行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

高齡社會的來臨：為2025年的台灣社會規劃之整合研究--高齡社會之財富適足性與退休財務規劃之研究(第2年)
研究成果報告(完整版)

計 畫 類 別 ： 整合型
計 畫 編 號 ： NSC 95-2420-H-004-053-KF
執 行 期 間 ： 96年08月01日至97年07月31日
執 行 單 位 ： 國立政治大學風險管理與保險學系

計畫主持人： 黃泓智
共同主持人： 楊曉文
計畫參與人員： 博士班研究生-兼任助理人員：林鴻諭

處 理 方 式 ： 本計畫可公開查詢

中 華 民 國 97年10月07日

高齡社會之財富適足性與退休財務規劃之研究

壹、 序論

老年社會的經濟安全主要架構在退休財源的適足與老人健康照護上的障，近年來，由於醫療及科技的快速進步，再加上家庭結構的變化，人口老化已是先進國家普遍的現象，人口老化對社會有很大的衝擊，從支出的角度來看，壽命延長造成退休醫療費用支出的增加以及退休所需生活費的增加，再加上家庭結構的改變，長期照護的需要亦會造成支出增加，這些社會現象影響的層面不只有個人及家庭，同時包括企業及政府，從個人及家庭的角度而言，如何事先規劃老人生的安定與財富的適足是非常重要的，從政府的角度，社會福利的規劃、以及長期照護的規劃和退休金制度的設計亦是非常重要的，三層的退休金制度的設計為許多發展中國家所設計的模式，然而，政府是否有足夠的財源來因應這些制度的設計是最根本的問題，由於人口老化的衝擊，許多國家漸漸負擔不起第一層的退休金計劃，開始透過減少退休給付來降低財政負擔，歐美、日本等先進國家較早面臨人口老化的問題，這幾年皆積極尋求解決方案（Masuda and Kojima（2001）），許多現行的文獻大都建議以第二層及第三層來增加退休財富累積的功能，在國內，人口老化的課題這幾年亦漸漸發生，現行的勞工保險、全民健康保險、退休金制度等之社會福利規劃，以及商業保險(例如：長期看護保險、年金保險)等制度都面臨重大挑戰及財務上的危機，本研究將從退休財富適足度的角度來探討老人社會下的理財規劃，主要以第二層以及第三層之退休財富累積為主要探討機制，並且考慮現行社會經濟、政策以及人口結構等因素，同時結合財務、投資以及保險精算之理論，提供規劃未來退休財富適足性應有的整合模式。

關於各國人口老化的現象，以日本為例，到2004 年為止，六十五歲以上人口的比例已高達19.5%，而歐美許多先進國家，老年人口比例亦已超過10%，如下圖所示，然而，法國社會中65 歲以上人口比例從7%增加到15%用了140 年的漫長時間（西元1865-2004年），該社會因此有足夠時間逐步發展出因應的策略與制度。而亞洲及太平洋地區國家的人口老化速度卻在過去數十年間因出生率的急速下降而加速老化，引起全球人口學家的注意，例如亞洲的日本社會中老人人口比例只用了26 年時間就從7%增加到14%（西元1970-1996 年），是全球中增加最快的國家，使其成為僅次於義大利的全球第二老國家（Kinsella and Phillips，2005）。在國內，也因死亡率降低，加上出生率急速下降，人口結構呈現人口老化的現象。民國1993 年我國65 歲以上老年人口佔總人口數之比重為7.10%，比值首度超越7%，正式成為聯合國世界衛生組織所界定的「高齡化社會」，人口老化的現象有漸趨嚴重之趨勢，截至民國2004 年底，65 歲以上老年人口佔總人口之比重已達9.48%，預計至民國120 年(2004 年行政院經建會中推估)65 歲以上老年人口佔總人口之比重將高達24.3%，約佔總人口的四分之一，因此，人口

老化的現象，對於國人而言，已是不可忽略的課題。然而，相較於其他「高齡化社會」的形成，台灣的老人人口比例是從民國82 年才進入7%的老化門檻，而根據從行政院經建會（2004）的推估，台灣老人人口比例大約會在民國107 年增加到14%，這項變動只歷經了25 年期間，顯示台灣的老化經驗其實是相當的近期而快速的現象，更增添台灣社會未來因應「高齡化社會」所帶來衝擊的迫切性。

在世界各國邁向高齡化社會的趨勢下，退休金問題無論在社會層面或經濟層面的重要性日益增加，退休金制度的探討在近年來也成了重要的議題，其中確定提撥計畫已成為了退休金制度的主流。所謂「確定提撥制」(DC)是指，勞雇雙方依其約定，在員工工作期間內依其薪資的某一百分比按期提撥退休準備金於個人的帳戶中，直到員工工作期間為止。其提撥者可為雇主提撥、員工提撥或雇主與員工相對提撥，員工於退休後可獲得的退休金，為個人帳戶在工作期間所累積的提撥額和投資收益之加總額。近年來世界各國在退休金制度的改革上，已經明顯地從確定給付制改變為確定提撥制之發展趨勢。新制「勞工退休金條例」在民國九十四年七月一日正式實施。兩者制度最大不同點在於風險承擔的對象。確定給付制是由政府或雇主保證在退休時給付一筆確定額度之退休金，因此投資風險完全由政府或雇主承擔；確定提撥制是由政府或雇主保證在退休前定期提撥一確定百分比或確定金額之退休金到參加者之個人帳戶中，帳戶中提撥金額所投資的投資標的由勞工決定。而勞工退休時所能領到的退休金則視帳戶之投資績效而定，因此退休金的投資風險由勞工承擔。退休金的多寡則完全視退休基金投資績效的好壞而定。以一個 25 歲的國民為例子，假設 25 歲開始提撥每月薪資至帳戶中，起始薪資為 30,000 元並且薪資成長率為 3%，預期退休年齡為 60 歲，退休折現率為 4%，延壽年金從 80 歲開始領取直至死亡，保費計價利率與費用率分別為 4%與 5%，在提撥率與投資報酬率固定下分析所得替代率(表 1)。在 6%提撥率與 2%報酬率的情況下，60 退休時有 1,777,171 元的帳戶餘額，相當於 11.41%的所得替代率，每月可領取退休金額 9,354 元，此退休金顯然是太少了。當提撥率不變而報酬率增加至 12%時，所得替代率提高為 81.97%，每月可領取退休金額也增加為 67,177 元，此退休金顯然就足夠許多。然而在最高提撥率 12%下，報酬率若為 2%，所得替代率也僅達 22.83%，可見增加報酬率是累積財富最重要的關鍵因素。

表一　25 歲開始提撥，提撥率與報酬率確定下所得替代率

提撥率		報酬率					
		2%	4%	6%	8%	10%	12%
6%	所得替代率	11.41%	16.04%	23.26%	34.64%	52.79%	81.97%
	月退休金	9,354	13,150	19,059	28,387	43,265	67,177
	帳戶餘額	1,777,171	2,498,280	3,620,997	5,393,151	8,219,858	12,762,860
12%	所得替代率	22.83%	32.09%	46.51%	69.27%	105.58%	163.93%
	月退休金	18,708	26,299	38,118	56,774	86,531	134,355

提撥率	報酬率					
	2%	4%	6%	8%	10%	12%
帳戶餘額	3,554,342	4,996,560	7,241,993	10,786,302	16,439,716	25,525,720

註：勞工起始薪資 30000 元。確定年金以及延壽年金以 3%為折現率，延壽年金以 5%為費率。

新制退休金制度允許勞工於更換工作時攜帶其個人帳戶內已提撥的退休金，於勞工退休後按月領取退休金以安養退休生活。對於員工而言提撥的退休基金的運用影響了員工未來退休後的權益。因此適當的退休金提撥率以及適當的資產配置方法對於退休基金而言是非常關鍵的因素。因此本研究希望能在確定提撥制下，給定一個預期的目標，在考量風險與報酬的情況下，使得退休基金期末資產的累積能在考慮下方損失風險(downside risk)的情況下達到此預估目標。

長久以來，資產配置一直被認為是影響投資組合報酬與風險重要的因素，而資產配置主要有三個考量的因素，即投資的報酬率、資產組合的整體風險以及資產與負債之共變異之間的關係，在決定投資比重與選擇投資組合的方法中，首先是由 Markowitz (1952)提出的投資組合理論，利用平均數/變異數最佳化(Mean-Variance Optimization)的方法決定投資比重，也因此，許多相關的文獻探討包括 Wise (1984a, 1984b, 1987a, 1987b)、Wilkie (1985)以及 Sherris (1992)，這一系列之研究，都是以 Markowitz 的投資組合理論為基礎，進而更深入的探討資產配置的問題。

MV 投資組合理論在資產配置的過程中，最受爭議的有二點，首先是 MV 投資組合理論主要是解決單一期間資產配置的問題，無法解決多期資產配置的問題，第二個受爭議的地方是效率前緣之形成受其參數估計影響甚大，當參數估計因假設改變而稍加變動，往往便會得到另一條完全不相同之效率前緣。Markowitz 模型所求算出的效率前緣完全是根據投入要素-預期報酬率、預期報酬變異數及相關係數來決定，因此，效率前緣對投入要素非常地敏感，只要投入要素有些微的變動，就很有可能得到一條差異很大的效率前緣。許多研究都發現，對於平均數、變異數及共變異數的估計錯誤，將對最適的投資組合帶來極大的影響，或是選取的歷史資料，恰巧落於特殊的期間，使得所估計的參數與其他期間有很大差距，縱使所選出的歷史資料能涵蓋所有期間，亦不能保證所得出的參數，能夠適切的代表過去的資訊，提供給未來經濟良好的預期，進而沒有辦法得到一個穩定的配置策略(Black and Litterman, 1991; Chopra & Ziemba, 1993; Brianton, 1998; Koskrosidis & Duarte, 1997; Edesess & Hambrecht, 1980; Fong & Fabozzi, 1988; Farrell, 1989)。在單一期間的配置問題上，當過去資料的長期平均已不足以預估未來的狀態，且當投資計畫為長期性的計畫如退休金管理，如果採用過去單點預測將未來十年、二十年都視為同一報酬率是相當不合理的。現今的金融情勢多變，以致於以過去的經驗來反應未來的能力不佳，使得 MV 投資組合理論漸漸不足以應付這日趨複雜的狀況，令實際上的應用價值大打折扣。因此在資產配置的要求上，已逐漸趨向於探討多期決策與面對不確定情況下的決策。

Bellman在1962年提出了動態規劃的方法，動態規劃是一種專門用來解決一

連串相關決策的數學方法的應用，將最適化的問題（函數）分解成數個子問題，逐步在每一個子問題上，使其中的某一變數達到最適值，每一個子問題的最適值再與下一個子問題的決策變數，共同構成此一決策階段的最適值，如此循序漸近直到最後階段的最佳答案求出為止。將動態規劃的方法應用在資產配置上，能有效解決單一期間的配置問題，過去在退休基金領域，有許多研究利用動態規劃模式來進行分析，探討退休基金的最適提撥、最適資產配置以及同時利用提撥率與資產配置為控制變數來達到最適化決策(Haberman & Sung,1994; Chang,1999; Vigna & Haberman,2001,2002)。動態規劃的方法除了可以解決單一期間的配置問題，另外，動態規劃的方法亦可以針對不同期間做特別的情境假設，並考慮未來的不確定性，因此，動態規劃的方法也可以解決效率前緣之形成過於敏感的問題。然而，雖然在理論上，可以藉由動態規劃法解決以往很困難的問題，但為求愈接近真實狀況，動態規劃的模型複雜性愈高，難度也會愈高，而且動態規劃的分析，沒有一套一般的方程式可以運用，最適解的求解的方式也因類型而異，降低了實用性的價值。

退休金通當具有長期負債的性質，因此長期通貨膨漲和各種主要資產的變化對於投資具有相當大的影響。在過去，傳統精算的資產負債管理大多採用確定投資模型(Deterministic Model)，然而一旦現在的情況與過去落差太大則會產生嚴重問題，因為我們已無法藉由過去的現象來描述未來。這對具長期負債性質之資金運用而言，其無法真切的反應事實及適時的調整乃是這類模型的缺點，因此我們需要利用其它適當的投資模型來作預測，而此模型不但要能夠描述當時的現象同時也要反應時間的變動。Wilkie (1986)以時間序列模型考量物價通貨膨(Price Inflation)、股票股利(Share Dividend)、股利報酬率(Share Dividend Yields)、長期利率(Long-term Interest)等長期變動關係，建立了一套符合我們所需的隨機投資模型(Stochastic Investment Model)。Wilkie (1995) 在原本的模型又增加了薪資指數(Salary Index)、短期利率(Short-term Interest)、不動產(Property)指數以及指數連結型債券(Index-linked Government Stock)此即在學術上被廣為研究與應用的 Wilkie 投資模型。

本研究第一部份利用 Wilkie 投資模型隨機模擬未來的薪資成長率、通貨膨脹率、短期利率(現金)、長期債券殖利率、指數連結型債券、股票收益率，產生各種未來可能之情境。根據 Wilkie 產生的模擬值，本文採用每年調整投資組合策略(Regular Rebalancing)的方法累積資產，以期在員工退休時累積的資產可以達到預期的目標(一定程度的所得替代率)。本文亦藉由各種不同目標函數，探討不同風險偏好的投資者的最適資產配置及最適提撥率。此外，本文亦考慮在含有交易成本的情況下對於最適資產配置與最適提撥率的影響。另外，由於本文在資產配置的產生過程中，採用大量的模擬情況(scenarios)，並採用演算法求得所需之最適資產配置，因此可以同時有效的解決單一期間資產配置的問題和解決資產配置之產生敏感性太高的問題。

本文在第二部份採用台灣市場資料之投資模型，並藉由模擬最佳化的方式探

討在各個不同之預期退休年齡下所需的最適資產配置。本研究在此部份探討兩種投資策略：單期投資策略和多期投資策略，常見的單期投資策略有單期買進持有策略(Single-Period Buy & Hold) 和單期定期重新調整投資比重法(Single-Period Regular Rebalancing)；常見的多期投資策略有多期定期重新調整投資比重法(Multi-Period Regular Rebalancing)、時間不變性投資組合保護(TIPP)等等。最常見應用於單期投資策略是馬可為滋(Markowitz ,1959) 的均值變異法(Mean-Variance Approach) 。此方法已被廣泛的應用於保險或退休金的單期靜態投資策略(Wise, 1984a, 1984b, 1987a, 1987b; Wilkie, 1985; Sharpe and Tint, 1990; Sherris, 1992) 。多期投資策略則依照投資人的策略及風險偏好程度規劃多期的資產配置。投資策略的選擇對於投資績效的好壞有很大的影響，例如買進持有策略基本是在多頭市場能讓預期財富最大的投資策略，但所面臨的變異程度也是最大的。一般而言，在較長的投資期間內，若能對各資產比例隨時間調整，不但能降低投資風險且能提高報酬率，比買進持有的投資策略更能有效地做風險控管以及提高獲利(Plaxco & Arnott,2002) ，因此在針對退休基金等長達 40 年時期的資產負債管理時，投資策略的選擇對於投資績效與風險的控管有非常重大的影響。Blake、Cairns and Dowd(2001)比較在不同投資策略以及投資模型，達到目標退休給付的差異。結果顯示，不同投資策略對於成功機率的影響非常顯著。最常見應用於多期投資策略的是 Merton (1971) 所提出的動態規劃的方法(Dynamic Programming Technique) 。近十年來此方法廣泛的連續財務領域中的多期資產配置 (Cuoco and Cvitanic, 1998; Hipp and Taksar, 2000; Basak and Shapiro, 2001; Lioui and Poncet, 2001; Haberman and Vigna, 2002; Devolder et al., 2003; Battocchio and Menoncin, 2004; Gerrard, Haberman and Vigna, 2004; Josa-Fombellida and Rincon-Zapatero, 2004; Yiu, 2004; Haberman and Sung ,2005) 。 此方法雖可應用於多期的資產配置，但由於此方法在求取封閉解的過程中，無法加入一些較彈性的限制式，因此嚴重影響此方法的實用性。為了可以採用更彈性的目標涵數及限制式，本研究採用基因演算法來求解最適資產配置(Back, 1996; Michalewics, 1999; Michalewics and Fogel, 2002) 。

本研究在此部份主要是探討不同的投資策略在DC退休金制度下，對於可退休年齡的影響。內容包括分析單期資產配置對於可退休年齡的影響；介紹尋找最佳解的方法，本文使用基因演算法最佳化目標方程式；以及單期與多期投資策略的比較。

貳、 最適化目標建構

一般而言，退休金之管理多半著重於最適提撥率、投資報酬率極大化、或是預期目標達成率之探討，上述三者可藉由資產配置達到最適的平衡關係。Vigna & Haberman (2001，2002)以退休之後的所得替代率為目標計算出目標退休所得，

再將到期累積的退休基金年金化後，轉換成實際退休所得，找出最適資產配置方式以降低退休金帳戶與退休後需要的所得水準間之差距。本文主要是根據各個不同風險偏好的人，探討最適的提撥率及投資決策，以滿足其希望達成的投資報酬率、所得替代率、下方風險損失率等目標。首先我們定義：

TP_n：到期時退休基金目標給付。

S_n：第 n 年之薪資水準。

$\ddot{a}_x$：x 歲的人，每年初領取 1 元一直領到死亡為止之年金現值，其中我們假設每個人最多活到 110 歲。

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{110-x} v^t \cdot {}_t p_x \qquad (1)$$

v：折現因子。

${}_t p_x$：x 歲的人活過 t 年的機率。

本文假設了預期達到的所得替代率為我們退休金資產累積的目標，本文將目標設定為所得替代率的 80%，因此我們可以得到我們的目標給付公式：

TP_n = 所得替代率×退休當年度之薪資水準×退休所得年金現值

$= 80\% \times S_n \times \ddot{a}_x$　（x 代表退休年齡）　(2)

以達到此給付目標為出發點，並希望從不同的角度考慮風險與報酬間的關係，設計不同的目標函數便是本節的主要內容，本文主要提出三種目標函數的型態希望能作為投資時的參考：

一、　目標函數(1)

在目標函數(1)的主要目的是要求目標給付(Target Payment)的期望值是到期總資產累積的不偏估計量(Unbiased Estimator)，亦即於投資期間終了時總資產累積的期望值等於目標給付的期望值；而且我們希望到期時總資產累積與目標給付之間的變異最小，亦即是使到期給付的風險最小。以此目的為目標設定的目標函數表示如下：

$$\text{Minimize } E\left[\left(TA_n - TP_n\right)^2\right] \qquad (3)$$

TA_n：到期時總資產累積。

二、 目標函數(2)

在目標函數(2)的目的主要是希望能減少到期時投資不如預期目標的情況，使得最後帳戶內累積的總資產低於我們原先預估達到的目標(所得替代率的 80%)，所以在投資時就先高估預期的目標給付，使投資能往更高的報酬為目標。因此將我們的目標函數定義如下：

$$\text{Minimize } E\left[\left(TA_n - 120\% \times TP_n\right)^2\right] \tag{4}$$

在這個目標函數中我們首先先觀察高估預期的目標給付對於最適投資策略與最適提撥率的影響。接下來考慮當給定提撥率是固定時(以目標函數(1)所求得之最適提撥率為給定之提撥率)，觀察高估預期目標給付對於最適投資策略的影響。

三、 目標函數(3)

在目標函數(3)下，我們希望藉由總資產累積的期望值、提撥率、到期給付的風險與不同的參數λ(λ = 0.001, 0.0005, 0.0001)間找到一個平衡，此目的是希望能在最大化到期總累積資產的目標下，儘量能降低所需的提撥率，並能使到期給付的風險也能盡量控制在一定的範圍內，但是卻不一定使得總資產累積的期望值等於目標給付的期望值。以此目的為目標設定的目標函數表示如下：

$$\text{Maximize } \frac{E(TA_n)}{CR + \lambda \times Var(TA_n - TP_n)} \tag{5}$$

CR：提撥率。

參、 資產模型建構

本文假設我們將手上之現金投資於四項資產，分別為短期債卷、長期債券、指數連結型債券及股票，本節分別在有、無考慮交易成本下，建構資產的累積模型：

一、 未考慮交易成本之資產累積模型

在未考慮交易成本下，本文做了以下的定義：

TA_0：第一年初退休基金的起始總資產累積值，定義為 0。

TA_t：第 t 年底(第 t+1 年初)之退休基金總資產累積值。

TA_n：第 n 年底到期退休基金總資產累積值。

X_t：第 t 年初之退休基金所提撥之金額($X_t = CR \times S_t$；CR 為提撥率，S_t 為第 t 年初之薪資)。

$P_{t\ j}$：資產 j 第 t 年初應持有的比例

$r_j(t)$：資產 j 在第 t 年內的總名目報酬率。

其中 j=1 代表現金；j=2 代表長期債券；j=3 代表指數連結型債券；j=4 代表股票。第 t 年底之退休基金總資產等於第 t 年初之退休基金總資產在第 t 年的投資收益，加上第 t 年初之提撥金額在第 t 年的投資收益，因此在第 t 年底之退休基金總資產累積值可以表示如下：

$$TA_t = (TA_{t-1} + X_t)\left[\sum_{j=1}^{4} P_{t\ j} \times r_j(t)\right]，t = 1, 2, ..., n. \qquad (6)$$

因此，到期退休基金總資產累積值可以表示如下：

$$TA_n$$

$$= (TA_{n-1} + X_n)\left[\sum_{j=1}^{4} P_{n\ j} \times r_j(n)\right]$$

$$= TA_{n-1}\left[\sum_{j=1}^{4} P_{n\ j} \times r_j(n)\right] + X_n\left[\sum_{j=1}^{4} P_{n\ j} \times r_j(n)\right]$$

$$= (TA_{n-2} + X_{n-1})\left[\sum_{j=1}^{4} P_{n-1\ j} \times r_j(n-1)\right]\left[\sum_{j=1}^{4} P_{n\ j} \times r_j(n)\right] + X_n\left[\sum_{j=1}^{4} P_{n\ j} \times r_j(n)\right]$$

$$= \ldots$$

$$= \sum_{t=1}^{n} X_t \prod_{i=t}^{n}\left[\sum_{j=1}^{4} P_{i\ j} \times r_j(i)\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{n} CR\cdot S_t \prod_{i=t}^{n}\left[\sum_{j=1}^{4} P_{i\ j}\times r_j(i)\right]$$

$$=CR\cdot\sum_{t=1}^{n} S_t \prod_{i=t}^{n}\left[\sum_{j=1}^{4} P_{i\ j}\times r_j(i)\right] \qquad (7)$$

在本文中，退休基金總資產累積的時間為 40 年，且因為我們採用的是固定時間調整投資比例策略(Regular Rebalancing)，在固定時間可進行調整投資比例，而調整過後到下一調整時間點前則維持相同的投資比例。而在本文中是採用每五年調整一次投資比例的方式，也就是每年調整資產配置，並於每五年變換一次投資比率，因此我們可以得到以下的關係：

n=40

$$\begin{pmatrix}P_{1\ 1}\\P_{1\ 2}\\P_{1\ 3}\\P_{1\ 4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{2\ 1}\\P_{2\ 2}\\P_{2\ 3}\\P_{2\ 4}\end{pmatrix}=\ldots\ldots.=\begin{pmatrix}P_{5\ 1}\\P_{5\ 2}\\P_{5\ 3}\\P_{5\ 4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P_{6\ 1}\\P_{6\ 2}\\P_{6\ 3}\\P_{6\ 4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{7\ 1}\\P_{7\ 2}\\P_{7\ 3}\\P_{7\ 4}\end{pmatrix}=\ldots\ldots.=\begin{pmatrix}P_{10\ 1}\\P_{10\ 2}\\P_{10\ 3}\\P_{10\ 4}\end{pmatrix}$$

……

$$\begin{pmatrix}P_{36\ 1}\\P_{36\ 2}\\P_{36\ 3}\\P_{36\ 4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{37\ 1}\\P_{37\ 2}\\P_{37\ 3}\\P_{37\ 4}\end{pmatrix}=\ldots\ldots.=\begin{pmatrix}P_{40\ 1}\\P_{40\ 2}\\P_{40\ 3}\\P_{40\ 4}\end{pmatrix}$$

二、 考慮交易成本之資產模型

在考慮交易成本的情況下，除了原先定義的變數外，本文再定義以下變數：

$A_{t\ j}$：資產 j 在第 t 年初之價值。

$a_{t\ j}$：資產 j 在第 t 年末之價值，$a_{0\ j}=0$。

tc_j：資產 j 的交易成本。

其中 j=1 代表現金；j=2 代表長期債券；j=3 代表指數連結型債券；j=4 代表股票。資產 j 在第 t 年初的價值可以分成兩個部分來看，第一個部分是前期的累積，第二個部分是薪資的提撥。每年初都必須調整投資的比例($P_{t\ j}$)，因為前期的資產 j 的累積($a_{t-1\ j}$)可能會超過目標的比例或者不足目標的比例，因此在年初時我們必須對超過或者不足的部分做交易，而交易的金額需要扣除交易的成本。同樣的薪資的提撥也必須根據資產 j 在第 t 年的目標比例做投資，而交易的金額也需要扣除交易成本。因此我們可以得到資產 j 在第 t 年初之價值：

$$\begin{aligned} A_{t\ j} &= \left[P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} - tc_j\cdot\left|P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} - a_{t-1\ j}\right|\right] + \left[P_{t\ j}\cdot X_t - tc_j\cdot P_{t\ j}\cdot X_t\right] \\ &= \left[P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} + P_{t\ j}\cdot X_t\right] - tc_j\cdot\left[P_{t\ j}\cdot X_t + \left|P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} - a_{t-1\ j}\right|\right] \qquad (8) \end{aligned}$$

資產 j 在第 t 年末之價值為其在第 t 年初之價值乘上資產 j 在第 t 年內的報酬率，因此我們可以得到以下關係：

$$a_{t\ \mathrm{j}} = A_{t\ \mathrm{j}}\times r_j(t) \qquad (9)$$

將各資產在第 t 年末之價值加總之後，可以得到退休基金在第 t 年末之總資產累積值，因此我們可以得到以下的關係：

$$\begin{aligned} &TA_t \\ &= \sum_{j=1}^{4} a_{t\ \mathrm{j}} \\ &= \sum_{j=1}^{4} A_{t\ \mathrm{j}}\times r_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{4}\left\{\left[P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} - tc_j\cdot\left|P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} - a_{t-1\ j}\right|\right] + \left[P_{t\ j}\cdot X_t - tc_j\cdot P_{t\ j}\cdot X_t\right]\right\}\times r_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{4}\left\{\left[P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} + P_{t\ j}\cdot X_t\right] - tc_j\cdot\left[P_{t\ j}\cdot X_t + \left|P_{t\ j}\cdot TA_{t-1} - a_{t-1\ j}\right|\right]\right\}\times r_j(t) \qquad (10) \end{aligned}$$

我們可以藉由遞迴的關係，得到到期的退休金總資產累積值TA_n。

肆、 Wilkie 投資模型下之數值結果分析

在數值結果的部份，我們採用以下例子進行試算：

◎ 員工現年 25 歲，65 歲退休。

◎ 投資期間為 40 年。

◎ 每年初薪資水準為 S_t（$t=1, 2, ..., 40$ ，$S_1=1$）以及根據 Wilkie 投資模型所產生之相關投資報酬率 $r_j(t)$（j=1:現金；j=2:長期債券；j=3:指數連結型債券；j=4:股票）。模擬次數為 4000 次。

◎ 提撥率為 CR(未知但每年固定)且 0%≤CR≤100%。

◎ 不考慮離職率。

◎ 死亡率以第四回生命表為計算基礎(i=2.5%)。

◎ 在考慮不放空的情況下，我們做了以下限制：$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} P_{t\,j}=1 \text{ , } t=1,2,...,40 \\ 0 \le P_{t\,j} \le 1 \quad \forall j=1,2,3,4 \end{cases}$

在以上的假設情況下，我們利用 Matlab 數學統計軟體，找尋三種目標函數以及在考慮交易成本情況下的最適資產配置以及最適提撥率。

一、 三種目標函數下之最適資產配置與最適提撥率

（一） 目標函數(1)：

（表二)是目標函數(1)之最適資產配置與最適提撥率結果。我們發現當越接近到期日時，指數連結型債券持有的比例將會是最多的；而長期債券持有比例將會隨著到期日的接近而減少；現金持有的比例在最後會增加，這是為了減少到期給付的風險；而風險最高的股票，從開始到結束持有的比例都不超過 4%，這是因為其風險較高的關係使得總資產累積與目標給付之間的變異變大，無法使到期給付的風險最小。這樣的結果與 Vigna & Haberman (2001) 文中的結果與實務上生命週期型態(lifestyle)投資方式呈現相同的現象。

表二 目標函數(1)之最適資產配置與最適提撥率

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\,1}$	0	0	0	0	0.0122	0.0202	0.0335	0.2457
$P_{t\,2}$	1.0000	0.4288	0.3051	0.1881	0.1476	0.1167	0.0898	0
$P_{t\,3}$	0	0.5317	0.6949	0.8102	0.8402	0.8601	0.8767	0.7295
$P_{t\,4}$	0	0.0396	0	0.0017	0	0.0029	0	0.0248

Contribution Rate = 0.1535 = 15.35 %

(表三)是目標函數(1)固定提撥率為 12 %下的最適資產配置，我們發現因為提撥率由 15.35 %降到了 12.00 %，整個投資組合有很大的變化，很明顯的股票投資的比例增加了，長期債券持有的比例則是很明顯的減少，而指數連結型債券依然佔了非常大的一部份，到期的現金持有比例也減少。這樣的結果是因為提撥率減少後，但卻還是要達到我們的目標給付，使得我們必須要投資到更高風險的資產上，使投資組合能有較高的報酬率，但是又必須要兼顧極小化給付風險的目標，因此需要將大部分資金都投資到更能反應薪資成長及通貨膨脹風險的投資標的上，也就是指數連結型債券。

表三 目標函數(1)固定提撥率(12 %)下之最適資產配置

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0.0989
$P_{t\ 2}$	0.5065	0.2112	0.1542	0.1040	0.0982	0.0670	0.0542	0
$P_{t\ 3}$	0.2382	0.4913	0.6594	0.7425	0.7845	0.8241	0.8528	0.7930
$P_{t\ 4}$	0.2553	0.2975	0.1864	0.1535	0.1173	0.1089	0.0930	0.1081
Contribution Rate = 0.1200 = 12.00 %								

(二) 目標函數(2)：

(表四)是目標函數(2)的數值結果；(表四)是目標函數(2)採用目標函數(1)所求得的最適提撥率下的最適資產配置數值結果。從(表三)我們發現整個趨勢與目標函數(1)的結果一模一樣，唯一不同的是提撥率增加了。目標函數(2)與目標函數(1)只是差在最後目標給付乘上一個常數(120%)，而目標給付與各資產報酬率間的變異數-共變異數關係並不會因為將目標給付乘上常數後而改變，因此可以推斷，以增加預期目標的方式來執行風險管理時，其結果並不會因為提高了目標給付而改變最適的資產配置，其最適化的結果是以增加提撥率的方式，而非改變投資行為。

表四 目標函數(2)之最適資產配置與最適提撥率

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0.0122	0.0202	0.0335	0.2457
$P_{t\ 2}$	1.0000	0.4287	0.3051	0.1881	0.1476	0.1168	0.0898	0
$P_{t\ 3}$	0	0.5317	0.6949	0.8102	0.8402	0.8601	0.8767	0.7295
$P_{t\ 4}$	0	0.0396	0	0.0017	0	0.0029	0	0.0248
Contribution Rate = 0.1842 = 18.42 %								

當採用目標函數(1)所求得之最適提撥率時，亦即不考慮最適化提撥率，而採用固定提撥率的方式進行資產配置時(表五)。我們可以發現很明顯的，股票投資的比例增加了，長期債券持有的比例則是很明顯的減少，而指數連結型債券依然佔了非常大的一部份，到期的現金持有比例也減少。這樣的結果是採用固定提撥率後，因為必須要達到高額的目標給付，使得投資組合上必須要投資更多高風險的資產，使得投資組合能有較高的報酬率，但是又必須要兼顧給付風險最小化的目標，因此需要將大部分資金都投資到更能反應薪資成長及通貨膨脹風險的投資標的上，也就是指數連結型債券。

表五 目標函數(2)之最適資產配置，使用目標函數(1)之提撥率

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0.1387
$P_{t\ 2}$	0.6529	0.2639	0.1922	0.1244	0.1144	0.0835	0.0697	0
$P_{t\ 3}$	0.1699	0.4957	0.6669	0.7599	0.8013	0.8348	0.8617	0.7752
$P_{t\ 4}$	0.1773	0.2404	0.1409	0.1157	0.0844	0.0817	0.0686	0.0861
Contribution Rate = 0.1535 = 15.35 %								

（三） 目標函數(3)：

(表六)到(表八)代表在目標函數(3)下λ = 0.001、0.0005、0.0001 的數值結果。當λ = 0.001 時(表六)，我們發現整個最適資產配置與最適提撥率與目標函數(1)的結果非常接近，這是因為λ較大時，將使得整個目標函數的效果仍是和目標函數(1)一樣，以達到退休時的所得替代率為唯一的目標。

表六 目標函數(3)之最適資產配置與最適提撥率，$\lambda = 0.001$

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0	0.0017	0.0150	0.2326
$P_{t\ 2}$	1.0000	0.3988	0.2938	0.1770	0.1542	0.1226	0.0976	0
$P_{t\ 3}$	0	0.5318	0.6964	0.8095	0.8458	0.8640	0.8801	0.7343
$P_{t\ 4}$	0	0.0694	0.0098	0.0135	0	0.0117	0.0073	0.0331
Contribution Rate = 0.1504 = 15.04 %								

接下來我們看λ =0.0005 時的情況(表七)，其最適資產配置中依然可以看出與目標函數(1)有相同的趨勢，指數連結型債券持有的比例將會是最多的；而長期債券持有比例將會隨著到期日的接近而減少；現金持有的比例在最後會增加；股票的持有比例比目標函數(1)的結果多了一點。這樣的結果是期望此目標函數能以較小的提撥率，盡可能最大化到期總累積資產，並能使到期給付的風險

也不致於過大。

表七 目標函數(3)之最適資產配置與最適提撥率，$\lambda = 0.0005$

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0.2133
$P_{t\ 2}$	0.8923	0.3457	0.2593	0.1568	0.1405	0.1120	0.0957	0
$P_{t\ 3}$	0.1077	0.5526	0.7063	0.8114	0.8459	0.8638	0.8854	0.7437
$P_{t\ 4}$	0	0.1017	0.0344	0.0318	0.0136	0.0242	0.0189	0.0430
Contribution Rate = 0.1446 = 14.46 %								

當λ = 0.0001 時(表八)，最適解的提撥率是三種情況下最小的，在投資組合上幾乎完全不考慮投資在長期債券，最後到期的現金持有比例也變得很少，完全是以指數連結型債券與股票為主要投資的標的，這樣的結果是因為在提撥率不高的情況下，一方面希望能使到期累積的資產能極大化，一方面投資在跟薪資成長率與通貨膨脹率相關的資產上，使得到期的給付風險也能受到控制。但是由於過小的提撥率，使得給付風險相對變大。

表八 目標函數(3)之最適資產配置與最適提撥率，$\lambda = 0.0001$

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0.0712
$P_{t\ 2}$	0.0185	0.0130	0.0383	0.0235	0.0423	0.0254	0.0189	0
$P_{t\ 3}$	0.7223	0.7013	0.7866	0.8275	0.8461	0.8668	0.8877	0.8172
$P_{t\ 4}$	0.2592	0.2857	0.1750	0.1490	0.1116	0.1078	0.0934	0.1115
Contribution Rate = 0.1102 = 11.02 %								

λ = 0.001 時結果並非我們希望的，因為其最適解並沒有與目標函數(1)的結果有太大的差異。而λ =0.0001 時，其提撥率的變化太大，我們預測其對於到期給付風險可能會增加太多，因此我們將λ = 0.001 與λ = 0.0001 做個比較。從我們的資產累積模型中，我們知道在每年固定提撥率的情況下，資產的累積與提撥率是有一定的倍數關係，亦即如果固定了投資組合，當提撥率變成兩倍到期的資產累積也會變成兩倍。

$$TA_{40} = CR \cdot \sum_{t=1}^{40} S_t \prod_{i=k}^{40} \left[\sum_{j=1}^{4} P_{i\ j} \times r_j(i) \right]$$

兩種情況的提撥率與到期的資產累積期望值比$CR_{\lambda=0.001} / CR_{\lambda=0.0001}$ = 1.3648，

而 $E(TA_{40})_{\lambda=0.001}\Big/E(TA_{40})_{\lambda=0.0001}$ = 1.1205。我們發現 1.3648 > 1.1205，亦即是說雖然 λ = 0.0001 的情況最適解的提撥率較小，可是其報酬率是比較高的。我們可以利用之前定義的年平均報酬率計算二者的年平均報酬率，得到 $AR_{\lambda=0.001}$ = 8.64 %、$AR_{\lambda=0.0001}$ = 9.39 %，因此我們知道 λ = 0.0001 的情況其投資組合的報酬率較高，且是 λ = 0.001 的情況下的 1.0868 倍。這是因為參數調整時，λ = 0.0001 使得目標函數中給付風險的重要性減低，而使低提撥高報酬的重要性增加，才會產生這樣的結果。投資者可視其風險偏好的程度，選擇在 λ = 0.001 與 λ = 0.0001 之間，決定其投資策略。

（四） 結果比較

(表九)是將上述各種情況下的成功機率、提撥率、年平均報酬率、夏普指數、虧損分配的三種主要指標和盈餘分配的三種主要指標，在各種目標函數上做一個比較。所謂的成功機率是指累積的資產在退休時達到預期的所得替代率的機率。虧損分配是指在退休時，4000 次模擬中，累積的資產在退休時沒有達到預期的所得替代率的次數中，其不足的金額之期望值、變異數、以及不足的金額中最大的前 5%的期望值。反之，盈餘分配即是在退休時，4000 次模擬中，累積的資產在退休時有達到預期的所得替代率的次數中，其超過的金額之期望值、變異數、以及超過的金額中最大的前 5%的期望值。一般而言，以投資者的角度而言，期望看到的其投資策略是可達到具有較高的年投資報酬率、較高的夏普指數、較高的成功機率、較低的提撥率、以及盈餘分配大於損失分配的情形。

從成功機率來看，目標函數(2)的成功機率是最高的，函數(1)的設計是希望使總資產累積與目標給付是相等的，因此成功機率應該在 50%左右。至於目標函數(2)原先設計就是以較高的目標給付來做投資，因此如果以原先的目標給付來衡量成功機率，自然能達到較高的成功機率。值的注意的是目標函數(2)固定提撥率的情況，其提撥率維持與目標函數(1)相同之 15.35%，但是由於其採取較積極的投資策略，其年平均報酬率是有顯著增加的，因此其成功機率也高達 82.3%，對投資人而言是非常適合的投資策略。目標函數(3) λ=0.0001 的情況之成功機率非常低，原因是因為其提撥率過低所造成。

年平均報酬率與夏普指數部分，這兩項指標較大者分別代表其投資報酬率較高以及在單位風險下之投資的績效較好，目標函數(3) λ=0.0001 的情況雖然成功機率低，不過其投資績效是較好的。目標函數(2)下，當固定提撥率時，因為將提撥率固定之後，為了達到較高的目標給付而採取較具風險性的投資，因而產生了較高的投資績效，因此，以投資績效而言，此兩種投資策略是較適合的。

虧損分配與盈餘分配的三種指標，主要是看當總資產累積小於目標給付與總資產累積大於目標給付時的分配情況。很明顯的在目標函數(2)兩種情況下，虧損發生的機率很小，而且虧損分配的平均值與標準差與尾端涉險平均值都比其他三個目標函數小很多，這是一般投資人所樂意見到情形，但是第一個情況(最適提撥率的情況)提撥率為 18.42%，如此高提撥率卻又是投資人所不樂意見到情形，但是在第二個情況(固定提撥率的情況)，提撥率固定為 15.35%，盈餘分配明顯大於虧損分配，另外年平均報酬率及夏普指數都顯示，此投資策略可提供投資人比目標函數(1)更適合的投資策略。而目標函數(3)λ=0.0001 的虧損分配與其他幾種情形較不一樣，不管是虧損分配的平均值與標準差與尾端涉險平均值都是較高的，換句話說，此投資策略風險性很高，投資者每年只提撥 11.02%，因此在 4000 次的模擬中，有 86%的機率達不到預定的所得替代率，可是仍有 14%的機率超過預定的所得替代率，並且其超的盈餘分配大於目標函數(1)中 15.35%提撥率的盈餘分配。從目標函數來看，目標函數(3)λ=0.0001 可以說是將到期給付的風險的重要性減低，因此其總資產的累積便會往較高風險也較高報酬的方向投資，也就造成其虧損分配與盈餘分配的參數會比其他情況要來得高的情形。不過如果從虧損分配與盈餘分配來看，目標函數(2)固定提撥率的情況下不但有較小的虧損，而且有較高的盈餘，可以說是較佳的選擇。

表九 各目標函數間之績效評估

目標函數		成功機率 $P(TA_{40} > TP_{40})$	提撥率	年平均報酬率	夏普指數	虧損分配 μ	虧損分配 σ	虧損分配 $CTE_{5\%}$	盈餘分配 μ	盈餘分配 σ	盈餘分配 $CTE_{5\%}$
1		0.47575	15.35 %	8.57 %	1.3692	13.03	13.00	52.92	12.03	12.99	52.63
2	最適化提撥率	0.92800	18.42 %	8.57 %	1.3692	7.50	7.80	32.27	27.92	23.99	100.10
2	未最適化提撥率	0.82275	15.35 %	9.16 %	1.6686	7.96	8.55	34.49	25.60	26.17	107.13
3	λ=0.001	0.46000	15.04 %	8.64 %	1.4036	13.11	12.91	52.71	12.02	13.12	53.00
3	λ=0.0005	0.40200	14.46 %	8.74 %	1.4532	13.55	13.01	53.25	11.83	13.31	53.79
3	λ=0.0001	0.14025	11.02 %	9.39 %	1.6946	20.76	15.48	64.82	15.07	19.20	77.32

二、 考慮交易成本下之最適資產配置與最適提撥率

交易成本亦是影響投資決策的因素之一，本小節將探討交易成本對資產配置的影響。Donohue & Yip (2003) 建立一個最佳化的調整投資組合策略模型，探討交易成本與是否決定調整投資組合之間的關係，其研究發現當交易成本變大的時候，為了保持付出的成本相同，無交易範圍就會相對的擴張，亦即使需要做資產調整的機會變少。Pollin & Schaberg & Baker (2003)指出，交易成本對於長期持有性投資的持有人是創造出可以忽略的負擔，而當持有人是以獲利為主的短

期投資的話，交易成本將會構成顯著的負擔。James Tobin (1996)在書中的序文提到，交易成本將不自覺地對短期性持有的投資產生不利，而對長期性持有的投資而言其影響是可以忽略的。因此本文希望在考慮交易成本的情況下，觀察交易成本對於最適化資產配置與最適化提撥率的影響。

以下我們將以較具代表性的目標函數(1)為主並分各種情況來討論。在此之前，我們先介紹世界各國對於證券交易稅的徵收標準，整理如下(表十)：

表十 世界各國證券交易稅徵收標準(資料來源：http://www.populareconomics.org/)

國　家	股　票	債　券
澳　洲	0.15 %	0.15 %
法　國	0.10 %	0.60 %（交易額小於 100 萬法郎） 0.30 %（交易額大於 100 萬法郎）
日　本	0.10 %	0.08 %
德　國	0.50 %	0.40 %
英　國	0.50 %	-
美　國	0.0034 %	-

首先我們從實際的情況來設定我們四個資產的交易成本，現金資產的部分是不會有交易成本的，所以我們設定 $tc_1 = 0$。又因為我們採用的 Wilkie 投資模型中所產生的參數是以英國的資料為基準，所以從(表九)我們知道如果以實際情況設定交易成本時，長期債券與指數連結型債券的交易成本也是 0($tc_2 = tc_3 = 0$)，而股票交易成本為 0.50 %($tc_4 = 0.50$ %)。在這樣的設定下得到(表十一)的結果，我們發現與目標函數(1)所求得之最適解可說是完全相同，因為我們是以每年作為調整投資比例的單位，整個投資期間也只調整了 40 次投資的比例，所以可以看成是 40 次長期持有的投資。這樣的結果與 Pollin & Schaberg & Baker (2003)及 James Tobin (1996)文中所說「交易成本對於長期持有性的投資來說是可以忽略的」是相符的，另外在目標函數(1)下之最佳資產配置，股票的比率原本就很小，因此交易成本在我們這樣的設定下是可以忽略的。

表十一 目標函數(一)考慮交易成本下之最適資產配置 $tc_1 = tc_2 = tc_3 = 0$ 、 $tc_4 = 0.5\%$

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0.0123	0.0201	0.0336	0.2457
$P_{t\ 2}$	1.0000	0.4284	0.3052	0.1880	0.1476	0.1167	0.0898	0
$P_{t\ 3}$	0	0.5311	0.6948	0.8100	0.8401	0.8601	0.8766	0.7294
$P_{t\ 4}$	0	0.0406	0	0.0020	0	0.0031	0	0.0249
Contribution Rate = 0.1535 = 15.35 %								

參考其他國家對於證券交易稅收取的情況，大部分國家收取股票的證券交易稅是大於或等於債券的證券交易稅，因此在假設的情況下，依然將現金的交易成本設定為 0(tc_1 = 0)，而兩種債券的交易成本設定為 0.10 %(tc_2 = tc_3 = 0.10 %)，而股票的交易成本依然設定為 0.50 %(tc_4 = 0.50 %)所得到的結果依然是與目標函數(1)求得之最適解相差無幾，資產投資比例的變動都在 0.1 %以內，而提撥率也僅是增加了 0.03 %。

因為之前的情況，各資產的交易成本為 0 %、0.10 %、0.10 %、0.50 %，這些值較小且差距不大，所以對最適化結果並無太大影響；為了能把交易成本的影響看得更清楚我們固定提撥率為 15.35 %；因為指數連結型債券在我們的投資組合中佔有很高的比例，所以我們選用此資產收取交易成本的情況來作敏感度分析，我們的目的是想知道交易成本要達到什麼樣的程度才會對我們的資產配置有較大的影響。我們發現當指數連結型債券交易成本達到 10 %以上時，對於資產配置才會產生較明顯的影響，不過必須注意的是，這種假設情況所設定的交易成本在現實生活中是不存在的。從(表十二)與未考慮交易成本時目標函數(1)的結果(表二)，我們發現隨著交易成本的增加，指數連結型債券持有的比例是減少的，而每期間的持有比例變化也是變小的，不過持有的比例依然佔了很大一部份；值得注意的是，長期債券的持有比例隨著指數連結型債券交易成本的增加而減少；而股票的持有比例則有隨著指數連結型債券交易成本的增加而增加。這樣的結果是因為目標給付與提撥率是不變的，而指數連結型債券佔了最大部分的投資比例，所以其交易成本有可能會非常大，而每年多出了的交易成本使得到期總資產的累積比較不容易達到目標給付的水準，所以增加投資在長期債券可能不足以達到目標給付，而需要投資在高風險高報酬的股票上。此敏感度分析純粹是為了探討交易成本對於最適資產配置的影響，這種假設情況所設定的交易成本在現實生活中是不存在的。

表十二 目標函數(一)考慮交易成本下之最適資產配置 $tc_1 = tc_2 = tc_4 = 0$ 、 $tc_3 = 10\%$

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
$P_{t\ 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0.1314
$P_{t\ 2}$	0.6085	0.2755	0.2052	0.1343	0.1275	0.1166	0.1256	0
$P_{t\ 3}$	0.1017	0.3705	0.5649	0.6768	0.7317	0.7532	0.7547	0.7399
$P_{t\ 4}$	0.2897	0.3540	0.2299	0.1889	0.1408	0.1302	0.1197	0.1287
Contribution Rate = 0.1535 = 15.35 %								

總結來說，我們以每年作為調整投資比例的單位，整個投資期間只有 40 次的調整，持有時間長的情況下採用實際情況設定交易成本時，交易成本的影響是很小的。在此情形下，交易成本要達到非常高的情況才會對資產配置產生影響，但是如此高的交易成本，在實務上是不存在的。

伍、 採用台灣市場資料之投資模型下的資產配置

本文在接下來的章節將探討在台灣市場資料之投資模型下的資產配置，並藉由基因演算法模擬最佳化的方式探討在各個不同之預期退休年齡下所需的最適資產配置。本研究在此部份探討兩種投資策略：單期投資策略和多期投資策略。

一、 單期資產配置下之可退休年齡

投資報酬率的大小是退休基金參與者最關心的事情，投資者希望能夠擁有較高的報酬率，以便較早累積足夠的退休金可以退休，但較高的報酬率表示此投資者亦同時承擔較高的投資風險。本節探討在一般大眾常使用的單期資產配置策略中，是否存在一個能夠擁有較早退休年齡以及較低投資風險的投資比重策略。

單期資產配置本質是屬於懶人的操作方式。在一開始決定了各資產部位比例，在往後時間皆使用同樣的部位比重來做資產配置。單期資產配置中常見的策略有單期買入持有策略和單期定期重新調整投資比重法。兩者最大差異在於單期買入持有策略只對當期提撥進來的錢對資產配置，而單期定期重新調整投資比重法則是每一期對所有的資產重新作同樣比例的分配。本章節探討在不同靜態策略底下中對於退休年齡的探討。在提撥率 6%底下我們使用兩種不同風險屬性的資產：股票型基金及債券型基金。在一般投資大眾在沒有任何「最佳化」概念之前，通常不清楚何種投資組合對自己是最有利的，本節假設投資者在非理性情況底下，以股票型基金比重 80%、債券型基金比重 20%代表高風險投資組合，以及投資比重分別 20%、80%代表保守投資組合來作退休規劃的探討。

(一)、採用台灣市場資料之投資模型

本文使用二種資產做為資產配置中的投資標的。各資產模擬報酬率假設符合幾合布朗尼運動(Geometric Brownian motion) ，而分配參數之平均數、變異數則以過去歷史資料來估計。其詳細過程如下：

(1) 利率模型

本研究利用 Cox、Ingersoll、Ross(1985)提出的 CIR 模型，模型隨機過程架構如下：

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dw_1$$

r:短期利率

θ:短期利率長期水準

k:均數回歸的調整速度

σ_r:短期利率的波動性

(2) 資產隨機過程

股票型基金

$$\frac{dS}{S} = u_s dt + \sigma_s (a_{11} dw_1 + a_{12} dw_2)$$

u_s=0.15315；σ_s=0.34917

債券型基金 (11)

$$\frac{dB}{B} = u_B dt + \sigma_B (a_{21} dw_1 + a_{22} dw_2)$$

u_B=0.0398；σ_B=0.0191

同時考慮各資產的相關性，即 Cov(S,B)=ρ_{SB}

其中 $dw_i, i = 1.2$ 為相互獨立的 Standard Wiener Process；$\sum_t a_{jt}^2 = 1$, j=1.2 。a_{jt} 的推估由 Cholesky 矩陣得知。

本研究所模擬之投資標的其報酬率統計結果如下：

表十三 各資產報酬率模擬值之統計資料表

	5 分位數	50 分位數	95 分位數
股票	-41.43%	16.01%	72.82%
債券	1.19%	4.05%	7.16%

(二)、目標給付模型

$$L_T = R s_T \ddot{a}_T \quad (12)$$

T 為退休時點；$\ddot{a}_T$ 為 T 時點以 1 元折現後的年金現值；R 為目標所得替代率；s_T 為退休時點薪資水準。年金折現以 2.5%為預定利率以及使用年金生命表作為本文研究。

(三)、可退休年齡

本文對各投資標的模擬 1000 次，以起始工作年齡 20 歲情況下作數值分析。

本節主要在研究在提撥率 6%，薪資成長率 3%底下不同投資比重策略之下，單期資產配置對於資產(F_T)累積達到三分之二所得替代率可能退休年齡(Age)之探討。對於退休所需，本文假設購買躉繳終身年金保險(L_T)，預定利率假設 2.5%。以數學式表示即：

$$F_t = (F_{t\text{-}1} \ + \ c_t s_t)\left[\sum_{j=1}^{2} P_{tj} \times (1 + r_j(t))\right]$$

$$L_t \ = \ R s_t \ddot{a}_t$$

$$Age = min(t : F_t > L_t \mid t \geq 20) \ , \quad 20 \leq t \leq 110$$

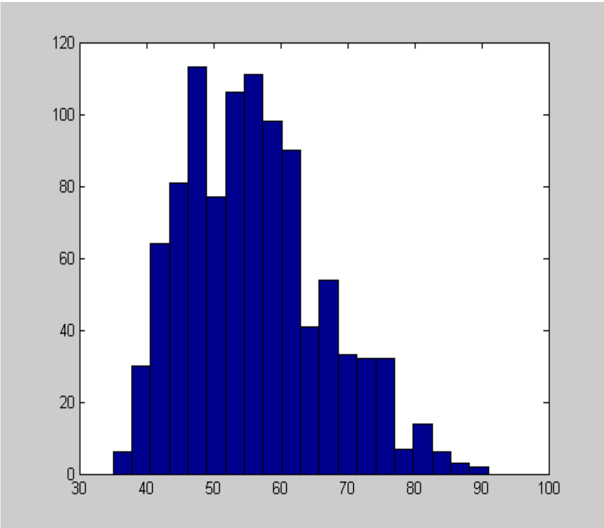

圖 1A　單期定期重新調整投資比重法

股票型基金投資比重 80% 債券型基金投資比重 20%

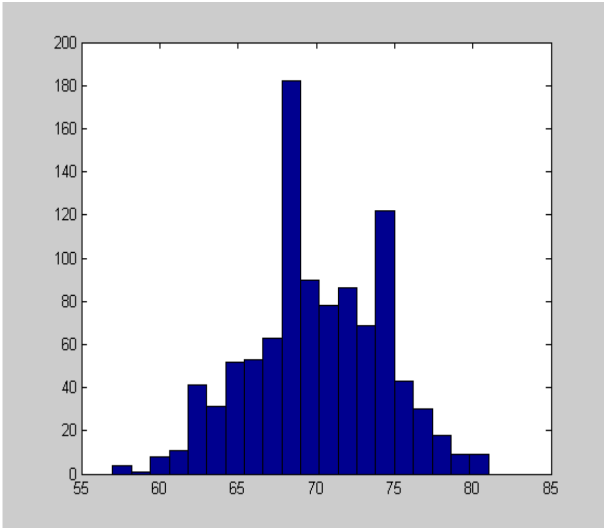

圖 1B　單期定期重新調整投資比重法

股票型基金投資比重 20% 債券型基金投資比重 80%

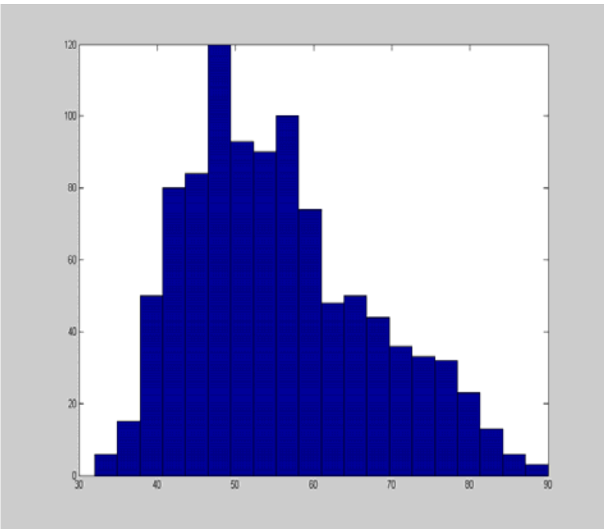

圖 2A　單期買入持有策略

股票型基金投資比重 80% 債券型基金投資比重 20%

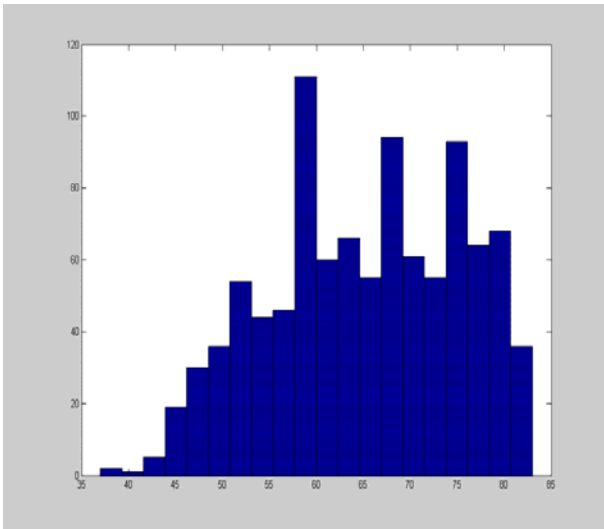

圖 2B　單期買入持有策略

股票型基金投資比重 20% 債券型基金投資比重 80%

圖 1 是可退休年齡分布圖，我們比較了單期定期重新調整投資比重策略，股票型、債券型基金資產部位比重分別為 80%，20%以及 20%，80%的資產配置結果。圖中橫軸代表退休年齡，縱軸代表 1000 次模擬中能在此年齡退休的次數。所謂能符合某年紀的退休次數指的是，一旦資產所累積的價值能供應未來薪資水準三分之二所得替代率時，就允許給予退休。圖 1A 中，風險性資產佔主要部位因此屬於較積極性的投資。結果顯示在此資產配置中能擁有較早的退休年紀。但由於屬於積極性的投資策略，因此造成退休年齡分布有厚尾的現象，退休年齡有很大的變異程度。圖 1B 屬於保守型的投資策略，相較於前一個積極策略退休年齡分佈沒有太大的厚尾現象，變異程度較小，但平均退休年齡相較之下會晚一些。

圖 2 我們比較在單期買入持有的策略底下，股票型、債券型基金資產部位比重分別為 80%，20%以及 20%，80%的資產配置結果。單期買入持有投資策略只對當期提撥金額作資產配置，已存在於退休帳戶中的資產則不做任何更動。因此單期買入持有策略跟單期固定比例混合法比較之下，單期買入持有策略變異程度更劇烈。圖 2A 為單期買入持有策略高風險投資組合退休年齡分部結果。研究發現，在同樣投資組合比例中，單期買入持有策略能擁有較早的退休機會，但卻也擁有較大的可能會在非常大的年齡才能退休。圖 2A 與圖 1A 相比較可知，單期買入持有策略呈現更分散的圖形分布，左右尾端相較之下呈現較厚的分配。圖 2B 也呈現相同之結果。因此我們得知單期買入持有投資策略下退休年齡雖然依投資比重不同跟單期定期重新調整投資比重法具有相同趨勢，但比較起來變異程度更為劇烈。原因在於單期買入持有策略對以往資產不作任何部位的改變，因此當早期風險性資產擁有較重比例時，會導致很大的變異結果。

由上述可知，雖然高風險性投資策略下擁有較大的儘早退休可能；但同樣卻可能面臨很晚的退休可能；而保守型投資決策很晚退休的可能性雖然降低但也導致儘早退休的可能大幅降低。本文接下來將探討多期資產配置的策略是否可同時擁有較大的投資報酬率以及較小的投資風險。相較於單期的資產配置，多期的資產配置模型複雜許多，因為此模型包含的變數高達數十個，本文採用基因演算法來求解多期資產配置模型的變數。

陸、 基因演算法

一般在求解方程式最佳化時，由於方程式非線性組成或內含複雜函數以及限制式因此無法使用微積分等方式推導封閉解，如此勢必要借助數值解的幫助。常見的數值解方式以演算法的方式最為常見。演算法的步驟不外乎給予起始值，迭代演算得到一組比原來值更好的數值，之後再進一步演算得到新的目標函數值，

直到夠接近目標函數的全域最佳解（global optimal）。不同的演算法最大差異在於其迭代演算的方式不同，如共軛梯度演算法迭代方式是朝著梯度的方向演算；退火模擬演算法是給一特定方程式以此方程式作為媒介迭代。而演算法常遇到的問題在於所得到的解並非全域最佳解而只是部份最佳解(local solution)。此問題在本研究中所使用的基因演算法在設計上以突變的概念能盡量避免掉入部份最佳解的情況。以下介紹本文章使用的基因演算法。

一、　基因演算法之簡介

達爾文於1859 年提出了「物競天擇，適者生存」演化理論，即自然界之生物經由競爭，使得適應環境者得以繁衍後代，不適應者便遭淘汰，經過天擇後的生存者經過不斷地演進，便可產生更優良、更能適應環境之後代(Holland, 1975)。基因演算法是運用電腦模擬適者生存，不適者淘汰的演化原則，經由複製、交配及突變運算，搜尋出欲求之最佳解。

二、　基因演算法之演算程序

在執行基因演算法之前，必須先設定初始參數值，例如：族群大小、染色體長度、交配率及突變率等，而這些參數將會影響基因演算法之效能，茲將各參數分述如下：

（一）族群大小

族群大小即表示每個世代之個體數量，當族群越大，搜尋的範圍越廣，陷入區域最佳化的機率越小，但搜尋時間卻會增加，反之，當族群過小，搜尋的範圍不夠廣泛，容易陷入區域最佳化，導致演化過程提早收斂，所以族群大小會影響基因演算法的搜尋效率，因此在決定其大小時，需兼顧效率與整體表現，使演算法發揮最大之效用，在基因演算法中，族群大小通常為固定的，一般常用的族群大小為30-200。

（二）染色體長度

染色體的長度與最佳解之精密性有關，當染色體長度越長，精確性越高，但編碼、解碼的運算時間卻相對地提高，而長度太短，精確性太低，會導致無法收斂，所以應選擇適當的染色體長度。

（三）交配率

交配率是指母體中染色體需要進行交配之比率，一般的操作方式有兩種：一為母體中的染色體總數（N）有CR 的機率進行交配，即CR*N；另一為預先配對的染色體，進行交配的機率為CR。當交配率過高，會使族群中較優的個體被

選取的速度大於演化產生新個體的速度，因而失去交配的意義，但交配率過低，會使搜尋過程停滯不前，一般常用的交配率為0.5-1.0。

（四）突變率

突變率是指個別基因發生突變的數量與母體基因數量之比率，一般的操作方式有兩種：一為染色體中的基因發生突變之機率，且任何位置之基因發生突變與否均為獨立；另一為母體中發生突變的染色體比率。而突變的目的是為了避免基因在經由複製與交配運算後依舊沒有改變，導致族群間的相似度太高，如突變率過高，會失去子代與母代之相似性，但突變率過低，會容易收斂於區域最佳解，一般常用的突變率為 0.001-0.05。

本文撰寫基因演算法程式碼是使用 Matlab 6.5 軟體。Matlab 雖然有內建演算法，但在使用上有其缺點。本研究在求取最佳化方程式時，如以下方程式設定：

$$\underset{\tilde{x}}{\mathrm{Maxmize}}\ F=\begin{cases} f(\tilde{x}) & \text{if } \tilde{x}\in C_1 \\ g(\tilde{x}) & \text{if } \tilde{x}\in C_2 \end{cases}$$

C_1、C_1 為決策變數 $\tilde{x}$ 不同之定義域。因此隨定義域之設定方式，F 有可為不連續函數。Matlab 內建演算法有一很大特點，「起始值」之給予。之所以要給予起始值目的在於讓演算法有個開頭，起始點能做迭代過程的開端。因此起始值的選取對於內建演算法尤其重要。一旦選擇不適當時，演算法之迭代過程便很可能在某特定定義域中迴盪而無法達到真正的最佳解。而基因演算法雖然也有起始值，但其在使用上較有彈性。隨著使用者之設定，基因演算法可以為數十個甚至數百個起始值來做迭代過程；而 Matlb 內建演算法只能擁有一個起始值來做迭代開端，這便是基因演算法跟內建演算法最大不同點。因此對於不連續函數之最佳化，基因演算法能夠有效地解決我們最佳化之問題。本文研究在一開始也有使用 Matlab 內建之演算法作為最佳化之工具，但顯然所得到的最佳化解很明顯並非為一個全域最佳解。因此本文使用基因演算法作為研究之工具。

柒、 單期與多期資產配置之數值比較

一、 最佳化之目標決策函數

投資者不外乎希望投資報酬率極大以及風險越小。以量化的形式來表示即：

$$\begin{aligned} &\textit{Maxmize}\ (\text{平均報酬率}) \\ &\textit{subject to}\ \text{風險}\ \le \lambda \end{aligned} \tag{13}$$

λ為不同投資人希望承擔的最大風險，可用資產變異程度或者尾端風險衡量指標(如 VaR、CTE)來表示。隨著所承受的風險越大相對的投資者希望所能獲得的報酬率越高。VaR 的概念是應用統計學上機率分配的概念，在給定一個信心水準下未來損失發生的最大情況。假設一投資組合在未來退休時點損失隨機變數X_T，在此所謂的損失指的是在T時退休實際退休金帳戶價值不足以達到目標退休金額之差距稱之為損失，即$X_T=(L_T-F_T|L_T>F_T)$，F_T代表到達預期退休年齡T時實際退休金帳戶價值之隨機變數；L_T為到達預期退休年齡T所需之退休金金額，本文以三分之二所得替代率以 2.5%預定利率構成的年金現值為之。VaR_T95代表損失分配隨機變數X_T有 95%機率會小於此數值。即

$$Prob\left[X_T < VaR_T 95\right] = 0.95$$

CTE 是種類似 VaR 但符從同調性的左端風險衡量方法。CTE_T75是指給定 75%信心水準下，所有損失超過VaR_T75的期望值。即

$$CTE_T 75 = E\left[X_T \mid X_T > VaR_T 75\right]$$

對於 DC 制度參與者而言，希望能夠越早退休的機率越大以及很晚才能退休的機率越小。相對這意味著所賦予的投資策略能帶來較大的報酬率另外也不希望有太大的尾端風險。因此我們將投資決策的目標函數設計如下：

$$\begin{aligned}
&\underset{P_{tj}}{Maxmize}\ F \ = \ E(\mathrm{Re}turn) \\
&subject\ to \quad CTE_T 75 \ \le \ \lambda \\
&\qquad\qquad\quad \lambda = g(T)L_T \\
&\qquad\qquad\quad P_{t1} \ + \ P_{t2} = 1 \\
&\qquad\qquad\quad P_{tj} \ge 0 \\
&\qquad\qquad\quad T = 50.51...70
\end{aligned} \tag{14}$$

如同(13)式的設定，投資人欲在 T 歲時退休且希望由各資產投資部位(P_{tj})所構成

的投資組合在面臨投資績效不佳時能夠有個風險控管機制使得退休年齡不至於過晚。對一般投資大眾而言退休年齡落在 75-80 歲間已是非常不能忍受的範圍。從尾端風險的角度來看，限制其承受的尾端風險(CTE_T75)不大於$g(T)L_T$之下，能夠極大化預期報酬率；即投資人希望在預期退休年齡所面臨退休金不足金額在75%信心水準下不超過$g(T)L_T$。在此L_T為投資人在預期退休年齡T下所需之退休金，g(T)為退休年齡相關之方程式；g(T)本文之設定為線性方程式：

$$g(T) \ = \ 0.9 - 0.015(T - 50), \quad T \ = \ 50.51...70 \tag{15}$$

$g(T)$為隨預期退休年齡遞減之方程式。預期退休年齡越早，能容忍較大的投資風險因此給予較大的尾端風險限制；相反退休年齡越晚則較不能容忍風險而給予較小的尾端風險限制。而本研究 $g(T)$之設定能使得「損失大於 VaR_T75 平均延後退休年齡」落在 75-80 之間。

上述式子直觀上而言是希望能夠有效控制尾端風險，避免投資結果之尾端風險過於嚴重。從另一個角度來想，有效控制尾端風險大小其功效就等同於能夠減少過晚退休的可能性。$g(T)$為遞減函數之設定意同於希望能越早退休之投資者必須面對較晚退休可能性增加，本文以線性遞減函數作為風險控管之依據。如(表十五)結果顯示，在 $g(T)$限制下各預期退休年齡其損失大於 VaR_T75 平均延後退休年齡介於 75-80 之間，可得知欲越早退休其相對愈承受延後退休風險越大。因此，接下來探討員工在設定退休年齡為 50-70 歲之間，其資產配置導致的報酬率以及風險大小。

二、 單期定期重新調整投資比重策略之數值結果

(表十五)比較了在不同退休年齡下，其投資組合的差異、報酬率、面臨的臨界風險以及在損失(X_T)大於 VaR_T75 下平均延後退休年齡。所謂「損失大於 VaR_T75 平均延後退休年齡」意指在預期退休年齡 T 下最大可能損失之資產平均價值 $\hat{F}_T=E[F_T|X_T>VaR_T75]$，必須延後退休年齡 τ 使得資產價值能滿足退休金需求，即 $\hat{F}_{T+\tau}=L_{T+\tau}$。舉個例子來說，投資者設定在 50 歲退休。在目標函數(14)設定下其最適資產配置比例為股票 91.408%、債券 8.5917%。年平均報酬率 14.777%，$CTE_{50}75$ 到達臨界 $0.9L_{50}$。因此預期在 50 歲退休的投資人會以高風險高報酬的投資策略進行資產配置。在 50 歲所累積的平均最大損失資產為 $\hat{F}_{50}=E[F_{50}|X_{50}>VaR_{50}75]$，則必須延後至 77 歲退休才能使資產累積足夠應付退休需求，即 $\hat{F}_{50+22}=L_{50+22}$。

表十四 最佳化單期固定比例混合投資組合與其投資績效

退休年齡 T	股票	債券	Return(%)	$g(T)=CTE_T75/L_T$	損失大於 VaR_T75 平均延後退休年齡
50	0.91408	0.085917	14.777	0.9	77
51	0.87517	0.12483	14.355	0.885	76
52	0.82046	0.17954	13.72	0.87	76
53	0.78913	0.21087	13.348	0.855	76
54	0.77015	0.22985	13.124	0.84	76

55	0.72496	0.27504	12.634	0.825	75
56	0.69447	0.30553	12.278	0.80988	75
57	0.67613	0.32387	12.086	0.795	76
58	0.67297	0.32703	12.047	0.78054	76
59	0.65827	0.34173	11.91	0.76512	76
60	0.64561	0.35439	11.77	0.75	76
61	0.6093	0.3907	11.351	0.735	76
62	0.59371	0.40629	11.177	0.72	76
63	0.57929	0.42071	11.01	0.705	77
64	0.57498	0.42502	10.947	0.68953	78
65	0.56559	0.43441	10.809	0.67488	78
66	0.55138	0.44862	10.652	0.66	78
67	0.52618	0.47382	10.345	0.64331	79
68	0.54233	0.45767	10.542	0.62887	79
69	0.54827	0.45173	10.615	0.615	80
70	0.52199	0.47801	10.306	0.6	80

(表十四)結果可得知，投資人寄望越早的退休年齡勢必用越高風險的投資策略以達到目的，能帶來較高的報酬率使得退休可能性增加但也給予較大的風險使得尾端風險資產必須要延後退休。(表十四)呈現預期退休年齡從 50 歲至 70 歲之資產配置。結果發現，越晚退休年齡之資產配置呈現越保守狀況相對地越早退休年齡則呈現越積極的資產配置。由於退休年齡越晚投資期間相對越長因此可用較保守的投資策略來達到目的；而退休年齡越早則必須很積極的投資策略才能達到預期目標價值。

三、多期定期重新調整投資比重策略之數值結果

單期與多期資產配置最大差異在於多期投資比重在整個投資期間並非一成不變，隨著時間改變投資比重，期望可以透過彈性的調整，達到提高整體之投資報酬率和降低投資風險的目的。本研究使用每 5 年調整一次投資比重。採用每 5 年之原因在於若每年做比例調整時，會使得決策變數之數量倍增而導致技術面如演算法執行上有所困難；另一原因是由於資產配置比例改變的時間長短為 5 年與 1 年時其影響效果有限。例如在對 40 年期作資產配置時，40 年每年資產配置皆相同與每 20 年作資產配置比例變更其效果將會非常顯著。若每 5 年作比例變更，在投資標的只有兩種情況底下所產生之決策變數為 16 個；若每年做比例變更則產生 80 個決策變數，這對於演算法執行上以及效果上皆產生莫大的負荷。

由(表十五)可發現，在最佳化多期投資組合中，投資策略呈現生命週期基金的投資方式。這是為了提升報酬率以及降低到期風險所構成的最適投資策略。而退休年齡越晚所呈現「top-down」的趨勢越明顯，是因為退休年齡越晚而拉長了投資期間使得報酬率不必要太高就能達到目標給付。

表十五 最佳化多期投資組合之股票比例

退休年齡	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70
50	**1**	1	1	1	0.92233	0.85424	NaN	NaN	NaN	NaN
51	1	1	1	0.98347	0.84689	0.85763	0.76136	NaN	NaN	NaN
52	1	1	0.98964	0.98773	0.8125	0.76048	0.6634	NaN	NaN	NaN
53	1	1	1	1	0.77027	0.76712	0.56627	NaN	NaN	NaN
54	1	1	1	0.94779	0.74332	0.75455	0.625	NaN	NaN	NaN
55	1	1	1	0.91163	0.67657	0.71373	0.61069	NaN	NaN	NaN
56	1	1	1	0.99574	0.9435	0.8914	0.73158	0.74112	NaN	NaN
57	1	1	1	0.99206	0.79856	0.87129	0.73733	0.66369	NaN	NaN
58	1	1	1	1	0.75	0.76129	0.65505	0.62874	NaN	NaN
59	1	1	0.98238	0.95628	0.69863	0.6787	0.59633	0.59603	NaN	NaN
60	1	1	0.9845	0.90323	0.63934	0.65217	0.57143	0.50222	NaN	NaN
61	1	1	1	0.94975	0.56204	0.70189	0.54667	0.46859	0.50456	NaN
62	1	1	1	0.9375	0.51471	0.68954	0.52734	0.50239	0.48596	NaN
63	1	1	0.99583	0.92683	0.58562	0.5988	0.56828	0.50296	0.42712	NaN
64	1	1	1	0.89085	0.5817	0.76797	0.47475	0.46988	0.50207	NaN
65	1	0.99505	1	0.91379	0.69767	0.59195	0.50119	0.51136	0.30159	NaN
66	1	1	0.99535	0.91367	0.56264	0.68358	0.43562	0.43096	0.48429	0.35676
67	1	1	1	0.92188	0.48643	0.78229	0.58084	0.41126	0.38889	0.41489
68	1	1	1	0.91667	0.51351	0.84733	0.46309	0.51991	0.32	0.44072
69	1	1	1	0.79937	0.91139	0.77358	0.57311	0.34857	0.35955	0.4625
70	1	1	1	0.82653	0.64141	0.75294	0.5285	0.56561	0.45455	0.46237

表十六 最佳化多期投資組合投資績效表

退休年齡	Return(%)	$CTE_T 75/L_T$
50	15.357	0.9
51	15.138	0.88498
52	14.759	0.87
53	14.538	0.85498

54	14.345	0.83999
55	14.03	0.82499
56	14.917	0.81
57	14.556	0.7949
58	14.161	0.78
59	13.736	0.76498
60	13.347	0.74995
61	13.235	0.73497
62	13.081	0.71999
63	12.978	0.70492
64	12.953	0.68992
65	12.659	0.67492
66	12.544	0.65999
67	12.561	0.64487
68	12.521	0.62965
69	12.695	0.61495
70	12.656	0.59987

我們單針對預定 65 歲退休之投資人作一探討。在不引用最佳化概念時，投資人隨意選取靜態投資組合，股票比例從 100%-0%。若給予 g(T)之風險控管機制，可得知在靜態投資組合中股票介於 50%-60%是對投資者對理想的投資組合。但從動態投資組合角度來看，動態投資組合是有可能達到高報酬，低風險的效果。以(表十五)結果之 65 歲動態投資組合與任意靜態投資組合來做一比較，結果如(表十七)。可得知除非靜態投資組合所承受風險比最佳化動態投資組合來的大才有可能使得靜態投資組合報酬率來的較佳，否則最佳化動態投資組合是能達到報酬率較高以及風險較低的效果。

表十七 退休年齡 65 下單期投資組合與最佳化多期投資組合比較

投資組合	單期投資組合報酬率與最佳化多期投資組合報酬率兩者之差	單期投資組合風險($CTE_T 75/L_T$)與最佳化多期投資組合風險兩者之差
股票:100%	＋	＋
股票:90%	＋	＋
股票:80%	＋	＋
股票:70%	－	＋
股票:60%	－	＋
股票:50%	－	＋

股票:40%	—	—
股票:30%	—	—
股票:20%	—	—
股票:10%	—	—
股票:0%	—	—

由(表十七)可知最佳化多期投資組合不論在報酬率以及風險承受度上皆能優於股票比例落在 50%-70%之單期投資組合。例如股票債券比例為：(70%、30%)，(60%、40%)。由數值模擬結果可知其平均報酬率分別為 12.403%，11.217%，$CTE_T 75/L_T$ 分別為 0.73418，0.69215；而多期投資組合在 65 歲可達到12.659%報酬率，$CTE_T 75/L_T = 0.67492$。意味著除非單期投資策略要承受更大的風險才有可能使得報酬率比多期投資策略來的高，否則多期投資策略較單期投資策略能帶來更大的報酬率以及較小的到期風險。

因此，研究結果得知最佳化之多期定期重新調整投資比重法能較單期方式帶來更高的報酬以及較低的風險。這是因為多期投資策略較單期更有彈性地控制每期資產投資比重，使得投資人在預期退休年齡能擁有較高的報酬率以及較低的到期風險。注意的是本研究上述結果之產生很大原因在於 g(T)之設定。本研究 g(T)設定之結果導致最佳化多期投資組合能優於單期投資組合其股票比例為50%-70%之情況。g(T)可視為投資人之風險偏好程度，若改變 g(T)之設定則會產生不同之最佳化動態投資組合優於靜態投資組合之投資範圍。但可以確定的是，不論 g(T)之設定如何，多期投資組合必然會存在某投資範圍其投資績效皆優於單期投資組合。

四、多期定期重新調整投資比重法與多期買進並持有策略之比較

在本節我們比較多期定期重新調整投資比重法與多期買進並持有策略的差異。數值結果顯示此兩種策略之資產配置的方式是完全不相同的。舉個例子來說，20 歲員工設定 65 歲欲退休，希望能在提撥率 6%情況下達到三分之二所得替代率。分別使用多期定期重新調整投資比重法與多期買進並持有策略來做資產累積的策略；也同樣使用(4)式作為最佳化的目標函數，其資產配置結果如下。

表十八 多期定期重新調整投資比重法 在(4)式目標函數，65 歲退休年齡之最適資產配置

時間	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65
股票	1	0.99505	1	0.91379	0.69767	0.59195	0.50119	0.51136	0.30159

債券	0	0.00495	0	0.08621	0.30233	0.40805	0.49881	0.48864	0.69841

表十九 多期買進並持有策略 在(4)式目標函數，65 歲退休年齡之最適資產配置

時間	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65
股票	0	0	0	0	0.5188	1	0.9536	0.5219	0.7852
債券	1	1	1	1	0.4812	0	0.0464	0.4781	0.2148

(表十八)與(表十九)呈現在同樣提撥率同樣目標函數底下，不同投資策略對於資產配置的影響。由表 7 我們得知，多期定期重新調整投資比重法越接近退休時點風險性資產部位會降低，取而代之的是保守型資產。呈現所謂「top-down」的投資方式。這是因為在期初時我們要擁有較高的報酬以支付未來的目標退休金額，越接近到期日保守型資產部位增加這是為了減少到期給付的風險。結果與實務上生命週期型態(lifestyle)投資方式呈現相同的現象。

至於多期買進並持有策略底下呈現相反的投資組合結果。期初皆是保守型資產佔大部分比重，而接近到期日風險型資產部位比重反而提升，呈現所謂「down top」的投資方式。此乃因為多期買進並持有策略只對提撥金額對資產配置。若在期初皆把提撥金額放入高風險資產中，由於配置後的資產不再作任何變更則導致在到期日時退休金會有很大的變異情況產生。為了避免此情況產生，在期初保守型資產佔大部分比重是為了降低退休金到期給付風險；而隨著接近到期日再對新進提撥金額給予較高風險的投資以便達到較高的獲利。

捌、 結論與建議

根據本文的研究結果發現，在採用英國 Wilkie 投資模型時，當預期給付目標為達到一定之所得替代率時，不管採用哪一種目標函數時，越接近到期日指數連結型債券持有的比例將會是最多的，會造成此種現象乃起於確定提撥制下負債的型式受薪資水準波動的影響，以及由 Wilkie 投資模型模擬的薪資水準與通貨膨脹有強烈之連結性之故，所以此時會持有較多比例的指數連結型債券以反應薪資水準及通貨膨脹的影響；而長期債券持有比例將會隨著到期日的接近而減少；現金持有的比例在最後幾年有增加的趨勢，應是為了減少到期給付風險的緣故；至於股票的持有比例則一直都是相當平穩，持有的比例一直都不會有太大的變化，這樣的結果與 Vigna & Haberman (2001) 文中的結果與實務上生命週期型態(lifestyle)投資方式呈現相同的現象。另外在本文每年調整投資組合的策略下，因為調整次數不多，所以在考慮交易成本的情況下，當以實際情況設定交易成本時，對於整體的最適化資產配置與最適化提撥率的影響是很小的，且幾乎是可以忽略的。在本文的調整投資組合策略下，交易成本的影響只有在交易成本非

常大且實際上不可能發生的情況下才有較明顯的變化。

本研究在第二個部份採用台灣資料的投資模型，並藉由模擬最佳化的方式探討在各個不同之預期退休年齡下所需的最適資產配置。由於一般套裝軟體最佳化的程式常常會面臨掉入區域解的問題，因此本文採用基因演算法尋求資產配置之最佳解，改善以往演算法最佳化過程中掉入非最佳解的窘境。在本文中，我們發現透過多期調整資產配置之投資方式，的確可以比單期之靜態投資策略有效的提高報酬率或是降低投資風險，不同風險偏好的投資者都可透過最佳化的求解過程，找到其最適的投資策略。另外，文中亦發現最適之定期重新調整投資比重的投資方式，呈現如同生命週期之〝top-down〞的投資策略，當預期給付目標為達到一定之所得替代率時，如果目標函數有包含累積的資產要達到此預期給付目標的性質時，則越接近到期日時，股票的投資比重將逐漸下降，而債券持有的比例則會隨著到期日的接近而有增加的趨勢，以利於減少到期的給付風險。另外，本文有一個新的研究發現，在最佳化之買入並持有的投資方式下，研究結果顯示投資者應採取與生命週期反向之〝Down-Top〞的投資策略。

附錄

本篇所使用之投資模型，其參數估計使用過去以往資金之歷史資料，資料來源 TEJ 資料庫。基金的選擇為存在 10 年以上的基金，三大類型基金各自挑選存活 10 以上之基金。股票型基金之挑選方式為將 30 筆股票型基金 10 年報酬率排序後，以排名 3 名為間隔挑選基金，在將挑選出的基金加以平均當作本文股票型基金之報酬與變異。平衡與債券型基金存活 10 年以上之個數無股票型基金來的多，因此挑選前 5 名平均做為參考資料。其資料如下表：

附表 1：各類型基金與兩年期定存在 1996～2005 年之報酬率與標準差(%)

	股票型	債券型	兩年期定存
1996	54.727	5.82	6.7
1997	37.301	5.83	5.95
1998	-18.737	6.16	6.1
1999	74.138	5.06	5.4
2000	-27.711	4.97	5
2001	9.9092	4.47	5.05
2002	-23.486	2.76	2.3
2003	23.352	1.87	1.65
2004	-8.6827	1.55	1.475

2005	32.342	1.32	1.675
平均值	15.315	3.98	4.13
標準差	34.917	1.91	2.097

資料來源：台灣經濟新報 TEJ 資料庫

附表 2：各類型基金與兩年期定存之相關係數矩陣

	股票型	債券型	兩年期定存
股票型	1	0.147	0.257
債券型	0.147	1	0.9848
兩年期定存	0.257	0.9848	1

參考文獻

1. Back, T.H., 1996, Evolutionary algorithms in theory and practice. New York: Oxford University Press.

2. Basak, S., and Shapiro, A., 2001, “Value-at risk-based risk management: optimal policies and asset prices,” *The Review of Financial Studies*, 14, 371-405.
3. Battocchio, P., and Menoncin, F., 2004, “Optimal pension management in a stochastic framework,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 79-95.
4. Black, F., and Litterman, (1991), "*Asset allocation: Combing Investors View with Market Equilibriu*m."　Journal of Fixed Income, September.
5. Blake, David, Carins, Andrew J. G., and Dowd, Kevin, 2001, “Pensionmetrics：stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase,” *Insurance：Mathematics and Economics*, 29, 187-215.
6. Brianton, G., (1998), "*Portfolio optimization*" Risk Management and Financial Derivatives: A Guide to the Mathematics, 1st edition, Palgrave(trade).
7. Chang, S.C., (1999), "*Optimal Pension Funding Through Dynamic Simulations: the Case of Taiwan Public Employees Retirement System.*" Insurance: Mathematics and Economics, 24, 187-199.
8. Chopra, V.K., and Ziemba, W.T., (1993), "*The effect of errors in Means, Variances and Covariances on Optimal portfolio Choice*." Journal of Portfolio Management, Vol. 19, Iss. 2, p6-12.

9. Cuoco, D., and Cvitanic, J., 1998, “Optimal consumption choices for a ‘large’ investor,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 401-436.
10. Devolder, P., Princep, M.B., and Fabian, I.D., 2003, “Stochastic optimal control of annuity contracts,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 227-238.
11. Donohue, C., and Yip, K., (2003), "*Optimal portfolio rebalancing with transaction costs.*" Journal of Portfolio Management, Vol. 29, Iss. 4, p49-92.
12. Edesess, Michael, and Hambrecht, George A., (1980), "*Scenario Forecasting: Necessity, Not Choice.*" Journal of Portfolio Management, Vol. 6, Iss. 3, p10.
13. Farrell, James L., Jr. (1989), "*A Fundamental Forecast Approach Superior Asset Allocation.*" Financial Analysts Journal, Vol. 45, Iss. 3, p32-38.
14. Fong, H.G., and Fabozzi, F.J., (1988), "*Asset Allocation Optimization Models.*" In Arnott, Robert D., Frnak J, Fabozzi,eds., Asset allocation: A Handbook of Portfolio Policies, Strategies & Tactics, Chicago: Probus.
15. Gerrard, R., Haberman, S., and Vigna E., 2004, “Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 321-342.
16. Haberman, S., and Sung, J.H., (1994), "*Dynamic Approaches to Pension Funding.*" Insurance: Mathematics and Economics**,** 15, p151-162.
17. Haberman, S., and Sung, J.H., 2005, “Optimal pension funding dynamics over infinite control horizon when stochastic rates of return are stationary,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 103-116.
18. Haberman, S., and Vigna, E., 2002, “Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes,” *Insurance mathematics and Economics*, 31:35-69.
19. Hipp, C., and Taksar, M., 2000, “Stochastic control for optimal new business,” Insurance: Mathematics and Economics, 26, 185-192.
20. Holland, J. H., 1975, Adaptation in Natural and Artificial Systems. University of Michigan Press: Ann Arbor, MI.
21. Koskrosidis, Y.A., and Duarte, A.M., (1997), “*A Scenario-Based Approach to Active Asset Allocation*.” The Journal of Portfolio Management, Winter.
22. Josa-Fombellida, R., and Rincon-Zapatero, JP., 2004, “Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds,” *Insurance: Mathematics and Economic*s, 34, 489-503.
23. Lioui, A, and Poncet, P., 2001, “On optimal portfolio choice under stochastic interest rates,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 1841-1865.
24. Markowitz, H.M., 1959, Portfolio Selection: Efficient Diversification of

Investment [M]. New York: John Wiley & Sons.
25. Markowitz, H.M., (1952), "*Portfolio Selection*" Journal of Finance, March, p77-91.
26. Merton, R.C., 1971, “Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model,” *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413. Erratum: ebenda , 6 (1973), 213-214.
27. Michalewicz, Z., 1999, Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. 3rd Edition, Springer..
28. Michalewicz, Z., and Fogel, D.B., 2002, How to Solve It: Modern Heuristics. Springer .
29. Plaxco, Lisa M. and Arnott, Robert D, 2002, “Rebalancing a Global Policy Benchmark,” *Journal of Portfolio Management*, 28(2), 9-22.
30. Pollin, R., and Schaberg, M., and Baker, D., (2003), "*Security Transactions Taxes for U.S. Financial Markets.*" Political Economy Research Institute, Eastern Economic Review, October 2003.
31. Sharpe, W.F., and Tint L.G., 1990, “Liabilities: a new approach,” *Journal of Portfolio Management*, 16, 5-10.
32. Sherris, M., 1992, “Portfolio selection and matching: A synthesis,” *Journal of the Institute of Actuaries*.119(1) :87-105.
33. Tobin, James, (1996), "*Prologue*" The Tobin Tax: Coping with Financial Volatility, New York: Oxford University Press, ix – xviii.
34. Vigna, E., and Haberman, S., (2001), "*Optimal Investment Strategy for defined contribution pension schemes.*" Insurance mathematics and Economics, 28, p233-262.
35. Wilkie, A.D., (1986), "*A Stochastic Investment Model for Actuarial Use.*" Transactions of the Faculty of Actuaries, 39, p341-403.
36. Wilkie, A.D., (1995), "*More on a stochastic asset model for actuarial use.*" British Actuarial Journal, 1, p777-964.
37. Wise, A.J., (1984a), “*A theoretical analysis of the matching of assets to liabilities.*” Journal of the Institute of Actuaries, 111 (Part II): 375-402.
38. Wise, A.J., (1984b), “*The matching of assets to liabilities.*” Journal of the Institute of Actuaries, 111 (Part II): 445-501.
39. Wise, A.J., (1987a), “*Matching and Portfolio Selection: Part 1.*” Journal of the Institute of Actuaries, 114: 113-133.
40. Wise, A.J., (1987b), “*Matching and Portfolio Selection: Part 2.*” Journal of the Institute of Actuaries, 114: 551-568.

41. Yiu, K.F.C., 2004, "Optimal portfolios under a value-at risk constraint," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 1317-1334.