# 第一章　　緒論

數學的教學課程中，曾經提到凸$n$邊形的內角和的問題。對於這個問題，我們利用凸$n$邊形內不相交的對角線，將凸$n$邊形分割成$(n-2)$個三角形，再由三角形的內角和是$180^\circ$，得知凸$n$邊形的內角和爲$180^\circ\times(n-2)$。

進一步去深入了解，發現凸多邊形利用不相交的對角線分割成三角形的方法不是只有一種方式，例如四邊形有二種方式，而五邊形則有五種方式；將凸$n$邊形利用不相交的對角線分割出$(n-2)$個三角形的方法稱爲凸多邊形的三角化，在離散的課程中，利用生成函數的方式，計算凸$(n+2)$邊形三角化的方法數，求得答案爲$\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$，這個數字是由比利時數學家 C*atalan* 在 1838 年解決問題時候所提出，因此我們將它稱之爲 *Catalan number*。

在$n\times n$的正方形街道中，由$(0，0)\to(n，n)$走$n$步$\vec{i}$，$n$步$\vec{j}$且沿途中$\vec{j}$不超過$\vec{i}$的數目的捷徑走法，我們將它稱之爲好路徑，其解答亦是$\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$，由於好路徑方法數的計算，可透過簡單的組合運算得到(詳見附錄二)，但生成函數的方法較爲困難不易讓學生接受，所以興起了一個念頭，想找出這二者彼此間的一對一的對應關係，來使學生容易接受這個解答，才促成了這篇論文。

在第二章，我將先利用生成函數找到凸$(n+2)$邊形三角化的方法數的答案是$\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}$，再建立二者之間彼此的對應關係，並透過對射函數的方式，證明對應關係是可行的。

在第三章，證明對應關係成立後，我們給予實例證明，利用對應關係將五邊形的三角化和$3\times3$的正方形街道的好路徑做一對一對應，接著針對本篇論文文章做簡單的感想和結語當做最後的總結。

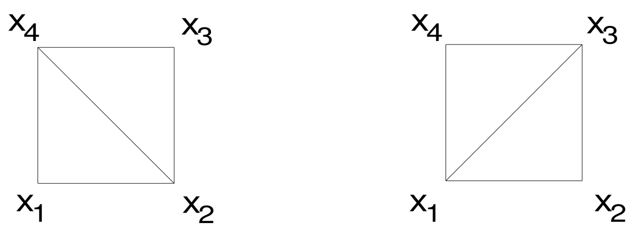
# 第二章　　凸多邊形的三角化和好路徑的對應

## 2.1：凸多邊形的三角化

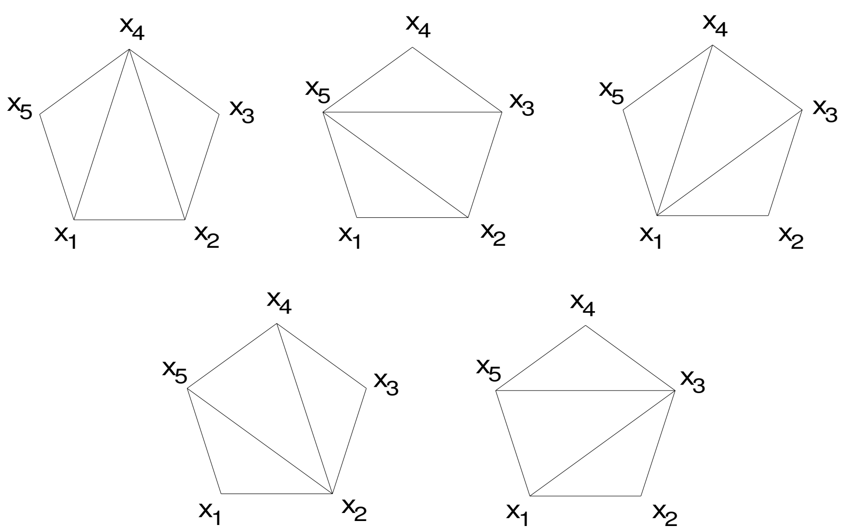
緒論中曾經提到凸多邊形的三角化的意義，因此我們在這裡正式定義：

[定義 2.1]：將凸多邊形利用不相交的對角線，使凸多邊形內部分割成三角形的方法，我們稱之為凸多邊形的三角化。

由定義可知，四邊形的三角化方式會有二種方法，如下圖：

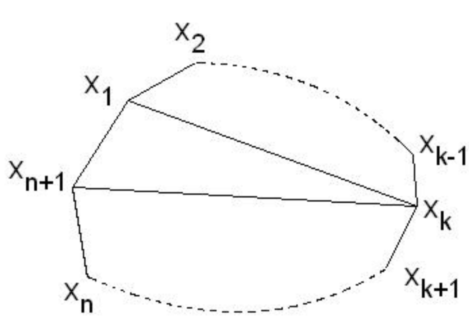



而五邊形的三角化方式會有五種方法，如下圖：




接下來，我們針對凸$(n+1)$邊形求解：

假設凸$(n+1)$邊形的三角化有$b_{n+1}$種方法



由圖形可知，$b_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot b_{n-k+2}$

再假設 $a_n = b_{n+1}$ 且令 $a_1 = 1$，可得到 $a_n = \sum_{k=2}^{n} a_{k-1} \cdot a_{n-k+1}$

再令 $i = k-1$，則得到 $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot a_{n-i}$

同時我們令生成函數 $A(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$，$a_0 = 0$

則 $A^2(x) = \sum_{n\ge 0} A_n x^n$，且 $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}$

$$
\begin{aligned}
\text{由 } A^2(x) = \sum_{n\ge 0} A_n x^n &= \sum_{n\ge 0} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots\cdots + a_n a_0) x^n \\
&= \sum_{n\ge 2} (a_1 a_{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} a_1) x^n \\
&= \sum_{n\ge 2} a_n x^n \\
&= A(x) - a_0 - a_1 x \\
&= A(x) - x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow A(x) - x = A^2(x) \Rightarrow A^2(x) - A(x) + x = 0 \Rightarrow A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

另外，我們利用生成函數可推得廣義的二項式定理：

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots\cdots \qquad , n \text{ 是有理數}$$

同時我們定義

$$C_n^y = \begin{cases} 1 & \text{當} \quad n = 0 \\ \dfrac{y \cdot (y-1) \cdot (y-2) \cdots [y-(n-1)]}{n!} & \text{當} \quad n \ge 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\text{因此，} \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\ge 0} C_n^{\frac{1}{2}} (-4x)^n &= C_0^{\frac{1}{2}} + \sum_{n\ge 1} C_n^{\frac{1}{2}} (-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots[\frac{1}{2}-(n-1)]}{n!} (-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots[\frac{1}{2}-(n-1)]}{n!} (-1)^n 2^n 2^n x^n \\
&= 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{1(2-1)(2\times 2-1)\cdots[2(n-1)-1]}{n!} (-1) 2^n x^n
\end{aligned}
$$

$$=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{n!}(-1)2^n x^n$$

$$=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-3)(2n-2)}{n!\cdot 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}(-1)2^n x^n$$

$$=1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n!\cdot(n-1)!}(-1)2x^n$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1\pm[1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}(-1)2x^n]}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

因 $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ ，且 $a_0=0$ ，所以 $A(x)$ 第一項爲 $x$ ，因此上面的(*)中取負號

$$\Rightarrow A(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}C_{n-1}^{2n-2}x^n$$

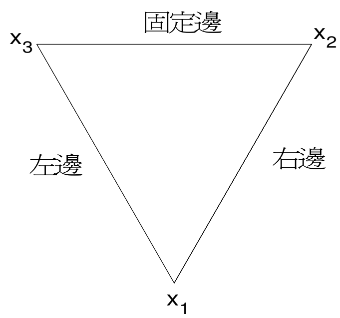
$$\therefore a_n=\frac{1}{n}C_{n-1}^{2n-2}\Rightarrow b_{n+1}=a_n=\frac{1}{n}C_{n-1}^{2n-2}$$

由生成函數知凸 $(n+2)$ 邊形的三角化的方法數 $b_{n+2}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$ 爲 *Catalan number*。

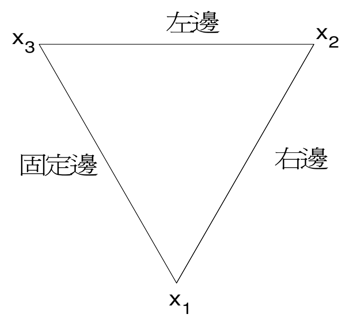
## 2.2：對射函數的建立

我們對一個任意的$\Delta x_i x_j x_k$，將三邊依$\overline{x_j x_k}$，$\overline{x_i x_k}$，$\overline{x_i x_j}$的逆字典順序將之排序。若其中一邊爲固定邊時，另外二邊排序在前的稱爲$\Delta x_i x_j x_k$的左邊，排序在後的稱爲$\Delta x_i x_j x_k$的右邊。(其中$i<j<k$)

例如：$\Delta x_1 x_2 x_3$，三邊依序爲$\overline{x_2 x_3}$，$\overline{x_1 x_3}$，$\overline{x_1 x_2}$。




圖(一)




圖(二)

若$\overline{x_2 x_3}$爲固定邊時，則稱$\overline{x_1 x_3}$爲$\Delta x_1 x_2 x_3$爲左邊，稱$\overline{x_1 x_2}$爲右邊，如圖(一)；

若$\overline{x_1 x_3}$爲固定邊時，則稱$\overline{x_2 x_3}$爲$\Delta x_1 x_2 x_3$的左邊，稱$\overline{x_1 x_2}$爲右邊，如圖(二)。

[定義 2.2]：在$(0，0)\to(n，n)$的$n\times n$正方形街道中，走$n$步$\vec{i}$向右，$n$步$\vec{j}$向上且沿途中$\vec{j}$不超過$\vec{i}$的數目的捷徑走法，我們稱之爲捷徑走法的好路徑。

再來，我們令

$T$:凸$(n+2)$邊形$x_1 x_2 \cdots\cdots x_{n+1} x_{n+2}$三角化的所有可能，所成的集合。

$P$:$(0，0)\to(n，n)$的$n\times n$正方形街道中，捷徑走法的好路徑所成的集合。

定義函數$f:T\to P$，並依據下列的原則建構使得$P=f(T)$

(1) 凸$(n+2)$邊形$x_1 x_2 \cdots\cdots x_{n+1} x_{n+2}$三角化後，以$\Delta x_i x_{n+1} x_{n+2}$爲基準三角形，其中$(1\le i\le n)$，以$\overline{x_{n+1} x_{n+2}}$當作固定邊，左邊$\overline{x_i x_{n+2}}$代表$\vec{i}$，右邊$\overline{x_i x_{n+1}}$代表$\vec{j}$，

將之分別對應到捷徑走法的第 1 步走 $\vec{i}$ ，即是由(0，0)→(1，0)，第 $2i$ 步走 $\vec{j}$ 且是由($i$ ，$i-1$)→($i$ ，$i$)。

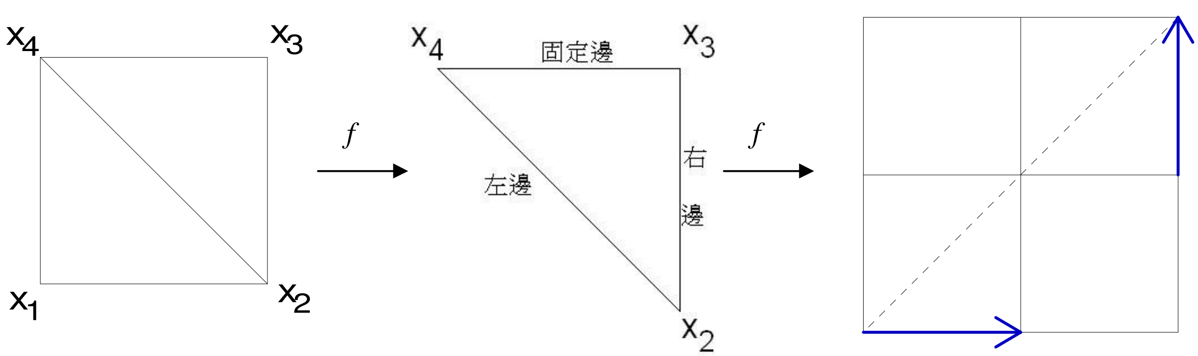
(2) $\Delta x_i x_{n+1} x_{n+2}$ 將凸 $(n+2)$ 邊形分成兩部分，和 $\Delta x_i x_{n+1} x_{n+2}$ 共用左邊 $\overline{x_i x_{n+2}}$ 的凸 $(i+1)$ 邊形 $x_1 x_2 \cdots\cdots x_i x_{n+2}$ 稱為左半部，而和 $\Delta x_i x_{n+1} x_{n+2}$ 共用右邊 $\overline{x_i x_{n+1}}$ 的凸 $(n+2-i)$ 邊形 $x_i x_{i+1} \cdots\cdots x_n x_{n+1}$ 稱為右半部。顯然，左右二半部也是凸多邊形三角化的合格結果。

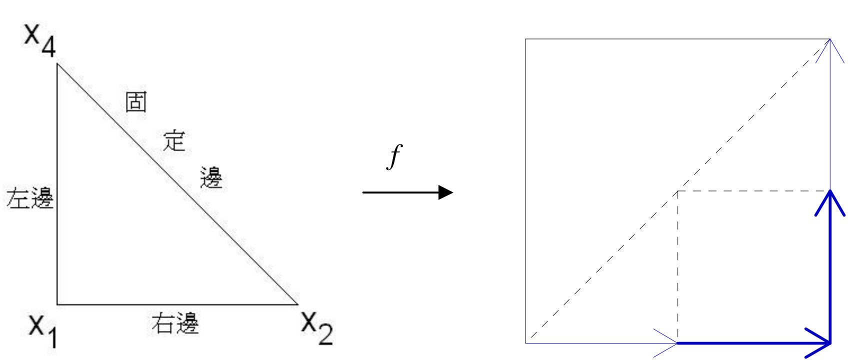
(3) 以共用邊 $\overline{x_i x_{n+2}}$ 為固定邊，將左半部的凸 $(i+1)$ 邊形對應到(1，0)→($i$，$i-1$)的($i-1$)×($i-1$)正方形街道的捷徑走法。(註)

(4) 以共用邊 $\overline{x_i x_{n+1}}$ 為固定邊，將右半部的凸 $(n+2-i)$ 邊形對應到($i$，$i$)→($n$，$n$)的($n-i$)×($n-i$)正方形街道的捷徑走法。(註)

舉例說明：

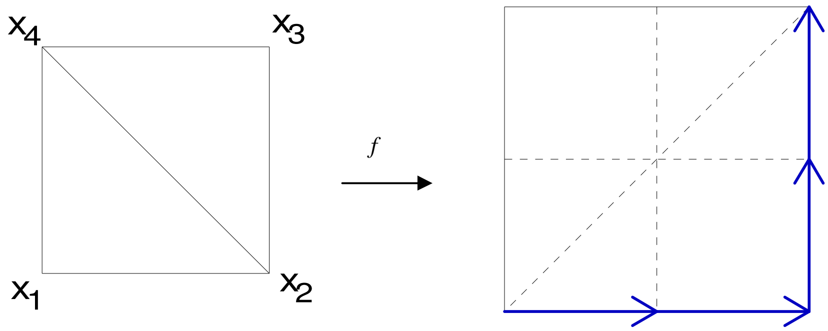
1.



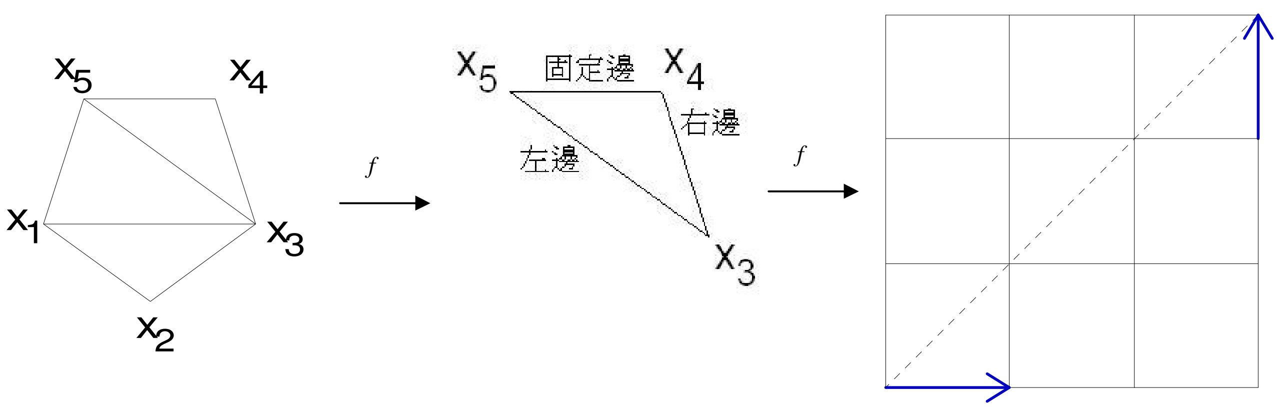

註：以共用邊為固定邊找到基準三角形 $\Delta x_l x_m x_n$ 。依照規則，左邊代表 $\vec{i}$ ，右邊代表 $\vec{j}$ ，將之與好路徑對應。

所以得到：

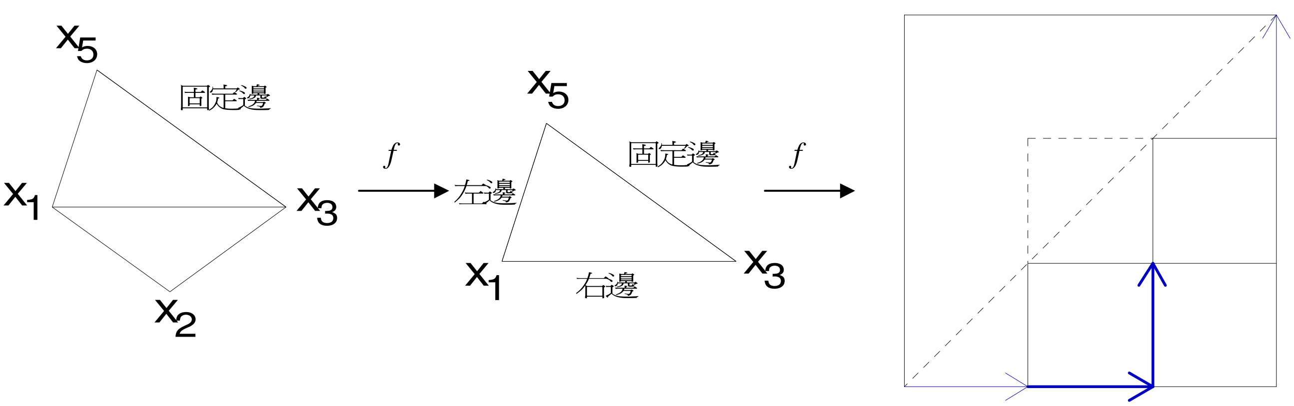


$x_4$
$x_3$
$x_1$
$x_2$
$f$

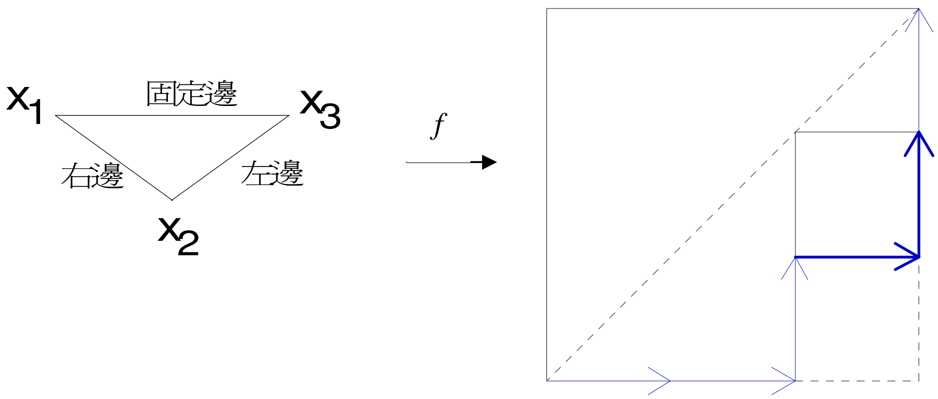

2.



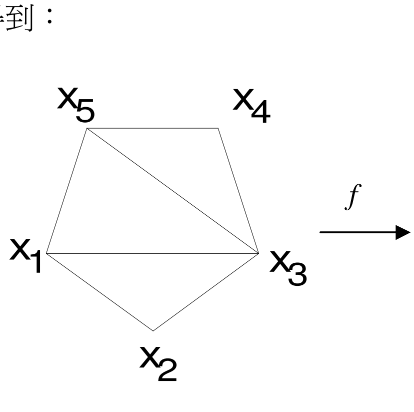
$x_5$
$x_4$
$x_1$
$x_3$
$x_2$
$f$
$x_5$
固定邊
$x_4$
右邊
左邊
$x_3$
$f$

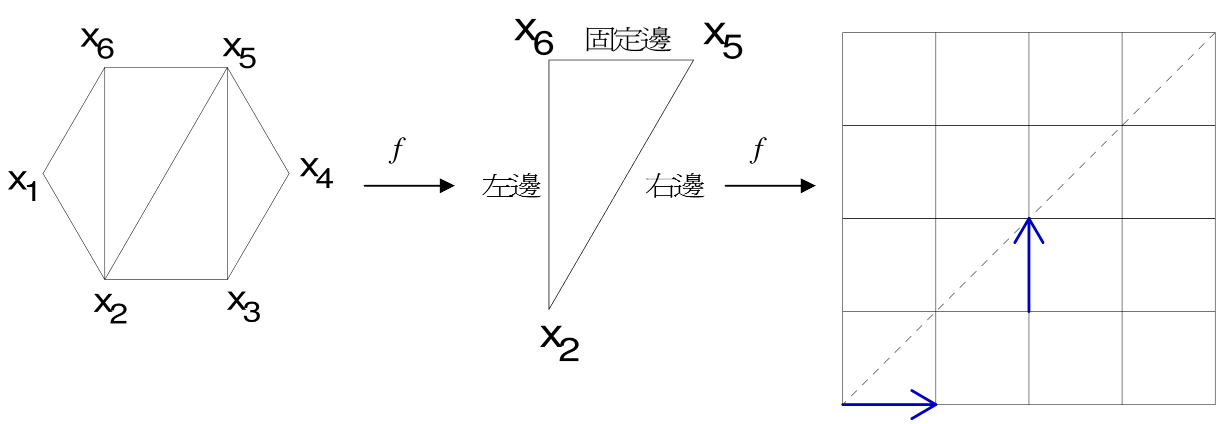
$x_5$
固定邊
$x_1$
$x_3$
$x_2$
$f$
$x_5$
固定邊
左邊
$x_1$
右邊
$x_3$
$f$

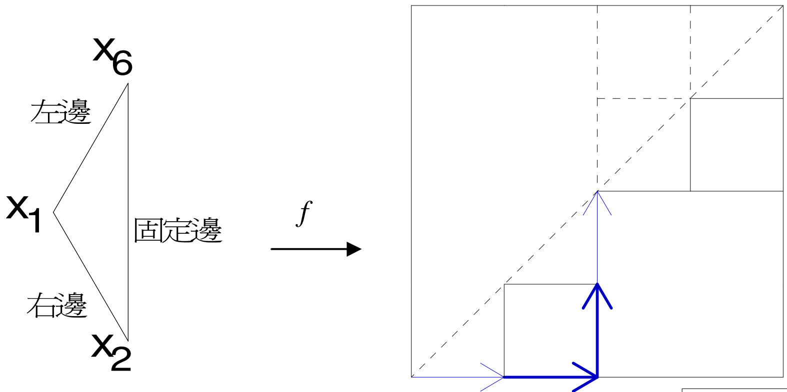

x1
固定邊
x3
右邊
左邊
x2
f

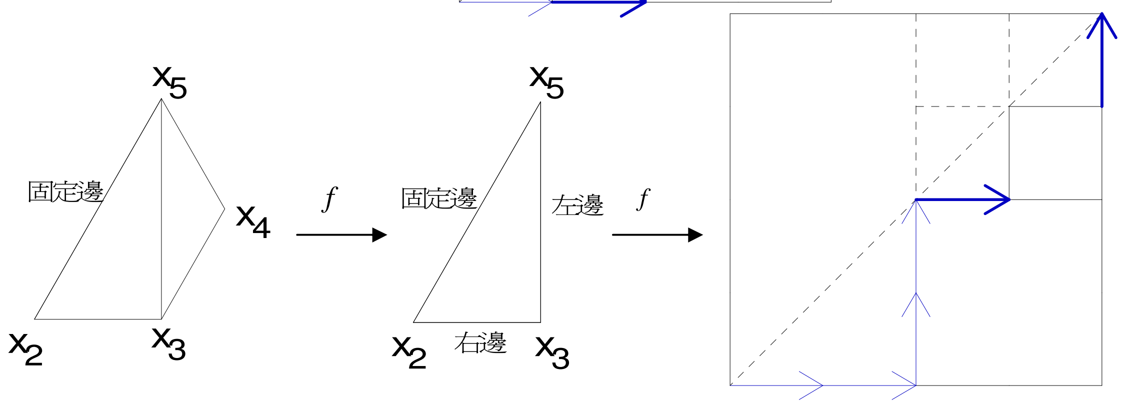
所以得到：

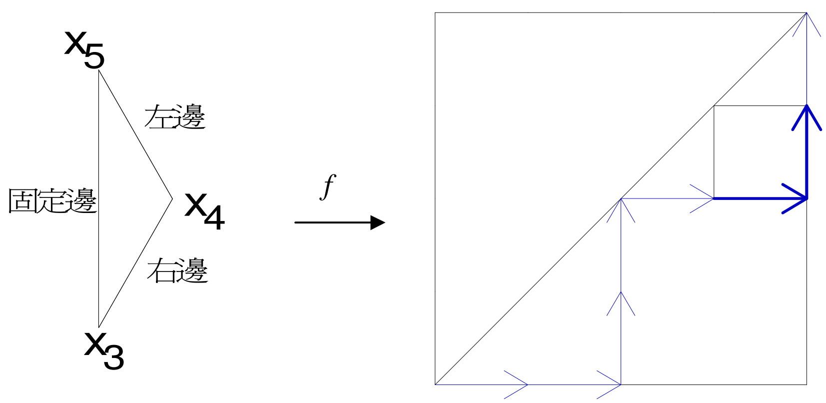

x5
x4
x1
x3
x2
f

3.

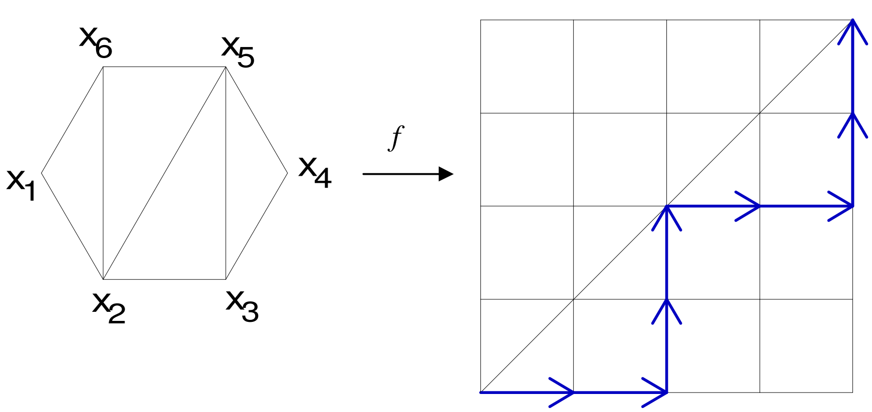

x6
x5
x1
x4
x2
x3
f
x6
固定邊
x5
左邊
右邊
x2
f


x6
左邊
x1
固定邊
右邊
x2
f


x5
固定邊
x4
x2
x3
f
x5
固定邊
左邊
x2
右邊
x3
f


x5
左邊
固定邊
x4
右邊
x3
f

所以得到：


x6
x5
x1
x4
x2
x3
f

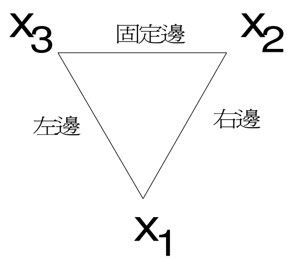
## 2.3：函數 $f$ 是 1 對 1 且映成的函數：

我們將證明定義的函數是 1 對 1 且映成的函數。

[證明]：我們利用數學歸納法，對正方形街道的邊數 $n$ 做討論

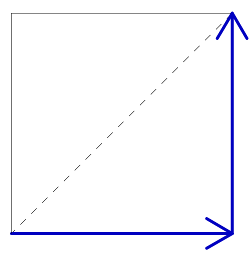
(1)當 $n=1$時

集合 $T$ 中只有一個元素 $T_3=$




而$1\times1$的正方形街道中，好路徑的捷徑走法也只有一種$\vec{i}\rightarrow\vec{j}$ 。

即 $P_1=$



所以 $f$ 是 1 對 1 且映成的函數

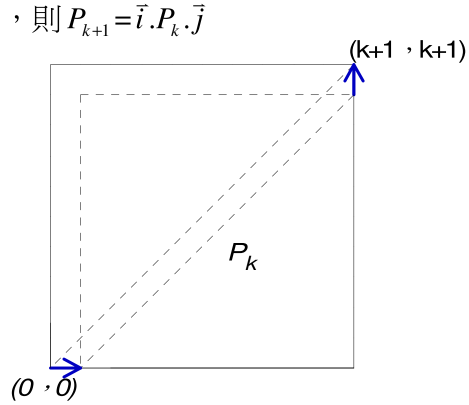
(2)設 $n=1,2,3,\cdots\cdots,k$ 時， $f$ 均是 1 對 1 且映成的函數

(3)則 $n=k+1$時，

針對 $P_{k+1}$ 的捷徑走法中第一次走到($i$ ，$i$)的該步 $\vec{j}$ 做討論($1\le i\le k+1$)

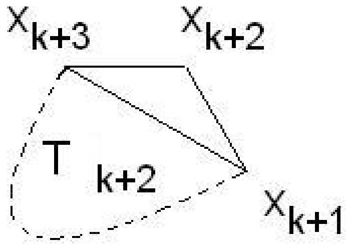
①.$i=k+1$ ，則 $P_{k+1}=\vec{i}.P_k.\vec{j}$

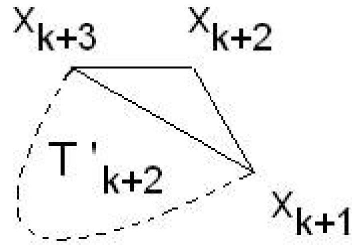
即 $P_{k+1}=$




( I )若 $f(T_{k+3})=f(T'_{k+3})=P_{k+1}$ ，

其中$T_{k+3}=\Delta x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\cup T_{k+2}$ ，$T'_{k+3}=\Delta x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\cup T'_{k+2}$

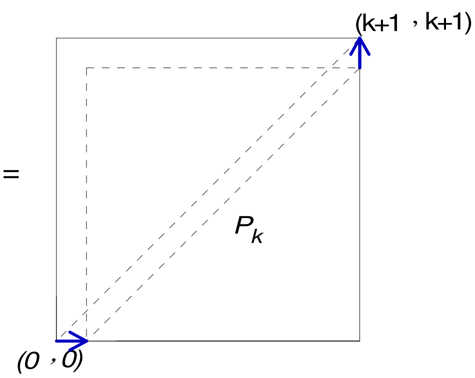
即$T_{k+3}=$ 


且$T'_{k+3}=$ 

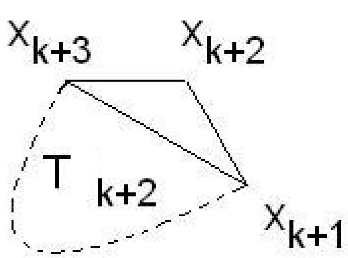

因爲$i=k+1$，所以在$P_k$中的$\vec{j}$所到達的點，均不超過($m$ ，$m-1$)，其中$1\le m\le k+1$。所以$P_k$也是一個好路徑的走法，因此由函數定義可知$f(T_{k+2})=f(T'_{k+2})=P_k$，再由(2)歸納假設可知$T_{k+2}=T'_{k+2}$，得$T_{k+3}=T'_{k+3}$。

所以$f$是1對1的函數

(Ⅱ)$\forall P_{k+1}=\vec{i}.P_k.\vec{j}$ ， $P_{k+1}$的捷徑走法中第一次走到對角線爲($k+1$ ，$k+1$)

即$P_{k+1}=$ 


令$T_{k+3}=\Delta x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\cup T_{k+2}$使得$f(T_{k+3})=P_{k+1}$

即$T_{k+3}=$ 

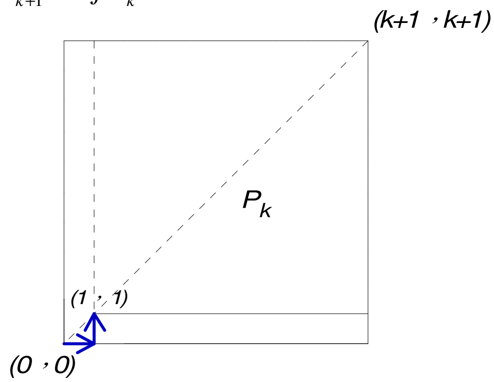

因爲$P_{k+1}$的捷徑走法中第一次走到對角線爲($k+1$，$k+1$)，所以在$P_k$中的$\vec{j}$所到達的點，均不超過($m$ ，$m-1$)，其中$1\le m\le k+1$。所以$P_k$也

是一個好路徑的走法，由(2)歸納假設可知存在唯一的凸$(k+2)$邊形$T_{k+2}$

使得$f(T_{k+2})=P_k$，得凸$(k+3)$邊形$T_{k+3}$是唯一且$f(T_{k+3})=P_{k+1}$。

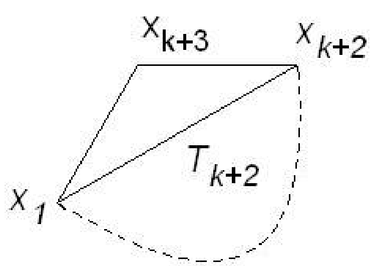
所以$f$是映成函數

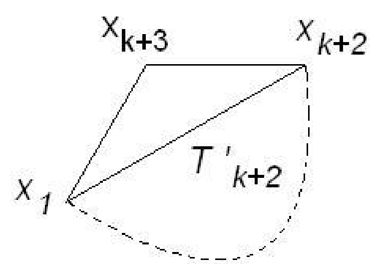
②.$i=1$，則$P_{k+1}=\vec{i}.\vec{j}.P_k$

即$P_{k+1}=$ 


(Ⅰ)若$f(T_{k+3})=f(T'_{k+3})=P_{k+1}$，

其中$T_{k+3}=\Delta x_1x_{k+2}x_{k+3}\cup T_{k+2}$，$T'_{k+3}=\Delta x_1x_{k+2}x_{k+3}\cup T'_{k+2}$

即$T_{k+3}=$ 

且$T'_{k+3}=$ 

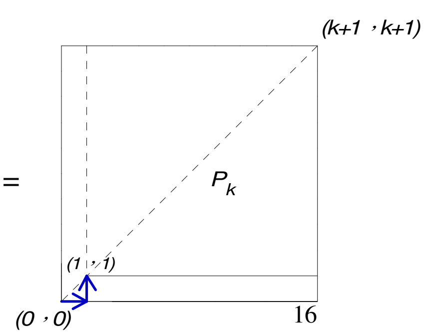

顯然，$P_k$是由(1，1)→(k+1，k+1)的一種好路徑。

由函數定義可知$f(T_{k+2})=f(T'_{k+2})=P_k$，因此由(2)歸納假設可知

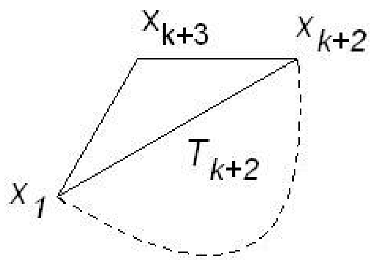
$T_{k+2}=T'_{k+2}$，因此得證$T_{k+3}=T'_{k+3}$。

所以$f$是1對1的函數

(Ⅱ)$\forall P_{k+1}=\vec{i}.\vec{j}.P_k$，$P_{k+1}$的捷徑走法中第一次走到對角線爲(1，1)

即$P_{k+1}=$ 

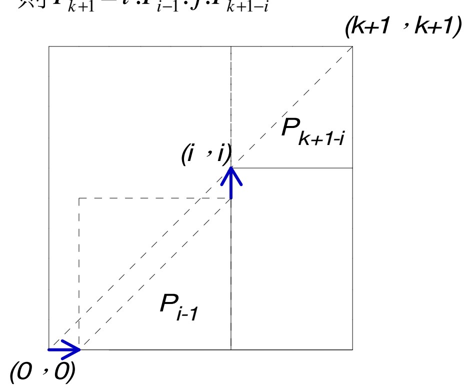
令$T_{k+3} = \Delta x_1 x_{k+2} x_{k+3} \cup T_{k+2}$使得$f(T_{k+3}) = P_{k+1}$

即$T_{k+3} =$ 


顯然，$P_k$是由(1，1)→(k+1，k+1)的一種好路徑，由(2)歸納假設可知存在唯一的凸$(k+2)$邊形$T_{k+2}$使得$f(T_{k+2}) = P_k$，所以得知凸$k+3$邊形$T_{k+3}$是唯一且$f(T_{k+3}) = P_{k+1}$。

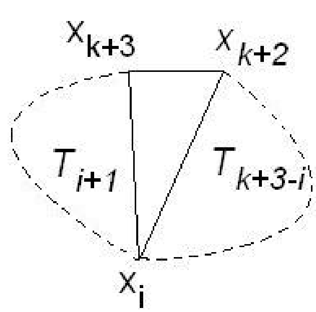
所以$f$是映成函數

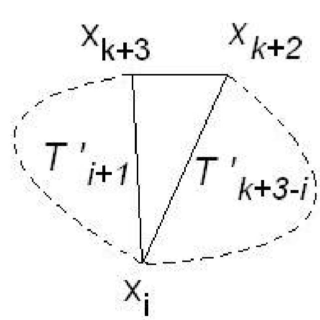
③. $2 \le i \le k$，則$P_{k+1} = \vec{i}.P_{i-1}.\vec{j}.P_{k+1-i}$

即$P_{k+1} =$ 


( I )若$f(T_{k+3}) = f(T'_{k+3}) = P_{k+1}$，

其中$T_{k+3} = T_{i+1} \cup \Delta x_i x_{k+2} x_{k+3} \cup T_{k+3-i}$，$T'_{k+3} = T'_{i+1} \cup \Delta x_i x_{k+2} x_{k+3} \cup T'_{k+3-i}$

即$T_{k+3} =$ 

且 $T'_{k+3} =$ 

顯然，由①可知，因爲 $P_{k+1}$ 的捷徑走法中第一次走到對角線爲$(i，i)$，

所以在 $P_{i-1}$ 中的 $\vec{j}$ 所到達的點，均不超過$(m，m-1)$，其中$1 \le m \le i$ 。

所以 $P_{i-1}$ 也是一個由$(1，0) \to (i，i-1)$的好路徑走法，由②可知道 $P_{k+1-i}$

是由$(i，i) \to (k+1，k+1)$的一種好路徑。

由函數定義可知 $f(T_{i+1}) = f(T'_{i+1}) = P_{i-1}$ 且 $f(T_{k+3-i}) = f(T'_{k+3-i}) = P_{k+1-i}$ ，

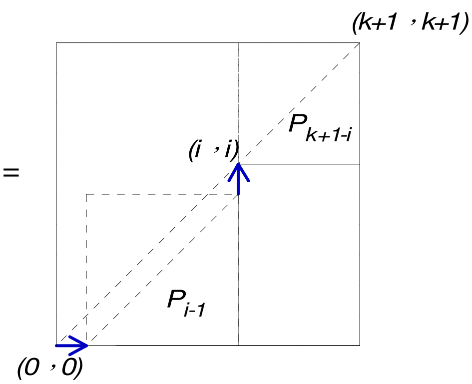
又$1 \le i-1 \le k-1$，$1 \le k+1-i \le k-1$，再由(2)歸納假設可知$T_{i+1} = T'_{i+1}$ ，

$T_{k+i-1} = T'_{k+i-1}$ ，因此得$T_{k+3} = T'_{K\backslash k+3}$ 。

所以 $f$ 是1對1的函數

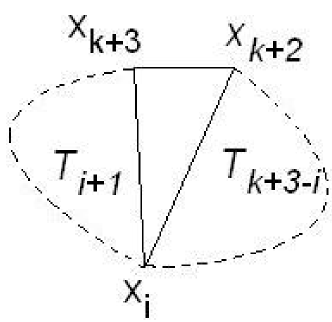
(Ⅱ) $\forall P_{k+1} = \vec{i}.P_{i-1}.\vec{j}.P_{k+1-i}$ ， $P_{k+1}$ 的捷徑走法中第一次走到對角線爲$(i，i)$

即 $P_{k+1} =$




令 $T_{k+3} = T_{i+1} \cup \Delta x_i x_{k+2} x_{k+3} \cup T_{k+3-i}$

即 $T_{k+3} =$




因爲$1 \le i-1 \le k-1$，$1 \le k+1-i \le k-1$，且 $P_{k+1}$ 的捷徑走法中第一次走到對角線爲$(i，i)$，所以在 $P_{i-1}$ 中的 $\vec{j}$ 所到達的點均不超過$(m，m-1)$，其中$1 \le m \le i$，所以 $P_{i-1}$ 是一個好路徑走法，由②可知道 $P_{k+1-i}$ 亦是一種好路徑。由(2)歸納假設可知存在唯一的一個凸$(i+1)$邊形 $T_{i+1}$ 和唯一的一個凸$(k+3-i)$邊形 $T_{k+3-i}$ 使得 $f(T_{i+1}) = P_{i-1}$ 且 $f(T_{k+3-i}) = P_{k+1-i}$ ，得凸

$(k+3)$ 邊形 $T_{k+3}$ 是唯一且 $f(T_{k+3})=P_{k+1}$ 。

所以 $f$ 是映成函數

綜合以上①、②、③證明可知：函數 $f$ 是 1 對 1 且映成的函數。