第三章 研究方法

多期最適資產配置可以隨機控制表示，首先將投資期限之投資決策視爲控制因子，而資產變動以隨機微分方程式表示，藉由控制因子達成效用函數最適化目標。求解則可利用動態規劃及平賭過程，動態規劃需決定每期的最適策略，而平賭過程於最適投資限制條件下決定最適資產成長組合，進一步求得最佳的投資決策。本研究主要在完備市場假設下，應用平賭理論建立最適的資產配置策略。

爲能反映金融市場交易之波動特性，假設市場即時短期利率(short term spot rate)之期間結構(term structure)爲隨機變動，並透過投資者對於風險與報酬的態度以決定評估期間風險趨避之效用函數，同時求出於不同風險偏好程度下，每期最適之投資策略。本研究沿用 Sorensen(1999)文中之單因子 Vasicek 模型來描述市場利率的動態變化，且假設風險溢酬爲常數，並同時考量不同保險人之風險偏好及市場系統風險，衡量上述變因對投資最適策略的影響。

決定多期之資產配置須考量的參數包括：投資標的、效用函數以及完備市場假設，分別描述如下：

國立政治大學 National Chengchi University

第一節 投資標的

本文假設壽險公司可選擇的投資標的爲股票與固定收益債券兩類。股票的價值以隨機微分方程表示如下：

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + \lambda_s)dt + \sigma_s dW_{St} \tag{1}$$

其中 r_t 爲短期利率、λ_s 爲股票之市場風險溢酬、σ_s 爲股票之波動程度、W_{St} 爲描

述股票波動之 Wiener 過程。

市場即時短期利率服從單因子 Vasicek 模型，其變動過程如下：

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_{rt} \tag{2}$$

其中κ描述長期利率復歸程度、θ表示利率長期水準、σ_r爲利率的波動程度、W_{rt}爲描述利率波動之 Wiener 過程，而W_{St}和W_{rt}瞬間相關係數爲ρ。依上述利率模型，可得零息債券(到期日爲τ)之價値爲：

$$P(r,t;\tau) = e^{-A(t,\tau)-B(t,\tau)r} \tag{3}$$

其中

$$A(t,\tau) = \Theta((\tau - t) - B(t,\tau)) + \frac{\sigma_r^2}{4\kappa}(B(t,\tau))^2$$

$$B(t,\tau) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(\tau - t)}\right)$$

而$\Theta = \theta + \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_r^2}{\kappa^2}\right)$描述長期間($\tau \to \infty$)之債券到期的收益，其中$\lambda_r$代表短期利率之風險溢酬。

藉由 Ito's 引理，債券價格之動態表示如下：

$$\frac{dP_t}{P_t} = (r_t + \lambda_r D(r,t))dt - \sigma_r D(r,t)dW_{rt} \tag{4}$$

其中$D = -(\partial P / \partial r)(1/P)$，爲債券價格對市場即時短期利率之彈性，當債券爲零息債券， $D = B(t,\tau)$。

第二節 效用函數

爲達成財富效用極大化的目標，給定不可放空的條件下極大化$E[U(W_T)]$，公司爲人的集合體，應無效用存在，但公司的決策及績效與自然人有關，像是經理人的薪酬結構與其績效相連結，因此公司也會有效用。壽險公司的效用函數給定爲：

$$U(W_T)=\frac{W_T^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\text{，且 }\gamma>0 \tag{5}$$

其中γ爲定值相對風險規避(Constant Relative Risk Aversion, CRRA)之參數；CRRA 係數代表個人對於財務的風險態度，與財富大小無關，表示壽險公司於風險性資產的配置比例不因財富金額大小而異。若分別以x_1,x_2,x_3表示壽險公司配置資產於股票、債券與現金部位的比例，壽險公司的資產於t與$t+dt$間之瞬間收益$d\delta(t,W)$可表示如下：

$$d\delta(t,W)=x_1\left(\frac{dS}{S}\right)+x_2\left(\frac{dP}{P}\right)+(1-x_1-x_2)rdt \tag{6}$$

$$st.\ \sum_{i=1}^{3}x_i=1,\ x_i\geq 0$$

第三節 動態完備市場

本研究中假設市場爲動態完備市場，當市場符合動態完備假設時，我們可唯一決定「狀態價值密度過程」(state price density)，M_t。且M_t具有下列之性質：(1)$M_0=1$；(2)對於任何財富過程W_t，M_tW_t爲一平賭過程：$E_t[M_TW_T]=M_tW_t$；(3)M_t爲投資者對數效用函數之逆最適成長投資組合。

Sorensen(1999)將單期之間接效用函數最適化稱爲擬似動態規劃(Quasidynamic Programming)，本研究延用此方法。公司可連續調整其投資組合，而此最大化過程可簡化爲：

$$\max_{\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}} \mu_W - \frac{1}{2}\gamma\sigma_W^2 + (1-\gamma)B(t,T)\sigma_{Wr} \tag{7}$$

其中 $\mu_W, \sigma_W, \sigma_{Wr}$ 分別爲財富之固定增值項、波動項和財富與瞬間利率之共變數，且 $\mu_W = x'\mu, \sigma_W^2 = x'\Gamma\Sigma\Gamma' x, \sigma_{\mathrm{Wr}} = x'\Gamma\Sigma\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$，$x$ 表示投資組合之比例；μ 爲投資組合之固定增值率；Σ 爲 $\frac{dS_t}{S}$ 與 r_t 之瞬間共變矩陣；Γ 爲標的證券價值對 S 和 r 之一階微分矩陣。最適化之目標函數 $\max_{\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}} \mu_W - \frac{1}{2}\gamma\sigma_W^2 + (1-\gamma)B(t,T)\sigma_{Wr}$ 中之各參數可詳細表示如下：

$$\mu_W = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} r_t + \lambda_s \\ r_t + \lambda_r B(t, \tau_1) \\ r_t + \lambda_r B(t, \tau_2) \\ \vdots \\ r_t + \lambda_r B(t, \tau_{\mathrm{m}}) \end{bmatrix};$$

$$\sigma_W^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -B(t, \tau_1)P(r,t;\tau_1) \\ 0 & -B(t, \tau_2)P(r,t;\tau_2) \\ & \vdots \\ 0 & -B(t, \tau_m)P(r,t;\tau_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & \rho\sigma_{\mathrm{S}}\sigma_r \\ \rho\sigma_{\mathrm{S}}\sigma_r & \sigma_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -B(t, \tau_1)P(r,t;\tau_1) \\ 0 & -B(t, \tau_2)P(r,t;\tau_2) \\ & \vdots \\ 0 & -B(t, \tau_m)P(r,t;\tau_m) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{\mathrm{W}r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -B(t, \tau_1)P(r,t;\tau_1) \\ 0 & -B(t, \tau_2)P(r,t;\tau_2) \\ & \vdots \\ 0 & -B(t, \tau_m)P(r,t;\tau_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & \rho\sigma_{\mathrm{S}}\sigma_r \\ \rho\sigma_{\mathrm{S}}\sigma_r & \sigma_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$B(t,\mathrm{T}) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(\mathrm{T}-t)}\right)$。