

國立政治大學風險管理與保險學系

碩士學位論文

指導教授：黃泓智 博士



動態規劃數值解：退休後資產配置

研究生：蔡明諺 撰

中華民國九十九年七月

謝辭

這篇論文能夠順利完成，首先我想先感謝我的指導老師黃泓智教授。在剛開始我毫無研究方向時，是老師不斷地提點我，適時的給予我各種幫助，因此才會有這篇論文的誕生，同時也感謝口試委員王昭文教授、楊曉文教授、李永琮教授在口試時給予我許多建議，讓本論文變得更加完整，同時也要感謝義謙學長指點我許多關於論文及程式上的問題。

感謝在這兩年所認識的研究所同學們，在碩一必修保險法時，是法律組的同學們不斷地帶領我們認識保險法；必修風險管理與保險理論時，是管理組的同學們讓我們更能了解這個領域。而我精算組的同學們在我無法理解精算的課程內容時，一步一步地求解給我看，讓我可以跟上課程進度。

雖然在念研究所的這段時間裡，我一直都持續地在玩樂團，但有時課業與樂團是很難兼顧的，但幸運的是我還是能順利地完成這篇論文，而玩團生活也還算順遂，最近才剛發行第二張EP，在首賣當天看到所有來捧場的朋友們也讓我感到很感動，希望在往後的路上，我還能夠堅持著最初的夢想，當個上班族樂團，偶爾去各國各地巡迴，這樣子的話我就很滿足了！

另外要感謝的就是我所支持的英格蘭足球職業聯盟的球隊阿森納了，在每個週末的聯賽與週中的歐洲冠軍盃都是我必看的節目之一，看著這群年輕小伙子無所畏懼英超普遍球隊的身體對抗，還是秉持著快速傳導二過一與控球率，不得不說他們真的是極具觀賞性的一支球隊，雖然接下來就要入伍了，但還是希望這個賽季他們可以如願奪冠，還有法布也不可以離開！

在打完謝辭的這一刻，各位，我畢業了！

蔡明諺 謹於
民國九十九年七月

摘要

動態規劃的問題並不一定都存在封閉解(closed form solution)，即使存在，其過程往往也相當繁雜。本研究擬以 Gerrard & Haberman (2004) 的模型為基礎，並使用逼近動態規劃理論解的數值方法來求解，此方法參考自黃迪揚(2009)，其研究探討在有無封閉解的動態規劃下，使用此數值方法求解可以得到逼近解。本篇嘗試延伸其方法，針對不同類型的限制，做更多不同的變化。

Gerrard & Haberman (2004)推導出退休後投資於風險性資產與無風險性資產之最適投資策略封閉解，本研究欲將模型投資之兩資產衍生至三資產，分別投資在高風險資產、中風險資產與無風險資產，實際市場狀況下禁止買空賣空的情況與風險趨避程度限制資產投資比例所造成的影響。並探討兩資產與三資產下的投資結果，並加入不同的目標函數：使用控制變異數的限制式來降低破產機率、控制帳戶差異部位讓投資更具效率性。雖然加入這些限制式會導致目標函數過於複雜，但是用此數值方法還是可以得出逼近解。

關鍵字：資產配置(Asset Allocation)、動態規劃(Dynamic Programming)、數值解(Numerical Solution)、二次損失函數(Quadratic Loss Function)、破產機率(ruin probability)

Abstract

Dynamic Programming's solution is not always a closed form. If it do exist, the solution of progress may be too complicated. Our research is based on the investing model in Gerrard & Haberman (2004), using the numerical solution by Huang (2009) to solve the dynamic programming problem. In his research, he found out that whether dynamic programming problem has the closed form, using the numerical solution to solve the problems, which could get similar result. So in our research, we try to use this solution to solve more complicate problems.

Gerrard & Haberman (2004) derived the closed form solution of optimal investing strategy in post retirement investment plan, investing in risky asset and riskless asset. In this research we try to invest in three assets, investing in high risk asset, middle risk asset and riskless asset. Forbidden short buying and short selling, how risk attitude affect investment behavior in risky asset and riskless asset. We also observe the numerical result of 2 asset and 3 asset, using different objective functions : using variance control to avoid ruin risk, consideration the distance between objective account and actual account to improve investment effective. Although using these restricts may increase the complication of objective functions, but we can use this numerical solution to get the approximating solution.

Keywords: Asset Allocation, Dynamic Programming, Numerical Solution, Quadratic Loss Function, ruin probability.

目錄

第壹章 緒論	1
第一節、研究動機及目的	1
第二節、研究架構	2
第貳章 文獻探討	4
第參章 退休需求規劃	6
第一節、帳戶價值累積	6
第二節、最適動態策略	9
第三節、目標函數類型探討	10
第肆章 動態規劃的數值解	12
第一節、數值解方法	12
第伍章 數值模擬	15
第一節、數值結果比較	15
第二節、重複模擬	22
第三節、買空賣空限制	22
第四節、三資產投資	28
第五節、投資比例限制	29
第六節、改變目標函數	31
第陸章 結論與建議	38
參考文獻	40
附錄一 三資產投資的數值結果	42
附錄二 三資產下風險中立者的數值結果	47
附錄三 三資產下風險趨避者的數值結果	51
附錄四 兩資產下帳戶變異數控制的數值結果	55
附錄五 兩資產下控制帳戶差異部位的數值結果	59
附錄六 三資產下帳戶變異數控制的數值結果	63
附錄七 三資產下控制帳戶差異部位的數值結果	68

圖目錄

圖一：Gerrard & Haberman (2004)投資模型示意圖	6
圖二：第T期投資決策表示意圖	13
圖三：數值解每期投資決策圖	20
圖四：Gerrard & Haberman(2004)每期投資決策圖	21
圖五：兩資產下原目標函數與控制帳戶變異數係數0.1的每期投資決策圖	36
圖六：兩資產下原目標函數與控制帳戶差異部位係數2的每期投資決策圖	36

表目錄

表一：投資決策表範例	12
表二：兩資產模型下各年度投資決策表的模擬結果	20
表三：數值解與 Gerrard & Haberman (2004) 數據比較	21
表四：兩資產模型下加入買空賣空限制的各年度投資決策表模擬結果 ..	27
表五：兩資產模型下有無買空賣空限制的各項數據比較	27
表六：兩資產模型與三資產模型的各項數據比較	29
表七：三資產模型下風險程度的各項數據比較	30
表八：兩資產模型下控制帳戶變異數係數的各項數據比較	31
表九：三資產模型下控制帳戶變異數係數的各項數據比較	31
表十：兩資產模型下控制帳戶差異部位係數的各項數據比較	32
表十一：三資產模型下控制帳戶差異部位係數的各項數據比較	33
表十二：兩資產模型下目標函數類型的各項數據比較	34
表十三：三資產模型下目標函數類型的各項數據比較	35

第壹章 緒論

第一節、研究動機及目的

自從我國於民國94年7月開始，勞工保險退休金制度正式由確定給付制(defined benefit)轉為確定提撥制(defined contribution)，投資的風險因此由雇主轉移到員工身上，在現今確定提撥退休金制度下，一般人於工作到退休的這段期間都會累積一定的退休金。為了不在退休後到老死前即把這筆退休金花費掉，通常會在退休時點購買年金，於是從退休到老死的這段期間，每期皆能得到年金給付，以保障退休後的收入是穩定的。但由於醫療技術進步，通貨膨脹等因素，使得每期年金給付不足以支付日常生活開銷，因此若在退休時點時先不把退休金轉變為年金，而是將退休金拿去作投資，預期在投資過後將這筆錢轉化為年金會得到比之前更好的年金給付。因此在投資的這段期間，適當的資產配置方法是非常關鍵的要素。

長時間的投資期間，往往會遭遇金融市場大幅波動，導致投資無法達到目標。一般對於資產配置的作法，往往無法依照實際帳戶的狀態調整投資比例，因此需要一套因應帳戶的變動調整投資行為的方法，彈性化地調整投資比例，達到有效的投資。

對於未來投資的目標函數(objective function)大致上可分為兩種: (1) 使用二次損失函數(quadratic loss function)最小化期望帳戶與實際帳戶的差距。二次損失函數可以使每期投資皆依目標帳戶作最適決策。此方法目的為使實際帳戶逼近目標帳戶，同時懲罰實際帳戶與目標帳戶之間的差距，同時此方法也可以考慮風險趨避程度，隨著風險趨避程度的不同訂定不同的目標帳戶。 (2) 使用效用函數，以最大化投資者效用為目標，來追求每期效用的最大化，但可能會導致為了最大化每期效用，而導致每期投資在高風險資產比例過高。而在本篇我們所

使用的目標函數為二次損失函數，由於此函數可以控制期望帳戶與實際帳戶之間的差距，因此無論低於目標或高於目標都算是一種損失，因此二次損失函數於控制投資上佔有較大的優勢。

動態規劃是一種專門用來解決最適化的數學方式，將原問題分解為相似的子問題，在求解的過程中通過子問題的解求出原問題的解，為了避免多次解決這些子問題，它們的結果會在過程中被計算被保存下來，從簡單的子問題直到整個問題都能被解決。運用在資產配置上，可以依照情況的改變，隨時調整資產配置組合。

本研究的主要目的為使用一種逼近動態規劃理論的數值方法，藉著模擬的方式求解，以 Gerrard & Haberman (2004) 的模型為基礎，驗證此方法是否真的有效逼近理論解。Gerrard & Haberman (2004) 討論在兩資產下無買空賣空的投資行為，本研究將衍生資產至三資產，並限制投資者的投資比例與訂定不同的目標函數觀察其數值結果。

第二節、研究架構

本論文的研究架構，依章節分述如下：

第壹章：緒論

說明本研究之研究動機及目的以及研究架構

第貳章：文獻回顧

資產配置的介紹以及後續相關研究

第參章：退休需求規劃

討論 Gerrard & Haberman(2004)模型及相關衍生目標函數

第肆章：動態規劃的數值解

介紹動態規劃的數值解方法

第伍章：數值模擬

分別對前面章節假設作模擬並比較

第陸章：結論與建議

提出本研究之結論以及後續相關研究建議

第二章 文獻探討

動態規劃的概念一開始是由 Richard Bellman在1940年代所提出，當初的解釋是對於問題尋找每一個最適決策的方法。在1962年提出了動態規劃最佳原則。將最適化問題分解成數個子問題，逐步在每個子問題上，使其中的某一變數達到最適值，每一個子問題的最適值再與下一個子問題的決策變數共同構成此決策階段的最適值。以此類推直到最適化問題答案求出為止。而Bellman的貢獻最耳熟能詳的就是Bellman Equation，對於最適化問題以遞迴的形式來展現動態規劃的結果。

動態規劃已經被廣泛運用在很多方面，此方法專門用來解決一連串相關的決策問題，無論是空間上或時間上的連續決策。當動態規劃應用在資產配置方面時，則可因應情況的改變，隨時調整其資產配置組合，使得投資者的淨財富價值達到最大化。Haberman & Sung (1994)在確定給付(defined benefit)退休計畫下，考慮利率隨機與非隨機的情況，視提撥金額為控制函數並以動態規劃方式求得最適提撥策略。Vigna & Haberman (2001)則在確定提撥制(defined contribution)下用動態規劃方式找出最適投資策略。

動態規劃的方法可以針對不同期間作不同的情境假設，並考慮很多因素進去，例如交易成本、稅等因素，若是在退休後的投資上還可以將醫療成本與遺產等因素考慮進去。但求解過程中往往都需要很多假設。因此在理論上動態規劃能解決的問題很多，但加越多限制，模型的複雜度也會越高，大大降低實用性。

近年來，有學者開始對動態規劃用模擬的方式求解，Bacinello (1988)和 Chang (1999)以工作到退休這段時間為參數，預測員工帳戶價值，透過模擬的方式找出每一年退休計畫的負債。Winklevoss (1982)以退休帳戶負債與資產模擬模型(PLASM)衡量退休前理財。Raymar & Zwecher (1997)則使用模擬與動態規

劃混合的方式評價美式選擇權。

本篇採用黃迪揚 (2009)所使用的數值解法，使用模擬的方式求動態規劃問題的逼近解。過去也有許多針對HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程式去解決的數值解法，但此方法可以由問題的本身來設計，不需要由HJB方程式著手。

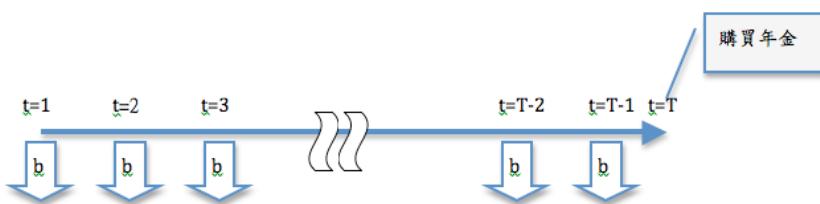


第參章 退休需求規劃

員工於退休時，對於退休金往往無法妥善的處理。若是正常的花費退休金時，可能會在尚未過世前即將退休金花費掉，會面臨長壽風險(longevity risk)的問題；若是在退休時購買年金，則可避免長壽風險，但由於通膨與醫療費用的臨時開銷等因素，購買的年金可能不足以未來的開銷，會面臨年金風險(annuity risk)。於是我們開始考慮購買年金的時間點是否往後移較為恰當，若在退休時，將退休金拿去投資期望可以在未來的時點購買年金，使得購買年金後每期給付比剛退休時即購買年金的給付更多。Gerrard & Haberman (2004) 給定未來各個時點投資帳戶的目標價值，並利用最佳化的方式最小化變異以獲得最適資產配置。在此我們先簡單地介紹 Gerrard & Haberman 所使用的最適動態投資模型(Gerrard & Haberman 2004)。

第一節、帳戶價值累積

Gerrard & Haberman (2004)探討員工退休後，若決定先作投資再轉換為年金，則期望會比在退休時即購買年金來得好，但退休後並沒有收入，因此每期還是需要固定的消費。所以我們以退休時即購買年金時每期的給付(我們用 b 來表示)為基準，每期從投資帳戶領取；此給付與轉換年金時點(我們用 T 表示)都是固定的，且除了轉換年金外，我們不考慮其他的脫退因素。退休後到購買年金的示意圖如下：



圖一：Gerrard & Haberman (2004)投資模型示意圖

另外在每年期初也都必須決定該年度的投資決策，在 Gerrard & Haberman (2004)探討退休金後的投資模型假設將資金投資在兩種不同標的上：分別是無風險性資產與風險性資產。無風險性資產為常數報酬率 r ;風險性資產服從幾何布朗運動，漂移項為 λ ，擴散項為 σ 。

投資帳戶在時間點 t 所累積的價值滿足下式：

$$dX(t) = [X(t)(y(t)(\lambda - r) + r) - b]dt + X(t)y(t)\sigma dW(t)$$

其中 $X(t)$ 為退休金帳戶在時間點 t 所累積的價值， $y(t)$ 為 $[t, t+1]$ 期間投資在風險性資產上的比重， b 為每期從帳戶提領金額， $W(t)$ 為標準布朗運動。

上述模型為連續時間下投資帳戶之變動情形，若將此模型轉化為離散時，則可得下式：

$$X(t+1) = X(t) + [X(t) \cdot (y(t)(\lambda - r) + r) - b] \Delta t + X(t)y(t)\sigma \Delta W(t)$$

以上所述，帳戶投資在風險性資產與無風險性資產，若考慮三資產的情況，帳戶分別投資在高風險性資產、中風險性資產與無風險性資產，假設高風險性資產與中風險性資產都服從幾何布朗運動且三資產相互獨立，則我們可將模型改寫成：

$$\begin{aligned} X(t+1) = X(t) + & [X(t) \cdot (y_1(t)\lambda + y_2(t)\mu + (1 - y_1(t) - y_2(t)) \cdot r) - b] \Delta t \\ & + X(t) \cdot (y_1(t)\sigma_1 \Delta W_1(t)) + X(t) \cdot (y_2(t)\sigma_2 \Delta W_2(t)) \end{aligned}$$

其中 $y_1(t)$ 代表投資在高風險性資產的比重； $y_2(t)$ 代表投資在中風險性資產的比重； $1 - y_1(t) - y_2(t)$ 代表投資在無風險性資產的比重， σ_1 與 σ_2 分別代表高風險資產與中風險資產的標準差，而高風險資產、中風險資產與無風險資產所對應的報酬率分別為 λ 、 μ 和 r ，本研究擬衍生 Gerrard & Haberman (2004) 的模型，觀察投資三資產對帳戶所造成的影响。

退休需求模型-各期目標價值

投資帳戶必須設定每年投資帳戶的目標價值，為了與Gerrard & Haberman (2004)的數值作比較，因此我們使用Gerrard & Haberman (2004)研究所使用的目標帳戶價值，比較以此目標價值的基準的投資結果。假設各期目標為一時間 t 的函數 ($t = 1, 2, \dots, T$)，根據 Gerrard & Haberman (2004)的假設，從退休後開始投資的這段期間，第 t 期目標價值為 $F(t)$ ：

$$\begin{aligned} F(t) &= b \int_0^{T-t} e^{-rs} ds + F(T)e^{-r(T-t)} \\ &= \frac{b}{r} + (F(T) - \frac{b}{r})e^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

其中 $F(T)$ 為最後一期帳戶目標價值，預期在 T 時點將帳戶轉化為年金，在 $t \sim T$ 這段期間還是保持每期消費 b ，而在期末時帳戶目標價值 $F(T)$ 則是期望可以達到未來每期年金給付 b^* 所需的價格，兩者相加後再一起折現回 t 時點。而最後一期帳戶目標價值 $F(T)$ 為：

$$\begin{aligned} F(T) &= b^* \int_0^{\Omega-T} e^{-rs} ds \\ &= \frac{b^*}{r} (1 - e^{-r(\Omega-T)}) \end{aligned}$$

b^* 為投資結束後購買年金每期給付， Ω 為退休後的平均餘命，預期在投資結束後每期都可獲得 b^* 的給付。

投資決策的最適化

當每年投資帳戶的目標價值決定以後，我們便可定義成本函數。

將 t 時點所發生的成本定義為二次損失函數：

$$C(t) = [X(t) - F(t)]^2 \quad , \quad t = 1, 2, \dots, T-1$$

$$C(T) = \theta[X(T) - F(T)]^2 \quad , \quad \theta \geq 1$$

其中 $X(t)$ 為實際帳戶價值， $F(t)$ 為目標帳戶價值， θ 為懲罰係數。投資時，相較於期中帳戶累積是否達到目標價值，我們更關心期末的帳戶是否達到目標，因此期末時乘上一個懲罰係數 θ 。

定義函數 $G(t)$ ，從時間點 t 到轉換年金時點 T 為止，未來各個時點所發生的成本現值：

$$G(t) = \sum_{s=t}^T v^{s-t} C(s)$$

其中， v 是主觀的折現率。

第二節、最適動態策略

時點 t 的損失函數定義為：

$$\min_{\{\pi_t\}} G(t)$$

其中 $\{\pi_t\} = \{\{y_1(s), y_2(s)\}_{s=t, t+1, \dots, T}\}$ ，代表了未來各個決策時點，所有可能投資策略的集合。根據 Gerrard & Haberman (2004) 的投資模型，其目的就是選擇一個可行的投資策略使得未來的成本現值最小，使每期投資都能接近目標，可惜的是此目標函數是以最小化實際帳戶與目標帳戶的差距，因此投資高於目標的部份也會遭到懲罰，此種目標函數無法特別注重目標帳戶高於實際帳戶的部份。

第三節、目標函數類型探討

退休後的投資，由於每位投資者對於投資有不同的看法，例如：投資風險比例高低、破產機率、投資的效率性等，因此本篇嘗試以不同的目標函數使投資方式具更多元的變化。

帳戶變異數控制

退休後的投資偏向對風險有所規避，退休者並不期望在轉換年金時，帳戶價值過低導致無法轉換年金，亦即破產。為了降低破產機率，我們在目標函數加上一些限制：

$$\min \sum_{s=t}^T [v^{s-t} C(s) + \alpha \text{var}(X(s))]$$

在原本的目標函數加上控制每期實際帳戶價值的變異數，其中 α 為控制係數，使用此目標函數一方面除了原本最小化目標與實際帳戶差距的部份以外，加上一個控制實際帳戶的變異，使得每一期的帳戶之間的差異不會過大。加入係數可以調整對帳戶變異數的控制，我們可藉由調整係數的高低來調整對帳戶變異控制程度的高低。我們預期此目標函數相較原目標函數可以降低破產機率，但由於降低了變異，因此也可預期此目標函數的投資效益可能會低於原目標函數。

控制實際帳戶低於目標帳戶部位

另一個目標函數則是控制實際帳戶低於目標帳戶部位，原目標函數只能降低目標帳戶價值與實際帳戶價值的差距，對於低於目標帳戶價值的實際帳戶價值作懲罰，同樣也對高於目標帳戶價值的實際投資帳戶價值作懲罰，也就是追求目標帳戶的價值要精準。但有時投資高於目標帳戶價值並不是一件壞事，但此目標函數無法只在意實際帳戶價值低於目標帳戶價值的那部份，因此我們在這邊重新修改目標函數為：

$$\min \sum_{s=t}^T [v^{s-t} C(s) + \beta (F(s) - X(s))_{\{F(s) > X(s)\}}]$$

當目標帳戶價值大於實際帳戶價值時才會考慮，其中 β 為控制係數，我們可藉由調整係數的高低來調整注重實際帳戶低於目標帳戶的部份，使我們可以只在意投資不效率的部份。我們預期此目標函數相較原目標函數可以提升投資的效率性；而破產機率相較原目標函數則無法確認，因每一期低於目標帳戶價值時，投資風險性資產部份都需要增加更多比例，可以使低的帳戶價值有機會可以提升，但另一方面，因為投資過多的風險性資產，也有可能因為當期投資效益不佳而增加破產的可能性。



第肆章 動態規劃的數值解

本研究以 Gerrard & Haberman (2004)所使用退休後投資決策模型為基礎，而透過我們的數值解，期望可以達到接近文獻中動態規劃所得的理論解。

第一節、數值解方法

根據 Gerrard & Haberman (2004)所使用的投資模型，將其離散化後，轉換為年金的時點為 T ，這表示在我們轉換成年金的時點前共有 T 個決策時點，分別為 $t = 1, 2, \dots, T$ (分別代表每期期初)，在這些決策時點上，我們必須決定每期的投資決策，也就是投資在各資產上的權重。

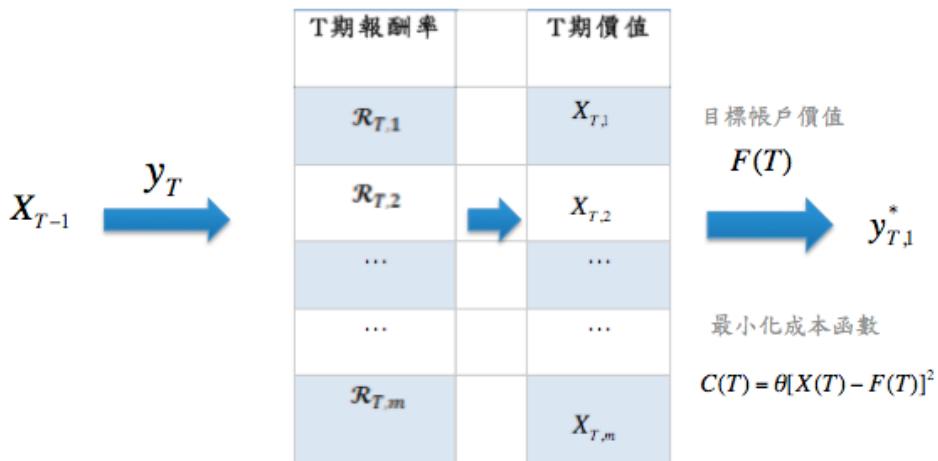
本數值解參考自本所學長黃迪揚論文所使用的數值解方法，其概念近似作業研究中的向後法，面對各個決策點的選擇，由最後一期每個狀態去考慮，決定好最後一期的決策後，再倒退回前一期的每個狀態去做決策，直到第一期為止，如此一來可以形成一個完整的決策表，每一期的每個狀態都有相對應的決策，因此在投資時我們即可因應當期的帳戶狀態來決定我們的決策，屬於一種動態的數值解方法。以第 t 年的投資決策表為例，如下表所示：

狀態變數	對應最適投資策略
10	$y_{t,1}^*$
20	$y_{t,2}^*$
30	$y_{t,3}^*$
40	$y_{t,4}^*$
...	...
...	...

表一：投資決策表範例

決策表左欄為狀態變數(state variable)，右欄為相對應的最適投資決策，狀態變數10對應的最適投資策略為 $y_{t,1}^*$ ，狀態變數20對應的最適投資策略為 $y_{t,2}^*$ ，若今天 $t-1$ 期帳戶累積到21時，因為21落在狀態變數20和30之間，所以第 t 期的最適投資決策由 $y_{t,2}^*$ 和 $y_{t,3}^*$ 線性內插而得： $y_t^* = 0.9y_{t,2}^* + 0.1y_{t,3}^*$ ，要注意的是實際帳戶價值落在狀態變數範圍內時才能使用內插，因此狀態變數範圍不適合設的太窄。我們在每一年的投資決策表都可以找到相對應的投資決策。

建構第 T 期投資決策表



圖二：第 T 期投資決策表示意圖

假設在第 $T-1$ 時點年底投資帳戶為 X_{T-1} ，透過任意的第 T 年投資決策 y_T ，我們可以得到 m 組第 T 年帳戶累積的價值： $X_{T,1}^*$ 、 $X_{T,2}^*$ 、 \dots 、 $X_{T,m}^*$ ，將這些不同情境下累積的帳戶價值再根據 Gerrard & Haberman (2004) 投資模型所定義的成本函數和第 T 年目標帳戶，以最小化成本值的條件下我們可以得到第 T 年的最適投資策略 $y_{T,1}^*$ 、 $y_{T,2}^*$ 、 \dots 、 $y_{T,m}^*$ ，完整地建構出第 T 期的投資決策表。

建構第T-1期投資決策表

方法類似前述，假設 $T-2$ 時點年底投資帳戶已累積 X_{T-2} ，透過任意的第 $T-1$ 投資決策 y_{T-1} ，我們可以得到第 $T-1$ 年帳戶累積的價值，這些帳戶價值再透過前述所得的第 T 年投資決策表以及內插方法，我們可以分別獲得第 T 年的投資決策，將這些不同情境下累積的帳戶價值透過成本函數，以最小化第 T 期與第 $T-1$ 期的成本值條件下得到第 $T-1$ 期的最適投資策略，並完整的建構出第 $T-1$ 期的投資決策表。

建構第T-2期、第T-3期…投資決策表

以同樣的方法往前依序建構，即可得到每一期使未來成本現值最小的投資決策表。

第五章 數值模擬

第一節、數值結果比較

首先我們先使用 Gerrard & Haberman (2004) 的數據來套用在我們所使用的數值方法中，再與其比較數值結果：一工作者於60歲退休後加入此計畫，並預計在75歲時購買年金，因此投資期間共15期($T = 15$)，以下是參數假設：

模擬情境組數：10000

風險性資產報酬率 λ : 0.10

風險性資產標準差 σ : 0.20

無風險性資產報酬率 r : 0.05

每年提領 b : 7.56

折現率 v : 0.95

期初投資帳戶價值 X_0 : 100

懲罰係數 θ : 1

無買空賣空限制

利用本研究所使用的數值方法，我們須先求得第15年、第14年、…到第2年的投資決策表，每個決策表左邊欄位為狀態欄，決策表右邊代表給定狀態變數下相對應的最適投資策略，為投資在風險性資產的比例。

而其中每一年由於狀態變數是給定的，而在模擬帳戶變動時可能會出現一些較極端的值，使得實際帳戶價值不在狀態變數範圍內，而無法使用內插來取得最適投資策略，為避免此情況發生，當帳戶價值超過狀態變數範圍時，我們以狀態變數極值所對應的最適投資決策表為代表。

在未對買空賣空有所限制下，狀態變數過低時則投資風險性資產比例可能會大於1，也就是會有買空的情況發生；當狀態變數過高時，投資風險性資產比例可能會小於0，也就是會有賣空的情況發生。模擬後得每期狀態變數相對應的

各期決策表如下：

第15年決策表	第14年決策表	第13年決策表
10.0	10.638	20.0
12.5	8.252	22.5
15.0	6.661	25.0
17.5	5.524	27.5
20.0	4.672	30.0
22.5	4.009	32.5
25.0	3.479	35.0
27.5	3.045	37.5
30.0	2.683	40.0
32.5	2.377	42.5
35.0	2.115	45.0
37.5	1.888	47.5
40.0	1.689	50.0
42.5	1.513	52.5
45.0	1.357	55.0
47.5	1.218	57.5
50.0	1.092	60.0
52.5	0.979	62.5
55.0	0.875	65.0
57.5	0.781	67.5
60.0	0.694	70.0
62.5	0.615	72.5
65.0	0.541	75.0
67.5	0.473	77.5
70.0	0.410	80.0
72.5	0.352	82.5
75.0	0.297	85.0
77.5	0.245	87.5
		0.101
		95.0
		0.036

80.0	0.197	90.0	0.066	97.5	0.003
82.5	0.152	92.5	0.032	100.0	-0.028
85.0	0.109	95.0	0.000		
87.5	0.069	97.5	-0.030		
90.0	0.031				

第12年決策表		第11年決策表		第10年決策表	
35.0	1.336	40.0	1.178	47.5	0.867
37.5	1.327	42.5	1.174	50.0	0.859
40.0	1.299	45.0	1.155	52.5	0.839
42.5	1.263	47.5	1.126	55.0	0.803
45.0	1.222	50.0	1.086	57.5	0.764
47.5	1.160	52.5	1.037	60.0	0.720
50.0	1.095	55.0	0.974	62.5	0.677
52.5	1.029	57.5	0.908	65.0	0.637
55.0	0.960	60.0	0.842	67.5	0.593
57.5	0.893	62.5	0.771	70.0	0.552
60.0	0.827	65.0	0.702	72.5	0.507
62.5	0.760	67.5	0.638	75.0	0.461
65.0	0.694	70.0	0.578	77.5	0.416
67.5	0.627	72.5	0.518	80.0	0.371
70.0	0.558	75.0	0.462	82.5	0.327
72.5	0.495	77.5	0.409	85.0	0.284
75.0	0.436	80.0	0.357	87.5	0.241
77.5	0.380	82.5	0.309	90.0	0.201
80.0	0.328	85.0	0.263	92.5	0.163
82.5	0.279	87.5	0.220	95.0	0.127
85.0	0.232	90.0	0.178	97.5	0.093
87.5	0.189	92.5	0.140	100.0	0.061
90.0	0.148	95.0	0.103	102.5	0.030

92.5	0.109	97.5	0.068	105.0	0.001
95.0	0.072	100.0	0.035	107.5	-0.025
97.5	0.037	102.5	0.003		
100.0	0.004	105.0	-0.026		

第9年決策表		第8年決策表		第7年決策表	
52.5	0.794	57.5	0.665	60.0	0.562
55.0	0.783	60.0	0.664	62.5	0.558
57.5	0.756	62.5	0.654	65.0	0.548
60.0	0.715	65.0	0.628	67.5	0.533
62.5	0.680	67.5	0.601	70.0	0.516
65.0	0.647	70.0	0.570	72.5	0.491
67.5	0.612	72.5	0.537	75.0	0.461
70.0	0.573	75.0	0.501	77.5	0.429
72.5	0.530	77.5	0.468	80.0	0.395
75.0	0.486	80.0	0.431	82.5	0.359
77.5	0.439	82.5	0.393	85.0	0.324
80.0	0.393	85.0	0.354	87.5	0.288
82.5	0.350	87.5	0.314	90.0	0.256
85.0	0.308	90.0	0.273	92.5	0.222
87.5	0.268	92.5	0.233	95.0	0.189
90.0	0.228	95.0	0.194	97.5	0.155
92.5	0.190	97.5	0.156	100.0	0.125
95.0	0.154	100.0	0.121	102.5	0.094
97.5	0.120	102.5	0.087	105.0	0.066
100.0	0.087	105.0	0.054	107.5	0.039
102.5	0.056	107.5	0.023	110.0	0.014
105.0	0.026	110.0	-0.006	112.5	-0.010

第6年決策表		第5年決策表		第4年決策表	
65.0	0.505	72.5	0.474	75.0	0.440
67.5	0.505	75.0	0.469	77.5	0.432
70.0	0.495	77.5	0.456	80.0	0.418
72.5	0.482	80.0	0.434	82.5	0.395
75.0	0.457	82.5	0.413	85.0	0.367
77.5	0.430	85.0	0.388	87.5	0.337
80.0	0.400	87.5	0.356	90.0	0.311
82.5	0.374	90.0	0.325	92.5	0.285
85.0	0.347	92.5	0.291	95.0	0.259
87.5	0.316	95.0	0.257	97.5	0.232
90.0	0.285	97.5	0.225	100.0	0.201
92.5	0.251	100.0	0.190	102.5	0.170
95.0	0.218	102.5	0.156	105.0	0.138
97.5	0.187	105.0	0.123	107.5	0.108
100.0	0.154	107.5	0.092	110.0	0.077
102.5	0.124	110.0	0.061	112.5	0.048
105.0	0.093	112.5	0.031	115.0	0.021
107.5	0.064	115.0	0.002	117.5	-0.006
110.0	0.036	117.5	-0.022		

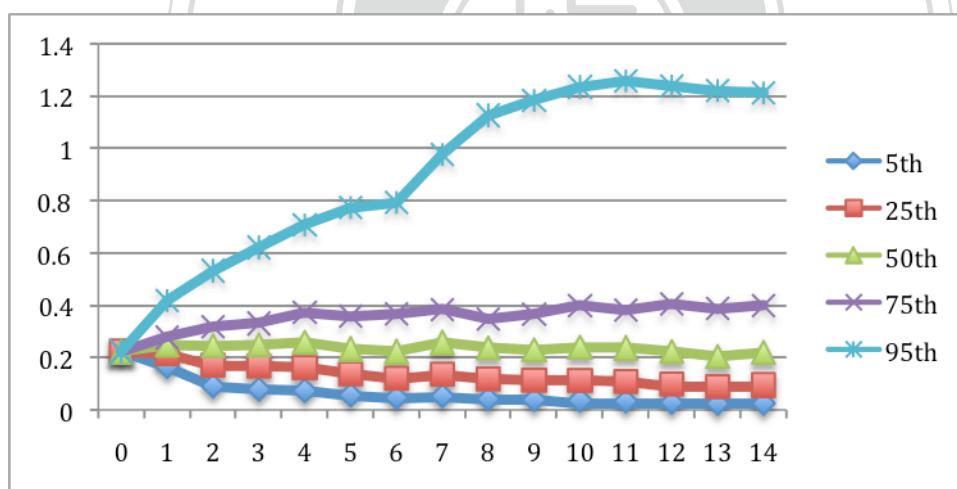
第3年決策表		第2年決策表	
80.0	0.376	82.5	0.346
82.5	0.371	85.0	0.340
85.0	0.362	87.5	0.327
87.5	0.346	90.0	0.315
90.0	0.324	92.5	0.301
92.5	0.298	95.0	0.281
95.0	0.270	97.5	0.258

97.5	0.240	100.0	0.234
100.0	0.206	102.5	0.205
102.5	0.179	105.0	0.176
105.0	0.152	107.5	0.149
107.5	0.125	110.0	0.119
110.0	0.096	112.5	0.088
112.5	0.067	115.0	0.058
115.0	0.039	117.5	0.030
117.5	0.011	120.0	0.002

表二：兩資產模型下各年度投資決策表的模擬結果

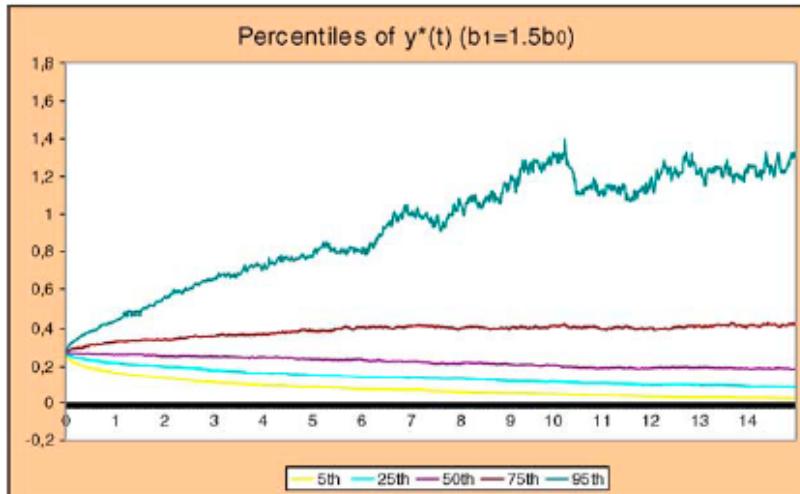
當每一期的投資決策表都建構完成後，透過這些決策表我們可以獲得期初風險性資產的最適比例0.223。

由數值結果所推出來數值解每期投資決策圖如下：



圖三：數值解每期投資決策圖

Gerrard & Haberman (2004) 中的每期決策圖如下：



圖四：Gerrard & Haberman(2004)每期投資決策圖

比較下，可以看出數值解的方式在95分位數的地方有些差異，且決策曲線較平，沒有鋸齒狀，造成此情況發生可能是因為 Gerrard & Haberman (2004) 內是以一個禮拜為一單位，相較之下數值解以一年為單位，因此期數較短，曲線較平緩，在極值的部份無法完全準確。而對於期初比例、投資結果等數據如下表所示：

	Gerrard&Haberman(2004)	數值解
破產機率	0.0340	0.0388
低於退休時轉換年金機率	0.1970	0.2277
期末價值到達目標機率	0	0.0010
期末轉換年金5分位數	0.450b	0.398b
期末轉換年金25分位數	1.071b	1.035b
期末轉換年金50分位數	1.283b	1.285b
期末轉換年金75分位數	1.389b	1.404b
期末轉換年金95分位數	1.442b	1.474b

表三：數值解與 Gerrard & Haberman (2004) 數據比較

數值解的方式和Gerrard & Haberman (2004)的結果在極值方面有一點差異，普遍來看並沒有誤差太多。由於數值法是針對問題來設計，不會受到封閉解的限制，我們可以試著用此數值方法作更多的衍生。

第二節、重複模擬

為了確定每次模擬的結果都不會相差太遠，因此我們重複模擬不同的10000組情境50次，將得到50組期初最適投資決策的資料，我們分析這50組投資決策的平均數、標準差，分別如下：

平均數	標準差
0.244	0.023

在前面小節的各參數假設下，我們可得期初風險性資產比例為0.223，本節重複模擬結果為0.244，兩者差異並不很大，且標準差0.023也在合理範圍內。因此我們可知每一次的數值解差異並不很大。

第三節、買空賣空限制

第一節的數值解對於買空賣空方面並沒有任何限制，不符合實際市場的狀況，因此我們加上買空賣空的限制，其結果會較接近現實。加入買空賣空限制下，投資在風險性資產與無風險資產相加等於1，因此在狀態變數太低時，投資在風險性資產頂多只有1，在狀態變數到達目標時投資在風險性資產為0，加入限制後每期狀態變數相對應的決策表如下：

第15年決策表		第14年決策表		第13年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	1
52.5	0.979	52.5	0.908	52.5	0.994
55.0	0.875	55.0	0.821	55.0	0.906
57.5	0.781	57.5	0.742	57.5	0.826
60.0	0.694	60.0	0.670	60.0	0.752
62.5	0.615	62.5	0.602	62.5	0.683
65.0	0.541	65.0	0.538	65.0	0.616

67.5	0.473	67.5	0.478	67.5	0.551
70.0	0.410	70.0	0.422	70.0	0.492
72.5	0.352	72.5	0.365	72.5	0.434
75.0	0.297	75.0	0.314	75.0	0.379
77.5	0.245	77.5	0.266	77.5	0.327
80.0	0.197	80.0	0.221	80.0	0.277
82.5	0.152	82.5	0.178	82.5	0.231
85.0	0.109	85.0	0.139	85.0	0.187
87.5	0.069	87.5	0.101	87.5	0.146
90.0	0.031	90.0	0.066	90.0	0.107
92.5	0	92.5	0.032	92.5	0.071
		95.0	0	95.0	0.036
				97.5	0.003

第12年決策表	第11年決策表	第10年決策表
50.0	1	50.0
52.5	1	52.5
55.0	0.929	55.0
57.5	0.855	57.5
60.0	0.782	60.0
62.5	0.715	62.5
65.0	0.655	65.0
67.5	0.598	67.5
70.0	0.544	70.0
72.5	0.486	72.5
75.0	0.431	75.0
77.5	0.377	77.5
80.0	0.327	80.0
82.5	0.278	82.5

85.0	0.232	85.0	0.263	85.0	0.279
87.5	0.189	87.5	0.219	87.5	0.239
90.0	0.148	90.0	0.178	90.0	0.200
92.5	0.109	92.5	0.140	92.5	0.163
95.0	0.072	95.0	0.103	95.0	0.127
97.5	0.037	97.5	0.068	97.5	0.093
100.0	0.004	100.0	0.035	100.0	0.061
102.5	0	102.5	0.003	102.5	0.030
		105.0	0	105.0	0.001

第9年決策表		第8年決策表		第7年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	0.984
52.5	0.973	52.5	0.970	52.5	0.914
55.0	0.903	55.0	0.907	55.0	0.846
57.5	0.840	57.5	0.845	57.5	0.797
60.0	0.785	60.0	0.791	60.0	0.748
62.5	0.729	62.5	0.739	62.5	0.700
65.0	0.675	65.0	0.694	65.0	0.654
67.5	0.623	67.5	0.650	67.5	0.609
70.0	0.571	70.0	0.601	70.0	0.568
72.5	0.524	72.5	0.555	72.5	0.526
75.0	0.480	75.0	0.513	75.0	0.483
77.5	0.440	77.5	0.471	77.5	0.441
80.0	0.396	80.0	0.425	80.0	0.404
82.5	0.352	82.5	0.386	82.5	0.368
85.0	0.309	85.0	0.349	85.0	0.329
87.5	0.267	87.5	0.311	87.5	0.290
90.0	0.228	90.0	0.270	90.0	0.254
92.5	0.191	92.5	0.231	92.5	0.220

95.0	0.154	95.0	0.194	95.0	0.188
97.5	0.119	97.5	0.156	97.5	0.156
100.0	0.087	100.0	0.121	100.0	0.126
102.5	0.056	102.5	0.087	102.5	0.095
105.0	0.026	105.0	0.054	105.0	0.066
107.5	0	107.5	0.023	107.5	0.039
		110.0	0	110.0	0.014

第6年決策表		第5年決策表		第4年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	1
52.5	0.940	52.5	0.971	52.5	0.956
55.0	0.878	55.0	0.911	55.0	0.900
57.5	0.820	57.5	0.855	57.5	0.852
60.0	0.769	60.0	0.811	60.0	0.804
62.5	0.717	62.5	0.770	62.5	0.759
65.0	0.678	65.0	0.726	65.0	0.720
67.5	0.633	67.5	0.689	67.5	0.681
70.0	0.588	70.0	0.643	70.0	0.639
72.5	0.541	72.5	0.600	72.5	0.593
75.0	0.501	75.0	0.563	75.0	0.551
77.5	0.462	77.5	0.521	77.5	0.513
80.0	0.426	80.0	0.483	80.0	0.476
82.5	0.390	82.5	0.446	82.5	0.440
85.0	0.354	85.0	0.409	85.0	0.401
87.5	0.321	87.5	0.369	87.5	0.365
90.0	0.288	90.0	0.332	90.0	0.332
92.5	0.255	92.5	0.295	92.5	0.299
95.0	0.222	95.0	0.259	95.0	0.266
97.5	0.188	97.5	0.226	97.5	0.233

100.0	0.155	100.0	0.192	100.0	0.202
102.5	0.124	102.5	0.156	102.5	0.169
105.0	0.093	105.0	0.123	105.0	0.139
107.5	0.064	107.5	0.091	107.5	0.108
110.0	0.036	110.0	0.061	110.0	0.077
112.5	0.009	112.5	0.031	112.5	0.048

第3年決策表		第2年決策表	
50.0	0.966	47.5	0.967
52.5	0.906	50.0	0.909
55.0	0.854	52.5	0.861
57.5	0.810	55.0	0.817
60.0	0.766	57.5	0.777
62.5	0.731	60.0	0.734
65.0	0.699	62.5	0.695
67.5	0.660	65.0	0.659
70.0	0.619	67.5	0.623
72.5	0.585	70.0	0.588
75.0	0.549	72.5	0.562
77.5	0.518	75.0	0.531
80.0	0.481	77.5	0.502
82.5	0.442	80.0	0.471
85.0	0.411	82.5	0.443
87.5	0.380	85.0	0.413
90.0	0.348	87.5	0.385
92.5	0.310	90.0	0.356
95.0	0.279	92.5	0.325
97.5	0.241	95.0	0.293
100.0	0.212	97.5	0.267

102.5	0.180	100.0	0.234
105.0	0.152	102.5	0.203
107.5	0.124	105.0	0.175
110.0	0.096	107.5	0.147
112.5	0.067	110.0	0.118
115.0	0.039	112.5	0.087
117.5	0.011	115.0	0.058

表四：兩資產模型下加入買空賣空限制的各年度投資決策表模擬結果

透過這些決策表我們可以獲得期初風險性資產的最適比例0.234。

以下是對於有無買空賣空限制下各項數據比較：

	無買空賣空限制	買空賣空限制
期初最適投資比例	0.223	0.234
破產機率	0.0388	0.0359
低於退休時轉換年金機率	0.2277	0.2273
期末價值到達目標機率	0.0016	0.0019
期末價值50分位數	76.471=>1.285b	76.765=>1.290b
期末價值95分位數	87.696=>1.474b	87.730=>1.475b

表五：兩資產模型下有無買空賣空限制的各項數據比較

我們分別觀察期初最適投資在風險性資產的比例、投資所造成的破產機率、轉換年金後得到的年金給付低於退休時即轉換年金的年金給付機率、期末價值到達目標的機率與期末價值分位數。我們可以透過這些數據了解投資結果，在有買空賣空限制下與無買空賣空限制差異並不大，投資效益無特別改善，但接下來的數值解模擬都是以有買空賣空限制為前提來衍生，較符合現實。或許使用其他的限制或目標函數可以得到更好的結果。

第四節、三資產投資

在Gerrard & Haberman (2004)的研究中，對於投資資產的選擇只有風險性資產與無風險資產，選擇不多，我們在這邊試著作些區別，將投資的兩資產衍生至三資產，在有多的選擇下，預期投資效益也會得到改善。以下是參數假設：

模擬情境組數：10000

高風險資產報酬率 λ ：0.10

高風險資產標準差 σ_1 ：0.20

中風險資產報酬率 μ ：0.07

中風險資產標準差 σ_2 ：0.10

無風險資產報酬率 r ：0.05

每年提領 b ：7.56

折現率 v ：0.95

期初投資帳戶價值 X_0 ：100

懲罰係數 θ ：1

有買空賣空限制

模擬後透過每期狀態變數相對應的決策表，我們可以獲得期初高風險資產的最適比例為0.232，中風險資產的最適比例為0.297。而三資產與兩資產的數據比較如下：

	兩資產	三資產
期初投資高風險資產比例	0.234	0.232
期初投資中風險資產比例		0.297
破產機率	0.0359	0.0141
低於退休時轉換年金機率	0.2273	0.1578
期末價值到達目標機率	0.0019	0.0264
期末價值50分位數	76.765=>1.290b	83.363=>1.401b
期末價值95分位數	87.730=>1.475b	89.033=>1.497b

表六：兩資產模型與三資產模型的各項數據比較

透過此表的比較，我們可以看到破產機率方面，三資產的破產機率較低，而轉換後的年金給付也較容易大於退休時的年金給付，達到目標的機率也高於兩資產，在期末價值分位數方面也都高於兩資產。我們可以發現在投資時若資產的選擇增加時，投資的效益會提升。下一節本研究將使用投資比例限制的數值解觀察限制投資比例對投資的影響。

第五節、投資比例限制

退休後的投資者不一定都會將資金都投資在風險性資產上，有些投資者會頃向將部份的資金放在銀行裡，亦即無風險資產。因此在這邊限制住高風險資產與中風險資產的比例來代表風險趨避程度的高低，我們定義風險愛好者投資在高風險與中風險資產上不超過100%;風險中立者投資在高風險與中風險資產上不超過70%;風險趨避者投資在高風險與中風險資產上不超過50%。這也代表了風險愛好者不需要將資金放在銀行中;風險中立者起碼要放30%的資金在銀行中;風險趨避者起碼需要放50%的資金在銀行中。由於上一節三資產的數值解可代表風險愛好者的投資行為，因此這邊只需要再找出風險中立者與風險趨避者的投資行為即可。

首先觀察風險中立者的投資行為，高風險資產與中風險資產投資不超過70%。模擬後透過每期狀態變數相對應的決策表，我們可以獲得期初高風險資產的最適比例為0.224，中風險資產的最適比例為0.298。

接著觀察風險趨避者的投資行為，高風險資產與中風險資產投資不超過50%。模擬後透過每期狀態變數相對應的決策表，我們可以獲得期初高風險資產的最適比例為0.196，中風險資產的最適比例為0.304。以下是風險趨避程度之間的數據結果比較：

	風險愛好者	風險中立者	風險趨避者
期初投資高風險資產比例	0.232	0.224	0.196
期初投資中風險資產比例	0.297	0.298	0.304
破產機率	0.0141	0.0101	0.0046
低於退休時轉換年金機率	0.1578	0.1890	0.2285
期末價值到達目標機率	0.0264	0.0225	0.0178
期末價值50分位數	83.363=>1.401b	82.141=>1.381b	79.037=>1.329b
期末價值95分位數	89.033=>1.497b	88.974=>1.496b	88.888=>1.494b

表七：三資產模型下風險程度的各項數據比較

我們可以看到越風險趨避的投資者會降低其投資在高風險資產比例，投資在中風險性資產比例則變動不大。在破產機率方面，由於風險趨避的投資者在高風險資產的比例較少，因此破產機率也是風險趨避的人較低。在投資效益方面，越風險愛好的投資者其期末價值能達到目標的機率也越高，而轉換年金時所得的年金給付低於退休時轉換年金所得的年金給付的機率也較低。期末價值分位數也是偏風險愛好的投資者來得高。因此我們可以知道，風險趨避的投資者較容易規避破產風險，但投資效益並沒有比偏風險愛好的投資者來得好，甚至投資結果轉換年金後的年金給付反而會低於退休時轉換年金的年金給付，因此風險趨避的投資者可以考慮在退休時點轉換年金，或許是個更好的選擇。

第六節、改變目標函數

針對一開始所設立的目標函數進行修正以提昇投資效益。

帳戶變異數控制

對於原目標函數，加上控制帳戶價值變異數的限制式，預期可以使破產機率降低，而投資效益也會相對降低。由於此目標函數有可能會受變異數影響較多，所以使用係數控制。我們分別使用係數 $\alpha=1$ 、 0.1 、 0.05 的係數來界定控制的多寡來分析模擬結果，首先觀察兩資產數值結果：

	原數值結果	係數= 1	係數= 0.1	係數= 0.05
期初最適投資比例	0.234	0.118	0.229	0.263
破產機率	0.0359	0.0026	0.0173	0.0187
低於退休時轉換年金機率	0.2273	0.3871	0.2052	0.1972
期末價值到達目標機率	0.0019	0	0.0001	0.0005
期末價值50分位數	76.765=>1.290b	63.353=>1.065b	75.481=>1.269b	76.874=>1.292b
期末價值95分位數	87.730=>1.475b	77.739=>1.307b	86.736=>1.458b	87.360=>1.468b

表八：兩資產模型下控制帳戶變異數係數的各項數據比較

三資產數值結果：

	原數值結果	係數= 1	係數= 0.1	係數= 0.05
期初投資高風險資產比例	0.232	0.138	0.202	0.211
期初投資中風險資產比例	0.297	0.227	0.317	0.326
破產機率	0.0141	0.0016	0.0120	0.0125
低於退休時轉換年金機率	0.1578	0.2139	0.1642	0.1583
期末價值到達目標機率	0.0264	0	0.0119	0.0229
期末價值50分位數	83.363=>1.401b	71.666=>1.205b	81.886=>1.376b	82.853=>1.393b
期末價值95分位數	89.033=>1.497b	83.628=>1.406b	88.774=>1.492b	88.974=>1.496b

表九：三資產模型下控制帳戶變異數係數的各項數據比較

從上述兩表可看出有使用控制變異數的目標函數在破產機率方面確實有降低，係數越高，破產機率越低。但使用此目標函數，投資效益也會隨係數增加相對降低，造成投資的不效率，和一開始預期的一樣。係數為0.1和0.05時破產機率雖然比係數為1來得高，但轉換年金時的年金給付低於退休時即轉換年金的年金給付的機率可以降低，且低於原本無控制變異數的目標函數。係數1和0.1的期末價值50分位數與95分位數都低於原目標函數，係數0.05的期末價值差異並不大。我們可看出當係數挑選適當，則可有效規避破產風險，轉換年金時的年金給付較容易高於退休時轉換的年金給付。因此想要規避破產機率的投資者可以使用此目標函數，雖然無法有效達到目標，但是可讓轉換後的年金給付較容易高於退休時轉換的年金給付，算是一個較穩定的選擇。需注意的是在係數的選擇上必須詳加考慮。

控制帳戶差異部位

在原目標函數加上控制實際帳戶低於目標帳戶部位，著重在實際價值小於目標價值的差距，較不在意超過目標價值的部份。預期投資效益提升，破產機率則無法確定。同樣地，使用係數來控制。我們分別使用係數 $\beta=2、1、0.5$ 來分析模擬結果，首先觀察兩資產的數值結果：

	原數值結果	係數 = 1	係數 = 2	係數 = 0.5
期初最適投資比例	0.234	0.233	0.251	0.245
破產機率	0.0359	0.0230	0.0234	0.0228
低於退休時轉換年金機率	0.2273	0.1983	0.2016	0.2082
期末價值到達目標機率	0.0019	0.0062	0.0170	0.0033
期末價值50分位數	76.765=>1.290b	77.684=>1.306b	78.195=>1.314b	77.610=>1.305b
期末價值95分位數	87.730=>1.475b	88.182=>1.482b	88.590=>1.489b	87.919=>1.478b

表十：兩資產模型下控制帳戶差異部位係數的各項數據比較

三資產數值結果：

	原數值結果	係數= 1	係數= 2	係數= 0.5
期初投資高風險資產比例	0.232	0.227	0.241	0.235
期初投資中風險資產比例	0.297	0.353	0.310	0.301
破產機率	0.0141	0.0164	0.0147	0.0142
低於退休時轉換年金機率	0.1578	0.1578	0.1589	0.1575
期末價值到達目標機率	0.0264	0.0675	0.1129	0.0483
期末價值50分位數	83.363=>1.401b	83.638=>1.406b	84.433=>1.419b	83.632=>1.406b
期末價值95分位數	89.033=>1.497b	89.353=>1.502b	89.601=>1.506b	89.228=>1.500b

表十一：三資產模型下控制帳戶差異部位係數的各項數據比較

從上述兩表可看出，在控制帳戶差異部位下投資效益增加不少，尤其是在三資產的部份，且投資效益的增加並沒有影響到破產機率。在三資產的破產機率，有控制下比無控制稍微高一點，而在兩資產的破產機率，有控制下比無控制還來得低，因此控制帳戶差異部位對破產機率的影響並不高，卻可以達到有效的投資。

目標函數數值結果比較

我們試著比較各目標函數的數值比較，首先觀察兩資產的數值結果：

	期初最適投資比例	破產機率
原數值結果	0.234	0.0359
控制帳戶變異數 $\alpha = 1$	0.118	0.0026
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.1$	0.229	0.0173
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.05$	0.263	0.0187
控制帳戶差異部位 $\beta = 2$	0.251	0.0230
控制帳戶差異部位 $\beta = 1$	0.233	0.0234
控制帳戶差異部位 $\beta = 0.5$	0.245	0.0228

	低於退休時轉換年金機率	期末價值到達目標機率	期末價值50分位數	期末價值95分位數
原數值結果	0.2273	0.0019	1.290b	1.475b
控制帳戶變異數 $\alpha = 1$	0.3871	0	1.065b	1.307b
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.1$	0.2052	0.0001	1.269b	1.458b
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.05$	0.1972	0.0005	1.292b	1.468b
控制帳戶差異部位 $\beta = 2$	0.2016	0.0170	1.314b	1.489b
控制帳戶差異部位 $\beta = 1$	0.1983	0.0062	1.306b	1.482b
控制帳戶差異部位 $\beta = 0.5$	0.2082	0.0033	1.305b	1.478b

表十二：兩資產模型下目標函數類型的各項數據比較

兩資產的情況下，控制帳戶變異數與控制帳戶差異部位的破產機率都比原目標函數來得低，控制帳戶差異部位的情況下破產機率會比控制帳戶變異數高。而在投資效益方面，控制帳戶差異部位的投資效益最佳。

接下來比較三資產的數值結果：

	期初投資高風險資產比例	期初投資中風險資產比例	破產機率
原數值結果	0.232	0.297	0.0141
控制帳戶變異數 $\alpha = 1$	0.138	0.227	0.0016
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.1$	0.202	0.317	0.0120
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.05$	0.211	0.326	0.0125
控制帳戶差異部位 $\beta = 2$	0.241	0.310	0.0147
控制帳戶差異部位 $\beta = 1$	0.227	0.353	0.0164
控制帳戶差異部位 $\beta = 0.5$	0.235	0.301	0.0142

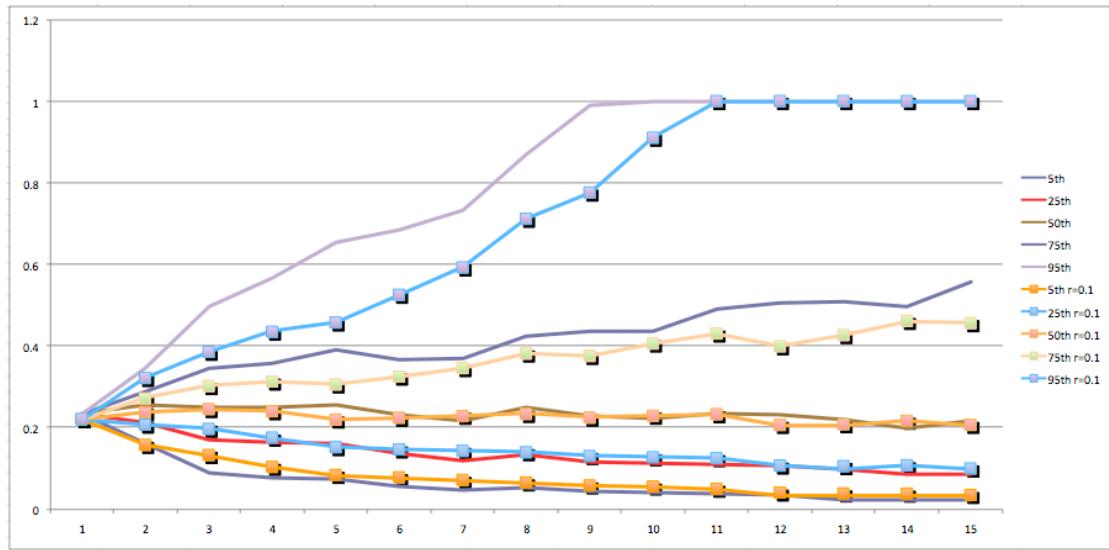
	低於退休時轉換年金機率	期末價值到達目標機率	期末價值 50分位數	期末價值 95分位數
原數值結果	0.1578	0.0264	1.401b	1.497b
控制帳戶變異數 $\alpha = 1$	0.2139	0	1.205b	1.406b
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.1$	0.1642	0.0119	1.376b	1.492b
控制帳戶變異數 $\alpha = 0.05$	0.1583	0.0229	1.393b	1.496b
控制帳戶差異部位 $\beta = 2$	0.1589	0.1129	1.419b	1.506b
控制帳戶差異部位 $\beta = 1$	0.1578	0.0675	1.406b	1.502b
控制帳戶差異部位 $\beta = 0.5$	0.1575	0.0483	1.406b	1.500b

表十三：三資產模型下目標函數類型的各項數據比較

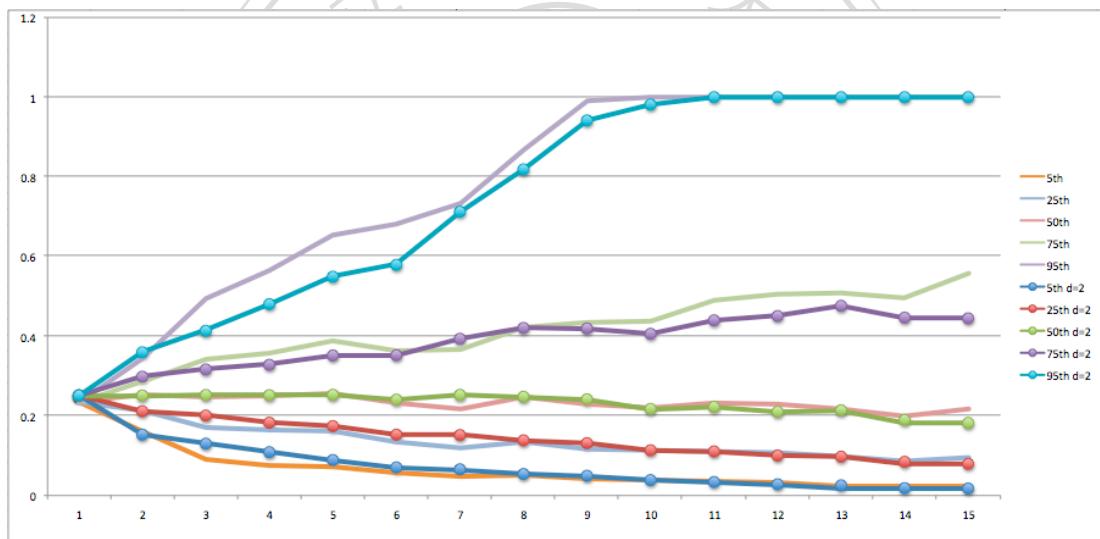
三資產的情況下，控制帳戶變異數的破產機率和其他目標函數比起來也是比較低，而不同於兩資產的情況是，控制帳戶差異部位的破產機率提高了，甚至大於原目標函數。這可能是因為資產增加，為了提昇投資效益而放入風險資產的比例過多所導致。而在投資效益方面，控制帳戶差異部位的投資效益相當不錯，大幅提昇到達目標機率，而控制帳戶變異數的投資效益和兩資產一樣，都是低於原目標函數。

目標函數決策圖比較

我們比較控制帳戶變異數、控制帳戶差異部位與原目標函數每期的決策圖，原目標函數以直線表示，控制帳戶變異數以方塊表示，控制帳戶差異部位以圓圈表示。由於三種目標函數決策圖放在一起過於繁雜，因此將這三種目標函數分開比較，分別由控制變異數與控制帳戶差異部位兩種目標函數分別挑選出一組係數與原目標函數作比較，因為兩資產與三資產的決策圖比較下，兩資產的決策圖較具代表性，因此這邊只顯示兩資產的部份：



圖五：兩資產下原目標函數與控制帳戶變異數係數0.1的每期投資決策圖



圖六：兩資產下原目標函數與控制帳戶差異部位係數2的每期投資決策圖

在這邊可以看到控制帳戶變異數的決策只有在50分位數以下與原目標函數較為接近，而在75分位數與95分位數，都明顯低於原目標函數，造成這個現象發生的原因，可能是因為控制住帳戶之間的變異，因此不會在風險性資產投資過多導致帳戶變異過大，與從數值結果所預期的相同。

而控制帳戶差異部位的決策，在第95分位數前期的決策都低於原目標函數，原因可能是不想讓前期投資過多的風險性資產使得帳戶價值變動過大，而

讓過低的帳戶價值必須投資更多的風險性資產比例，控制帳戶差異部位的目標
函數更頃向有效分配每一期的投資比例使投資可以達到目標。



第六章 結論與建議

使用數值解方法來解決最適化的問題可以接近動態規劃的答案，且不需要封閉解才能解決，它可以直接針對問題的本身來設計模型，可以跳過繁雜的求解過程。首先使用Gerrard & Haberman (2004)的研究結果與我們的數值解結果作比較，接下來將模型作衍生，將投資資產增加，分別使用不同的目標函數來模擬投資結果。我們可以得到以下結論：

(一)為了使模型更貼切現實市場，我們加入買空賣空的限制，使投資資產的比例介於0到1之間，結果可以發現對於有無買空賣空限制對於結果差異不大，但對於模型的衍生使用買空賣空的限制較恰當。

(二)對於投資資產我們從原本的風險性資產與無風險性資產衍生至高風險資產、中風險資產、無風險資產來觀察投資結果。可以看到在兩資產或三資產投資高風險資產比例雖然相差不多，但三資產能多投資在中風險資產的部份，讓投資可以有更多選擇，且投資三資產可以降低破產機率，提昇投資效益，投資達到目標的機率也來得比兩資產高。因此若投資資產的選擇增加，投資效益也可以增加。而本研究也假設部份的投資者傾向將部份的錢放在無風險資產上，而不是將所有的錢都投資在風險性資產上，結果發現越風險趨避的投資者會降低其高風險資產的比例，增加中風險資產的比例。而越風險趨避的投資者破產機率越低，但其投資效益低於較風險愛好的投資者，且過於風險趨避的投資者，投資結束要轉換年金所得的年金給付較容易低於退休時即轉換年金的年金給付。因此過於風險趨避的投資者較適合退休時即轉換成年金。

(三)依照不同的目的修改目標函數，我們可以針對破產風險去控制帳戶的變異數、提昇投資效益而注重帳戶差異的部位等。結果看到控制帳戶變異數的目標函數有效地控制住破產風險，但由於控制帳戶變異數的方法是控制住帳戶彼此之間的變異，因此會將帳戶價值控制在某一範圍，無法達到有效率性的投

資，或許選擇適當的係數可以提昇一定程度的投資效益。控制帳戶差異部位的目標函數的結果則提昇了投資效益，使投資較容易達到目標，由於此目標函數注重在實際價值低於目標價值的部份，而對破產機率的改善則不明顯，在只有兩資產的投資破產機率較低，但三資產的投資則和原目標函數差異不大，同樣地需要使用適當的係數來控制，若對於較追求投資效益的投資者而言，可以使較大的係數來追求投資效益。

使用數值解方法以倒推的方式求解來取代動態規劃求解是一個較新的方式，它可以節省很多時間，相信以後此方式會是一個求解的新選擇，雖然此方法相較起來很方便，但它也是有缺點與需要改進的地方：

(一)由於此數值方法是以倒推的方式來模擬，最後一期的決策訂定好後，前一期就需要包含當期的決策與後面的決策，因此當投資的期數過多時會造成編寫程式碼的繁雜度，使得此方法更難架構。

(二)要使模擬出來的數值解更精確，則在建構每期投資決策表時，狀態變數的間隔需要再分的細一點，但這麼作也會使程式碼效率變得沒這麼好，而退休後的資產配置方面投資帳戶起始值並不為0，所以會使狀態變數變廣，決策表建構也會變得太繁雜，因此在間隔的選擇需要找到一個平衡使數值方法準確且不會失去過多效率性。

(三)此方法另外一個問題在於每一期的決策是因應每一期的狀態而定，當期的決策並不受其他期的決策所影響，影響當期決策的只有當期的狀態。因此此方法目前還無法使用在有跨期的模型上。例如交易成本，若在市場上的交易是需要交易成本的，則每期的交易都是需要成本的。針對前一期的決策，當期調整比例高於前一期的決策可看成買進，低於前一期的決策可看成賣出，不管買進或賣出都會花費交易成本，因此每一期在調整比例時，都需要扣除交易成本。若此數值方法能改良成可跨期的話，那對於問題的解決一定會更加完善。

參考文獻

1. Bacinello, A.R., 1988. "A stochastic simulation procedure for pension scheme". *Insurance: Mathematics and Economics*, vol.7, 153–161.
2. Blake, D., Cairns, A. J. G. and Dowd, K., 2001. "Pensionmetrics : Stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.29, 187-215
3. Blake, D., Cairns, A. J. G. and Dowd, K., 2003. "Pensionmetrics 2 : Stochastic pension plan design during the distribution phase". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.33, 29-47
4. Bordley, R., Li Calzi, M., 2000. "Decision analysis using targets instead of utility functions". *Decisions in Economics and Finance*, vol.23, 53-74.
5. Browne, S., 1995. "Optimal investment policies for a firm with a random risk process : exponential utility and minimizing the probability of ruin". *Mathematics of Operations Research*, vol. 20, 937-958.
6. Chang, S.C., 1999. "Optimal Pension Funding Through Dynamic Simulations : the Case of Taiwan Public Employees Retirement System". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.24, 187-199.
7. Davidoff, T., Brown, J.R., Diamond, P.A., 2005. "Annuities and individual welfare". *American Economic Review*, vol.95, 1573-1590.
8. Delong, L., 2005. "Optimal investment strategy for a non-life insurance company : quadratic loss". *Appl. Math. (Warsaw)*, vol.32, 263-277.
9. Delong, L., Gerrard, R., Haberman, S., 2008. "Mean-variance optimization problems for an accumulation phase in a defined benefit plan". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.35, 321-342.
10. Gerrard, R., Haberman, S., Vigna, E., 2004. "Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 35, 321-342
11. Haberman, S., Sung, J.H., 1994. "Dynamic Approaches to Pension Funding". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.15, 151-162
12. Haberman, S., Vigna, E., 2002. "Optimal Investment Strategies and risk measures in defined contribution pension schemes". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.31, 35-69
13. He, L., Liang, Z., 2009. "Optimal financing and dividend control of the insurance company with fixed and proportional transaction costs". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.44, 88-94

14. Horneff, W. J., Maurer, R. H., Mitchell, O. S., Dus, I., 2008. "Following the rules : Integrating asset allocation and annuitization in retirement portfolios". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.42, 396-408
15. Horneff, W. J., Maurer, R. H., Stamos, M. Z., 2008. "Optimal gradual annuitization : Quantifying the costs of switching to annuities". *The Journal of Risk and Insurance*, vol.75, 1019-1038.
16. Huang, H. C., Cairns, A. J. G., 2006. "On the control of defined-benefit pension plans". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 38, 2006, 113-131.
17. Kahneman, D., Tversky, A., 1979. "Prospect theory : an analysis of decision under risk". *Econometrica*, vol.47, 263-291.
18. Orszag, J.M., 2000. "The annuities : the problem". In : *Presented at the NAPF Annual Conference*, May 11-12, 2000.
19. Polyak, I., 2005. "New Advice to Retirees : Spend More at First, Cut Back Later". *New York Times*.
20. Raymar, S.B. & M.J. Zwecher., 1997. "Monte Carlo Estimation of American Call Option on the Maximum of Several Assets". *Journal of Derivatives*, vol.5, 7-24
21. Vigna, E., and Haberman, S., 2001. "Optimal Investment Strategy for defined contribution pension schemes". *Insurance : Mathematics and Economics*, vol.28, 233-262.
22. Winklevoss, H.E., 1982. "Plasm: pension liability and asset simulation model". *Journal of Finance XXXVII* (2) 585-594.
23. 黃迪揚，2009年 "最適資產配置--動態規劃問題之數值解"，國立政治大學風險管理與保險學系碩士論文。

附錄一 三資產投資的數值結果

第15年決策表	高風險	中風險	第14年決策表	高風險	中風險	第13年決策表	高風險	中風險
35.0	1	0	35.0	1	0	37.5	1	0
37.5	1	0	37.5	1	0	40.0	1	0
40.0	0.935	0.065	40.0	0.956	0.044	42.5	0.956	0.044
42.5	0.857	0.143	42.5	0.879	0.121	45.0	0.886	0.114
45.0	0.788	0.212	45.0	0.813	0.187	47.5	0.824	0.176
47.5	0.726	0.274	47.5	0.753	0.247	50.0	0.769	0.231
50.0	0.670	0.330	50.0	0.697	0.303	52.5	0.713	0.287
52.5	0.620	0.380	52.5	0.646	0.354	55.0	0.664	0.336
55.0	0.574	0.426	55.0	0.599	0.401	57.5	0.618	0.382
57.5	0.532	0.468	57.5	0.556	0.444	60.0	0.575	0.425
60.0	0.494	0.506	60.0	0.516	0.484	62.5	0.538	0.462
62.5	0.459	0.541	62.5	0.481	0.519	65.0	0.501	0.499
65.0	0.426	0.574	65.0	0.448	0.552	67.5	0.468	0.532
67.5	0.396	0.604	67.5	0.417	0.583	70.0	0.438	0.562
70.0	0.363	0.610	70.0	0.389	0.611	72.5	0.412	0.588
72.5	0.311	0.523	72.5	0.348	0.575	75.0	0.365	0.530
75.0	0.263	0.441	75.0	0.301	0.498	77.5	0.318	0.463
77.5	0.217	0.365	77.5	0.257	0.424	80.0	0.273	0.396
80.0	0.175	0.293	80.0	0.215	0.352	82.5	0.230	0.332
82.5	0.135	0.226	82.5	0.174	0.286	85.0	0.187	0.270
85.0	0.097	0.163	85.0	0.136	0.222	87.5	0.146	0.211
87.5	0.061	0.103	87.5	0.099	0.162	90.0	0.107	0.155
90.0	0.028	0.047	90.0	0.064	0.105	92.5	0.071	0.102
92.5	0	0	92.5	0.031	0.052	95.0	0.036	0.052
			95.0	0	0.001	97.5	0.003	0.004
			97.5	0	0	100.0	0	0

第12年決策表	高風險	中風險	第11年決策表	高風險	中風險	第10年決策表	高風險	中風險
37.5	1	0	37.5	1	0	37.5	1	0
40.0	1	0	40.0	0.933	0.067	40.0	0.958	0.042
42.5	0.941	0.059	42.5	0.866	0.134	42.5	0.899	0.101
45.0	0.871	0.129	45.0	0.805	0.195	45.0	0.843	0.157

47.5	0.807	0.193	47.5	0.750	0.250	47.5	0.790	0.210
50.0	0.753	0.247	50.0	0.699	0.301	50.0	0.744	0.256
52.5	0.701	0.299	52.5	0.651	0.349	52.5	0.707	0.293
55.0	0.652	0.348	55.0	0.611	0.389	55.0	0.661	0.339
57.5	0.605	0.395	57.5	0.576	0.424	57.5	0.623	0.377
60.0	0.566	0.434	60.0	0.541	0.459	60.0	0.584	0.416
62.5	0.527	0.473	62.5	0.510	0.490	62.5	0.547	0.453
65.0	0.494	0.506	65.0	0.479	0.521	65.0	0.514	0.486
67.5	0.461	0.539	67.5	0.453	0.547	67.5	0.484	0.516
70.0	0.431	0.569	70.0	0.429	0.571	70.0	0.455	0.545
72.5	0.406	0.594	72.5	0.406	0.594	72.5	0.431	0.569
75.0	0.371	0.568	75.0	0.384	0.616	75.0	0.408	0.592
77.5	0.327	0.504	77.5	0.363	0.631	77.5	0.388	0.612
80.0	0.287	0.438	80.0	0.324	0.561	80.0	0.353	0.562
82.5	0.249	0.375	82.5	0.284	0.493	82.5	0.316	0.496
85.0	0.210	0.316	85.0	0.246	0.428	85.0	0.279	0.435
87.5	0.173	0.258	87.5	0.207	0.363	87.5	0.243	0.376
90.0	0.136	0.201	90.0	0.170	0.299	90.0	0.204	0.314
92.5	0.101	0.149	92.5	0.134	0.236	92.5	0.167	0.255
95.0	0.067	0.099	95.0	0.098	0.174	95.0	0.132	0.201
97.5	0.035	0.051	97.5	0.065	0.115	97.5	0.097	0.148
100.0	0.004	0.005	100.0	0.033	0.059	100.0	0.063	0.097
102.5	0	0	102.5	0.003	0.005	102.5	0.031	0.048
105.0				0	0	105.0	0.001	0.001
						107.5	0	0

第9年決策表	高風險	中風險	第8年決策表	高風險	中風險	第7年決策表	高風險	中風險
37.5	1	0	37.5	1	0	37.5	1	0
40.0	0.949	0.051	40.0	1	0	40.0	0.987	0.013
42.5	0.886	0.114	42.5	0.945	0.055	42.5	0.918	0.082
45.0	0.828	0.172	45.0	0.884	0.116	45.0	0.863	0.137
47.5	0.774	0.226	47.5	0.826	0.174	47.5	0.818	0.182
50.0	0.723	0.277	50.0	0.778	0.222	50.0	0.773	0.227
52.5	0.677	0.323	52.5	0.730	0.270	52.5	0.722	0.278
55.0	0.631	0.369	55.0	0.691	0.309	55.0	0.679	0.321

57.5	0.591	0.409	57.5	0.649	0.351	57.5	0.641	0.359
60.0	0.553	0.447	60.0	0.610	0.390	60.0	0.609	0.391
62.5	0.524	0.476	62.5	0.577	0.423	62.5	0.576	0.424
65.0	0.494	0.506	65.0	0.540	0.460	65.0	0.545	0.455
67.5	0.468	0.532	67.5	0.511	0.489	67.5	0.512	0.488
70.0	0.444	0.556	70.0	0.481	0.519	70.0	0.484	0.516
72.5	0.422	0.578	72.5	0.453	0.547	72.5	0.462	0.538
75.0	0.401	0.599	75.0	0.431	0.569	75.0	0.441	0.559
77.5	0.382	0.618	77.5	0.410	0.590	77.5	0.421	0.579
80.0	0.347	0.561	80.0	0.388	0.612	80.0	0.395	0.564
82.5	0.314	0.504	82.5	0.351	0.554	82.5	0.359	0.515
85.0	0.282	0.446	85.0	0.316	0.497	85.0	0.325	0.462
87.5	0.251	0.389	87.5	0.281	0.449	87.5	0.297	0.418
90.0	0.222	0.336	90.0	0.246	0.392	90.0	0.266	0.370
92.5	0.191	0.284	92.5	0.211	0.334	92.5	0.235	0.325
95.0	0.157	0.239	95.0	0.176	0.283	95.0	0.205	0.280
97.5	0.124	0.187	97.5	0.145	0.228	97.5	0.175	0.239
100.0	0.092	0.136	100.0	0.113	0.180	100.0	0.143	0.193
102.5	0.059	0.088	102.5	0.083	0.129	102.5	0.111	0.148
105.0	0.028	0.042	105.0	0.052	0.081	105.0	0.079	0.105
107.5	0	0	107.5	0.022	0.035	107.5	0.048	0.064
			110.0	0	0	110.0	0.017	0.023

第6年決策表	高風險	中風險	第5年決策表	高風險	中風險	第4年決策表	高風險	中風險
37.5	0.942	0.058	37.5	0.932	0.068	37.5	0.960	0.040
40.0	0.875	0.125	40.0	0.859	0.141	40.0	0.892	0.108
42.5	0.825	0.175	42.5	0.805	0.195	42.5	0.844	0.156
45.0	0.772	0.228	45.0	0.758	0.242	45.0	0.801	0.199
47.5	0.728	0.272	47.5	0.717	0.283	47.5	0.758	0.242
50.0	0.699	0.301	50.0	0.678	0.322	50.0	0.715	0.285
52.5	0.657	0.343	52.5	0.643	0.357	52.5	0.674	0.326
55.0	0.621	0.379	55.0	0.616	0.384	55.0	0.639	0.361

57.5	0.591	0.409	57.5	0.586	0.414	57.5	0.609	0.391
60.0	0.567	0.433	60.0	0.552	0.448	60.0	0.580	0.420
62.5	0.537	0.463	62.5	0.526	0.474	62.5	0.552	0.448
65.0	0.513	0.487	65.0	0.499	0.501	65.0	0.524	0.476
67.5	0.489	0.511	67.5	0.475	0.525	67.5	0.504	0.496
70.0	0.466	0.534	70.0	0.456	0.544	70.0	0.478	0.522
72.5	0.446	0.554	72.5	0.437	0.563	72.5	0.454	0.546
75.0	0.427	0.573	75.0	0.418	0.582	75.0	0.436	0.564
77.5	0.406	0.594	77.5	0.402	0.598	77.5	0.418	0.582
80.0	0.388	0.599	80.0	0.383	0.587	80.0	0.405	0.595
82.5	0.360	0.550	82.5	0.356	0.543	82.5	0.385	0.615
85.0	0.326	0.514	85.0	0.326	0.501	85.0	0.356	0.574
87.5	0.296	0.467	87.5	0.296	0.458	87.5	0.330	0.529
90.0	0.267	0.420	90.0	0.265	0.410	90.0	0.304	0.481
92.5	0.236	0.377	92.5	0.240	0.378	92.5	0.275	0.431
95.0	0.208	0.328	95.0	0.215	0.334	95.0	0.252	0.386
97.5	0.178	0.279	97.5	0.189	0.288	97.5	0.228	0.349
100.0	0.147	0.226	100.0	0.161	0.245	100.0	0.202	0.302
102.5	0.119	0.180	102.5	0.134	0.201	102.5	0.173	0.258
105.0	0.091	0.139	105.0	0.108	0.158	105.0	0.144	0.211
107.5	0.063	0.096	107.5	0.080	0.120	107.5	0.113	0.161
110.0	0.035	0.055	110.0	0.054	0.080	110.0	0.081	0.117
112.5	0.009	0.013	112.5	0.028	0.041	112.5	0.050	0.072

第3年決策表	高風險	中風險	第2年決策表	高風險	中風險
35.0	0.973	0.027	40.0	0.850	0.150
37.5	0.905	0.095	42.5	0.801	0.199
40.0	0.844	0.156	45.0	0.755	0.245
42.5	0.793	0.207	47.5	0.727	0.273
45.0	0.742	0.258	50.0	0.696	0.304
47.5	0.708	0.292	52.5	0.653	0.347
50.0	0.666	0.334	55.0	0.619	0.381

52.5	0.630	0.370	57.5	0.588	0.412
55.0	0.597	0.403	60.0	0.568	0.432
57.5	0.568	0.432	62.5	0.541	0.459
60.0	0.542	0.458	65.0	0.514	0.486
62.5	0.521	0.479	67.5	0.491	0.509
65.0	0.501	0.499	70.0	0.472	0.528
67.5	0.476	0.524	72.5	0.446	0.554
70.0	0.451	0.549	75.0	0.427	0.573
72.5	0.435	0.565	77.5	0.414	0.586
75.0	0.420	0.580	80.0	0.396	0.604
77.5	0.402	0.598	82.5	0.382	0.618
80.0	0.389	0.611	85.0	0.358	0.588
82.5	0.369	0.595	87.5	0.329	0.546
85.0	0.345	0.555	90.0	0.303	0.506
87.5	0.317	0.510	92.5	0.275	0.459
90.0	0.290	0.475	95.0	0.250	0.418
92.5	0.265	0.435	97.5	0.225	0.378
95.0	0.240	0.403	100.0	0.200	0.334
97.5	0.214	0.359	102.5	0.174	0.290
100.0	0.190	0.326	105.0	0.150	0.247
102.5	0.166	0.284	107.5	0.127	0.209
105.0	0.145	0.245	110.0	0.102	0.169
107.5	0.117	0.200	112.5	0.078	0.123
110.0	0.091	0.152	115.0	0.053	0.083

附錄二 三資產下風險中立者的數值結果

第15年決策表	高風險	中風險	第14年決策表	高風險	中風險	第13年決策表	高風險	中風險
42.5	0.700	0	42.5	0.700	0	42.5	0.700	0
45.0	0.700	0	45.0	0.700	0	45.0	0.700	0
47.5	0.670	0.030	47.5	0.697	0.003	47.5	0.700	0
50.0	0.614	0.086	50.0	0.641	0.059	50.0	0.700	0
52.5	0.564	0.136	52.5	0.592	0.108	52.5	0.657	0.043
55.0	0.518	0.182	55.0	0.547	0.153	55.0	0.608	0.092
57.5	0.476	0.224	57.5	0.504	0.196	57.5	0.565	0.135
60.0	0.438	0.262	60.0	0.464	0.236	60.0	0.521	0.179
62.5	0.403	0.297	62.5	0.427	0.273	62.5	0.483	0.217
65.0	0.370	0.330	65.0	0.393	0.307	65.0	0.445	0.255
67.5	0.340	0.360	67.5	0.362	0.338	67.5	0.412	0.288
70.0	0.312	0.388	70.0	0.334	0.366	70.0	0.381	0.319
72.5	0.286	0.414	72.5	0.307	0.393	72.5	0.351	0.349
75.0	0.262	0.438	75.0	0.282	0.418	75.0	0.323	0.377
77.5	0.217	0.365	77.5	0.254	0.418	77.5	0.299	0.401
80.0	0.175	0.293	80.0	0.212	0.351	80.0	0.268	0.388
82.5	0.135	0.226	82.5	0.174	0.285	82.5	0.225	0.329
85.0	0.097	0.163	85.0	0.135	0.222	85.0	0.185	0.269
87.5	0.061	0.103	87.5	0.099	0.162	87.5	0.146	0.211
90.0	0.028	0.047	90.0	0.064	0.105	90.0	0.107	0.155
92.5	0	0	92.5	0.031	0.052	92.5	0.071	0.102
			95.0	0	0.001	95.0	0.036	0.052
			97.5	0	0	97.5	0.003	0.004
						100.0	0	0

第12年決策表	高風險	中風險	第11年決策表	高風險	中風險	第10年決策表	高風險	中風險
45.0	0.700	0	45.0	0.700	0	45.0	0.700	0
47.5	0.700	0	47.5	0.700	0	47.5	0.700	0
50.0	0.700	0	50.0	0.657	0.043	50.0	0.698	0.002
52.5	0.657	0.043	52.5	0.612	0.088	52.5	0.653	0.047
55.0	0.606	0.094	55.0	0.568	0.132	55.0	0.611	0.089
57.5	0.562	0.138	57.5	0.527	0.173	57.5	0.571	0.129

60.0	0.522	0.178	60.0	0.491	0.209	60.0	0.537	0.163
62.5	0.482	0.218	62.5	0.456	0.244	62.5	0.503	0.197
65.0	0.446	0.254	65.0	0.427	0.273	65.0	0.470	0.230
67.5	0.412	0.288	67.5	0.398	0.302	67.5	0.437	0.263
70.0	0.380	0.320	70.0	0.372	0.328	70.0	0.406	0.294
72.5	0.352	0.348	72.5	0.345	0.355	72.5	0.378	0.322
75.0	0.324	0.376	75.0	0.322	0.378	75.0	0.351	0.349
77.5	0.300	0.400	77.5	0.303	0.397	77.5	0.327	0.373
80.0	0.279	0.421	80.0	0.282	0.418	80.0	0.306	0.394
82.5	0.241	0.370	82.5	0.265	0.435	82.5	0.287	0.413
85.0	0.205	0.313	85.0	0.239	0.415	85.0	0.268	0.425
87.5	0.170	0.256	87.5	0.204	0.354	87.5	0.234	0.366
90.0	0.135	0.202	90.0	0.168	0.294	90.0	0.200	0.311
92.5	0.100	0.149	92.5	0.133	0.233	92.5	0.166	0.256
95.0	0.067	0.099	95.0	0.099	0.174	95.0	0.131	0.200
97.5	0.035	0.051	97.5	0.065	0.115	97.5	0.097	0.148
100.0	0.004	0.005	100.0	0.033	0.059	100.0	0.063	0.097
102.5	0	0	102.5	0.003	0.005	102.5	0.031	0.048
105.0				0	0	105.0	0.001	0.001
						107.5	0	0

第9年決策表	高風險	中風險	第8年決策表	高風險	中風險	第7年決策表	高風險	中風險
47.5	0.700	0	47.5	0.700	0	47.5	0.700	0
50.0	0.695	0.005	50.0	0.700	0	50.0	0.700	0
52.5	0.649	0.051	52.5	0.700	0	52.5	0.694	0.006
55.0	0.603	0.097	55.0	0.656	0.044	55.0	0.650	0.050
57.5	0.561	0.139	57.5	0.612	0.088	57.5	0.612	0.088
60.0	0.525	0.175	60.0	0.573	0.127	60.0	0.576	0.124
62.5	0.492	0.208	62.5	0.538	0.162	62.5	0.537	0.163
65.0	0.453	0.247	65.0	0.504	0.196	65.0	0.502	0.198
67.5	0.423	0.277	67.5	0.469	0.231	67.5	0.470	0.230
70.0	0.392	0.308	70.0	0.439	0.261	70.0	0.441	0.259
72.5	0.368	0.332	72.5	0.410	0.290	72.5	0.416	0.284
75.0	0.347	0.353	75.0	0.380	0.320	75.0	0.386	0.314
77.5	0.324	0.376	77.5	0.353	0.347	77.5	0.362	0.338

80.0	0.303	0.397	80.0	0.328	0.372	80.0	0.338	0.362
82.5	0.285	0.415	82.5	0.308	0.392	82.5	0.320	0.380
85.0	0.269	0.431	85.0	0.290	0.410	85.0	0.303	0.397
87.5	0.239	0.384	87.5	0.272	0.428	87.5	0.284	0.409
90.0	0.209	0.330	90.0	0.239	0.377	90.0	0.252	0.359
92.5	0.181	0.278	92.5	0.207	0.330	92.5	0.223	0.314
95.0	0.153	0.231	95.0	0.175	0.279	95.0	0.196	0.273
97.5	0.122	0.185	97.5	0.142	0.227	97.5	0.167	0.230
100.0	0.091	0.136	100.0	0.111	0.176	100.0	0.138	0.191
102.5	0.059	0.088	102.5	0.082	0.130	102.5	0.109	0.148
105.0	0.028	0.042	105.0	0.051	0.081	105.0	0.078	0.105
107.5	0	0	107.5	0.022	0.035	107.5	0.048	0.064
			110.0	0	0	110.0	0.017	0.023

第6年決策表	高風險	中風險	第5年決策表	高風險	中風險	第4年決策表	高風險	中風險
50.0	0.673	0.027	50.0	0.665	0.035	50.0	0.700	0
52.5	0.630	0.070	52.5	0.622	0.078	52.5	0.660	0.040
55.0	0.592	0.108	55.0	0.586	0.114	55.0	0.625	0.075
57.5	0.553	0.147	57.5	0.553	0.147	57.5	0.590	0.110
60.0	0.527	0.173	60.0	0.521	0.179	60.0	0.556	0.144
62.5	0.498	0.202	62.5	0.490	0.210	62.5	0.523	0.177
65.0	0.469	0.231	65.0	0.467	0.233	65.0	0.492	0.208
67.5	0.441	0.259	67.5	0.443	0.257	67.5	0.463	0.237
70.0	0.422	0.278	70.0	0.412	0.288	70.0	0.437	0.263
72.5	0.395	0.305	72.5	0.391	0.309	72.5	0.415	0.285
75.0	0.370	0.330	75.0	0.365	0.335	75.0	0.390	0.310
77.5	0.350	0.350	77.5	0.348	0.352	77.5	0.366	0.334
80.0	0.331	0.369	80.0	0.327	0.373	80.0	0.344	0.356
82.5	0.313	0.387	82.5	0.312	0.388	82.5	0.329	0.371
85.0	0.294	0.406	85.0	0.296	0.404	85.0	0.310	0.390
87.5	0.279	0.421	87.5	0.283	0.417	87.5	0.295	0.405
90.0	0.257	0.398	90.0	0.262	0.401	90.0	0.281	0.419
92.5	0.228	0.358	92.5	0.233	0.357	92.5	0.264	0.423
95.0	0.201	0.315	95.0	0.206	0.318	95.0	0.237	0.378
97.5	0.172	0.273	97.5	0.180	0.282	97.5	0.215	0.331

100.0	0.146	0.229	100.0	0.156	0.243	100.0	0.189	0.289
102.5	0.118	0.182	102.5	0.131	0.199	102.5	0.165	0.252
105.0	0.090	0.135	105.0	0.105	0.158	105.0	0.140	0.208
107.5	0.062	0.095	107.5	0.079	0.118	107.5	0.112	0.163
110.0	0.035	0.055	110.0	0.053	0.080	110.0	0.081	0.117

第3年決策表	高風險	中風險	第2年決策表	高風險	中風險
50.0	0.669	0.031	50.0	0.691	0.009
52.5	0.625	0.075	52.5	0.646	0.054
55.0	0.588	0.112	55.0	0.607	0.093
57.5	0.551	0.149	57.5	0.579	0.121
60.0	0.526	0.174	60.0	0.549	0.151
62.5	0.496	0.204	62.5	0.517	0.183
65.0	0.467	0.233	65.0	0.485	0.215
67.5	0.440	0.260	67.5	0.458	0.242
70.0	0.417	0.283	70.0	0.436	0.264
72.5	0.395	0.305	72.5	0.413	0.287
75.0	0.375	0.325	75.0	0.387	0.313
77.5	0.355	0.345	77.5	0.366	0.334
80.0	0.333	0.367	80.0	0.346	0.354
82.5	0.319	0.381	82.5	0.326	0.374
85.0	0.304	0.396	85.0	0.308	0.392
87.5	0.289	0.411	87.5	0.293	0.407
90.0	0.275	0.425	90.0	0.280	0.420
92.5	0.258	0.411	92.5	0.266	0.434
95.0	0.232	0.372	95.0	0.244	0.403
97.5	0.207	0.338	97.5	0.217	0.365
100.0	0.184	0.302	100.0	0.195	0.329
102.5	0.159	0.270	102.5	0.172	0.288
105.0	0.136	0.231	105.0	0.146	0.247
107.5	0.113	0.194	107.5	0.123	0.205
110.0	0.090	0.153	110.0	0.100	0.164
112.5	0.064	0.105	112.5	0.076	0.124
115.0	0.037	0.060	115.0	0.052	0.082
117.5	0.011	0.016	117.5	0.028	0.042

附錄三 三資產下風險趨避者的數值結果

第15年決策表	高風險	中風險	第14年決策表	高風險	中風險	第13年決策表	高風險	中風險
50.0	0.500	0	50.0	0.500	0	50.0	0.500	0
52.5	0.500	0	52.5	0.500	0	52.5	0.500	0
55.0	0.500	0	55.0	0.500	0	55.0	0.500	0
57.5	0.500	0	57.5	0.500	0	57.5	0.500	0
60.0	0.459	0.041	60.0	0.478	0.022	60.0	0.490	0.010
62.5	0.417	0.083	62.5	0.437	0.063	62.5	0.450	0.050
65.0	0.378	0.122	65.0	0.400	0.100	65.0	0.414	0.086
67.5	0.342	0.158	67.5	0.365	0.135	67.5	0.379	0.121
70.0	0.308	0.192	70.0	0.332	0.168	70.0	0.345	0.155
72.5	0.277	0.223	72.5	0.301	0.199	72.5	0.314	0.186
75.0	0.248	0.252	75.0	0.272	0.228	75.0	0.286	0.214
77.5	0.221	0.279	77.5	0.246	0.254	77.5	0.259	0.241
80.0	0.189	0.277	80.0	0.221	0.279	80.0	0.234	0.266
82.5	0.146	0.213	82.5	0.190	0.271	82.5	0.211	0.289
85.0	0.105	0.154	85.0	0.150	0.211	85.0	0.178	0.260
87.5	0.066	0.097	87.5	0.111	0.154	87.5	0.142	0.206
90.0	0.030	0.044	90.0	0.072	0.101	90.0	0.105	0.153
92.5	0	0	92.5	0.035	0.049	92.5	0.070	0.101
			95.0	0	0.001	95.0	0.035	0.051
			97.5	0	0	97.5	0.003	0.004
						100.0	0	0

第12年決策表	高風險	中風險	第11年決策表	高風險	中風險	第10年決策表	高風險	中風險
52.5	0.500	0	52.5	0.500	0	52.5	0.500	0
55.0	0.500	0	55.0	0.500	0	55.0	0.500	0
57.5	0.500	0	57.5	0.500	0	57.5	0.500	0
60.0	0.462	0.038	60.0	0.500	0	60.0	0.500	0
62.5	0.425	0.075	62.5	0.465	0.035	62.5	0.495	0.005
65.0	0.392	0.108	65.0	0.430	0.070	65.0	0.460	0.040
67.5	0.363	0.137	67.5	0.394	0.106	67.5	0.428	0.072
70.0	0.333	0.167	70.0	0.363	0.137	70.0	0.392	0.108
72.5	0.305	0.195	72.5	0.335	0.165	72.5	0.359	0.141

75.0	0.279	0.221	75.0	0.307	0.193	75.0	0.328	0.172
77.5	0.254	0.246	77.5	0.281	0.219	77.5	0.302	0.198
80.0	0.231	0.269	80.0	0.257	0.243	80.0	0.278	0.222
82.5	0.211	0.289	82.5	0.236	0.264	82.5	0.255	0.245
85.0	0.192	0.308	85.0	0.216	0.284	85.0	0.233	0.267
87.5	0.162	0.278	87.5	0.199	0.301	87.5	0.213	0.287
90.0	0.129	0.224	90.0	0.169	0.265	90.0	0.190	0.282
92.5	0.096	0.168	92.5	0.136	0.211	92.5	0.158	0.236
95.0	0.063	0.113	95.0	0.101	0.157	95.0	0.127	0.190
97.5	0.033	0.058	97.5	0.067	0.104	97.5	0.095	0.141
100.0	0.004	0.006	100.0	0.034	0.053	100.0	0.063	0.093
102.5	0	0	102.5	0.003	0.005	102.5	0.031	0.046
105.0				0	0	105.0	0.001	0.001
				107.5		0	0	

第9年決策表	高風險	中風險	第8年決策表	高風險	中風險	第7年決策表	高風險	中風險
55.0	0.500	0	55.0	0.500	0	55.0	0.500	0
57.5	0.488	0.012	57.5	0.500	0	57.5	0.500	0
60.0	0.452	0.048	60.0	0.500	0	60.0	0.500	0
62.5	0.421	0.079	62.5	0.481	0.019	62.5	0.475	0.025
65.0	0.391	0.109	65.0	0.448	0.052	65.0	0.441	0.059
67.5	0.364	0.136	67.5	0.418	0.082	67.5	0.412	0.088
70.0	0.337	0.163	70.0	0.391	0.109	70.0	0.385	0.115
72.5	0.317	0.183	72.5	0.364	0.136	72.5	0.359	0.141
75.0	0.295	0.205	75.0	0.336	0.164	75.0	0.332	0.168
77.5	0.273	0.227	77.5	0.312	0.188	77.5	0.308	0.192
80.0	0.253	0.247	80.0	0.289	0.211	80.0	0.286	0.214
82.5	0.232	0.268	82.5	0.267	0.233	82.5	0.264	0.236
85.0	0.214	0.286	85.0	0.247	0.253	85.0	0.246	0.254
87.5	0.199	0.301	87.5	0.228	0.272	87.5	0.227	0.273
90.0	0.186	0.314	90.0	0.211	0.289	90.0	0.211	0.289
92.5	0.165	0.288	92.5	0.192	0.282	92.5	0.197	0.303
95.0	0.136	0.240	95.0	0.164	0.239	95.0	0.181	0.301
97.5	0.110	0.191	97.5	0.137	0.199	97.5	0.156	0.253
100.0	0.083	0.143	100.0	0.107	0.158	100.0	0.129	0.210

102.5	0.054	0.094	102.5	0.078	0.114	102.5	0.102	0.162
105.0	0.026	0.044	105.0	0.050	0.073	105.0	0.074	0.113
107.5	0	0	107.5	0.021	0.031	107.5	0.046	0.069
			110.0	0	0	110.0	0.017	0.025

第6年決策表	高風險	中風險	第5年決策表	高風險	中風險	第4年決策表	高風險	中風險
57.5	0.500	0	57.5	0.500	0	57.5	0.500	0
60.0	0.487	0.013	60.0	0.475	0.025	60.0	0.500	0
62.5	0.451	0.049	62.5	0.443	0.057	62.5	0.500	0
65.0	0.423	0.077	65.0	0.414	0.086	65.0	0.482	0.018
67.5	0.398	0.102	67.5	0.386	0.114	67.5	0.453	0.047
70.0	0.376	0.124	70.0	0.360	0.140	70.0	0.426	0.074
72.5	0.351	0.149	72.5	0.335	0.165	72.5	0.399	0.101
75.0	0.328	0.172	75.0	0.316	0.184	75.0	0.374	0.126
77.5	0.306	0.194	77.5	0.296	0.204	77.5	0.349	0.151
80.0	0.285	0.215	80.0	0.277	0.223	80.0	0.326	0.174
82.5	0.265	0.235	82.5	0.257	0.243	82.5	0.306	0.194
85.0	0.246	0.254	85.0	0.239	0.261	85.0	0.285	0.215
87.5	0.229	0.271	87.5	0.223	0.277	87.5	0.266	0.234
90.0	0.212	0.288	90.0	0.210	0.290	90.0	0.248	0.252
92.5	0.196	0.304	92.5	0.197	0.303	92.5	0.232	0.268
95.0	0.182	0.318	95.0	0.184	0.316	95.0	0.217	0.283
97.5	0.164	0.305	97.5	0.164	0.293	97.5	0.200	0.287
100.0	0.139	0.258	100.0	0.142	0.257	100.0	0.173	0.251
102.5	0.113	0.212	102.5	0.120	0.221	102.5	0.151	0.215
105.0	0.086	0.166	105.0	0.096	0.180	105.0	0.127	0.178
107.5	0.059	0.121	107.5	0.072	0.137	107.5	0.104	0.139
110.0	0.033	0.068	110.0	0.048	0.093	110.0	0.077	0.100
112.5	0.008	0.016	112.5	0.024	0.048	112.5	0.048	0.062
			115.0	0.001	0.002	115.0	0.020	0.026

第3年決策表	高風險	中風險	第2年決策表	高風險	中風險
60.0	0.500	0	60.0	0.500	0
62.5	0.500	0	62.5	0.469	0.031
65.0	0.490	0.010	65.0	0.438	0.062

67.5	0.459	0.041	67.5	0.414	0.086
70.0	0.432	0.068	70.0	0.393	0.107
72.5	0.404	0.096	72.5	0.373	0.127
75.0	0.378	0.122	75.0	0.352	0.148
77.5	0.356	0.144	77.5	0.331	0.169
80.0	0.335	0.165	80.0	0.311	0.189
82.5	0.312	0.188	82.5	0.293	0.207
85.0	0.295	0.205	85.0	0.273	0.227
87.5	0.276	0.224	87.5	0.256	0.244
90.0	0.259	0.241	90.0	0.241	0.259
92.5	0.244	0.256	92.5	0.227	0.273
95.0	0.229	0.271	95.0	0.214	0.286
97.5	0.214	0.286	97.5	0.202	0.298
100.0	0.198	0.302	100.0	0.190	0.306
102.5	0.175	0.275	102.5	0.166	0.266
105.0	0.147	0.232	105.0	0.146	0.236
107.5	0.121	0.193	107.5	0.123	0.197
110.0	0.095	0.150	110.0	0.101	0.159
112.5	0.069	0.108	112.5	0.077	0.124
115.0	0.040	0.063	115.0	0.053	0.084
117.5	0.011	0.018	117.5	0.028	0.043
			120.0	0	0.001
			122.5	0	0

附錄四 兩資產下帳戶變異數控制的數值結果

控制帳戶變異數，係數0.1的情況下分別對應的最適投資決策表：

第15年決策表		第14年決策表		第13年決策表	
50.0	0.947	50.0	1	50.0	0.971
52.5	0.848	52.5	0.909	52.5	0.885
55.0	0.759	55.0	0.823	55.0	0.808
57.5	0.677	57.5	0.744	57.5	0.737
60.0	0.602	60.0	0.671	60.0	0.673
62.5	0.533	62.5	0.603	62.5	0.609
65.0	0.469	65.0	0.537	65.0	0.548
67.5	0.410	67.5	0.474	67.5	0.490
70.0	0.356	70.0	0.417	70.0	0.436
72.5	0.305	72.5	0.362	72.5	0.384
75.0	0.257	75.0	0.311	75.0	0.335
77.5	0.213	77.5	0.264	77.5	0.289
80.0	0.171	80.0	0.219	80.0	0.245
82.5	0.132	82.5	0.177	82.5	0.204
85.0	0.095	85.0	0.138	85.0	0.165
87.5	0.060	87.5	0.100	87.5	0.129
90.0	0.027	90.0	0.065	90.0	0.095
92.5	0	92.5	0.032	92.5	0.063
		95.0	0	95.0	0.032
				97.5	0.003
				100.0	0

第12年決策表		第11年決策表		第10年決策表	
50.0	0.991	50.0	1	50.0	1
52.5	0.905	52.5	0.980	52.5	0.970
55.0	0.827	55.0	0.905	55.0	0.898
57.5	0.761	57.5	0.836	57.5	0.832
60.0	0.697	60.0	0.766	60.0	0.770
62.5	0.637	62.5	0.703	62.5	0.710
65.0	0.574	65.0	0.648	65.0	0.658

67.5	0.518	67.5	0.590	67.5	0.604
70.0	0.465	70.0	0.538	70.0	0.549
72.5	0.413	72.5	0.487	72.5	0.497
75.0	0.365	75.0	0.436	75.0	0.451
77.5	0.319	77.5	0.387	77.5	0.405
80.0	0.276	80.0	0.339	80.0	0.360
82.5	0.235	82.5	0.294	82.5	0.317
85.0	0.196	85.0	0.250	85.0	0.274
87.5	0.159	87.5	0.209	87.5	0.233
90.0	0.125	90.0	0.170	90.0	0.194
92.5	0.092	92.5	0.133	92.5	0.158
95.0	0.061	95.0	0.098	95.0	0.123
97.5	0.031	97.5	0.065	97.5	0.091
100.0	0.003	100.0	0.033	100.0	0.059
102.5	0	102.5	0.003	102.5	0.030
		105.0	0	105.0	0

第9年決策表		第8年決策表		第7年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	0.941
52.5	0.927	52.5	0.954	52.5	0.877
55.0	0.864	55.0	0.890	55.0	0.820
57.5	0.809	57.5	0.833	57.5	0.769
60.0	0.755	60.0	0.780	60.0	0.727
62.5	0.706	62.5	0.728	62.5	0.688
65.0	0.657	65.0	0.680	65.0	0.647
67.5	0.607	67.5	0.625	67.5	0.603
70.0	0.554	70.0	0.579	70.0	0.560
72.5	0.505	72.5	0.536	72.5	0.518
75.0	0.460	75.0	0.495	75.0	0.475
77.5	0.415	77.5	0.456	77.5	0.436
80.0	0.372	80.0	0.412	80.0	0.400
82.5	0.332	82.5	0.369	82.5	0.364
85.0	0.293	85.0	0.327	85.0	0.331
87.5	0.255	87.5	0.285	87.5	0.296

90.0	0.216	90.0	0.247	90.0	0.259
92.5	0.181	92.5	0.210	92.5	0.228
95.0	0.146	95.0	0.174	95.0	0.194
97.5	0.113	97.5	0.140	97.5	0.160
100.0	0.083	100.0	0.107	100.0	0.128
102.5	0.053	102.5	0.077	102.5	0.098
105.0	0.025	105.0	0.048	105.0	0.069
107.5	0	107.5	0.021	107.5	0.041
110.0	0	110.0	0	110.0	0.015

第6年決策表	第5年決策表	第4年決策表			
50.0	0.912	50.0	0.882	50.0	0.938
52.5	0.852	52.5	0.827	52.5	0.880
55.0	0.799	55.0	0.775	55.0	0.832
57.5	0.759	57.5	0.729	57.5	0.789
60.0	0.712	60.0	0.687	60.0	0.746
62.5	0.668	62.5	0.645	62.5	0.700
65.0	0.631	65.0	0.606	65.0	0.661
67.5	0.599	67.5	0.573	67.5	0.619
70.0	0.557	70.0	0.540	70.0	0.580
72.5	0.519	72.5	0.509	72.5	0.549
75.0	0.475	75.0	0.479	75.0	0.515
77.5	0.441	77.5	0.443	77.5	0.483
80.0	0.408	80.0	0.413	80.0	0.446
82.5	0.370	82.5	0.378	82.5	0.413
85.0	0.339	85.0	0.348	85.0	0.380
87.5	0.306	87.5	0.316	87.5	0.350
90.0	0.271	90.0	0.283	90.0	0.319
92.5	0.239	92.5	0.254	92.5	0.288
95.0	0.208	95.0	0.223	95.0	0.257
97.5	0.175	97.5	0.191	97.5	0.224
100.0	0.145	100.0	0.162	100.0	0.192
102.5	0.117	102.5	0.132	102.5	0.162
105.0	0.088	105.0	0.103	105.0	0.133

107.5	0.060	107.5	0.077	107.5	0.102
110.0	0.034	110.0	0.051	110.0	0.074
112.5	0.008	112.5	0.026	112.5	0.046
115.0	0	115.0	0.001	115.0	0.020

第3年決策表		第2年決策表	
50.0	0.885	47.5	0.969
52.5	0.836	50.0	0.909
55.0	0.789	52.5	0.857
57.5	0.748	55.0	0.808
60.0	0.714	57.5	0.765
62.5	0.674	60.0	0.717
65.0	0.640	62.5	0.676
67.5	0.613	65.0	0.643
70.0	0.580	67.5	0.614
72.5	0.547	70.0	0.581
75.0	0.519	72.5	0.555
77.5	0.493	75.0	0.523
80.0	0.461	77.5	0.494
82.5	0.428	80.0	0.463
85.0	0.396	82.5	0.431
87.5	0.365	85.0	0.399
90.0	0.334	87.5	0.368
92.5	0.306	90.0	0.336
95.0	0.277	92.5	0.308
97.5	0.245	95.0	0.278
100.0	0.216	97.5	0.249
102.5	0.185	100.0	0.222
105.0	0.157	102.5	0.195
107.5	0.125	105.0	0.166
110.0	0.095	107.5	0.137
112.5	0.066	110.0	0.109
115.0	0.038	112.5	0.081
117.5	0.011	115.0	0.054

附錄五 兩資產下控制帳戶差異部位的數值結果

控制實際帳戶低於目標帳戶部位，係數2的情況下分別對應的最適投資決策表：

第15年決策表		第14年決策表		第13年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	1
52.5	0.913	52.5	0.949	52.5	1
55.0	0.818	55.0	0.859	55.0	0.950
57.5	0.731	57.5	0.778	57.5	0.868
60.0	0.651	60.0	0.703	60.0	0.791
62.5	0.578	62.5	0.631	62.5	0.721
65.0	0.511	65.0	0.563	65.0	0.652
67.5	0.448	67.5	0.502	67.5	0.587
70.0	0.390	70.0	0.443	70.0	0.522
72.5	0.336	72.5	0.385	72.5	0.464
75.0	0.285	75.0	0.333	75.0	0.407
77.5	0.238	77.5	0.284	77.5	0.353
80.0	0.194	80.0	0.238	80.0	0.303
82.5	0.152	82.5	0.195	82.5	0.254
85.0	0.113	85.0	0.154	85.0	0.209
87.5	0.076	87.5	0.115	87.5	0.166
90.0	0.041	90.0	0.079	90.0	0.125
92.5	0	92.5	0.045	92.5	0.087
		95.0	0.002	95.0	0.050

第12年決策表		第11年決策表		第10年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	1
52.5	1	52.5	1	52.5	0.971
55.0	0.931	55.0	0.934	55.0	0.900
57.5	0.855	57.5	0.861	57.5	0.833
60.0	0.786	60.0	0.795	60.0	0.774
62.5	0.721	62.5	0.734	62.5	0.719
65.0	0.662	65.0	0.671	65.0	0.664
67.5	0.599	67.5	0.617	67.5	0.618
70.0	0.541	70.0	0.567	70.0	0.571

72.5	0.486	72.5	0.516	72.5	0.521
75.0	0.432	75.0	0.465	75.0	0.474
77.5	0.378	77.5	0.419	77.5	0.426
80.0	0.328	80.0	0.371	80.0	0.378
82.5	0.281	82.5	0.321	82.5	0.334
85.0	0.237	85.0	0.277	85.0	0.294
87.5	0.194	87.5	0.234	87.5	0.254
90.0	0.155	90.0	0.192	90.0	0.214
92.5	0.117	92.5	0.153	92.5	0.177
95.0	0.082	95.0	0.115	95.0	0.141
97.5	0.047	97.5	0.080	97.5	0.106
100.0	0.008	100.0	0.046	100.0	0.073
102.5	0	102.5	0.007	102.5	0.041
		105.0	0	105.0	0.003

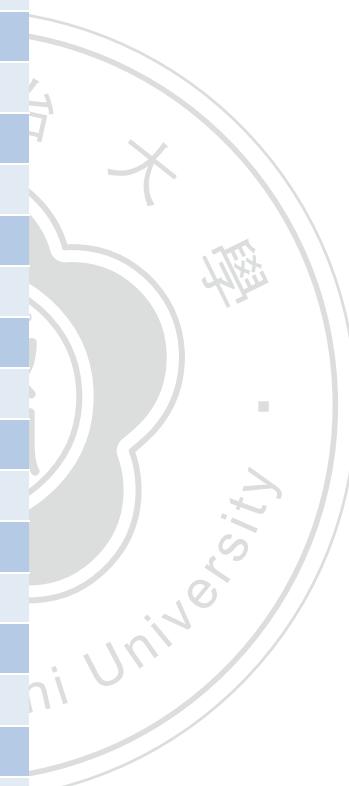
第9年決策表		第8年決策表		第7年決策表	
50.0	1	50.0	1	50.0	1
52.5	1	52.5	1	52.5	1
55.0	0.987	55.0	0.990	55.0	0.953
57.5	0.915	57.5	0.924	57.5	0.891
60.0	0.849	60.0	0.863	60.0	0.839
62.5	0.790	62.5	0.805	62.5	0.787
65.0	0.733	65.0	0.753	65.0	0.736
67.5	0.681	67.5	0.701	67.5	0.689
70.0	0.629	70.0	0.652	70.0	0.640
72.5	0.574	72.5	0.599	72.5	0.590
75.0	0.523	75.0	0.553	75.0	0.547
77.5	0.474	77.5	0.506	77.5	0.512
80.0	0.430	80.0	0.456	80.0	0.468
82.5	0.386	82.5	0.413	82.5	0.420
85.0	0.343	85.0	0.370	85.0	0.380
87.5	0.300	87.5	0.325	87.5	0.342
90.0	0.259	90.0	0.286	90.0	0.304
92.5	0.220	92.5	0.244	92.5	0.266

95.0	0.181	95.0	0.205	95.0	0.229
97.5	0.143	97.5	0.167	97.5	0.192
100.0	0.108	100.0	0.131	100.0	0.157
102.5	0.073	102.5	0.097	102.5	0.122
105.0	0.039	105.0	0.064	105.0	0.089
107.5	0	107.5	0.032	107.5	0.057
		110.0	0	110.0	0.025

第6年決策表		第5年決策表		第4年決策表	
50.0	0.952	50.0	1	50.0	0.980
52.5	0.888	52.5	0.970	52.5	0.918
55.0	0.837	55.0	0.908	55.0	0.866
57.5	0.785	57.5	0.850	57.5	0.820
60.0	0.735	60.0	0.799	60.0	0.778
62.5	0.695	62.5	0.753	62.5	0.740
65.0	0.653	65.0	0.713	65.0	0.705
67.5	0.623	67.5	0.669	67.5	0.663
70.0	0.584	70.0	0.626	70.0	0.621
72.5	0.549	72.5	0.588	72.5	0.576
75.0	0.517	75.0	0.545	75.0	0.540
77.5	0.482	77.5	0.506	77.5	0.506
80.0	0.442	80.0	0.469	80.0	0.473
82.5	0.410	82.5	0.434	82.5	0.439
85.0	0.371	85.0	0.396	85.0	0.402
87.5	0.337	87.5	0.364	87.5	0.368
90.0	0.304	90.0	0.331	90.0	0.334
92.5	0.271	92.5	0.297	92.5	0.306
95.0	0.237	95.0	0.263	95.0	0.276
97.5	0.202	97.5	0.233	97.5	0.244
100.0	0.169	100.0	0.199	100.0	0.211
102.5	0.138	102.5	0.166	102.5	0.181
105.0	0.106	105.0	0.133	105.0	0.151
107.5	0.075	107.5	0.101	107.5	0.122
110.0	0.046	110.0	0.069	110.0	0.092

112.5	0.015	112.5	0.039	112.5	0.061
115.0	0	115.0	0.004	115.0	0.030

第3年決策表		第2年決策表	
50.0	0.931	47.5	1
52.5	0.874	50.0	1
55.0	0.828	52.5	0.952
57.5	0.784	55.0	0.896
60.0	0.736	57.5	0.850
62.5	0.704	60.0	0.804
65.0	0.666	62.5	0.758
67.5	0.626	65.0	0.713
70.0	0.598	67.5	0.680
72.5	0.562	70.0	0.644
75.0	0.532	72.5	0.601
77.5	0.507	75.0	0.568
80.0	0.472	77.5	0.535
82.5	0.441	80.0	0.503
85.0	0.411	82.5	0.469
87.5	0.386	85.0	0.435
90.0	0.356	87.5	0.398
92.5	0.323	90.0	0.366
95.0	0.291	92.5	0.335
97.5	0.256	95.0	0.302
100.0	0.226	97.5	0.266
102.5	0.199	100.0	0.235
105.0	0.170	102.5	0.207
107.5	0.138	105.0	0.177
110.0	0.108	107.5	0.147
112.5	0.080	110.0	0.118
115.0	0.050	112.5	0.089
117.5	0.018	115.0	0.062
120.0	0	117.5	0.035



附錄六 三資產下帳戶變異數控制的數值結果

控制帳戶變異數，係數0.1的情況下分別對應的最適投資決策表：

第15年決策表	高風險	中風險	第14年決策表	高風險	中風險	第13年決策表	高風險	中風險
35.0	1	0	35.0	1	0	37.5	1	0
37.5	0.985	0.015	37.5	1	0	40.0	0.931	0.069
40.0	0.901	0.099	40.0	0.933	0.067	42.5	0.861	0.139
42.5	0.827	0.173	42.5	0.859	0.141	45.0	0.796	0.204
45.0	0.761	0.239	45.0	0.795	0.205	47.5	0.738	0.262
47.5	0.702	0.298	47.5	0.736	0.264	50.0	0.684	0.316
50.0	0.649	0.351	50.0	0.683	0.317	52.5	0.634	0.366
52.5	0.601	0.399	52.5	0.635	0.365	55.0	0.590	0.410
55.0	0.558	0.442	55.0	0.589	0.411	57.5	0.550	0.450
57.5	0.518	0.482	57.5	0.548	0.452	60.0	0.511	0.489
60.0	0.482	0.518	60.0	0.509	0.491	62.5	0.476	0.524
62.5	0.428	0.552	62.5	0.474	0.526	65.0	0.446	0.554
65.0	0.417	0.582	65.0	0.442	0.558	67.5	0.418	0.582
67.5	0.388	0.612	67.5	0.413	0.587	70.0	0.394	0.606
70.0	0.353	0.601	70.0	0.386	0.614	72.5	0.362	0.599
72.5	0.303	0.515	72.5	0.346	0.572	75.0	0.318	0.528
75.0	0.255	0.435	75.0	0.299	0.495	77.5	0.277	0.460
77.5	0.211	0.360	77.5	0.256	0.423	80.0	0.237	0.396
80.0	0.170	0.289	80.0	0.215	0.353	82.5	0.199	0.333
82.5	0.131	0.223	82.5	0.174	0.286	85.0	0.162	0.272
85.0	0.094	0.161	85.0	0.135	0.223	87.5	0.126	0.213
87.5	0.060	0.102	87.5	0.099	0.162	90.0	0.093	0.157
90.0	0.027	0.046	90.0	0.064	0.106	92.5	0.061	0.104
92.5	0	0	92.5	0.031	0.052	95.0	0.031	0.053
			95.0	0	0	97.5	0.003	0.005
			97.5	0	0	100.0	0	0

第12年決策表	高風險	中風險	第11年決策表	高風險	中風險	第10年決策表	高風險	中風險
37.5	1	0	37.5	1	0	37.5	0.981	0.019
40.0	0.925	0.075	40.0	0.964	0.036	40.0	0.909	0.091
42.5	0.857	0.143	42.5	0.893	0.107	42.5	0.845	0.155
45.0	0.795	0.205	45.0	0.831	0.169	45.0	0.793	0.207
47.5	0.736	0.264	47.5	0.783	0.217	47.5	0.745	0.255
50.0	0.689	0.311	50.0	0.728	0.272	50.0	0.700	0.300
52.5	0.643	0.357	52.5	0.684	0.316	52.5	0.658	0.342
55.0	0.603	0.397	55.0	0.644	0.356	55.0	0.622	0.378
57.5	0.563	0.437	57.5	0.602	0.398	57.5	0.581	0.419
60.0	0.527	0.473	60.0	0.560	0.440	60.0	0.549	0.451
62.5	0.492	0.508	62.5	0.523	0.477	62.5	0.515	0.485
65.0	0.463	0.537	65.0	0.490	0.510	65.0	0.488	0.512
67.5	0.435	0.565	67.5	0.458	0.542	67.5	0.463	0.537
70.0	0.410	0.590	70.0	0.432	0.568	70.0	0.438	0.563
72.5	0.388	0.612	72.5	0.408	0.592	72.5	0.416	0.584
75.0	0.357	0.583	75.0	0.378	0.571	75.0	0.396	0.604
77.5	0.317	0.514	77.5	0.340	0.507	77.5	0.360	0.562
80.0	0.277	0.447	80.0	0.304	0.449	80.0	0.322	0.501
82.5	0.238	0.383	82.5	0.268	0.395	82.5	0.285	0.442
85.0	0.202	0.323	85.0	0.230	0.342	85.0	0.252	0.384
87.5	0.166	0.264	87.5	0.195	0.288	87.5	0.216	0.331
90.0	0.131	0.206	90.0	0.160	0.234	90.0	0.182	0.278
92.5	0.097	0.152	92.5	0.126	0.184	92.5	0.149	0.225
95.0	0.064	0.101	95.0	0.094	0.136	95.0	0.117	0.176
97.5	0.033	0.052	97.5	0.062	0.091	97.5	0.086	0.130
100.0	0.004	0.006	100.0	0.032	0.047	100.0	0.057	0.085
102.5	0	0	102.5	0.003	0.004	102.5	0.028	0.043
			105.0	0	0	105.0	0	0.001

第9年決策表	高風險	中風險	第8年決策表	高風險	中風險	第7年決策表	高風險	中風險
37.5	1	0	37.5	0.986	0.014	37.5	0.902	0.098
40.0	0.925	0.075	40.0	0.918	0.082	40.0	0.844	0.156
42.5	0.867	0.133	42.5	0.865	0.135	42.5	0.800	0.200

45.0	0.816	0.184	45.0	0.805	0.195	45.0	0.753	0.247
47.5	0.765	0.235	47.5	0.755	0.245	47.5	0.712	0.288
50.0	0.717	0.283	50.0	0.710	0.290	50.0	0.675	0.325
52.5	0.676	0.324	52.5	0.670	0.330	52.5	0.640	0.360
55.0	0.638	0.362	55.0	0.636	0.364	55.0	0.604	0.396
57.5	0.601	0.399	57.5	0.598	0.402	57.5	0.575	0.425
60.0	0.565	0.435	60.0	0.565	0.435	60.0	0.542	0.458
62.5	0.532	0.468	62.5	0.538	0.462	62.5	0.514	0.486
65.0	0.505	0.495	65.0	0.513	0.487	65.0	0.492	0.508
67.5	0.479	0.521	67.5	0.488	0.512	67.5	0.464	0.536
70.0	0.453	0.547	70.0	0.467	0.533	70.0	0.441	0.559
72.5	0.430	0.570	72.5	0.445	0.555	72.5	0.425	0.575
75.0	0.406	0.574	75.0	0.425	0.575	75.0	0.407	0.593
77.5	0.370	0.519	77.5	0.406	0.594	77.5	0.389	0.611
80.0	0.335	0.474	80.0	0.389	0.611	80.0	0.361	0.580
82.5	0.304	0.428	82.5	0.356	0.550	82.5	0.330	0.530
85.0	0.274	0.379	85.0	0.323	0.496	85.0	0.300	0.489
87.5	0.242	0.329	87.5	0.292	0.440	87.5	0.270	0.443
90.0	0.208	0.286	90.0	0.254	0.387	90.0	0.242	0.396
92.5	0.176	0.242	92.5	0.218	0.336	92.5	0.214	0.348
95.0	0.146	0.195	95.0	0.183	0.285	95.0	0.185	0.302
97.5	0.115	0.152	97.5	0.149	0.233	97.5	0.157	0.253
100.0	0.085	0.110	100.0	0.115	0.182	100.0	0.128	0.201
102.5	0.055	0.071	102.5	0.083	0.131	102.5	0.099	0.156
105.0	0.026	0.033	105.0	0.052	0.083	105.0	0.070	0.111
107.5	0	0	107.5	0.022	0.036	107.5	0.042	0.067
			110.0	0	0	110.0	0.015	0.024
						112.5	0	0

第6年決策表	高風險	中風險	第5年決策表	高風險	中風險	第4年決策表	高風險	中風險
37.5	0.946	0.054	37.5	0.905	0.095	37.5	0.851	0.149
40.0	0.886	0.114	40.0	0.837	0.163	40.0	0.800	0.200
42.5	0.824	0.176	42.5	0.790	0.210	42.5	0.757	0.243
45.0	0.765	0.235	45.0	0.739	0.261	45.0	0.725	0.275
47.5	0.718	0.282	47.5	0.695	0.305	47.5	0.687	0.313

50.0	0.683	0.317	50.0	0.661	0.339	50.0	0.651	0.349
52.5	0.637	0.363	52.5	0.626	0.374	52.5	0.621	0.379
55.0	0.598	0.402	55.0	0.588	0.412	55.0	0.587	0.413
57.5	0.565	0.436	57.5	0.556	0.444	57.5	0.562	0.438
60.0	0.536	0.464	60.0	0.525	0.475	60.0	0.534	0.466
62.5	0.508	0.492	62.5	0.495	0.505	62.5	0.510	0.490
65.0	0.481	0.519	65.0	0.469	0.531	65.0	0.487	0.513
67.5	0.457	0.543	67.5	0.447	0.553	67.5	0.466	0.534
70.0	0.438	0.562	70.0	0.430	0.570	70.0	0.447	0.553
72.5	0.423	0.577	72.5	0.409	0.591	72.5	0.426	0.574
75.0	0.411	0.589	75.0	0.391	0.609	75.0	0.413	0.587
77.5	0.393	0.607	77.5	0.375	0.625	77.5	0.399	0.601
80.0	0.376	0.609	80.0	0.363	0.637	80.0	0.386	0.610
82.5	0.344	0.551	82.5	0.338	0.585	82.5	0.358	0.556
85.0	0.314	0.510	85.0	0.310	0.540	85.0	0.333	0.516
87.5	0.284	0.464	87.5	0.283	0.497	87.5	0.308	0.480
90.0	0.258	0.410	90.0	0.259	0.452	90.0	0.283	0.438
92.5	0.228	0.365	92.5	0.233	0.405	92.5	0.253	0.396
95.0	0.202	0.323	95.0	0.208	0.356	95.0	0.225	0.352
97.5	0.173	0.278	97.5	0.183	0.309	97.5	0.201	0.307
100.0	0.144	0.236	100.0	0.158	0.268	100.0	0.174	0.262
102.5	0.115	0.192	102.5	0.133	0.221	102.5	0.145	0.223
105.0	0.087	0.147	105.0	0.108	0.174	105.0	0.120	0.183
107.5	0.061	0.102	107.5	0.081	0.129	107.5	0.094	0.139
110.0	0.035	0.057	110.0	0.055	0.086	110.0	0.069	0.101
112.5	0.008	0.014	112.5	0.028	0.044	112.5	0.045	0.065
			115.0	0.001	0.002	115.0	0.019	0.028
						117.5	0	0

第3年決策表	高風險	中風險	第2年決策表	高風險	中風險
35.0	0.877	0.123	40.0	0.793	0.207
37.5	0.830	0.170	42.5	0.750	0.250
40.0	0.782	0.218	45.0	0.712	0.288
42.5	0.744	0.256	47.5	0.674	0.326
45.0	0.712	0.288	50.0	0.641	0.359

47.5	0.677	0.323	52.5	0.608	0.392
50.0	0.642	0.358	55.0	0.576	0.424
52.5	0.618	0.382	57.5	0.551	0.449
55.0	0.589	0.411	60.0	0.524	0.476
57.5	0.558	0.442	62.5	0.511	0.489
60.0	0.536	0.464	65.0	0.493	0.507
62.5	0.509	0.491	67.5	0.474	0.526
65.0	0.484	0.516	70.0	0.461	0.539
67.5	0.468	0.532	72.5	0.444	0.556
70.0	0.447	0.553	75.0	0.427	0.573
72.5	0.430	0.570	77.5	0.409	0.591
75.0	0.415	0.585	80.0	0.395	0.605
77.5	0.401	0.599	82.5	0.373	0.582
80.0	0.383	0.581	85.0	0.347	0.551
82.5	0.353	0.533	87.5	0.320	0.511
85.0	0.326	0.491	90.0	0.294	0.476
87.5	0.300	0.456	92.5	0.268	0.437
90.0	0.278	0.418	95.0	0.244	0.397
92.5	0.255	0.384	97.5	0.219	0.367
95.0	0.235	0.350	100.0	0.198	0.965
97.5	0.210	0.313	102.5	0.172	0.292
100.0	0.188	0.281	105.0	0.148	0.253
102.5	0.163	0.246	107.5	0.123	0.214
105.0	0.139	0.208	110.0	0.097	0.167
107.5	0.113	0.163	112.5	0.073	0.127
110.0	0.087	0.127	115.0	0.048	0.085
112.5	0.061	0.088	117.5	0.025	0.042
115.0	0.035	0.052	120.0	0	0
117.5	0.010	0.015	122.5	0	0

附錄七 三資產下控制帳戶差異部位的數值結果

控制實際帳戶低於目標帳戶部位，係數2的情況下分別對應的最適投資決策表：

第15年決策表	高風險	中風險	第14年決策表	高風險	中風險	第13年決策表	高風險	中風險
35.0	1	0	35.0	1	0	37.5	1	0
37.5	1	0	37.5	1	0	40.0	1	0
40.0	0.948	0.052	40.0	0.969	0.031	42.5	0.968	0.032
42.5	0.870	0.130	42.5	0.892	0.108	45.0	0.897	0.103
45.0	0.800	0.200	45.0	0.825	0.175	47.5	0.835	0.165
47.5	0.738	0.262	47.5	0.765	0.235	50.0	0.780	0.220
50.0	0.681	0.319	50.0	0.708	0.292	52.5	0.723	0.277
52.5	0.630	0.370	52.5	0.656	0.344	55.0	0.674	0.326
55.0	0.584	0.416	55.0	0.609	0.391	57.5	0.628	0.372
57.5	0.542	0.458	57.5	0.565	0.435	60.0	0.585	0.415
60.0	0.503	0.497	60.0	0.525	0.475	62.5	0.547	0.453
62.5	0.468	0.532	62.5	0.490	0.510	65.0	0.511	0.489
65.0	0.435	0.565	65.0	0.456	0.544	67.5	0.476	0.524
67.5	0.404	0.596	67.5	0.425	0.575	70.0	0.446	0.554
70.0	0.376	0.624	70.0	0.397	0.603	72.5	0.419	0.581
72.5	0.326	0.548	72.5	0.362	0.597	75.0	0.379	0.550
75.0	0.277	0.466	75.0	0.314	0.520	77.5	0.331	0.483
77.5	0.231	0.388	77.5	0.270	0.446	80.0	0.286	0.416
80.0	0.188	0.316	80.0	0.229	0.374	82.5	0.243	0.352
82.5	0.148	0.248	82.5	0.187	0.307	85.0	0.200	0.290
85.0	0.110	0.184	85.0	0.148	0.243	87.5	0.159	0.230
87.5	0.073	0.123	87.5	0.111	0.182	90.0	0.120	0.173
90.0	0.039	0.065	90.0	0.076	0.125	92.5	0.083	0.119
92.5	0	0	92.5	0.042	0.069	95.0	0.047	0.068
			95.0	0.002	0.003	97.5	0.007	0.010
			97.5	0	0	100.0	0	0

第12年決策表	高風險	中風險	第11年決策表	高風險	中風險	第10年決策表	高風險	中風險
37.5	1	0	37.5	1	0	37.5	1	0
40.0	1	0	40.0	0.943	0.057	40.0	0.969	0.031
42.5	0.953	0.047	42.5	0.876	0.124	42.5	0.909	0.091
45.0	0.883	0.117	45.0	0.814	0.186	45.0	0.853	0.147
47.5	0.818	0.182	47.5	0.759	0.241	47.5	0.798	0.202
50.0	0.763	0.237	50.0	0.708	0.292	50.0	0.753	0.247
52.5	0.712	0.288	52.5	0.659	0.341	52.5	0.714	0.286
55.0	0.661	0.339	55.0	0.620	0.380	55.0	0.669	0.331
57.5	0.615	0.385	57.5	0.584	0.416	57.5	0.630	0.370
60.0	0.575	0.425	60.0	0.549	0.451	60.0	0.592	0.408
62.5	0.536	0.464	62.5	0.517	0.483	62.5	0.555	0.445
65.0	0.502	0.498	65.0	0.486	0.514	65.0	0.522	0.478
67.5	0.469	0.531	67.5	0.459	0.541	67.5	0.492	0.508
70.0	0.439	0.561	70.0	0.435	0.565	70.0	0.463	0.537
72.5	0.413	0.587	72.5	0.412	0.588	72.5	0.438	0.562
75.0	0.384	0.588	75.0	0.389	0.611	75.0	0.415	0.585
77.5	0.340	0.522	77.5	0.370	0.630	77.5	0.394	0.606
80.0	0.299	0.458	80.0	0.336	0.581	80.0	0.364	0.581
82.5	0.261	0.394	82.5	0.296	0.514	82.5	0.327	0.514
85.0	0.223	0.335	85.0	0.257	0.449	85.0	0.290	0.453
87.5	0.185	0.277	87.5	0.219	0.383	87.5	0.253	0.395
90.0	0.148	0.220	90.0	0.182	0.318	90.0	0.217	0.333
92.5	0.113	0.167	92.5	0.145	0.257	92.5	0.179	0.274
95.0	0.078	0.116	95.0	0.110	0.193	95.0	0.143	0.219
97.5	0.045	0.066	97.5	0.076	0.134	97.5	0.108	0.165
100.0	0.007	0.011	100.0	0.043	0.076	100.0	0.074	0.113
102.5	0	0	102.5	0.006	0.010	102.5	0.041	0.062
			105.0	0	0	105.0	0.003	0.005

第9年決策表	高風險	中風險	第8年決策表	高風險	中風險	第7年決策表	高風險	中風險
37.5	1	0	37.5	1	0	37.5	1	0
40.0	0.960	0.040	40.0	1	0	40.0	0.997	0.003
42.5	0.896	0.104	42.5	0.955	0.045	42.5	0.928	0.072

45.0	0.836	0.164	45.0	0.894	0.106	45.0	0.871	0.129
47.5	0.781	0.219	47.5	0.835	0.165	47.5	0.826	0.174
50.0	0.731	0.269	50.0	0.786	0.214	50.0	0.780	0.220
52.5	0.685	0.315	52.5	0.739	0.261	52.5	0.732	0.268
55.0	0.640	0.360	55.0	0.698	0.302	55.0	0.687	0.313
57.5	0.599	0.401	57.5	0.656	0.344	57.5	0.647	0.353
60.0	0.562	0.438	60.0	0.618	0.382	60.0	0.616	0.384
62.5	0.530	0.470	62.5	0.584	0.416	62.5	0.584	0.416
65.0	0.500	0.500	65.0	0.549	0.451	65.0	0.552	0.448
67.5	0.474	0.526	67.5	0.518	0.482	67.5	0.518	0.482
70.0	0.450	0.550	70.0	0.489	0.511	70.0	0.490	0.510
72.5	0.427	0.573	72.5	0.460	0.540	72.5	0.466	0.534
75.0	0.406	0.594	75.0	0.436	0.564	75.0	0.447	0.553
77.5	0.388	0.613	77.5	0.416	0.584	77.5	0.426	0.574
80.0	0.357	0.578	80.0	0.394	0.606	80.0	0.405	0.578
82.5	0.323	0.521	82.5	0.362	0.570	82.5	0.368	0.527
85.0	0.292	0.463	85.0	0.326	0.514	85.0	0.335	0.476
87.5	0.261	0.405	87.5	0.291	0.465	87.5	0.304	0.432
90.0	0.231	0.354	90.0	0.257	0.410	90.0	0.275	0.385
92.5	0.201	0.301	92.5	0.223	0.352	92.5	0.244	0.339
95.0	0.168	0.256	95.0	0.187	0.300	95.0	0.214	0.294
97.5	0.136	0.203	97.5	0.155	0.245	97.5	0.184	0.255
100.0	0.102	0.153	100.0	0.124	0.196	100.0	0.153	0.209
102.5	0.070	0.104	102.5	0.093	0.146	102.5	0.121	0.161
105.0	0.037	0.055	105.0	0.061	0.096	105.0	0.089	0.120
107.5	0	0	107.5	0.030	0.047	107.5	0.058	0.077
			110.0	0	0	110.0	0.024	0.033
						112.5	0	0

第6年決策表	高風險	中風險	第5年決策表	高風險	中風險	第4年決策表	高風險	中風險
37.5	0.952	0.048	37.5	0.939	0.061	37.5	0.969	0.031
40.0	0.882	0.118	40.0	0.866	0.134	40.0	0.900	0.100
42.5	0.833	0.167	42.5	0.810	0.190	42.5	0.851	0.149
45.0	0.780	0.220	45.0	0.765	0.235	45.0	0.809	0.191
47.5	0.733	0.267	47.5	0.725	0.275	47.5	0.764	0.236

50.0	0.705	0.295	50.0	0.685	0.315	50.0	0.724	0.276
52.5	0.664	0.336	52.5	0.650	0.350	52.5	0.681	0.319
55.0	0.629	0.371	55.0	0.622	0.278	55.0	0.647	0.353
57.5	0.595	0.405	57.5	0.591	0.409	57.5	0.615	0.385
60.0	0.574	0.426	60.0	0.558	0.442	60.0	0.586	0.414
62.5	0.543	0.457	62.5	0.533	0.467	62.5	0.557	0.443
65.0	0.519	0.481	65.0	0.505	0.495	65.0	0.529	0.471
67.5	0.494	0.506	67.5	0.480	0.520	67.5	0.508	0.492
70.0	0.471	0.529	70.0	0.461	0.539	70.0	0.483	0.517
72.5	0.453	0.547	72.5	0.441	0.559	72.5	0.459	0.541
75.0	0.432	0.568	75.0	0.422	0.578	75.0	0.441	0.559
77.5	0.411	0.589	77.5	0.406	0.594	77.5	0.423	0.577
80.0	0.394	0.606	80.0	0.391	0.601	80.0	0.409	0.591
82.5	0.368	0.564	82.5	0.364	0.555	82.5	0.391	0.609
85.0	0.336	0.526	85.0	0.330	0.515	85.0	0.364	0.586
87.5	0.305	0.481	87.5	0.305	0.471	87.5	0.339	0.542
90.0	0.276	0.433	90.0	0.273	0.424	90.0	0.311	0.495
92.5	0.246	0.389	92.5	0.248	0.390	92.5	0.284	0.445
95.0	0.217	0.343	95.0	0.224	0.348	95.0	0.260	0.398
97.5	0.187	0.293	97.5	0.197	0.303	97.5	0.235	0.362
100.0	0.158	0.244	100.0	0.171	0.259	100.0	0.211	0.316
102.5	0.129	0.195	102.5	0.143	0.215	102.5	0.182	0.275
105.0	0.101	0.152	105.0	0.117	0.172	105.0	0.154	0.226
107.5	0.072	0.109	107.5	0.089	0.134	107.5	0.123	0.177
110.0	0.044	0.068	110.0	0.062	0.092	110.0	0.091	0.131
112.5	0.014	0.021	112.5	0.035	0.052	112.5	0.060	0.085
			115.0	0.004	0.006	115.0	0.028	0.040
						117.5	0	0

第3年決策表	高風險	中風險	第2年決策表	高風險	中風險
35.0	0.981	0.019	40.0	0.856	0.144
37.5	0.912	0.088	42.5	0.807	0.193
40.0	0.849	0.151	45.0	0.761	0.239
42.5	0.801	0.199	47.5	0.732	0.268
45.0	0.748	0.252	50.0	0.701	0.299

47.5	0.713	0.287	52.5	0.660	0.340
50.0	0.674	0.326	55.0	0.624	0.376
52.5	0.635	0.365	57.5	0.594	0.406
55.0	0.603	0.397	60.0	0.572	0.428
57.5	0.574	0.426	62.5	0.547	0.453
60.0	0.547	0.453	65.0	0.520	0.480
62.5	0.527	0.473	67.5	0.496	0.504
65.0	0.505	0.495	70.0	0.475	0.525
67.5	0.483	0.517	72.5	0.452	0.548
70.0	0.457	0.543	75.0	0.432	0.568
72.5	0.440	0.560	77.5	0.417	0.583
75.0	0.423	0.577	80.0	0.401	0.599
77.5	0.405	0.595	82.5	0.384	0.616
80.0	0.392	0.608	85.0	0.366	0.601
82.5	0.377	0.609	87.5	0.336	0.559
85.0	0.351	0.565	90.0	0.311	0.518
87.5	0.325	0.521	92.5	0.284	0.473
90.0	0.298	0.486	95.0	0.258	0.433
92.5	0.272	0.446	97.5	0.233	0.392
95.0	0.249	0.414	100.0	0.207	0.348
97.5	0.222	0.373	102.5	0.183	0.305
100.0	0.199	0.338	105.0	0.158	0.262
102.5	0.174	0.297	107.5	0.135	0.224
105.0	0.153	0.260	110.0	0.110	0.181
107.5	0.126	0.217	112.5	0.087	0.139
110.0	0.100	0.168	115.0	0.061	0.096
112.5	0.072	0.119	117.5	0.035	0.053
115.0	0.045	0.073	120.0	0.003	0.005
117.5	0.016	0.024	122.5	0	0

