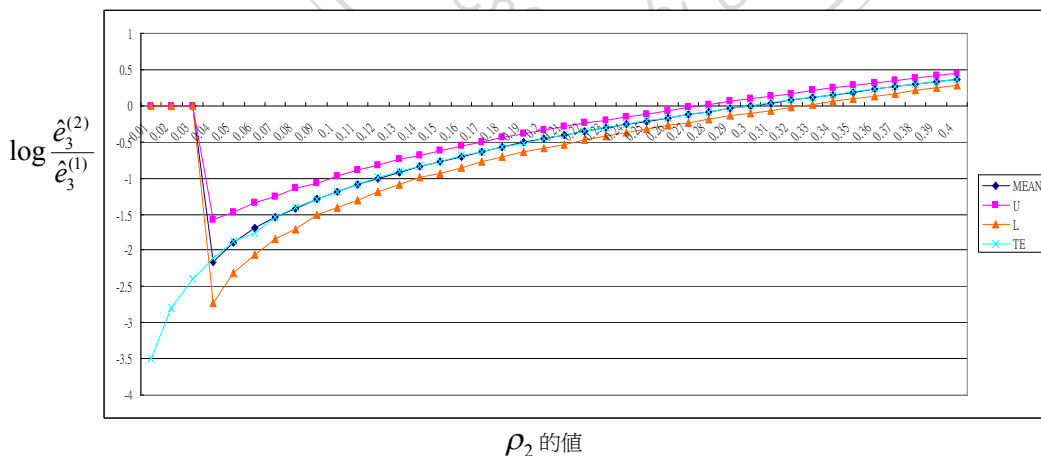
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 9, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-18：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 10, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.2 \sim 0.4)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.27~0.33 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

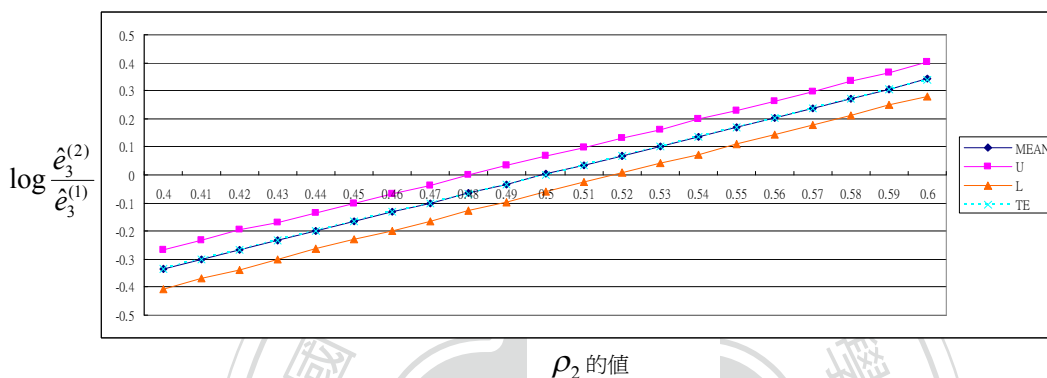
(3) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ,  $\rho_1 = 0.5$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信

賴區間下, 觀察  $\rho_2$  的區間變化, 特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計

$\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-19：不相容性的變化圖

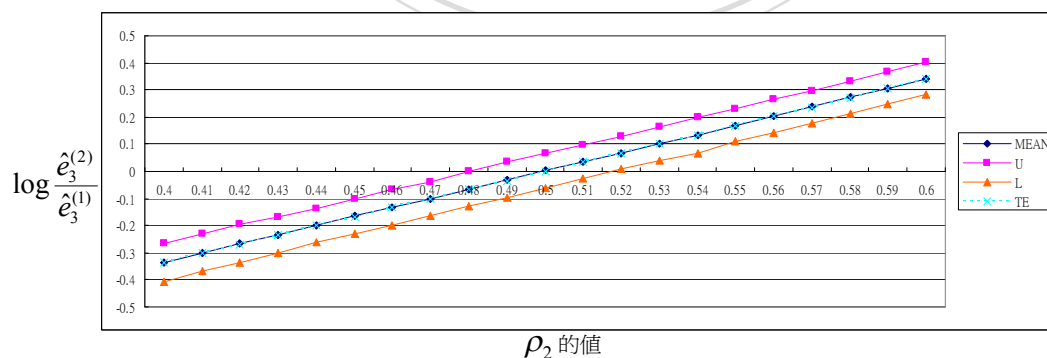
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2$ ,  $\rho_1 = 0.5$ ,  $\rho_2 = 0.4 \sim 0.6$ )



在 95% 的信心水準下, 發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時, 信賴區間的值不包含 0。

圖 C-20：不相容性的變化圖

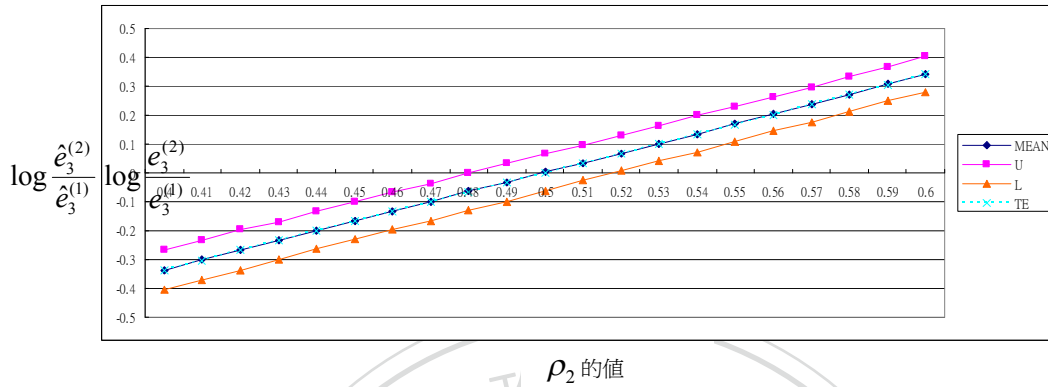
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 3$ ,  $\rho_1 = 0.5$ ,  $\rho_2 = 0.4 \sim 0.6$ )



在 95% 的信心水準下, 發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時, 信賴區間的值不包含 0。

圖 C-21：不相容性的變化圖

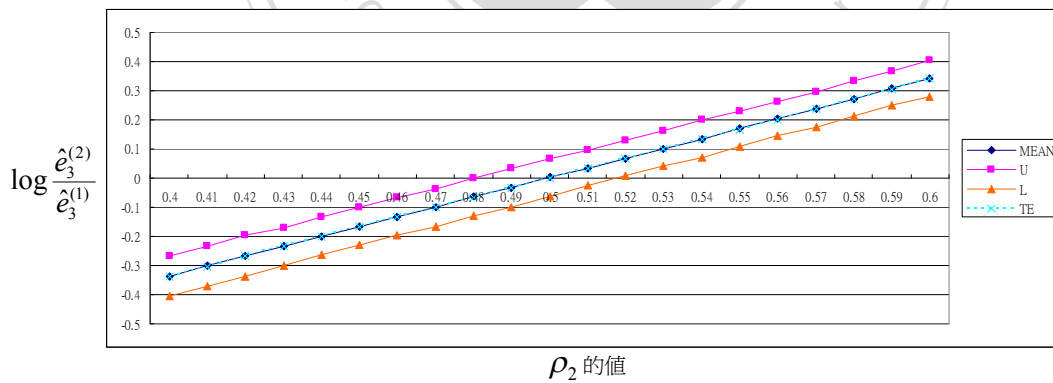
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-22：不相容性的變化圖

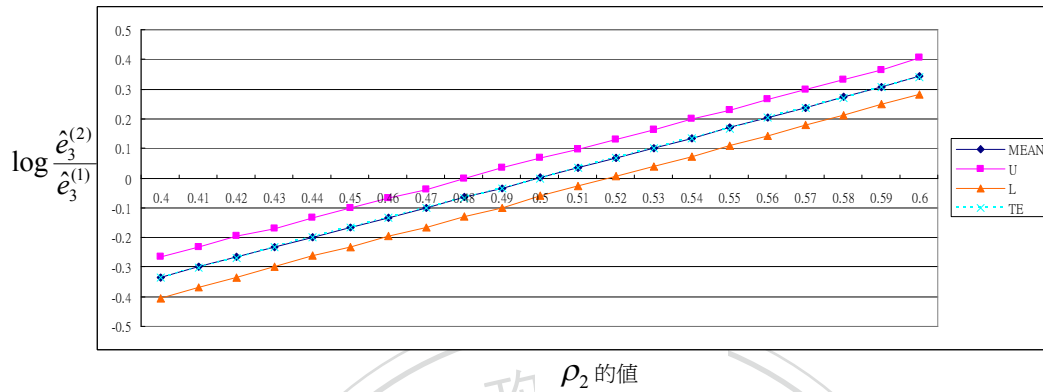
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-23：不相容性的變化圖

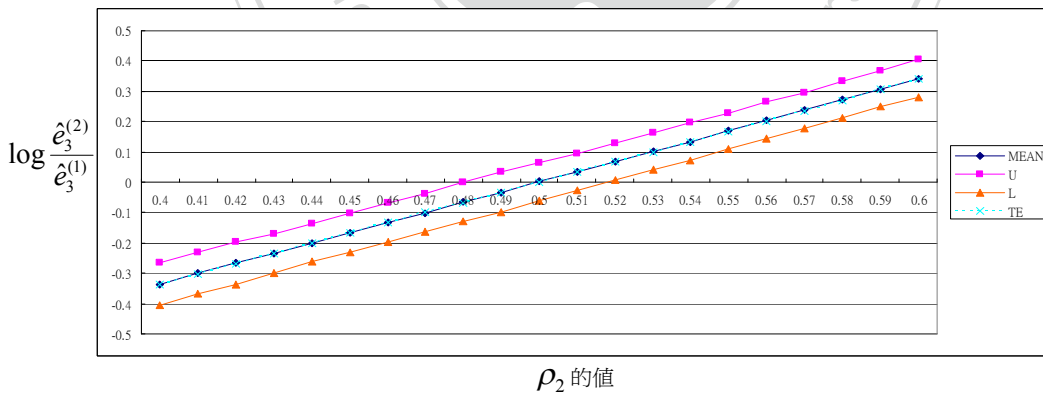
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-24：不相容性的變化圖

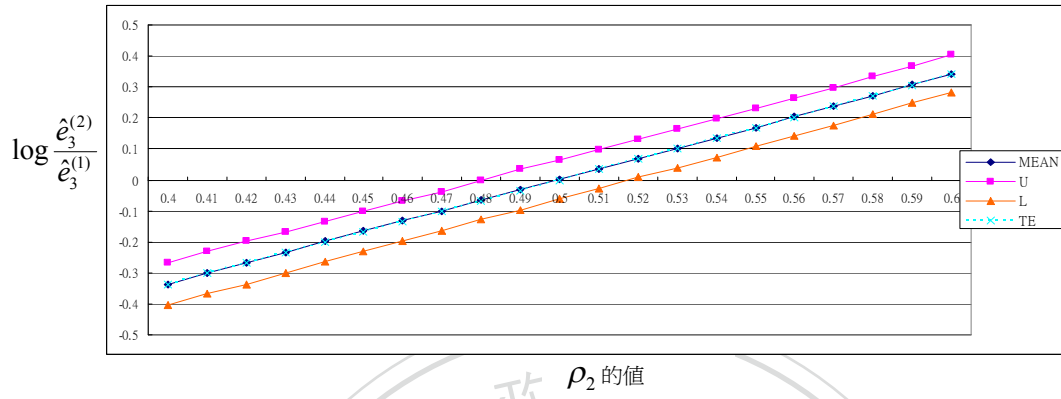
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-25：不相容性的變化圖

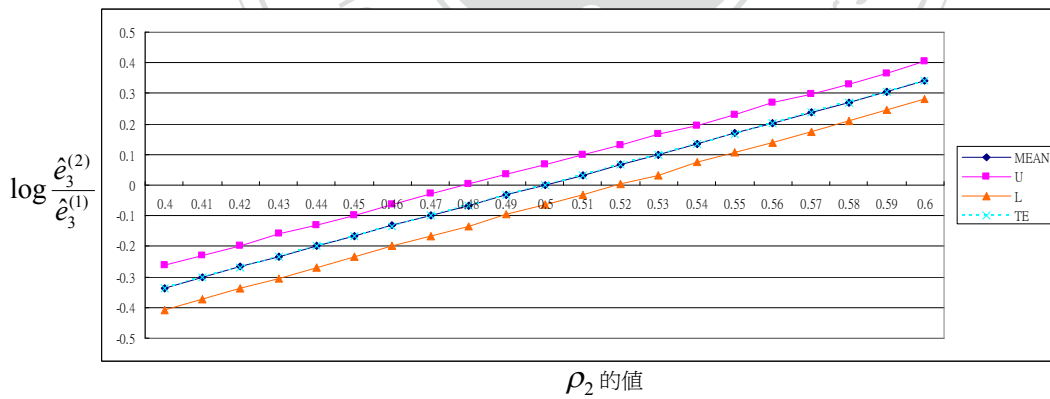
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 8, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95%的信心水準下，發現 $\rho_2$ 的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-26：不相容性的變化圖

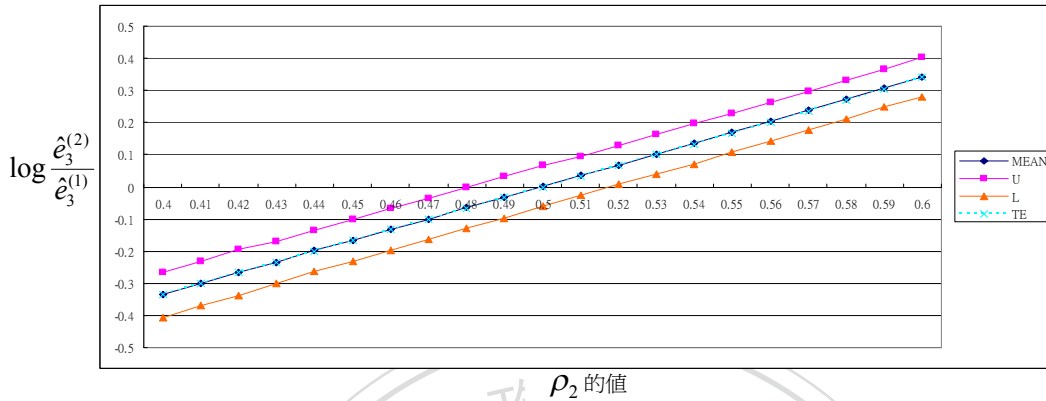
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 9, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$



在 95%的信心水準下，發現 $\rho_2$ 的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-27：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 10, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4 \sim 0.6)$$

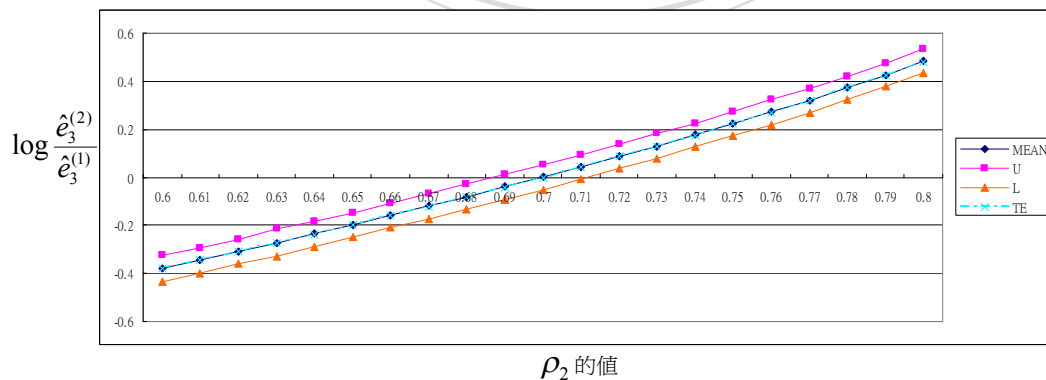


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.48~0.52 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(4) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10, \rho_1 = 0.7$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-28：不相容性的變化圖

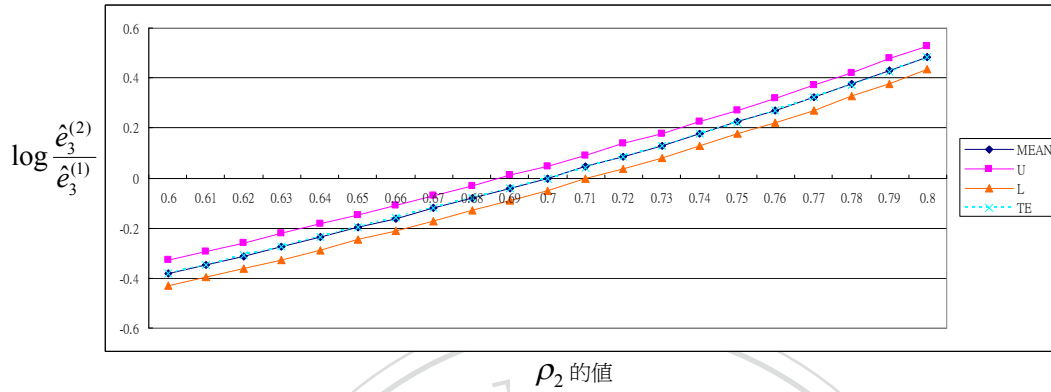
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖附錄 C-29：不相容性的變化圖

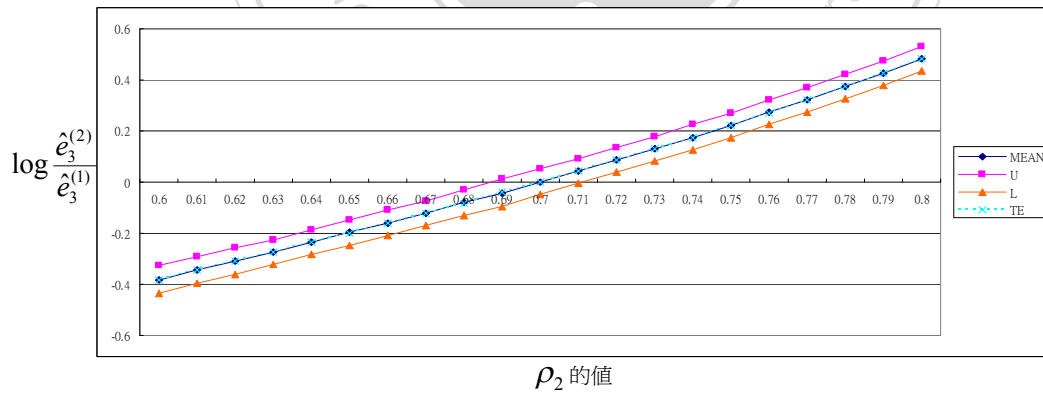
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 3, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-30：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$

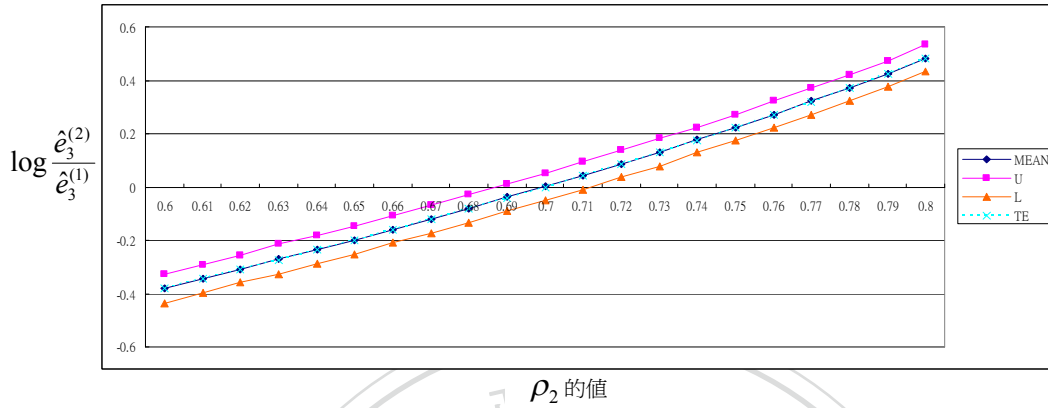


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



圖 C-31：不相容性的變化圖

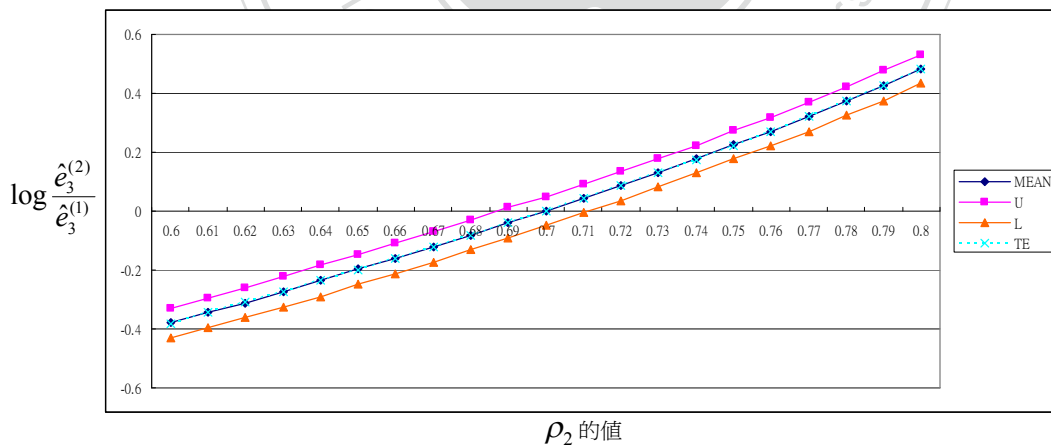
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-32：不相容性的變化圖

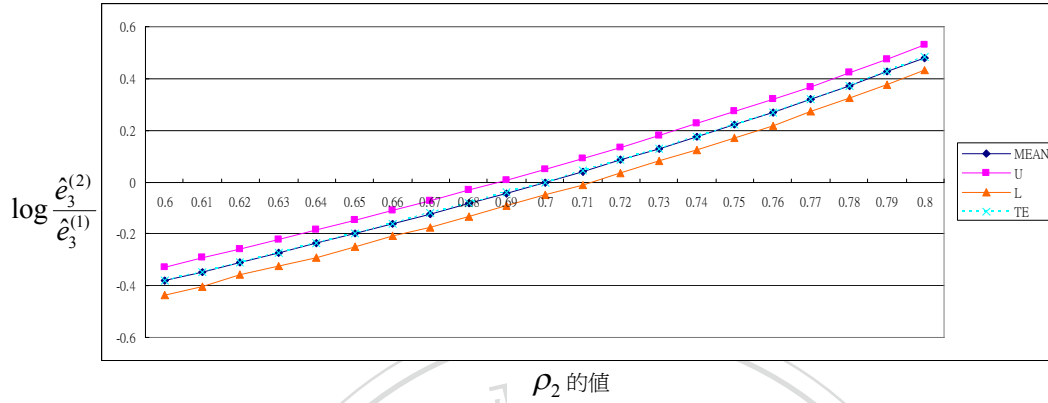
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-33：不相容性的變化圖

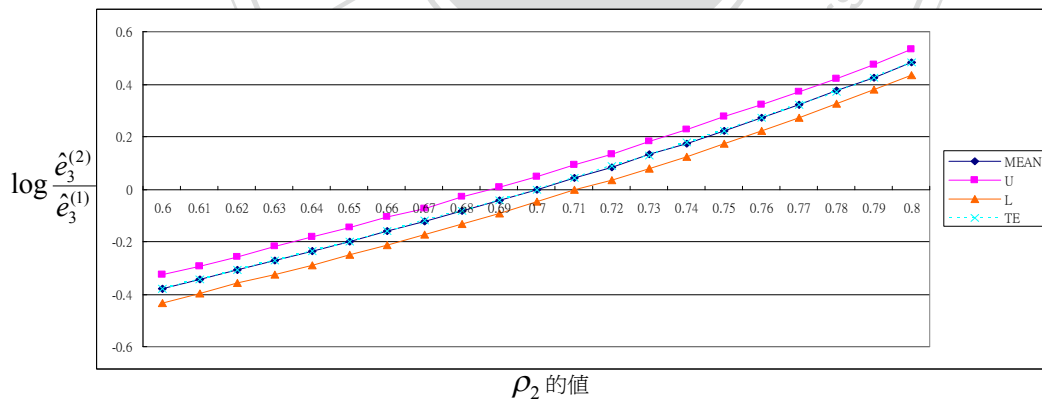
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-34：不相容性的變化圖

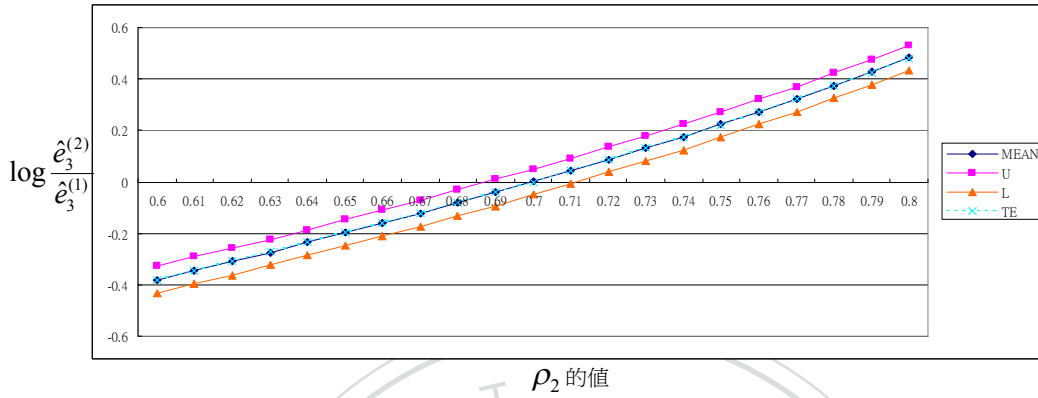
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 8, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-35：不相容性的變化圖

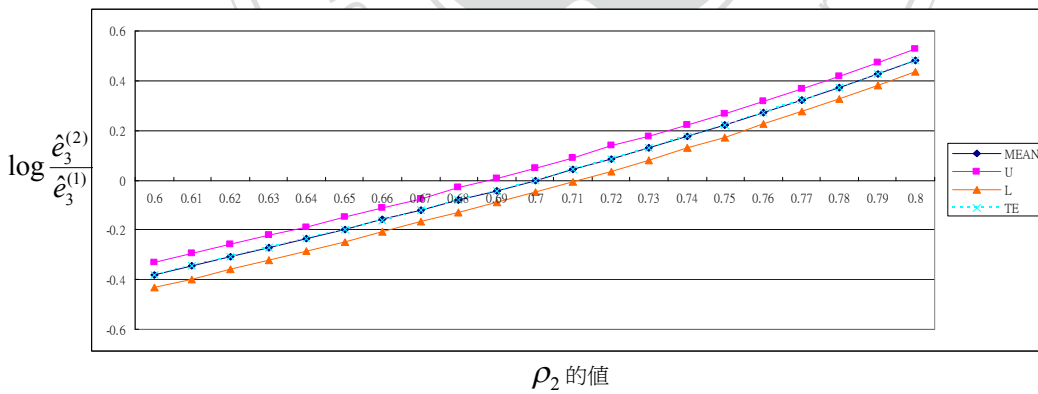
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 9, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-36：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 10, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.6 \sim 0.8)$$



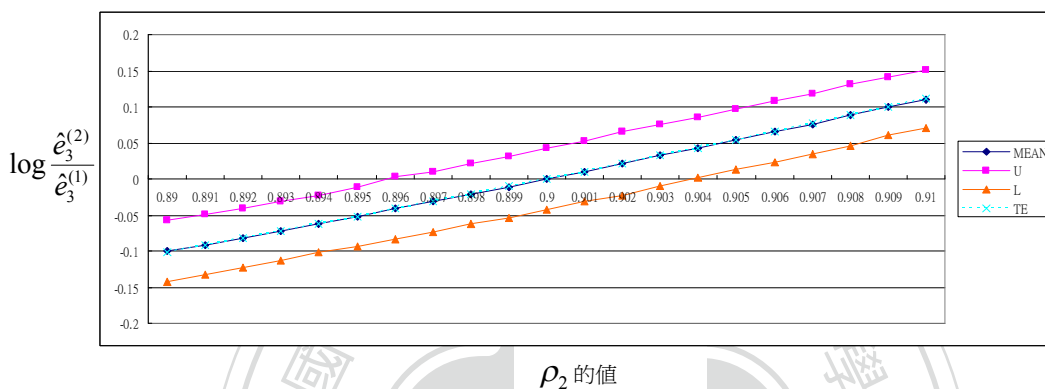
在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.69~0.71 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(5) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ,  $\rho_1 = 0.9$  時, 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信

賴區間下, 觀察  $\rho_2$  的區間變化, 特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內, 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-37: 不相容性的變化圖

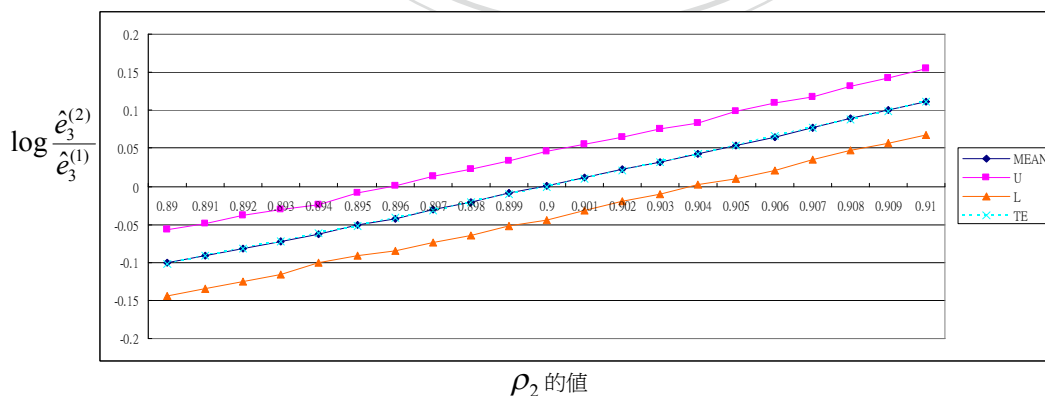
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2$ ,  $\rho_1 = 0.9$ ,  $\rho_2 = 0.89 \sim 0.91$ )



在 95% 的信心水準下, 發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時, 信賴區間的值不包含 0。

圖 C-38: 不相容性的變化圖

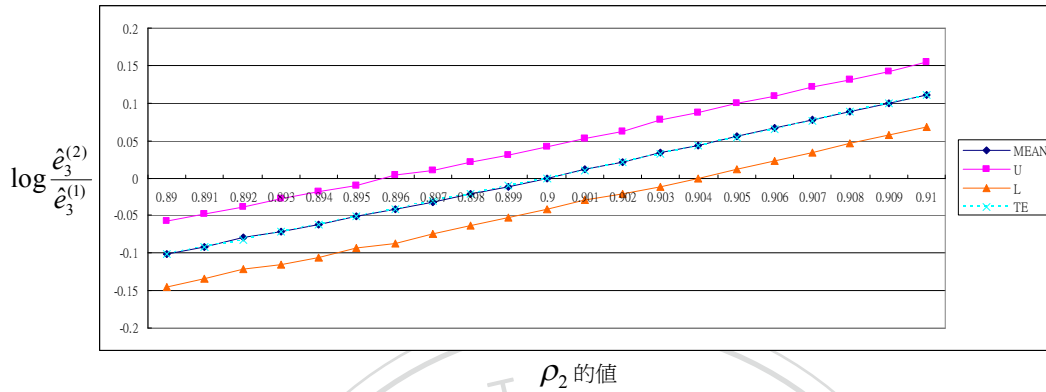
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 3$ ,  $\rho_1 = 0.9$ ,  $\rho_2 = 0.89 \sim 0.91$ )



在 95% 的信心水準下, 發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時, 信賴區間的值不包含 0。

圖 C-39：不相容性的變化圖

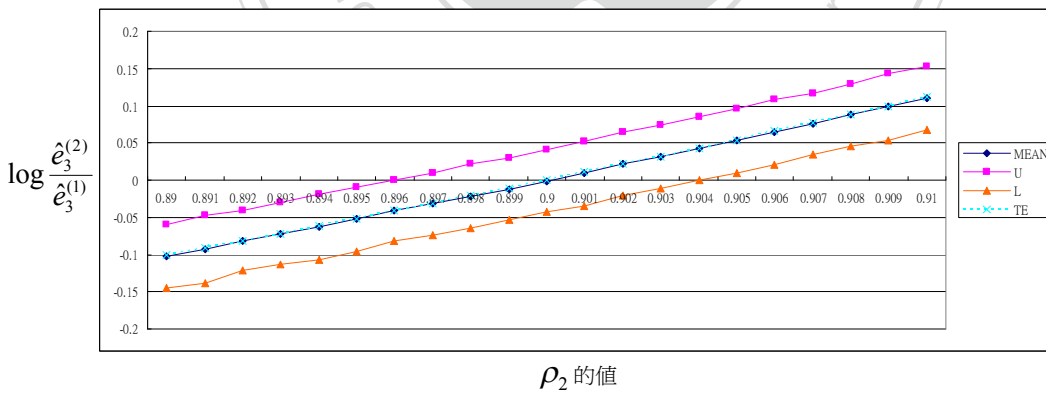
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-40：不相容性的變化圖

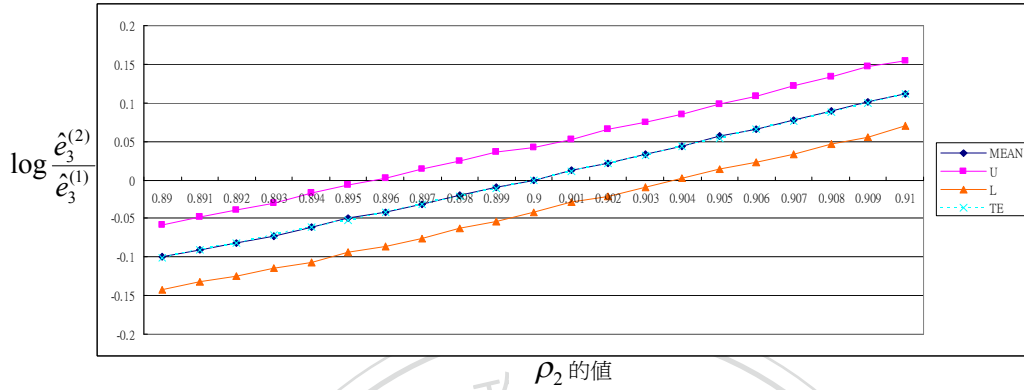
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-41：不相容性的變化圖

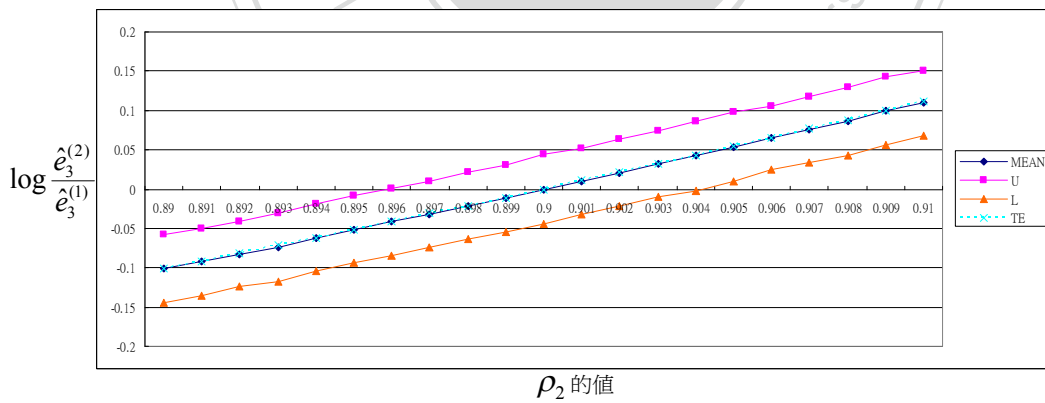
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-42：不相容性的變化圖

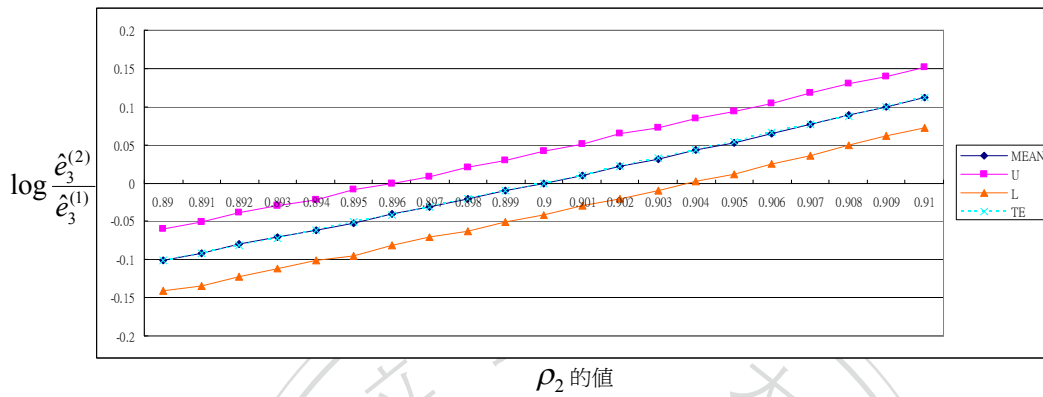
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-43：不相容性的變化圖

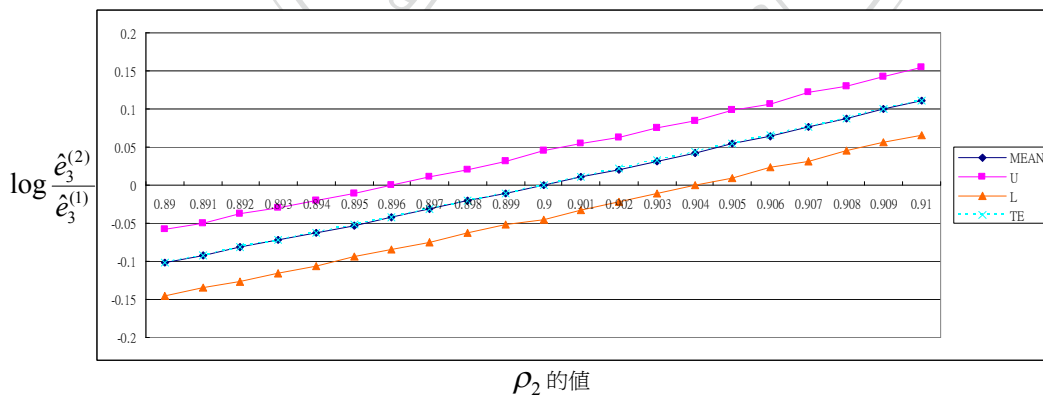
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 8, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-44：不相容性的變化圖

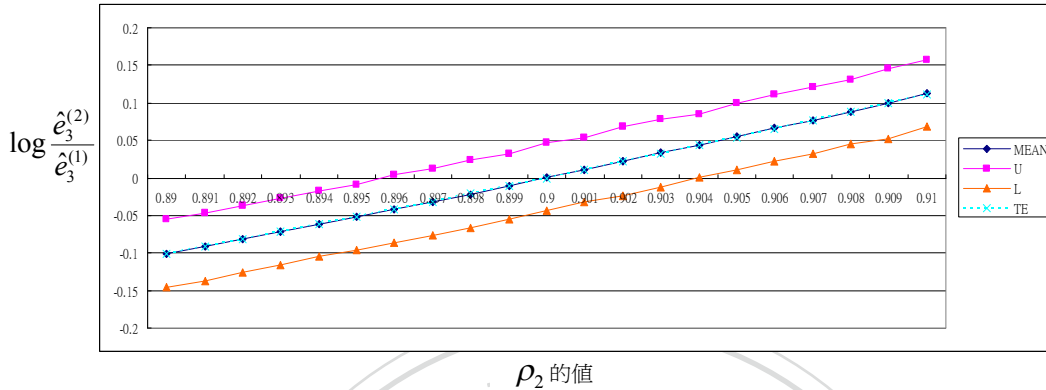
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 9, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-45：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 10, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.89 \sim 0.91)$$

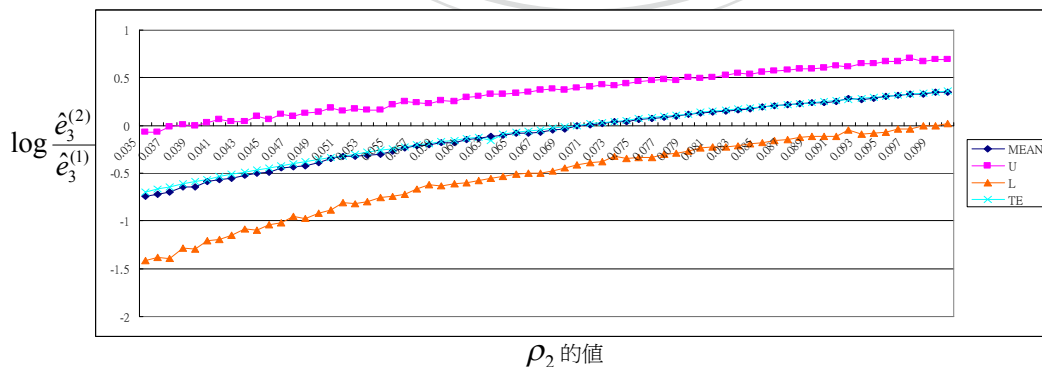


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.896~0.904 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(6) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10, \rho_1 = 0.07$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-46：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$

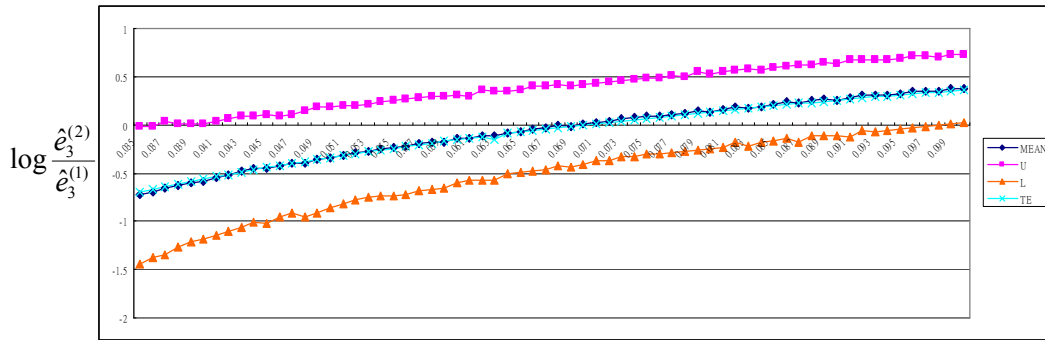


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



圖 C-47：不相容性的變化圖

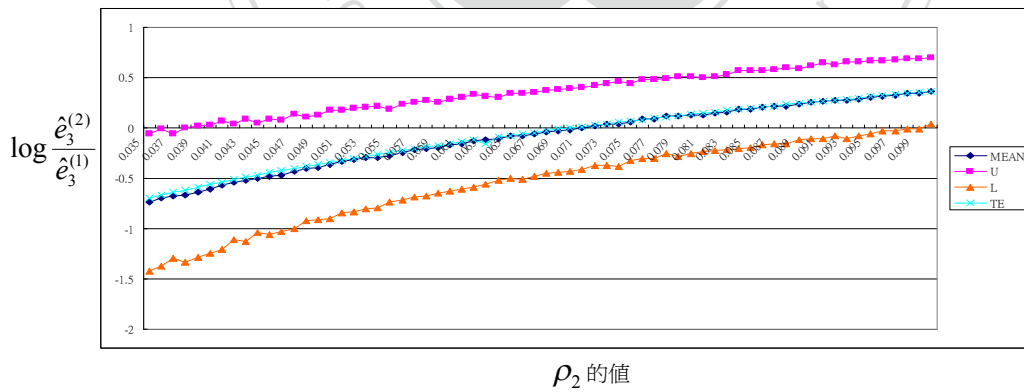
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 3, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-48：不相容性的變化圖

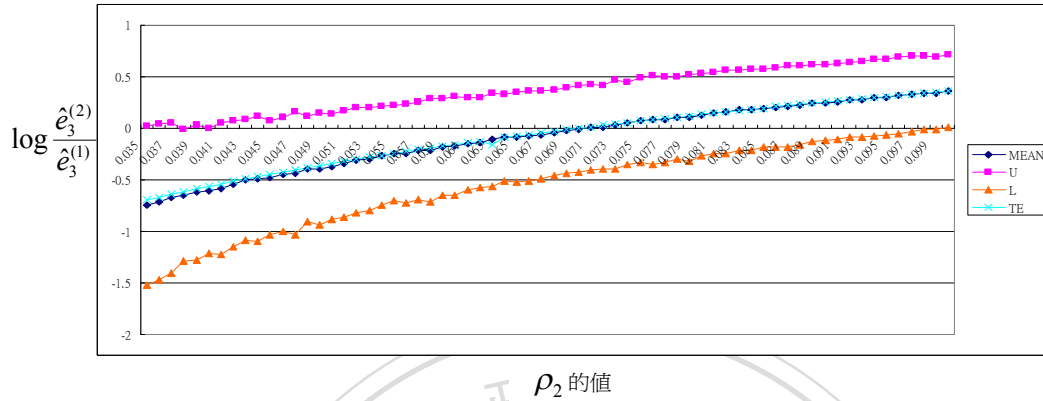
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-49：不相容性的變化圖

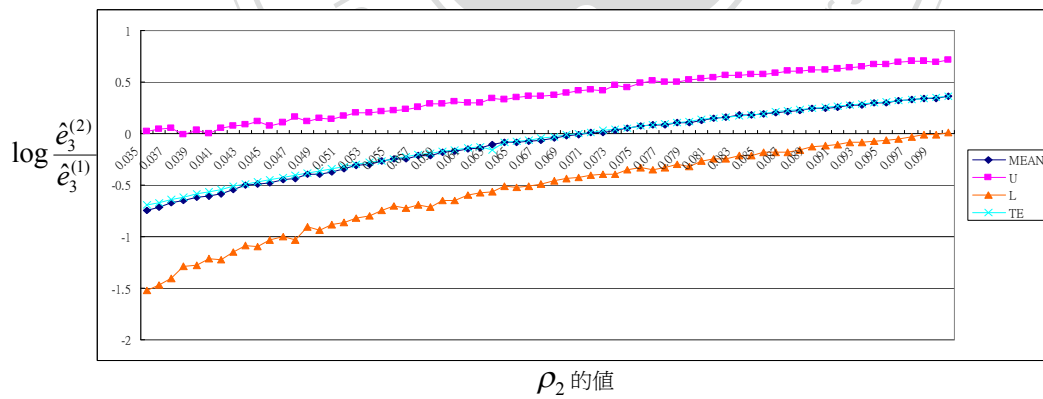
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-50：不相容性的變化圖

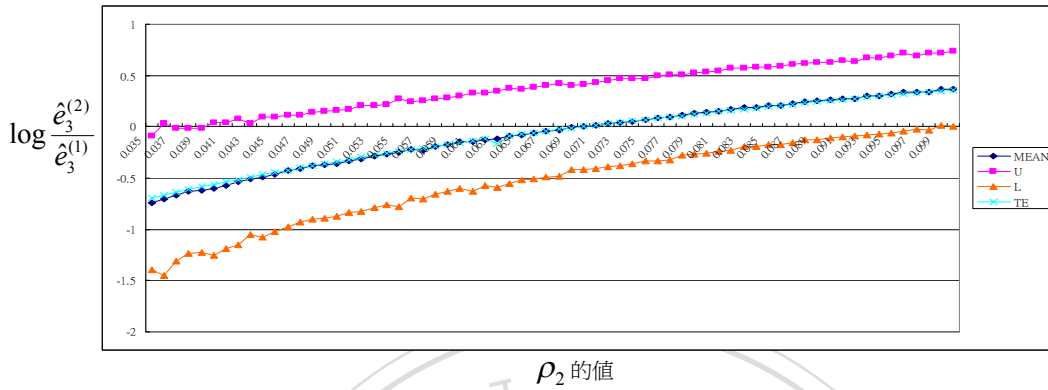
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-51：不相容性的變化圖

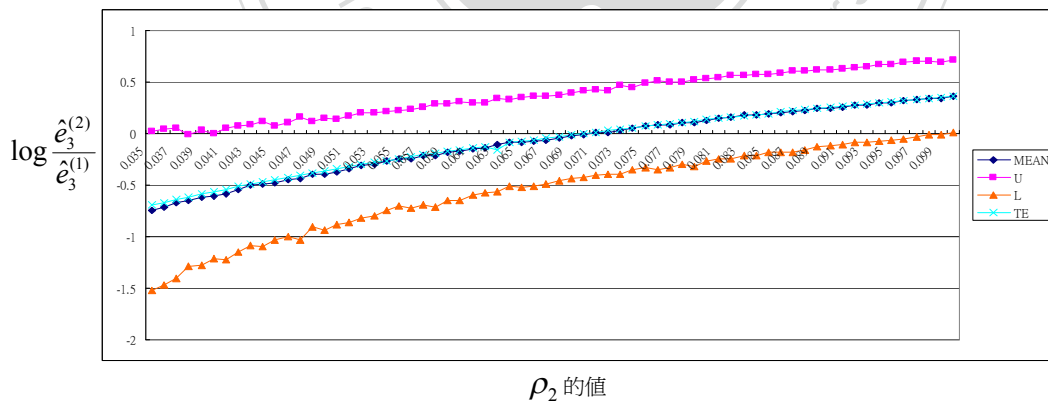
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.0396~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-52：不相容性的變化圖

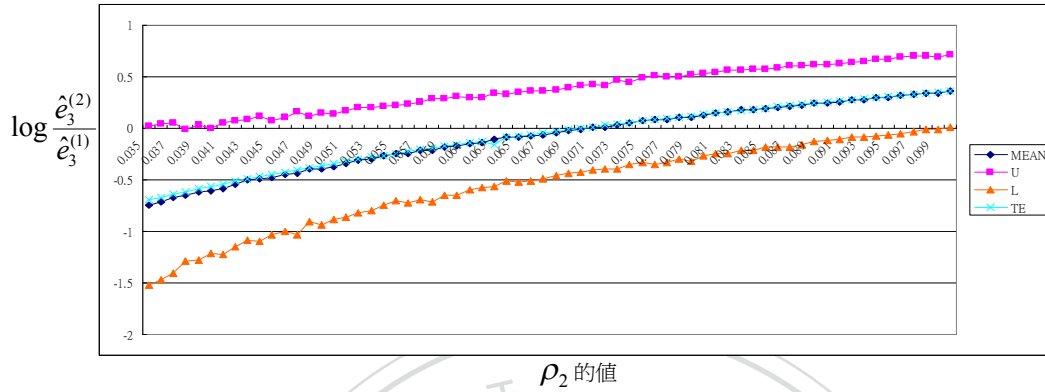
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 8, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-53：不相容性的變化圖

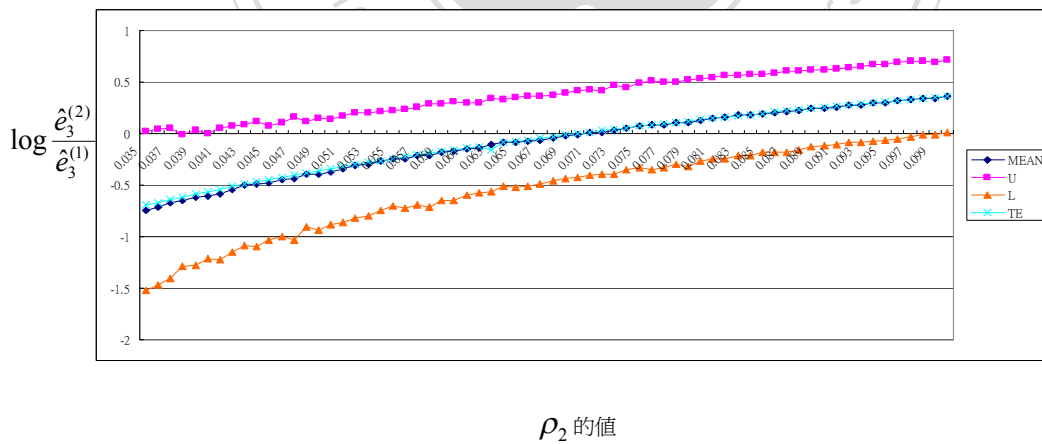
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 9, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-54：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 10, \rho_1 = 0.07, \rho_2 = 0.035 \sim 0.1)$$

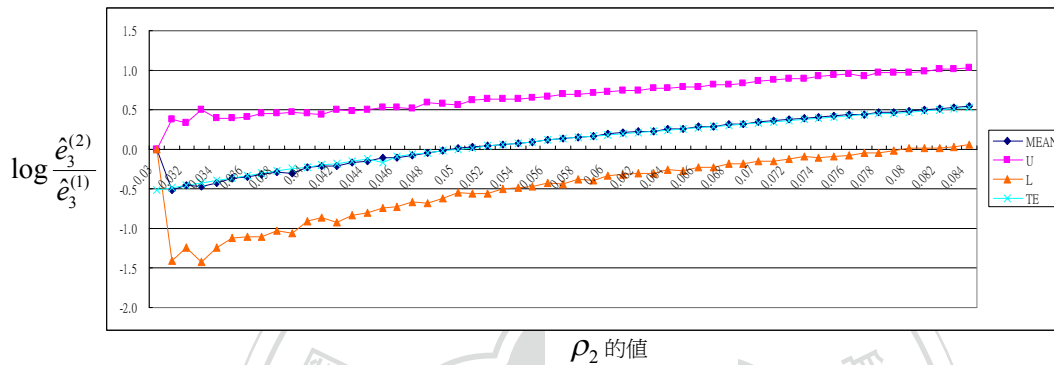


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.036~0.099 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(7) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ， $\rho_1 = 0.05$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-55：不相容性的變化圖

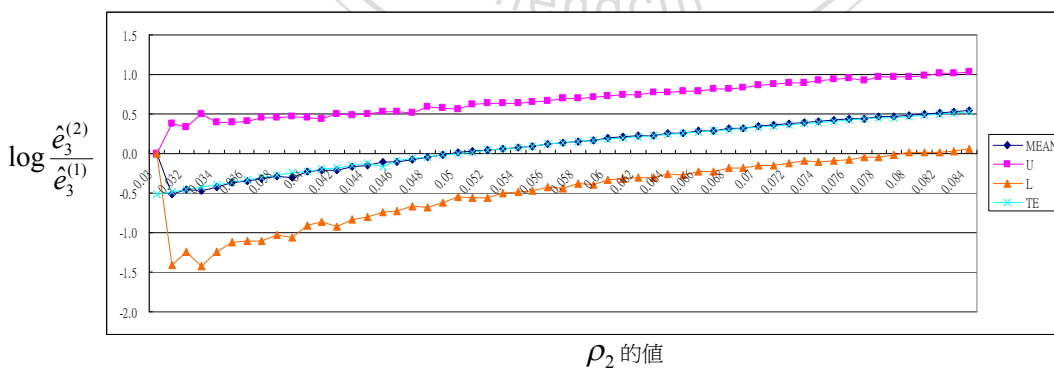
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2$ ， $\rho_1 = 0.05$ ， $\rho_2 = 0.03 \sim 0.084$ )



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-56：不相容性的變化圖

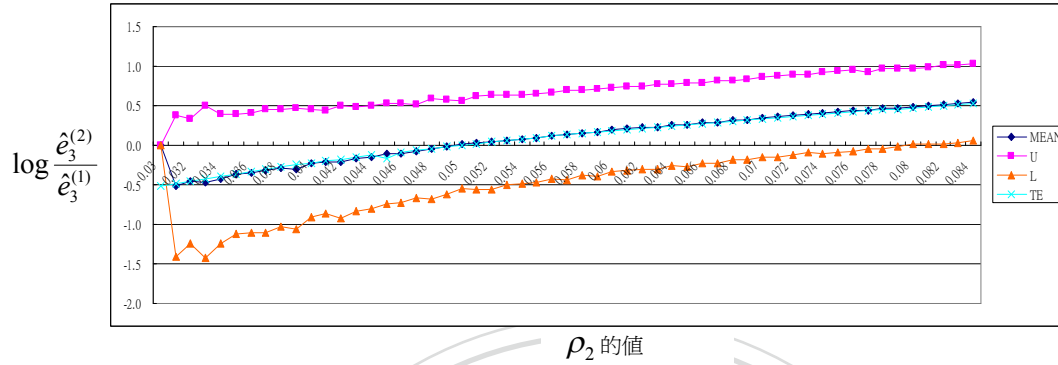
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 3$ ， $\rho_1 = 0.05$ ， $\rho_2 = 0.029 \sim 0.084$ )



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-57：不相容性的變化圖

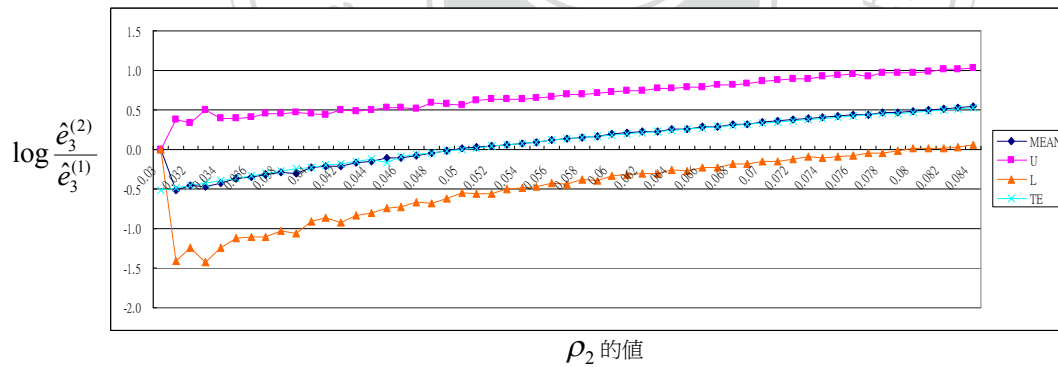
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 4, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-58：不相容性的變化圖

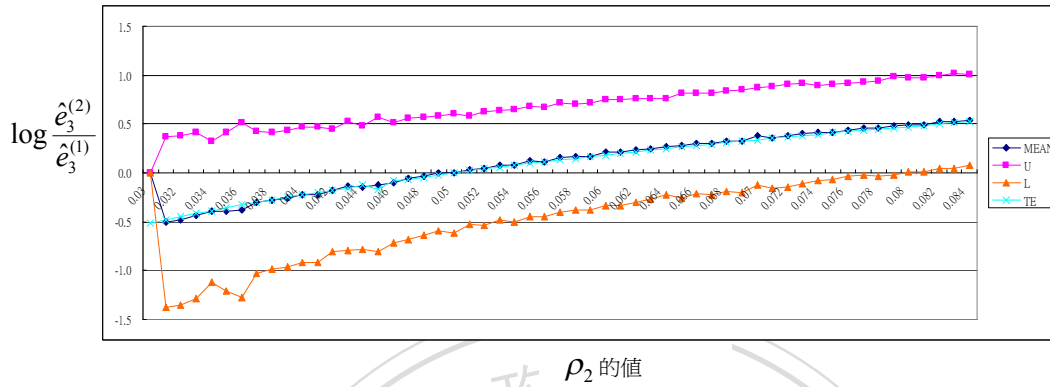
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 5, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-59：不相容性的變化圖

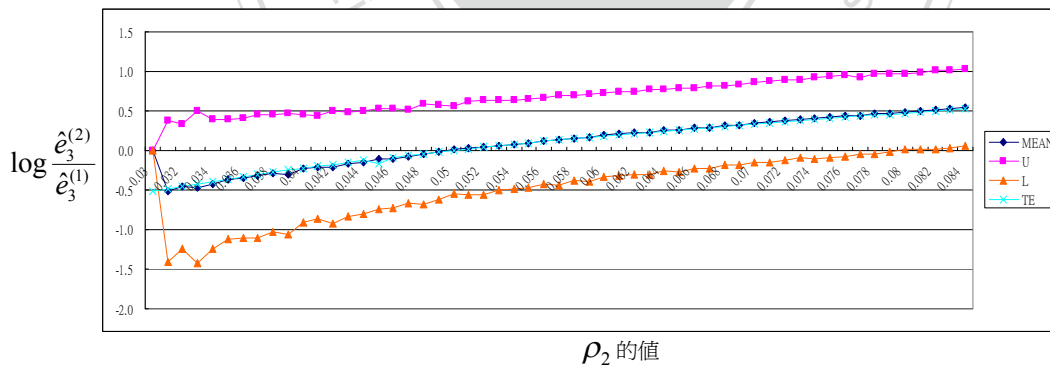
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 6, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-60：不相容性的變化圖

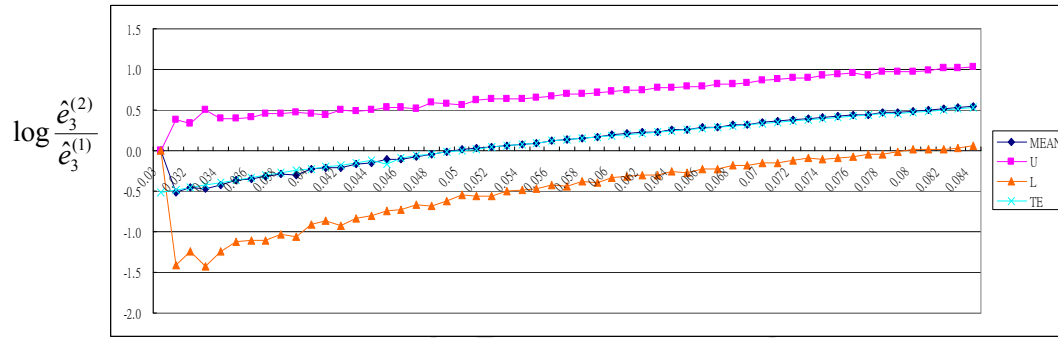
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_2^4 = 7, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-61：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 8, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$

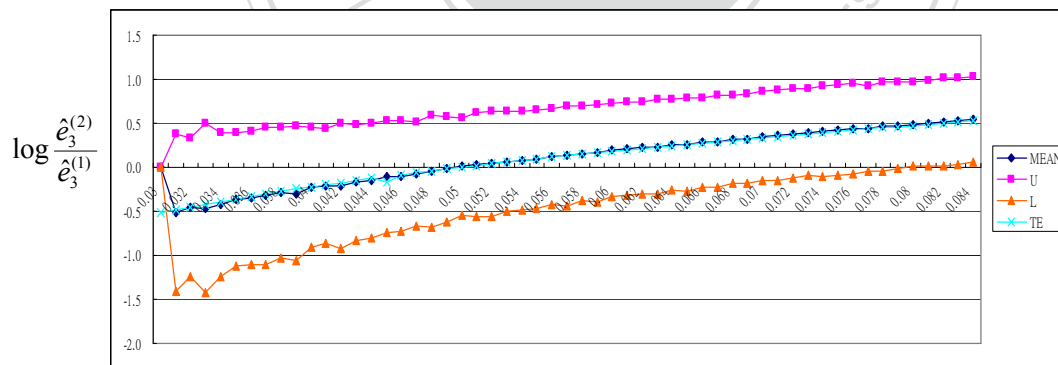


$\rho_2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-62：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 9, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$



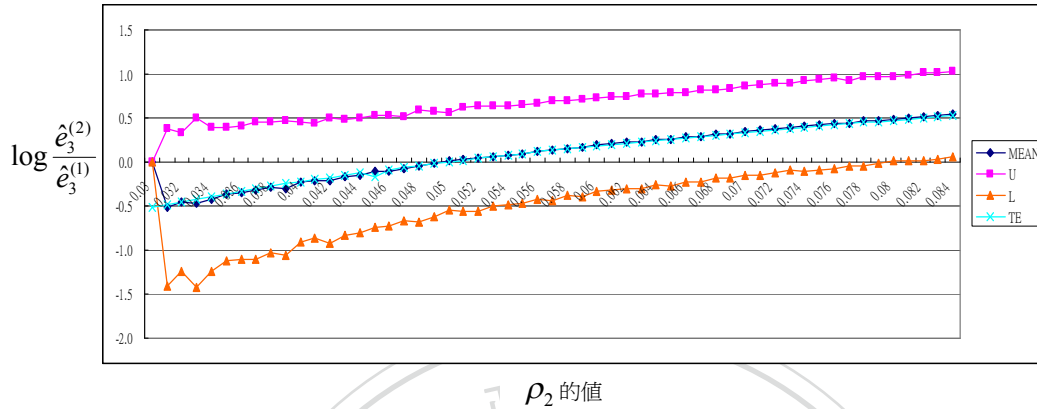
$\rho_2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



圖 C-63：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 10, \rho_1 = 0.05, \rho_2 = 0.03 \sim 0.084)$$

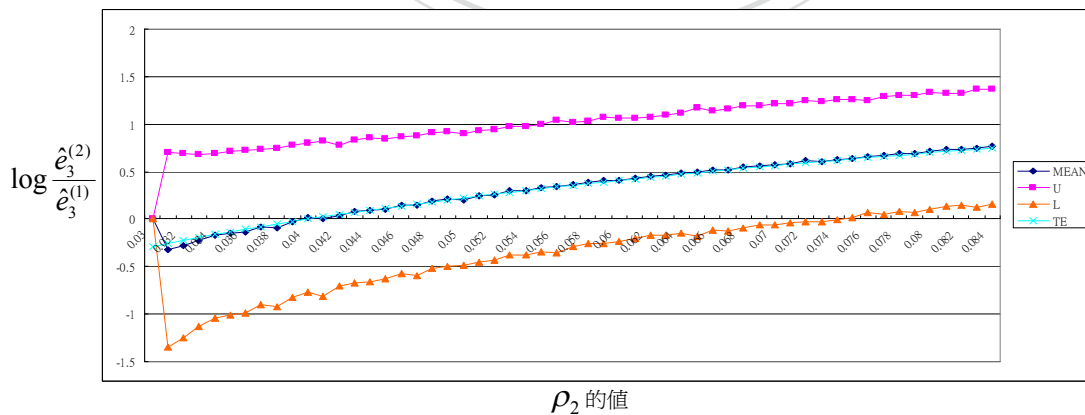


在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.03~0.08 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(8) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10, \rho_1 = 0.04$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-64：不相容性的變化圖

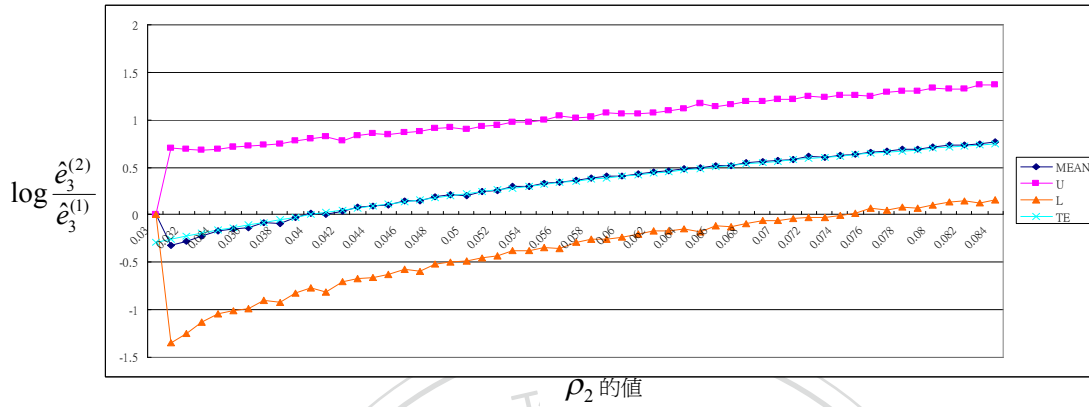
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-65：不相容性的變化圖

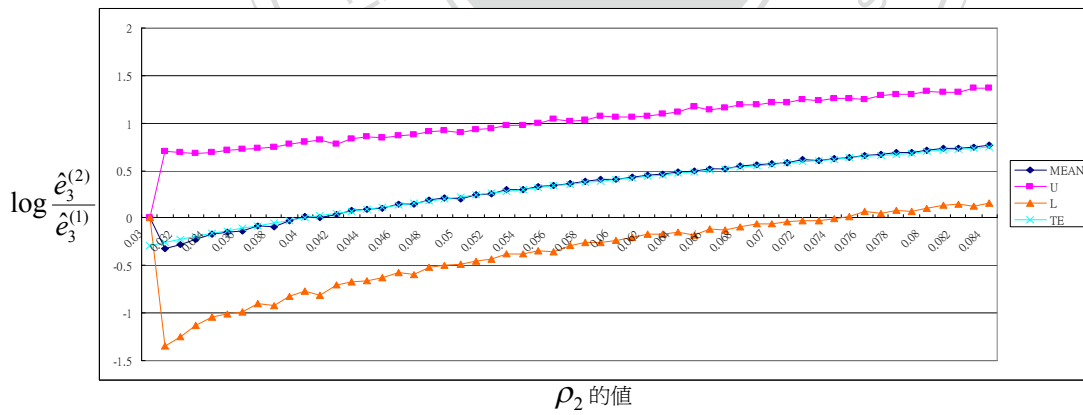
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 3, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-66：不相容性的變化圖

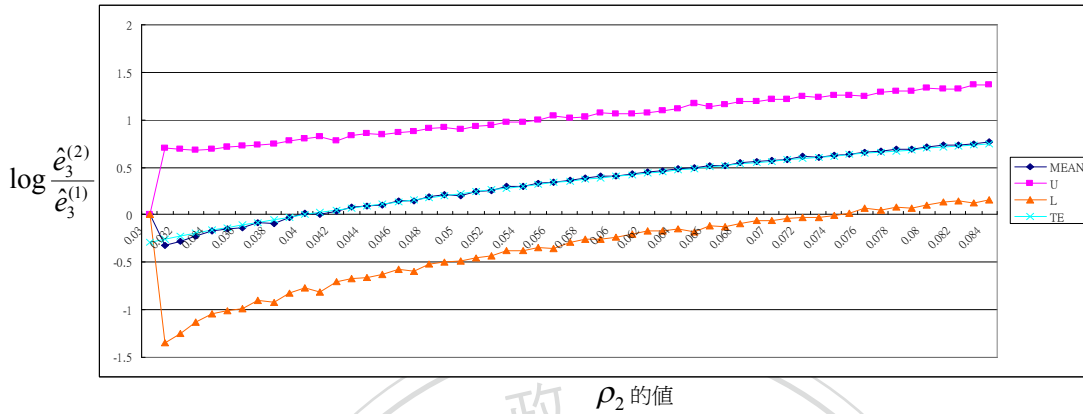
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 4, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-67：不相容性的變化圖

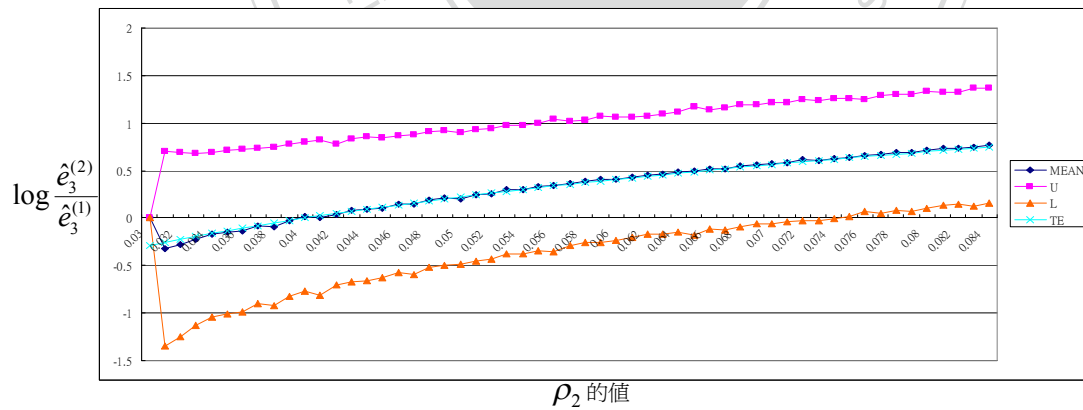
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 5, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-68：不相容性的變化圖

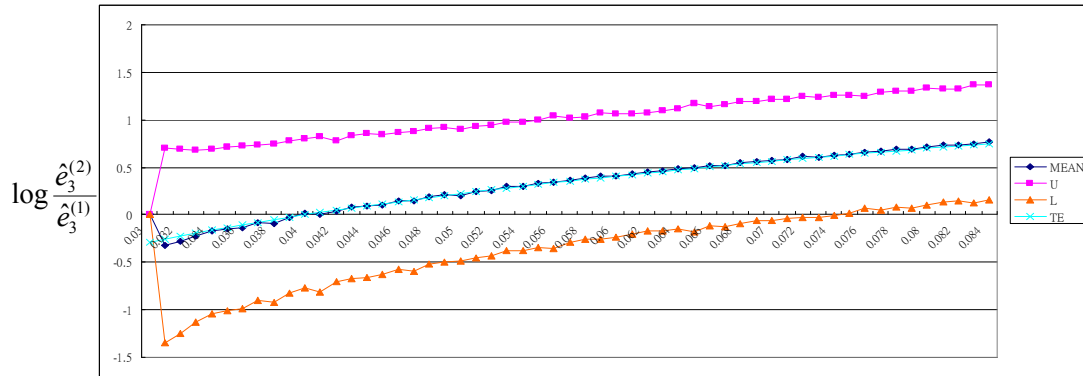
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 6, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-69：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 7, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$

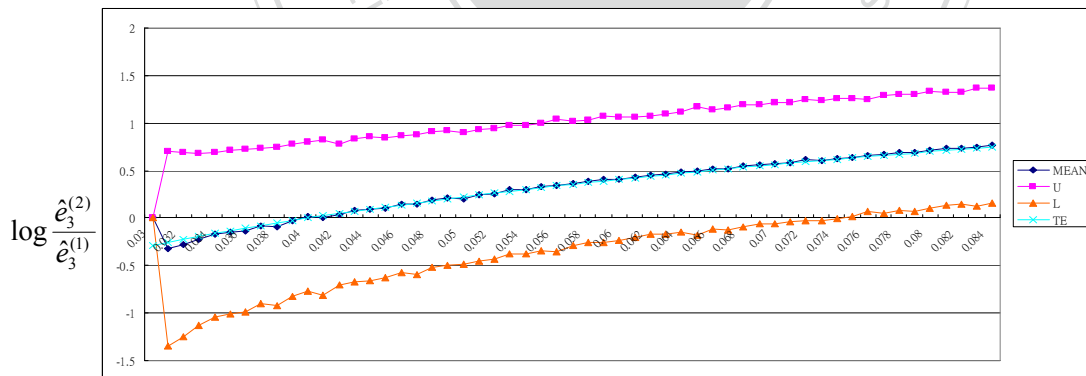


$\rho_2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-70：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 8, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$

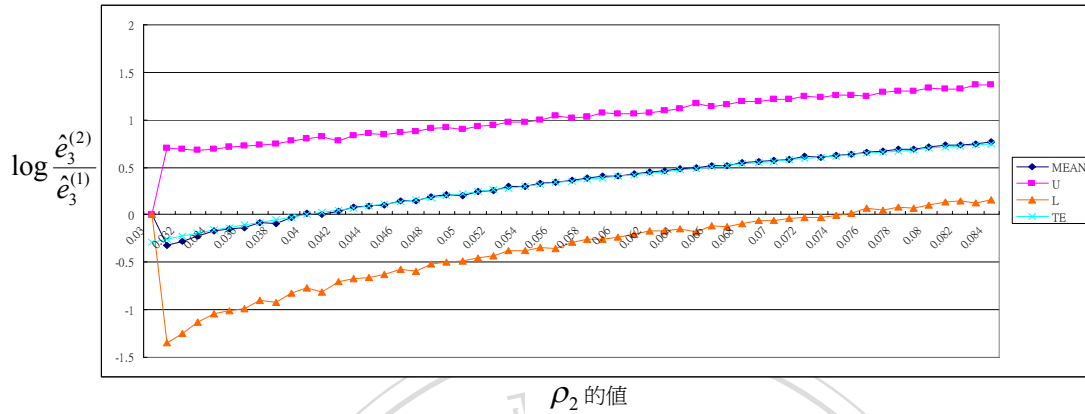


$\rho_2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-71：不相容性的變化圖

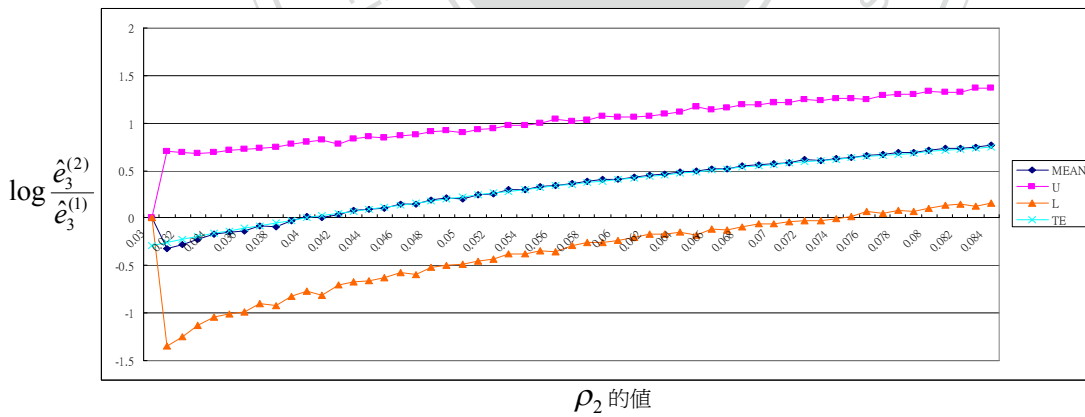
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 9, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 C-72：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 10, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.04 \sim 0.084)$$



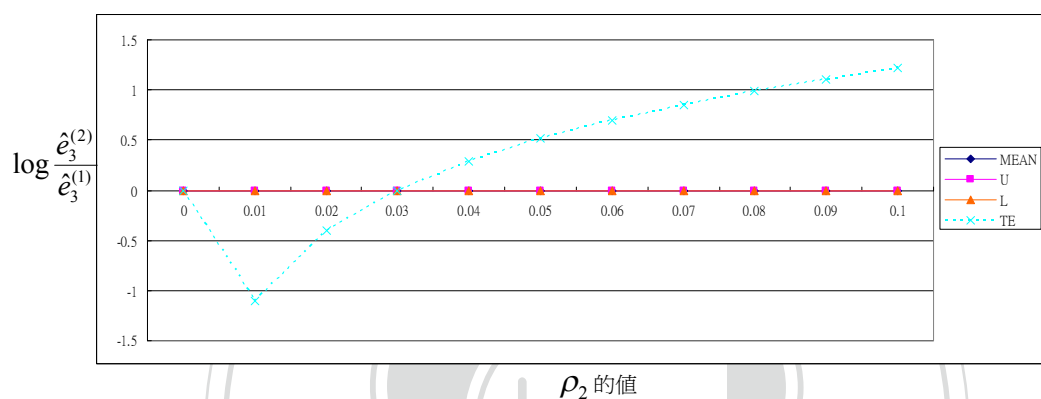
在 95% 的信心水準下，發現  $\rho_2$  的值在 0.031~0.075 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

(9) 固定  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ， $\rho_1 = 0.03$  時，在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95%

信賴區間下，觀察  $\rho_2$  的區間變化，特別是當  $\rho_2$  的值在什麼範圍內，會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95% 信賴區間值不包含 0。此範圍亦即可判別的  $\rho_2$  值區間。

圖 C-73：不相容性的變化圖

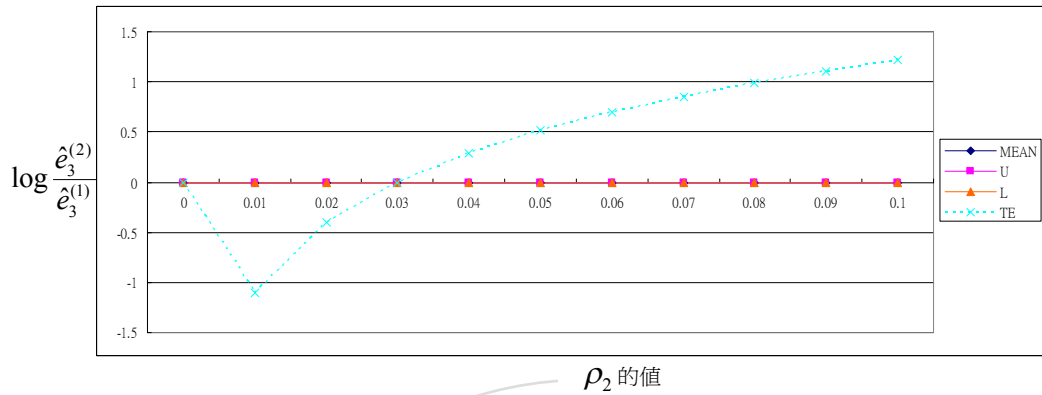
( $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2$ ， $\rho_1 = 0.03$ ， $\rho_2 = 0 \sim 0.1$ )



當  $\rho_1$  很小 (如: 0.03) 時，部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在 (因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小，導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的 (註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ， $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率))，因此，此時無法找到 95% 的信賴區間，也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-74：不相容性的變化圖

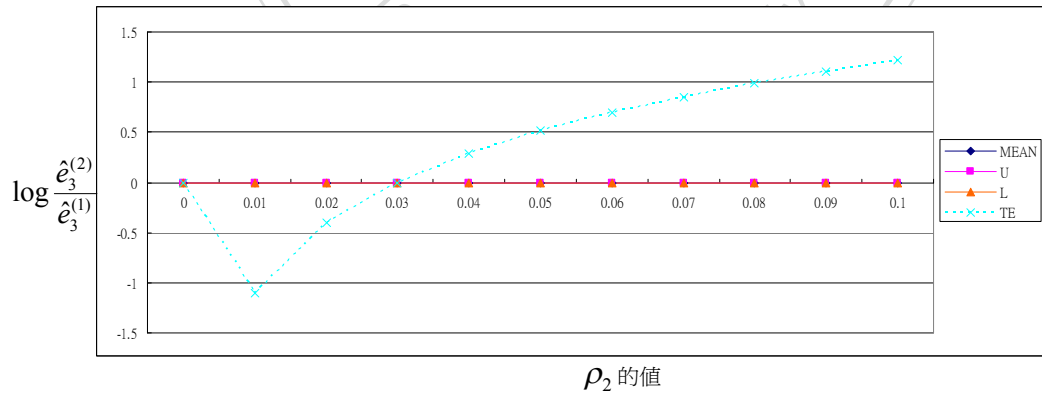
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 3, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-75：不相容性的變化圖

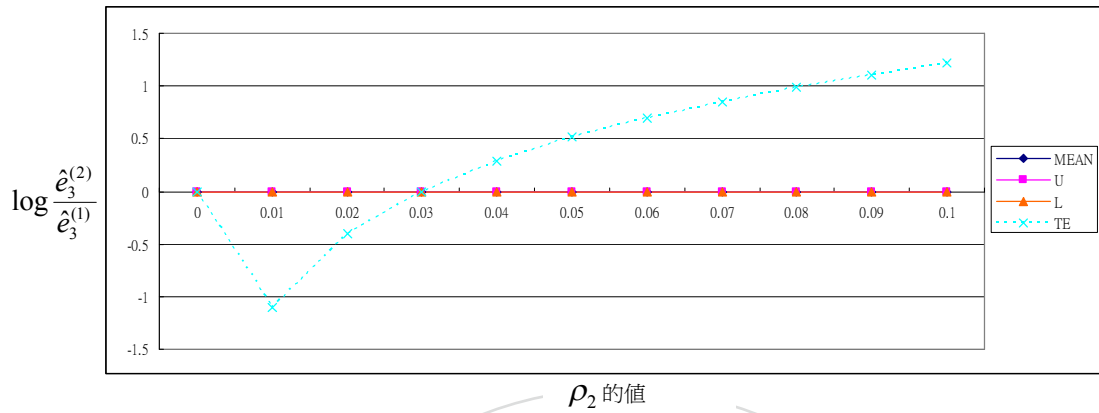
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 4, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-76：不相容性的變化圖

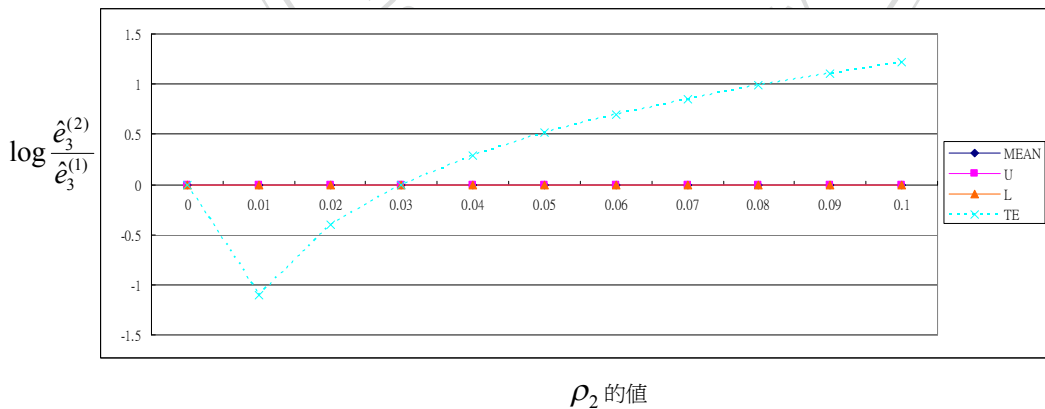
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 5, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-77：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 6, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$

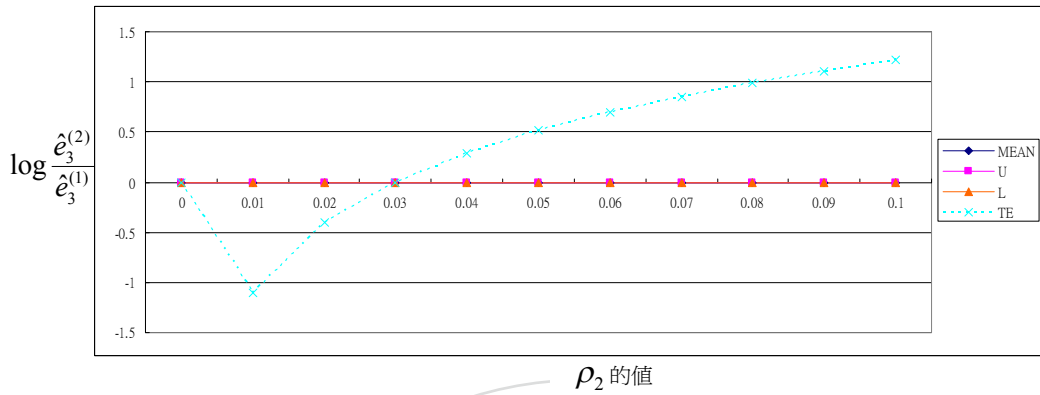


當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。



圖 C-78：不相容性的變化圖

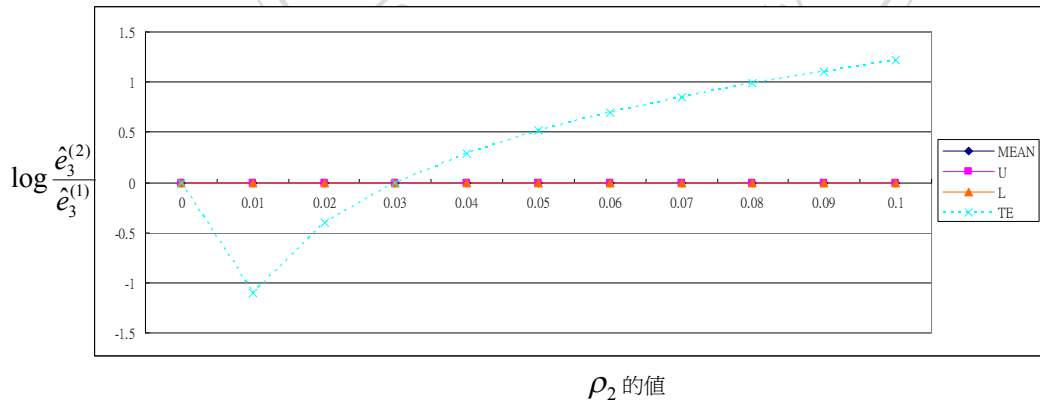
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 7, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-79：不相容性的變化圖

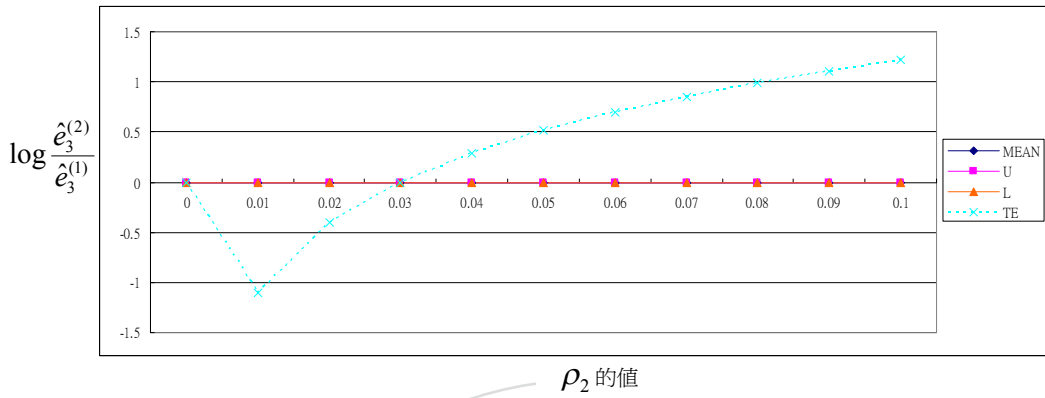
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 8, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-80：不相容性的變化圖

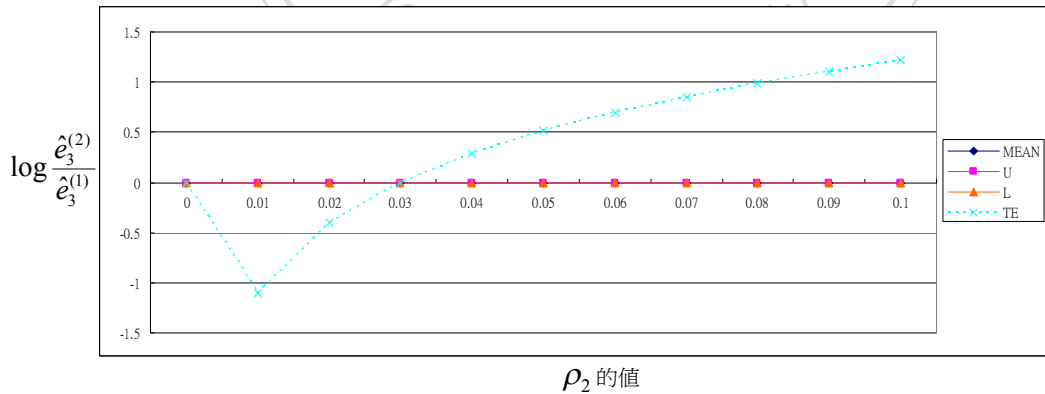
$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 9, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

圖 C-81：不相容性的變化圖

$$(\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 10, \rho_1 = 0.03, \rho_2 = 0 \sim 0.1)$$



當  $\rho_1$  很小(如: 0.03)時, 部份的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在(因為  $\rho_1 = 0.03$  相關性小, 導致  $\hat{e}_3$  的估計產生負的(註:  $\hat{e}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$  為迴歸線的斜率)), 因此, 此時無法找到 95% 的信賴區間, 也就無法判斷兩組樣本是否來自不同母體。

將模擬資料的結果圖 C-1~圖 C-81 進一步整理可得下表：

表 C-1：假設  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 2, 3, \dots, 10$ ， $\rho_1$  值變動下，

對應的不可判別及可判別的  $\rho_2$  值區間。

| $\rho_1$ 值 | 不可判別的 $\rho_2$ 值<br>區間 | 可判別的 $\rho_2$ 值區間 <sup>1</sup>      |
|------------|------------------------|-------------------------------------|
| 0.04       | 0.031~ 0.075           | ( 0.075 , 1)                        |
| 0.05       | 0.03 ~ 0.08            | ( 0.08 , 1)                         |
| 0.07       | 0.036 ~ 0.099          | ( 0.099 , 1)                        |
| 0.1        | 0.07 ~ 0.13            | ( 0.04 , 0.07) $\cup$ ( 0.13 , 1)   |
| 0.3        | 0.27 ~ 0.33            | ( 0.04 , 0.27) $\cup$ ( 0.33 , 1)   |
| 0.5        | 0.48 ~ 0.52            | ( 0.04 , 0.48) $\cup$ ( 0.52 , 1)   |
| 0.7        | 0.69 ~ 0.71            | ( 0.04 , 0.69) $\cup$ ( 0.71 , 1)   |
| 0.9        | 0.896 ~ 0.904          | ( 0.04 , 0.896) $\cup$ ( 0.904 , 1) |

由表 C-1 可得知，當  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$  以及  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$  (或 2, 3,  $\dots$ , 10)，但  $\rho_1$  值變動，不可判別的  $\rho_2$  值區間也跟隨著變動，但可簡化(亦即在最差的情況下)為不可判別的  $\rho_2$  值區間全都落在  $(\rho_1 - 0.04, \rho_1 + 0.04)$  區間內。利用  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  (或  $\sigma_3$  及  $\sigma_4$ ) 的對稱性，可得以下結論：當  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2$  及  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ ，且變異數值介於 1 到 10 之間，則當  $\rho_1 \geq 0.04$  時，不可判別的  $\rho_2$  值包含於  $(\rho_1 - 0.04, \rho_1 + 0.04)$ ，此即為簡化的(或最差的)區間。

<sup>1</sup> 當  $\rho_2$  值很小時，部分的  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  值不存在，故無法判別兩組樣本是否來自不同母體。

附錄 D：  $\sigma_3^2=1$ ，  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$ ， 且當  $\rho_1=\rho_2$  的值改變時， 觀察不可判別

### 的 $\sigma_1^2$ 值的區間變化圖

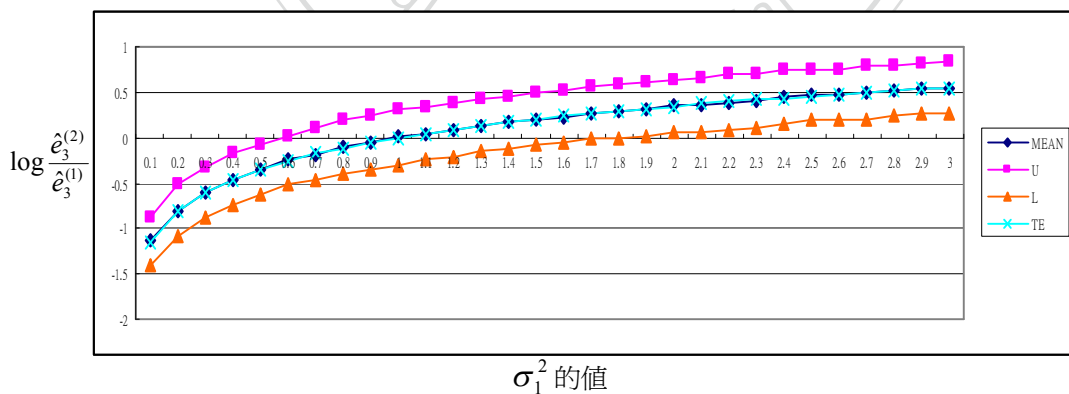
固定  $\sigma_3^2=1$ ，  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$ ，  $\rho_1=\rho_2=\pm 0.1, \pm 0.2, \dots, \pm 0.9$  時， 在估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95%信賴區間下， 觀察  $\sigma_1^2$  的區間變化， 特別是當  $\sigma_1^2$  的值在什麼範圍內， 會使得估計  $\log \frac{e_3^{(2)}}{e_3^{(1)}}$  的 95%信賴區間值不包含 0。 以下亦稱此範圍為可判別的  $\sigma_1^2$  值區間。

模擬結果發現當  $\rho_1$  與  $\rho_2$  的值從 -0.9 到 -0.1 的情形和  $\rho_1$  與  $\rho_2$  的值從 0.9 到 0.1 的情形完全相同， 這是因為對稱性的關係與預期結果一樣， 所以只將  $\rho_1$  與  $\rho_2$  的值從 0.9 到 0.1 的情形整理如下。

模擬結果如下：

圖 D-1： 不相容性的變化圖

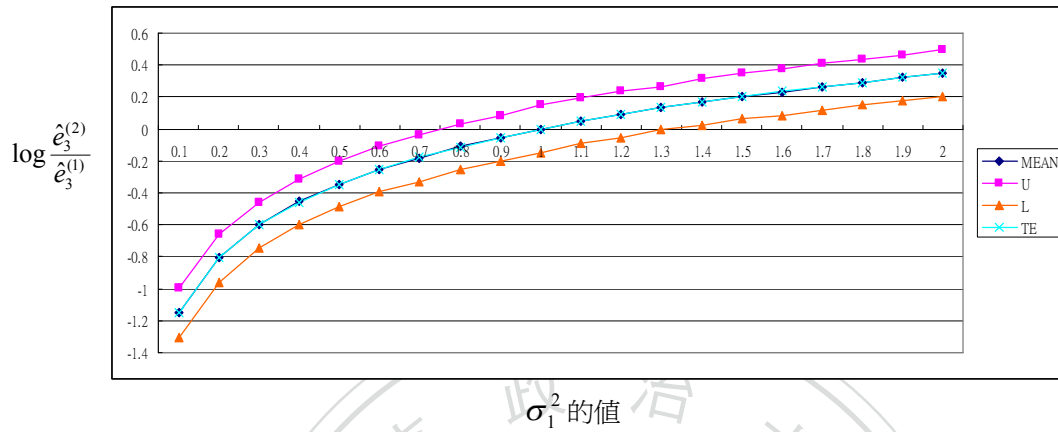
( $\sigma_3^2=1$ ，  $\sigma_2^2=\sigma_4^2=1$ ，  $\rho_1=0.1$ ，  $\rho_2=0.1$ ，  $\sigma_1^2=0.1, 0.2, \dots, 2$ )



在 95%的信心水準下， 發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.5~1.9 這個區間外時， 信賴區間的值不包含 0。

圖 D-2：不相容性的變化圖

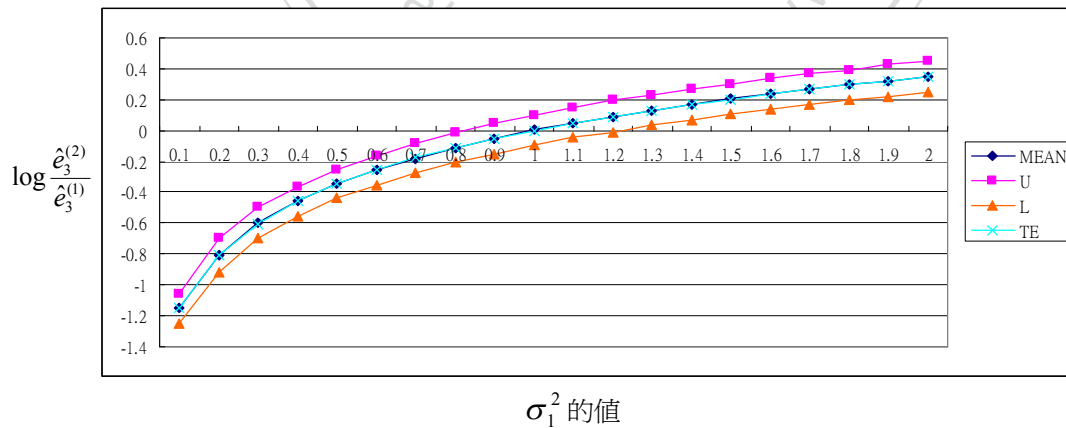
$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.2, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.7~1.4 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-3：不相容性的變化圖

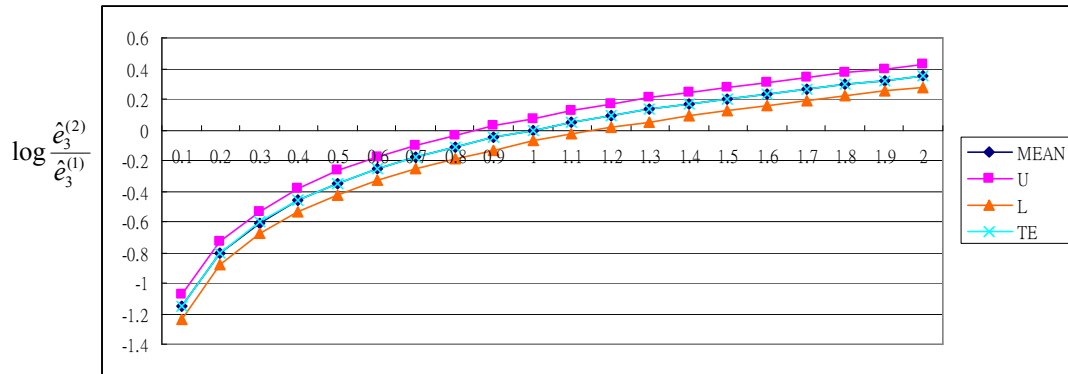
$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.3, \rho_2 = 0.3, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.8~1.3 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-4：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.4, \rho_2 = 0.4, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$

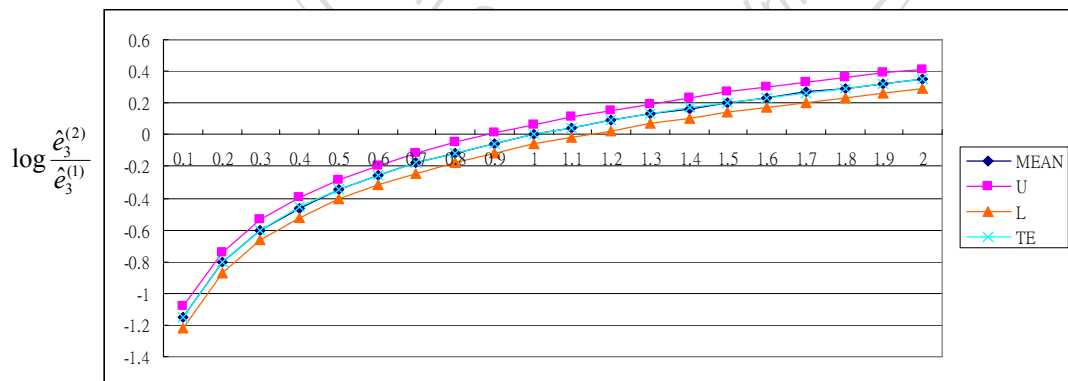


$\sigma_1^2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.8~1.2 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-5：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.5, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$

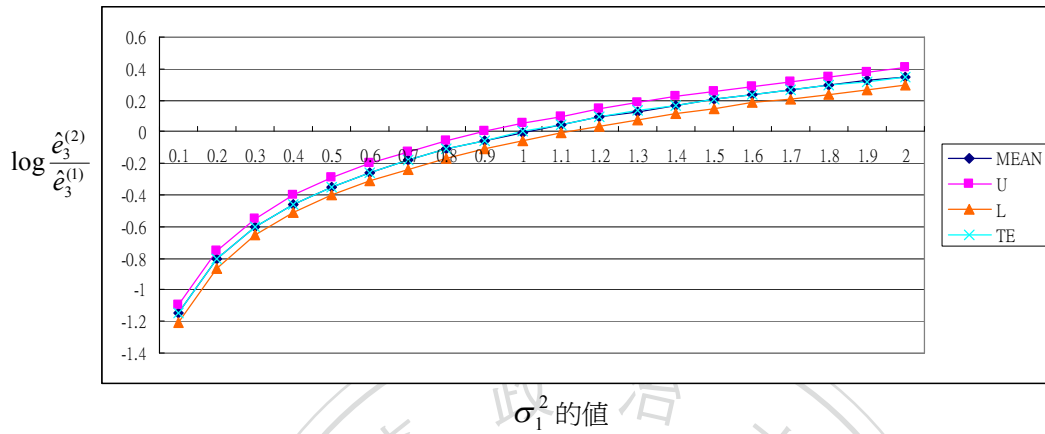


$\sigma_1^2$  的值

在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.8~1.2 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-6：不相容性的變化圖

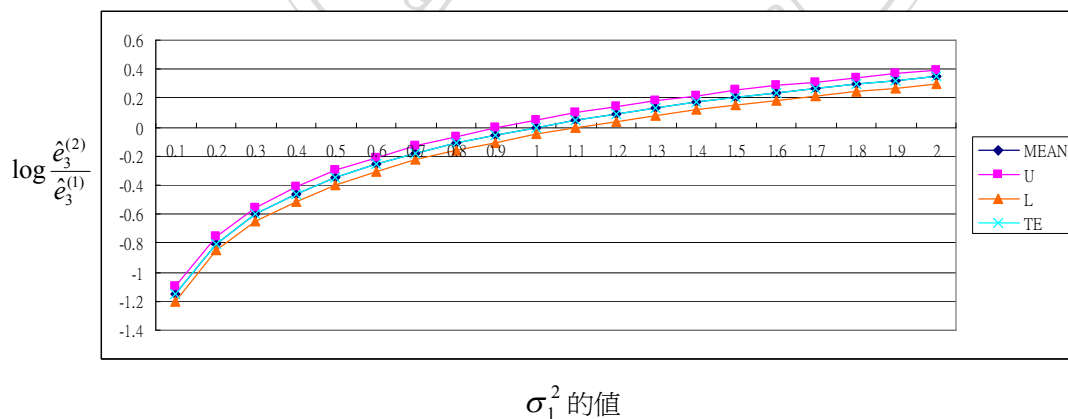
$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.6, \rho_2 = 0.6, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.8~1.2 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-7：不相容性的變化圖

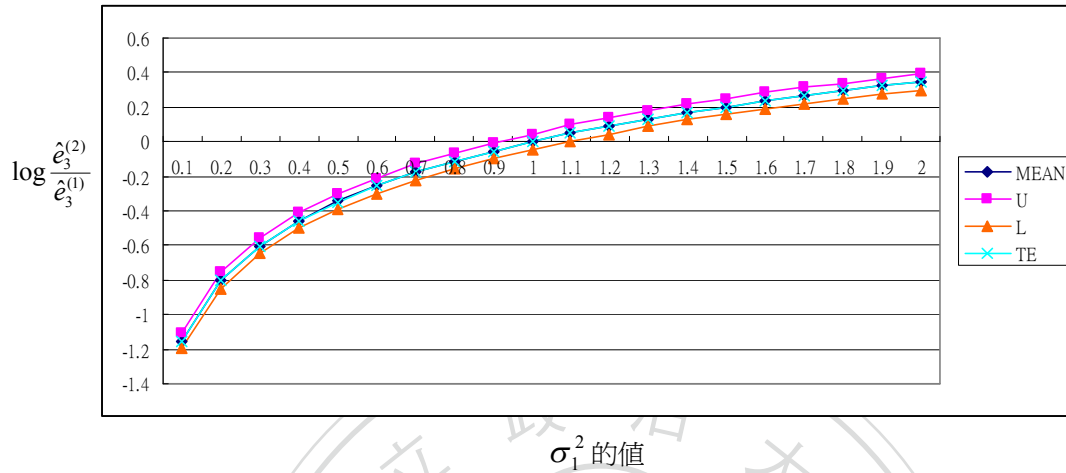
$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.7, \rho_2 = 0.7, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.9~1.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-8：不相容性的變化圖

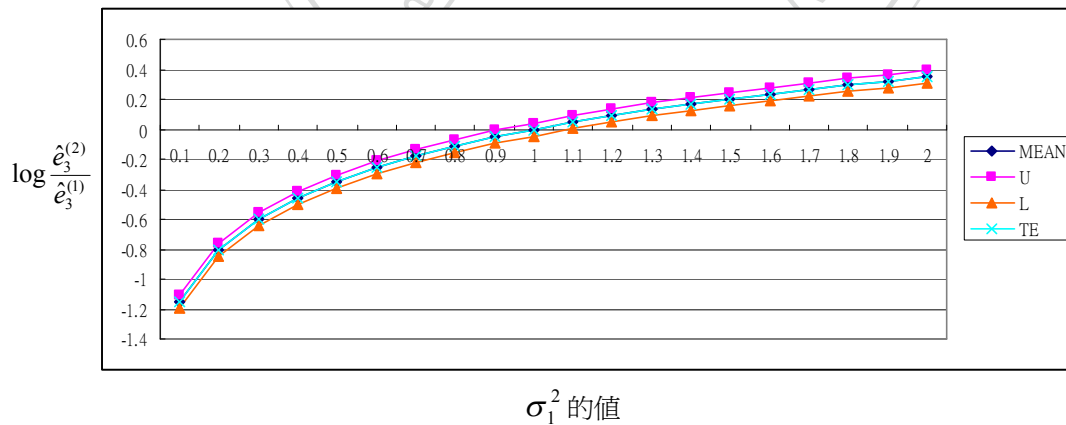
$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.8, \rho_2 = 0.8, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.9~1.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。

圖 D-9：不相容性的變化圖

$$(\sigma_3^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1, \rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.9, \sigma_1^2 = 0.1, 0.2, \dots, 2)$$



在 95% 的信心水準下，發現  $\sigma_1^2$  的值在 0.9~1.1 這個區間外時，信賴區間的值不包含 0。



將模擬資料的結果圖 D-1~圖 D-9 進一步整理可得下表：

表 D-1：假設  $\sigma_3^2=1$  及  $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = 1$ ， $\rho_1 = \rho_2 = \pm 0.1, \pm 0.2, \dots, \pm 0.9$ ，

對應的不可判別及可判別的  $\sigma_1^2$  值區間

| k | $\rho_1 = \rho_2$ 的值 | 不可判別的 $\sigma_1^2$ 值區間，區間寬( $\frac{1.4}{k}$ )  | 可判別的 $\sigma_1^2$ 值區間           |
|---|----------------------|--|---------------------------------|
| 1 | $\pm 0.1$            | 0.5~1.9 ， 1.4                                  | $(0.1, 0.5) \cup (1.9, \infty)$ |
| 2 | $\pm 0.2$            | 0.7~1.4 ， $0.7 (= \frac{1.4}{2} = 0.7)$        | $(0.1, 0.7) \cup (1.4, \infty)$ |
| 3 | $\pm 0.3$            | 0.8~1.3 ， $0.5 (\approx \frac{1.4}{3} = 0.47)$ | $(0.1, 0.8) \cup (1.3, \infty)$ |
| 4 | $\pm 0.4$            | 0.8~1.2 ， $0.4 (\approx \frac{1.4}{4} = 0.35)$ | $(0.1, 0.8) \cup (1.2, \infty)$ |
| 5 | $\pm 0.5$            | 0.8~1.2 ， $0.4 (\approx \frac{1.4}{5} = 0.28)$ | $(0.1, 0.8) \cup (1.2, \infty)$ |
| 6 | $\pm 0.6$            | 0.8~1.2 ， $0.4 (\approx \frac{1.4}{6} = 0.23)$ | $(0.1, 0.8) \cup (1.2, \infty)$ |
| 7 | $\pm 0.7$            | 0.9~1.1 ， $0.2 (= \frac{1.4}{7} = 0.2)$        | $(0.1, 0.9) \cup (1.1, \infty)$ |
| 8 | $\pm 0.8$            | 0.9~1.1 ， $0.2 (\approx \frac{1.4}{8} = 0.18)$ | $(0.1, 0.9) \cup (1.1, \infty)$ |
| 9 | $\pm 0.9$            | 0.9~1.1 ， $0.2 (\approx \frac{1.4}{9} = 0.17)$ | $(0.1, 0.9) \cup (1.1, \infty)$ |

根據模擬結果可以發現，當  $\sigma_3^2=1$ ， $\sigma_2^2 = \sigma_4^2$ ，且  $\rho_1 = \rho_2$  的絕對值為  $0.1 \times k$ ，

$k=1, 2, \dots, 9$ ，則當  $\sigma_3^2$  由 1 增加到 20 時，不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間，不會超過

$(\frac{\sigma_3^2}{2}, 2\sigma_3^2)$  的區間，且對應的不可判別的  $\sigma_1^2$  值的區間寬度約為  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 0.1$

時所對應不可判別的  $\sigma_1^2$  值區間寬度的  $\frac{1}{k}$  倍。

## 參考文獻

Arnold, B.C. and Press, S.J. (1989) Compatible conditional distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 84, 152-156.

Arnold, B.C., Castillo, E., and Sarabia, J.M. (1999) *Conditional specification of Statistical Models*. New York: Springer.

