

附 錄

第貳章 選擇權賣方有利可圖嗎？加價利益的觀點

附錄一、買權與賣權加價利益相等之證明

買權及賣權之加價利益必須相等，如下式(A.1)，否則會產生套利機會。

$$MUI_C = MUI_P \quad (\text{A.1})$$

證明如下：到期時 $(T-t) \rightarrow 0$ ， $(T-t)_a \rightarrow 0$ ， $\tilde{S}_T = S_T$ ，得到

$$C_T^m = C_T^m(\tilde{\sigma}^{adj}, \tilde{S}_T, K, (T-t)_a, (T-t)) = (S_T - K)^+$$

$$P_T^m = P_T^m(\tilde{\sigma}^{adj}, \tilde{S}_T, K, (T-t)_a, (T-t)) = (K - S_T)^+$$

$$\tilde{C}_T = C_T(\sigma^g, \tilde{S}_T, K, (T-t)_a, T-t) = (S_T - K)^+$$

$$\tilde{P}_T = P_T(\sigma^g, \tilde{S}_T, K, (T-t)_a, T-t) = (K - S_T)^+$$

由上四式，得到 $C_T^m = \tilde{C}_T$ ， $P_T^m = \tilde{P}_T$ ，因此到期時 $MUI_C = C_T^m - \tilde{C}_T = 0$ 且 $MUI_P = P_T^m - \tilde{P}_T = 0$ ，皆收斂為零。

在標的價格的走向為中性看法下(即交易者認為之標的價格 \tilde{S}_t 等於扣除到期前累計股息之實際標的價格 S_t^D)，若 $C_t^m - \tilde{C}_t > P_t^m - \tilde{P}_t$ (買權市價相對賣權市價偏高， $MUI_C > MUI_P$)，則將買賣權市價代入買賣權平價公式(A.7)式，因為調整後隱含波動度與買賣權市價都為正向關係，而隱含標的價格與買權市價為正向關係，但與賣權市價為反向關係，因此若買權市價相對賣權市價偏高，則會得到較大的隱含標的價格 $\tilde{S}_t > S_t^D$ (扣除距選擇權到期日累計股息後之標的價格)，則可以進行套利，採取賣出買權，買進賣權的策略，同時借入現金 $K \times B(t, T)$ ，買進標的價格 S_t^D (小於 \tilde{S}_t ，預先扣除累計股息以簡化計算)，因此投資組合的現金流量為 $C_t^m - P_t^m + K \times B(t, T) - S_t^D > 0$ (或 $MUI_C + \tilde{C}_t - (MUI_P + \tilde{P}_t) + K \times B(t, T) - S_t^D > 0$) 並採取持有到期策略。

若 $S_T - K > 0$ ，則須支付買權買方 $K - S_T$ ，買進賣權價值為零，歸還借入現金含利息 K ，賣出標的收取現金 S_T ，所以到期現金流量為 0，而期初有正的現金流入，因此會有套利機會，可以獲利。反之若賣權市價相對買權市價偏高，則採取反向策略，持有到期可以產生利潤。所以買權與賣權的加價利益應相等，否則會存在套利機會。即 $MUI_C = MUI_P$ 。

第叁章 信用違約交換選擇權的評價與避險

附錄二、遠期信用違約交換選擇權與調整後的履約價之求算

T 期之遠期信用違約交換選擇權如下：

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_t &= \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^\beta} \beta_t E^\beta \left[\frac{1}{\beta_T} \left(\sum_{n=1}^N V_T^\beta (\tilde{A}_T^{T_{n-1}, T_n, L_n}) - K \sum_{n=1}^N V_T^\beta (B_T^{T_n, \delta_n}) \right)^+ \middle| \mathcal{H}_t \right] \\
&= \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^\beta} \beta_t E^\beta \left[\frac{1}{\beta_T} \left(\sum_{n=1}^N \left(V_T^\beta (\tilde{A}_T^{T_{n-1}, T_n, L_n}) - KV_T^\beta (B_T^{T_n, \delta_n}) \right) \right) 1_D \middle| \mathcal{H}_t \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} V_t^{\bar{B}_n} (B_T^{T_n, \delta_n}) E^{\bar{B}_n} \left(\left(V_T^{\bar{B}_n} (\tilde{A}_T^{T_{n-1}, T_n, L_n}) / V_T^{\bar{B}_n} (B_T^{T_n, \delta_n}) - K \right) 1_D \middle| \mathcal{H}_t \right) \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} \bar{B}_n(t) E^{\bar{B}_n} \left[\left(V_T^{\bar{B}_n} (\tilde{A}_T^{T_{n-1}, T_n, L_n}) / \bar{B}_n(T) - K \right)^+ \middle| \mathcal{H}_t \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} \bar{B}_n(t) E^{\bar{B}_n} \left((\tilde{S}_n(T) - K) 1_D \middle| \mathcal{H}_t \right)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

其中， 1_D 代表集合 D 的指標函數(indicator function)， $\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^\beta} \bar{B}_n(t) = B_n(t)$ ，
 $\bar{B}_n(t) = V_t^{\bar{B}_n} (B_T^{T_n, \delta_n})$ ，且 $V_T^{\bar{B}_n} (\tilde{A}_T^{T_{n-1}, T_n, L_n}) / \bar{B}_n(T) = \tilde{S}_n(T)$ 。

$$\begin{aligned}
D &:= \left\{ \left(\sum_{n=a+1}^b \left(V_T^\beta (\tilde{A}_T^{T_{n-1}, T_n, L_n}) - KV_T^\beta (B_T^{T_n, \delta_n}) \right) \right) > 0 \right\} = \left\{ V_T^\beta (\tilde{A}_T^{T_a, L_\Gamma}) - KV_T^\beta (B_T^{\delta_\Gamma}) > 0 \right\} \\
&= \left\{ V_T^\beta (B_T^{\delta_\Gamma}) (\tilde{S}(T, T_a, T_b) - K) > 0 \right\} = \left\{ \tilde{S}(T, T_a, T_b) - K > 0 \right\}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

其中， $\tilde{S}(T, T_a, T_b) - K$ 可得如下：

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(T, T_a, T_b) - K &= \frac{V_T^\beta (\tilde{A}_T^{T_a, L_\Gamma})}{V_T^\beta (B_T^{\delta_\Gamma})} - K = \frac{\sum_{n=a+1}^b \frac{L_n}{\delta_n} \left(\bar{B}_{n-1}(T) \frac{P(T, T_n)}{P(T, T_{n-1})} - \bar{B}_n(T) \right)}{\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(T)} - K \\
&= \sum_{n=a+1}^b \left(\frac{\bar{B}_n(T)}{\sum_{h=1}^N \bar{B}_h(T)} \left(\frac{L_n}{\delta_n} \left(\bar{B}_{n-1}(T) \frac{P(T, T_n)}{P(T, T_{n-1})} - \bar{B}_n(T) \right) \right) / \bar{B}_n(T) \right) - K \\
&= \sum_{n=a+1}^b \theta_n(T; \bar{B}_n(T)) \bar{S}_n(T) - K \\
&\approx \sum_{n=a+1}^b \theta_n(T; \bar{B}_n(T)) \tilde{S}_n(T) - K \\
&= \sum_{n=a+1}^b \theta_n(T; \bar{B}_n(T)) \tilde{S}_n(T) - \sum_{n=a+1}^b \theta_n(t; \bar{B}_n(T)) K_n^T \\
&= \sum_{n=a+1}^b \theta_n(T; \bar{B}_n(T)) (\tilde{S}_n(T) - K_n^T) \\
&\approx \sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) (\tilde{S}_n(T) - K_n^T)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中， $\theta_n(T; \bar{B}_n(T)) := \frac{\bar{B}_n(T)}{\sum_{k=a+1}^b \bar{B}_k(T)}$ ， $K = \sum_{n=a+1}^b \theta_n(T; \bar{B}_n(T)) K_n^T$ ，且由式(33)可得：

$$\bar{S}_n(T) = \frac{L_n}{\delta_n} \left(\bar{B}_{n-1}(T) \frac{P(T, T_n)}{P(T, T_{n-1})} - \bar{B}_n(T) \right) / \bar{B}_n(T) = \frac{L_n}{\delta_n} \left(\frac{\bar{B}_{n-1}(T)}{\bar{B}_n(T) (1 + \delta_n F_n(T))} - 1 \right),$$

$$\bar{S}_n(T) \approx \tilde{S}_n(T) = \frac{L_n}{\delta_n} \left(\frac{\bar{B}_{n-1}(T)}{\bar{B}_n(T)(1+\delta_n F_n(0))} - 1 \right) = \frac{L_n}{\delta_n} \left((w_n(T)/(1+\delta_n F_n(0))) - 1 \right) .$$

$$\text{而 } \bar{B}_n(T) = \delta_n E^\beta \left(\frac{\beta_T}{\beta_n} \left(1_{\tau > T_n} + 1_{T_{n-1} < \tau \leq T_n} \Delta_n^* \right) \middle| H_T \right) = \delta_n P(T, T_n) D_n(T) .$$

我們運用 Brigo and Mercurio (2006) p.862 的方法，求出在不同計價單位下的遠期信用違約交換率之動態過程。以向量表示之遠期信用違約交換率為
 $\tilde{S}(t) = (\tilde{S}_1(t), \tilde{S}_2(t), \dots, \tilde{S}_b(t))'$ ，其布朗運動以向量表達為：

$$W_t = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_b(t))' . d\tilde{S}_n(t) = \sigma_n(t) \tilde{S}_n(t) dW_n^n(t) , \text{ 對所有 } n \text{ 都成立} .$$

依 Brigo and Mercurio (2006) 定義向量擴散係數(vector diffusion coefficient)為 DC。 $\tilde{S}_m(t)$ 在 $\tilde{S}_n(t)$ 的計價單位 \bar{B}_n 下，且 $m < n$ ，則 dW^m 與 dW^n 的關係如下：

$$\begin{aligned} dW^m &= dW^n - \rho DC \left(\ln \left(\frac{\bar{B}_m}{\bar{B}_n} \right) \right)' dt \\ &= dW^n - \rho DC \ln \left(\left(\prod_{k=m+1}^n \left(\frac{\delta_k}{L_k} \tilde{S}_k + 1 \right) (1 + \delta_k F_k(0)) \right) \right)' dt \\ &= dW^n - \rho \sum_{k=m+1}^n DC \ln \left(\left(\frac{\delta_k}{L_k} \tilde{S}_k + 1 \right) (1 + \delta_k F_k(0)) \right)' dt \\ &= dW^n - \rho \sum_{k=m+1}^n DC \ln \left(\left(\frac{\delta_k}{L_k} \tilde{S}_k + 1 \right) \right)' dt \\ &= dW^n - \rho \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\tilde{S}_k + (L_k/\delta_k)} DC (\tilde{S}_k)' dt \end{aligned}$$

所以，可以得到下式：

$$dW_m^m = dW_m^n - \sum_{k=m+1}^n \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t) \tilde{S}_k}{\tilde{S}_k + (L_k/\delta_k)} dt , \text{ 當 } m < n .$$

$$dW_m^m = dW_m^n , \text{ 當 } m = n .$$

$$dW_m^m = dW_m^n + \sum_{k=n+1}^m \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t) \tilde{S}_k}{\tilde{S}_k + (L_k/\delta_k)} dt , \text{ 當 } m > n .$$

因此，可得 $\tilde{S}_m(t)$ 在 \bar{B}_n 測度之動態過程分別如下：

$$d\tilde{S}_m(t) = \sigma_m(t)\tilde{S}_m(t) \left(dW_m^n(t) - \sum_{k=m+1}^n \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(t)}{\tilde{S}_k(t) + (L_k/\delta_k)} dt \right), \text{ 當 } m < n.$$

$$d\tilde{S}_m(t) = \sigma_m(t)\tilde{S}_m(t)dW_m^m(t) = \sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)dW_n^n(t), \text{ 當 } m = n.$$

$$d\tilde{S}_m(t) = \sigma_m(t)\tilde{S}_m(t) \left(dW_m^n(t) + \sum_{k=n+1}^m \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k + (L_k/\delta_k)} dt \right), \text{ 當 } m > n.$$

用確定係數 $\tilde{S}_k(0)$ 取代 $\tilde{S}_k(t)$ ，以求得漂移項的近似值如下：

$$-\sum_{k=m+1}^n \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(t)}{\tilde{S}_k(t) + (L_k/\delta_k)} \approx -\sum_{k=m+1}^n \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0) + (L_k/\delta_k)} =: \mu_m^n(t), \text{ 當 } m < n.$$

$$0 =: \mu_n^n(t), \text{ 當 } m = n.$$

$$\sum_{k=n+1}^m \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k + (L_k/\delta_k)} \approx \sum_{k=n+1}^m \rho_{m,k} \frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0) + (L_k/\delta_k)} =: \mu_m^n(t), \text{ 當 } m > n.$$

因此， $\tilde{S}_m(t)$ 與 $\ln(\tilde{S}_m(t))$ 在 \bar{B}_n 測度之動態過程分別如下：

$$d\tilde{S}_m(t) = \sigma_m(t)\tilde{S}_m(t)(\mu_m^n(t)dt + dW_m^n(t))$$

$$d\ln(\tilde{S}_m(t)) = (\mu_m^n(t)\sigma_m(t) - \frac{1}{2}\sigma_m(t)^2)dt + \sigma_m(t)dW_m^n(t)$$

我們以向量表示之遠期信用違約交換率 $\tilde{S}(t) = (\tilde{S}_1(t), \tilde{S}_2(t), \dots, \tilde{S}_b(t))'$ 在時點 T 為 $\tilde{S}(T) = (\tilde{S}_1(T), \tilde{S}_2(T), \dots, \tilde{S}_b(T))'$ ，在 \bar{B}_n 測度下可表示如下：

$$\tilde{S}(T) = \tilde{S}(0) \exp \left(\int_0^T (\sigma(t)\mu_{(\cdot)}^n(t) - \frac{1}{2}\sigma(t)' \sigma(t)) dt \right) \exp(Y^n) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{其中 } \mu_{(\cdot)}^n(t) = (\mu_1^n(t), \mu_2^n(t), \dots, \mu_b^n(t))', \quad \sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_b(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{且 } Y^n \sim N(0, V), \quad V_{l,k} = \int_0^T \sigma_l(t)\sigma_k(t)\rho_{l,k} dt$$

$$\text{我們可以得到， } Y^n = Y^T - \int_0^T \sigma(t)(\mu_{(\cdot)}^n(t) - \mu_{(\cdot)}^T(t)) dt.$$

我們依 Brigo and Mercurio (2006) p.273 的方法，將 $(T_b - T_a)$ -秩矩陣(rank matrix)以秩-1 矩陣(rank-one matrix)來近似，可以得到一個惟一(unique)

dominant 特徵值(eigenvalue)如下：

$\mathbf{O} := \sqrt{\lambda_1(V)} e_1(V)$ ，其中 $\lambda_1(V)$ 代表 V 的最大特徵值， $e_1(V)$ 是對應的特徵向量。而 V 在秩-1 矩陣之近似值為 V_1 ，且 $V_1 := \mathbf{O}\mathbf{O}^1$ 。更一般化來說， $\lambda_k(V)$ 代表 V 的第 k 個最大特徵值， $e_k(V)$ 是對應的特徵向量。並以 V_1 代替 V 代入(A.4)中，因此可得， $Y^n \sim N(0, V_1)$ ，且 $Y_m^n = \mathbf{O}_m U^n$ ，且 U^n 是 \bar{B}_n 測度之標準常態隨機變數值。此方法之優點在於現在所有向量 $\tilde{S}(t)$ 的隨機性質縮減為隨機變數值 U^n 。

因此，式(A.5)在時點 T 對應之遠期信用違約交換率向量可改寫如下：

$$\tilde{S}(T) = \tilde{S}(0) \exp\left(\mathbf{O}_{(.)}^n - \frac{1}{2} \mathbf{O}^2\right) \exp(Y^n)$$

其中，漂移項的時間累積值 $\mathbf{O}_{(.)}^n$ 依 m 與 n 之大小關係，表達如下：

$$\int_0^T \sigma_m(t) \mu_m^n(t) dt = -\mathbf{O}_m \sum_{k=m+1}^n \frac{\mathbf{O}_k \tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0) + (L_k/\delta_k)} =: \mathbf{O}_m z_m^n, \text{ 當 } m < n.$$

$$\int_0^T \sigma_n(t) \mu_n^n(t) dt = \mathbf{O}_n 0 =: \mathbf{O}_n z_n^n, \text{ 當 } m = n.$$

$$\int_0^T \sigma_m(t) \mu_m^n(t) dt = \mathbf{O}_m \sum_{k=n+1}^m \frac{\mathbf{O}_k \tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0) + (L_k/\delta_k)} =: \mathbf{O}_m z_m^n, \text{ 當 } m > n.$$

而 $Y^n = Y^k - \mathbf{O}(z_{(.)}^n - z_{(.)}^k) = \mathbf{O}(U^k + z_{(.)}^k - z_{(.)}^n)$ ，其中， $T_k = T_a, \dots, T_b$ ， $Y^k = \mathbf{O}U^k$ 。我們定義在時點 T 對應之 $Y^T := \mathbf{O}U$ ，並令 $v = z_{(.)}^T$ 可得 $Y^n = Y^T - \mathbf{O}(z_{(.)}^n - z_{(.)}^T) = \mathbf{O}(U + v - z_{(.)}^n)$ 。令 $v_n = v - z_{(.)}^n$ ，可得如下：

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(T; U^n) &:= \tilde{S}_n(0) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{O}_n^2\right) \exp(\mathbf{O}_n U^n) \\ &= \tilde{S}_n(0) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{O}_n^2\right) \exp(\mathbf{O}_n(U + v_n)) =: \tilde{S}_n(T; U) \end{aligned}$$

其中， $U^n = U + v_n$ 。因此，運用 Brace(1996)與 Brigo&Mercurio(2006)p.275 之方法，我們檢驗 $\tilde{S}(T, T_a, T_b) - K \approx \sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) \tilde{S}_n(T; U) - K$ 是否為 U 的遞增函數，重寫(A.4)式之指標函數 D 如下：

$$\begin{aligned} D &= \tilde{S}(T, T_a, T_b) - K \approx \sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) \tilde{S}_n(T) - K \\ &= \sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) (\tilde{S}_n(T; U) - K_n^T) > 0 \end{aligned}$$

因為 $\tilde{S}_n(T; U) = \tilde{S}_n(0) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{O}_n^2\right) \exp(\mathbf{O}_n(U + v_n))$ ，當 U 增加時， $\tilde{S}_n(T; U)$ 也會增加。亦即 $\frac{\partial}{\partial U} \sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) \tilde{S}_n(T; U) = \sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) \frac{\partial \tilde{S}_n(T; U)}{\partial U} > 0$ 。可得 $\tilde{S}(T, T_a, T_b) - K$ 是 U 的遞增函數，因此我們設定存在 U^* ，使得 $\tilde{S}(T, T_a, T_b, U^*) - K = 0$ ，亦即 $\sum_{n=a+1}^b \theta_n(0; \bar{B}_n(0)) (\tilde{S}_n(T, U^*)) = K$ ，將

$\tilde{S}_n(T; U^*) = \tilde{S}_n(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{V}_n^2\right) \exp(\mathfrak{V}_n(U^* + \nu_n))$ 代入上式，因此只剩一個未知數 U^* ，我們可以將其求出，然後代入 $\tilde{S}_n(T, U^*)$ ，找到調整後的履約價 $K_n^* = \tilde{S}_n(T, U^*)$ ， $n = a+1, \dots, b$ 。

附錄三、從遠期信用違約交換選擇權一般化模型縮減為 Jamshidian (2004) 信用違約交換選擇權公式

在無套利機會下，多期遠期信用違約交換契約費率端價值等於保護端價值 $S(t, T_{a+1}, T_b) \left(\sum_{n=a+1}^b V_t^\beta (B_T^{T_n, \delta_n}) \right) = \sum_{n=a+1}^b V_t^\beta (A_T^{T_{n-1}, T_n, L_n})$ ，可得式(A.6)如下：

$$\begin{aligned} & S(t, T_{a+1}, T_b) \left(\sum_{n=a+1}^b E^\beta \left(\frac{\beta_t}{\beta_n} \left(1_{\tau > T_n} \delta_n + 1_{T_{n-1} < \tau \leq T_n} \delta_n^* \right) \middle| H_t \right) \right) \\ &= \sum_{n=a+1}^b L_n E^\beta \left(\frac{\beta_t}{\beta_n} 1_{T_{n-1} < \tau \leq T_n} \middle| H_t \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

由式(A.6)可得：

$$\begin{aligned} & S(t, T_{a+1}, T_b) \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(t) \right) \\ &= \sum_{n=a+1}^b L_n \left(\bar{B}_{n-1}(t) \frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n-1})} - \bar{B}_n(t) + P(t, T_n) \tilde{\Delta}(n-1, n) \middle| H_t \right) \\ &= \sum_{n=a+1}^{b-1} L_n \left(\bar{B}_{n-1}(t) \frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n-1})} - \bar{B}_n(t) + P(t, T_n) \tilde{\Delta}(n-1, n) \middle| H_t \right) \\ &\quad + L_b \left(\bar{B}_{b-1}(t) \frac{P(t, T_b)}{P(t, T_{b-1})} - \bar{B}_b(t) \right) + L_b P(t, T_b) E^b \left(\tilde{\Delta}(b-1, b) \middle| H_t \right) \\ &= S(t, T_{a+1}, T_{b-1}) \left(\sum_{n=a+1}^{b-1} \bar{B}_n(t) \right) + S(t, T_{b-1}, T_b) \bar{B}_b(t) \end{aligned}$$

藉由遞回法 (recursive method)，可得：

$$S(t, T_{a+1}, T_b) \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(t) \right) = \sum_{n=a+1}^b S(t, T_{n-1}, T_n) \bar{B}_n(t)$$

無套利條件下，在時點 T ，上式依然成立如下：

$$\begin{aligned} & S(T, T_{a+1}, T_b) \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(T) \right) \\ &= \sum_{n=a+1}^b S(T, T_{n-1}, T_n) \bar{B}_n(T) \\ &\approx \sum_{n=a+1}^b \tilde{S}_n(T) \bar{B}_n(T) \\ &\tilde{C}_t = \sum_{n=a+1}^b \frac{1_{\tau > t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} \delta_n \bar{B}_n(t) E^{\bar{B}_n} \left((\tilde{S}_n(T) - K) 1_D \middle| H_t \right) \\ &\approx \frac{1_{\tau > t}}{\alpha_t^\beta} \beta_t E^\beta \left[\frac{1}{\beta_T} \left(\sum_{n=a+1}^b (S(T, T_{n-1}, T_n) \bar{B}_n(T) - K \bar{B}_n(T)) \right) 1_D \middle| H_t \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

若單期遠期信用違約交換率是水平的，則可得：

$$S(t, T_a, T_{a+1}) = S(t, T_{a+1}, T_{a+2}) = \dots = S(t, T_{b-1}, T_b)$$

$$\begin{aligned} & S(t, T_{a+1}, T_b) \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(t) \right) = \sum_{n=a+1}^b S(t, T_{n-1}, T_n) \bar{B}_n(t) \\ & = S(t, T_a, T_{a+1}) \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(t) \right) \end{aligned}$$

因此， $S(t, T_{a+1}, T_b) = S(t, T_a, T_{a+1}) = S(t, T_{a+1}, T_{a+2}) = \dots = S(t, T_{b-1}, T_b)$ ，若波動度是水平的，且相關係數為 1，則在時點 T 之單期信用違約交換率與多期信用違約交換率相等。

$$S(T, T_{a+1}, T_b) = S(T, T_a, T_{a+1}) = S(T, T_{a+1}, T_{a+2}) = \dots = S(T, T_{b-1}, T_b)$$

所以，由式(A.7)可得：

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^\beta} \beta_t E^\beta \left[\frac{1}{\beta_T} \left(S(T, T_a, T_{a+1}) \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(T) \right) - K \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(T) \right) \right) 1_D \middle| H_t \right] \\ &= \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^\beta} \left(\sum_{n=a+1}^b \bar{B}_n(t) \right) E^{\bar{B}} \left[(S(T, T_{a+1}, T_b) - K) 1_D \middle| H_t \right] \\ &= \left(\sum_{n=a+1}^b B_n(t) \right) (S(t, T_{a+1}, T_b) N(d_1) - K N(d_2)) \end{aligned}$$

$$\text{其中， } d_{1,2} = \left(\ln(\tilde{S}(t, T_{a+1}, T_b) / K) \pm \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \sigma, \quad t \leq T, \quad \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^\beta} \bar{B}_n(t) = B_n(t) \circ$$

故得證，Jamshidian (2004) 與 Hull & White (2003) 的信用違約交換選擇權模型是我們的模型之特例(special case)。