國立政治大學應用數學系
碩士學位論文
指導教授: 張宜武 博士

棋盤著色和完全二分圖之單色子圖

The coloring of a checkerboard and the monochromatic subgraphs of a complete bipartite graph

碩士班學生: 林子軒 撰
中華民國102年6月27日

目次

Abstract

In this paper, we study the two edge-coloring of $K_{m,n}$ such that $K_{m,n}$ contains a monochromatic subgraph $K_{2,s}$ or $K_{3,s}$. We find the relation between n, s by investigating a two coloring of a checkerboard .

keywords: Complete bipartite graph; Monochromatic subgraph.

中文摘要

在本篇論文中, 藉由長方形棋盤著色探討完全二分圖 $K_{m,n}$ 由兩種顏色任意著邊, 使得此兩色著邊之完全二分圖 $K_{m,n}$ 會包含單色子圖 $K_{2,s}$ 與 $K_{3,s}$ $(s \geq 2)$, 我們將討論參數 n 與 s 須滿足何種關係。

關鍵字: 完全二分圖; 單色子圖。

第一章　緒論

1　研究動機

在高中數學競賽, 常會遇見一些趣味數學問題, 給下列兩個例子。

例一: 證明在至少有六個人參加之任一集會上, 在與會者中有三個人以前相互認識, 或者有三個人以前彼此不認識 [4]。

例二: 證明用黑白兩種顏色去著一個 4×7 棋盤上的每個方格, 每個方格著色而且只著一種顏色, 不論如何著色, 4×7 棋盤上一定有一個由方格組成的矩形, 它的四個角上的方格顏色相同。而對於一個 4×6 棋盤, 一定有一種著色方式, 使得棋盤上每一個由方格組成的矩形, 它的四個角上的方格不全同色 [5]。

例一我們用圖論方式給予證明。具有 n 個頂點且其中任意一對頂點都有邊相連的圖, 稱爲 n 階完全圖, 記作 K_n。

對六人集會問題, 令 K_6 之頂點代表與會者, 若兩名與會者相互認識, 則將 K_6 中對應的邊著上紅色, 反之不認識著上藍色。於是這種題意可以改爲: 把 K_6 的每一邊任意著上紅色或藍色後, K_6 中含有各邊均是紅色之單色 K_3 子圖, 或者含有藍色之單色 K_3 子圖 。假設 K_6 中六個頂點 a, b, c, d, e, f 現從某一頂點 a 出發, 則它連出之五條邊中必有三條, 令 ab, ac, ad 同色, 假設爲紅色。再看這三條邊所對應的三個端點 b, c, d, 若它含有一條紅色的邊, 令 bc, 則 K_6 中含有紅色之單色 K_3 子圖 abc, 否則 K_6 含有藍色之單色子圖 bcd。由上述得知, 若 $n > 6$, K_n 結論仍成立。但 $n < 6$, 則 K_n 結論不會成立。

對給於整數$p, q \geq 2$, 當每一條邊任意著上紅色或藍色後, 在 K_n 含有紅色單色 K_p 子圖, 或者含有藍色單色 K_q 子圖。若對任一整數 $n \geq n_0$ 且 K_n 也具有這種性質, 則稱 n_0 爲 $Ramsey$ 數, 記作 $R(p, q)$, 所以 $R(3, 3)$=6[2]。

例二爲本篇論文將介紹處理棋盤著色問題的一般方法和技巧, 以及透過棋盤如何將棋盤轉化成圖論問題, 並且將它推廣。

簡單來說, 使用兩種顏色著邊, 例一爲完全圖 K_n 產生單色子圖, 例二爲完全二分圖 $K_{m,n}$ 產生單色子圖。

2 研究目的

藉由長方形棋盤著色探討完全二分圖 $K_{m,n}$ 由兩種顏色任意著邊, 使得此兩色著邊之完全二分圖 $K_{m,n}$ 會包含單色子圖 $K_{2,s}$ 與 $K_{3,s}$ $(s \geq 2)$, 我們將討論參數 n 與 s 須滿足何種關係。

第二章　介紹

1　介紹

將棋盤方格 (規定: 棋盤列數等於或小於行數) 轉換成二分圖的邊, 棋盤的列數, 行數分別爲二分圖 X 集合, Y 集合頂點的個數。

X集合中 x_i 頂點與 Y 集合中 y_j 頂點均相連, 稱作: 完全二分圖。
且 完全二分圖 x_iy_j 邊表示棋盤第 i 列第 j 行之方格, $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$[5]。

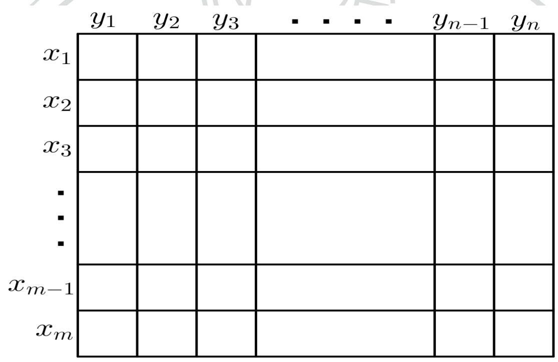


Figure 1: $m \times n$棋盤圖 $(m \leq n)$

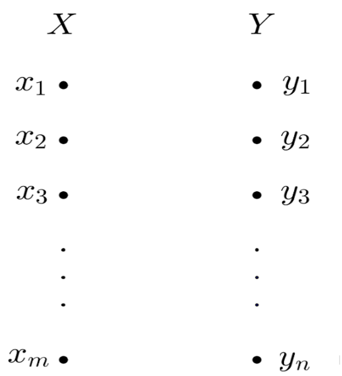


Figure 2: 二分圖

若棋盤著色, 第 i 列第 j 行上之方格著上黑色, 對應完全二分圖 x_iy_j 邊亦著上黑色, 其餘以此類推。所以, 2色 $m \times n$ 棋盤對應 2色 $K_{m,n}$, 四角單色矩形之四角對應單色 $K_{2,2}$。

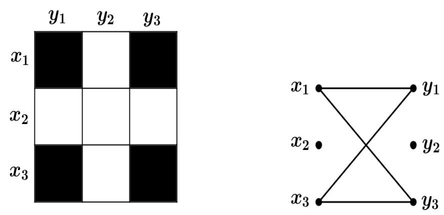


Figure 3: 四角單色矩形之四角對應單色 $K_{2,2}$

2 相關定義

定義 1. **二分圖**: 圖 $G = (V, E)$, 其中 V 爲圖 G 之頂點集合,E 爲圖 G 之邊集合。若存在 V 的一個分割 $V = X \cup Y$ 且 $X \cap Y = \varnothing$ 使得對於所有 $uv \in E$(同一個集合內的頂點不相連), $u \in X$ 且 $v \in Y$, 則稱 G 爲二分圖。

定義 2. **完全二分圖**: 圖 $G = (V, E), V = X \cup Y$ 爲一個二分圖, 使得對於任意兩個頂點 $u \in X$ 和 $v \in Y$, uv 相連均爲 G 中的一條邊, 則稱 G 爲完全二分圖。$|X| = m$ 且 $|Y| = n$ 之完全二分圖記爲 $K_{m,n}$。

定義 3. **2色完全二分圖**: 令圖 G 爲一個完全二分圖。若 G 由兩種顏色任意著邊, 則稱爲 2色完全二分圖。

定義 4. **子圖**: 若 G 和 G' 爲兩個圖且 $V(G') \subseteq V(G)$,$E(G') \subseteq E(G)$, 則稱 G' 爲 G 之子圖。

定義 5. **四角單色矩形**: 在棋盤中, 任意一個四角顏色均爲同色之矩形, 稱爲四角單色矩形。

定義 6. s-**四角單色矩形**: 在棋盤中, 任意一個矩形, 恰有 s 行, 它的最上與最下方格均爲同色, 稱爲 s-四角單色矩形。(*i.e.* 2-四角單色矩形即爲四角單色矩形。)

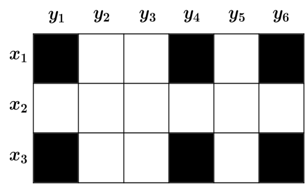


Figure 4: 3-四角單色矩形

定義 7. **六角單色矩形**: 一棋盤有 i 列 j 行 $(i, j \geq 3)$, a_{ij} 表示爲棋盤第 i 列第 j 行上之方格。若 $a_{11}, a_{1j}, a_{k1}, a_{kj}, a_{i1}, a_{ij}$ 均同色 (其中$k \in \mathbb{N}$ 且 $1 < k < i$), 則稱爲六角單色矩形。

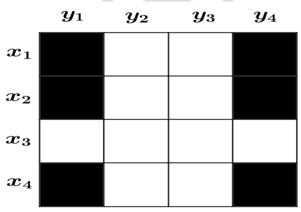


Figure 5: 六角單色矩形

定義 8. s-**六角單色矩形**: 若棋盤爲 i 列 j 行之六角單色矩形, 且恰有 s 行, 棋盤上$a_{11}, a_{1n_1}, \cdots, a_{1n_{(s-2)}}, a_{1j}; a_{k1}, a_{kn_1}, \cdots, a_{kn_{(s-2)}}, a_{kj}; a_{i1}, a_{in_1}, \cdots, a_{in_{(s-2)}}, a_{ij}$ 均爲同色 ($k \in \mathbb{N}$, $1 < k < i$; $n_1, \cdots, n_{(s-2)} \in \mathbb{N}$, $1 < n_1 < \cdots < n_{(s-2)} < j$), 則稱爲 s-六角單色矩形。

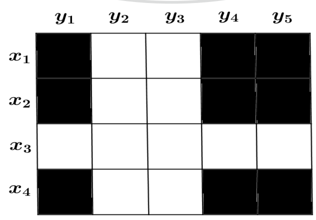


Figure 6: 3-六角單色矩形

3 相關定理

定理 1. **鴿籠原理**: 將 $n+1$ 個元素分爲 n 個集合, 則至少會有一個集合包含 2 個元素 [1]。

證明. 將 $n+1$ 個元素分爲 n 個集合$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$, 記 $a_i = |A_i|$ 表示爲集合 A_i 中之集合個數, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$。
假設 $\forall a_i < 2, i = 1, 2, \cdots\cdots, n$
因爲 $a_i \in \mathbb{Z}$, 所以 $a_i \leq 1$,
則 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \leq 1 + 1 + \cdots\cdots + 1 = n < n+1$, 矛盾。 □

定理 2. **柯西不等式**: 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均爲實數, 則
$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$。
等號成立時, $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots\cdots = a_n : b_n$。

證明. 令$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$
由向量內積公式,$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$($\theta$爲$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之夾角)
$\Rightarrow (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 = |\overrightarrow{a}|^2 \cdot |\overrightarrow{b}|^2 \cdot \cos^2\theta$
$\Rightarrow (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 \leq |\overrightarrow{a}|^2 \cdot |\overrightarrow{b}|^2$且等號成立於$|\cos\theta| = 1$
$\Rightarrow \overrightarrow{a} // \overrightarrow{b}$
所以$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$
且等號成立時
$\overrightarrow{a} // \overrightarrow{b} \Rightarrow a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots\cdots = a_n : b_n$。 □

第三章　棋盤著色討論 s-四角單色矩形

1　棋盤著色討論四角單色矩形

將棋盤列數分為 2、3、4、5 **給予討論。**

當 m(棋盤列數)=2 時, 給定兩種顏色

① 若至少有 2行均爲同色, 則棋盤恆產生 s-四角單色矩形 ($s \geq 2$)。

② 若第一列與第二列顏色交錯, 則棋盤恆不會產生四角單色矩形。

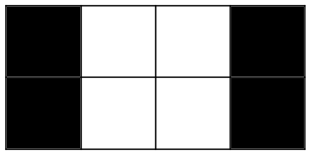


Figure 1: 棋盤內2行均爲同色, 則棋盤恆產生四角單色矩形

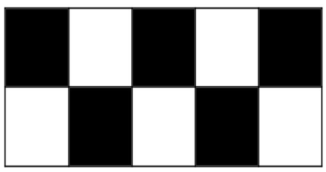


Figure 2: 棋盤內第一列與第二列顏色交錯, 則棋盤不會產生四角單色矩形

故 m=2 之情形不予證明。

引理 1. 當 m(棋盤列數)=3 時, 給定兩種顏色

① 2色 3×7 棋盤, 不論如何著色, 一定含有四角單色矩形。

② 2色 3×6 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形。

證明. ① 由鴿籠原理得知, 2色 3×7 棋盤兩種顏色不論如何著色, 至少有4行, 每行某一顏色方格至少有2個。不失一般性, 令2色 3×7 棋盤前4行中, 每行黑格皆

爲2個, 令 d_i 爲棋盤上第 i 行中黑格個數, $i = 1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 2$

假設2色 3×7 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形, 將這前4行的黑格, 全部平移至第一行, 則黑格不會重疊。由鴿籠原理得知,

$$C_2^{d_1} + C_2^{d_2} + C_2^{d_3} + C_2^{d_4} \leq C_2^3$$

$$C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 \leq C_2^3$$

$4 \leq 3$ 矛盾。

所以, 2色 3×7 棋盤, 不論如何著色, 一定含有四角單色矩形。 □

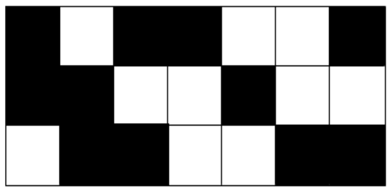


Figure 3: 2色 3×7 棋盤不論如何著色一定含有四角單色矩形

② 由圖得知, 2色 3×6 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形。

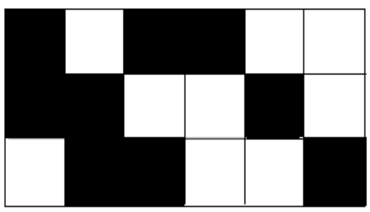


Figure 4: 2色 3×6 棋盤存在一種著色方式不含四角單色矩形

引理 2. 當 m(棋盤列數)=4 時, 給定兩種顏色

① 2色 4×7 棋盤, 不論如何著色, 一定含有四角單色矩形。

② 2色 4×6 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形。

證明. ① 由 **引理** 1.1 得知,2色 3×7 棋盤, 不論如何著色, 含有四角單色矩形, 所以2色 4×7 棋盤, 不論如何著色, 一定含有四角單色矩形。 □

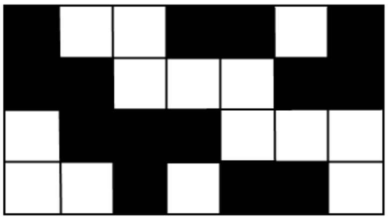


Figure 5: 2色 4×7 棋盤不論如何著色一定含有四角單色矩形

② 由圖得知,2色 4×6 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形。

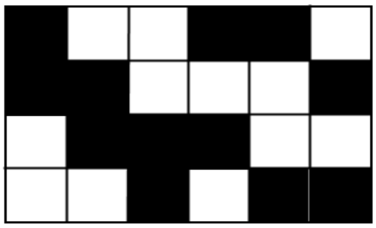


Figure 6: 2色 4×6 棋盤存在一種著色方式不含四角單色矩形

引理 3. 當 m(棋盤列數)=5 時, 給定兩種顏色

① 2色 5×5 棋盤, 不論如何著色, 一定含有四角單色矩形 [5]。

② 2色 5×4 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形。

證明. ① 由鴿籠原理得知,2色 5×5 棋盤不論如何著色, 使得棋盤中, 某一顏色方格至少有 $[\frac{5\times 5}{2}]+1=13$ 個。不失一般性, 令2色 5×5 棋盤共有13個黑格, d_i 爲棋盤上第 i 行黑格個數, $i=1,2,3,4,5$

$\Rightarrow d_1+d_2+d_3+d_4+d_5=13$

且 $C_2^{d_i}$ 爲第 i 行中上下兩端方格均爲黑格之長方形個數,$i=1,2,\cdots,5$。假設2

色 5×5 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形, 將這5行中, 每一行由上下兩頭均是黑格的長方形, 全部平移至第一行, 則黑格不會重疊。由鴿籠原理得知,

$$C_2^{d_1}+C_2^{d_2}+C_2^{d_3}+C_2^{d_4}+C_2^{d_5}\leq C_2^5$$
$$\frac{d_1(d_1-1)}{2}+\frac{d_2(d_2-1)}{2}+\cdots\cdots+\frac{d_5(d_5-1)}{2}\leq 10$$
$$(d_1^2+d_2^2+\cdots\cdots+d_5^2)-(d_1+d_2+\cdots\cdots+d_5)\leq 20$$
$$d_1^2+d_2^2+\cdots\cdots+d_5^2\leq 33$$

由柯西不等式

$$\frac{1}{5}(d_1+d_2+\cdots\cdots+d_5)^2\leq d_1^2+d_2^2+\cdots+d_5^2\leq 33$$
$$\frac{1}{5}\cdot 13^2\leq 33$$

$33.8\leq 33$ 矛盾。
所以, 2色 5×5 棋盤不論如何著色, 一定含有四角單色矩形。 □

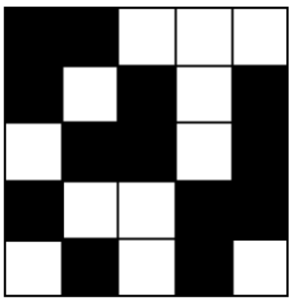


Figure 7: 2色 5×5 棋盤不論如何著色一定含有四角單色矩形

② 由 **引理** 2.2 得知,2色 5×4 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含四角單色矩形。

將引理1、2、3, 棋盤轉為圖論問題:

定理 1. 令 $m \leq n, m = 3, 4, 5$

1. 當 $m = 3$

   ① 若 $n > C_2^3 + C_1^3$, 2色 $K_{3,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,2}$子圖。

   ② 若 $n \leq C_2^3 + C_1^3$, 2色 $K_{3,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,2}$子圖。

2. 當 $m = 4$

   ① 若 $n > C_2^4$, 2色 $K_{4,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,2}$子圖。

   ② 若 $n \leq C_2^4$, 2色 $K_{4,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,2}$子圖。

3. 當 $m = 5$

   ① 若 $n \geq 5$, 2色 $K_{5,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,2}$子圖 [3]。

   ② 若 $n < 5$, 2色 $K_{5,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,2}$子圖。

證明. 如引理1、2、3所示。 □

2 棋盤圖轉換2色完全二分圖

將上述五個2色棋盤圖轉換成2色完全二分圖

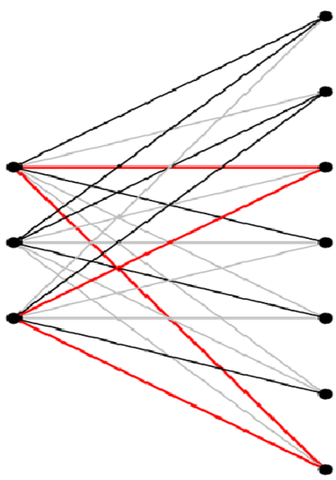


Figure 8: 2色 $K_{3,7}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,2}$子圖。

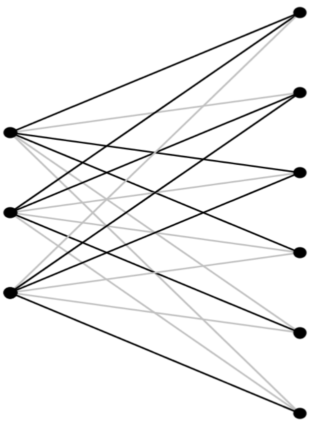


Figure 9: 2色 $K_{3,6}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,2}$子圖。

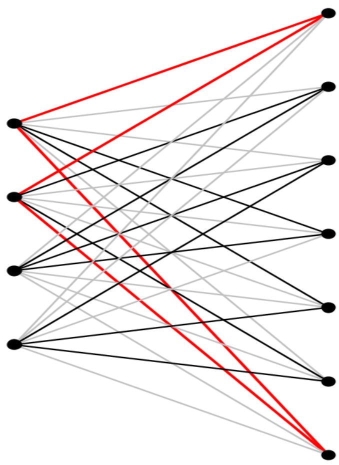


Figure 10: 2色 $K_{4,7}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,2}$子圖。

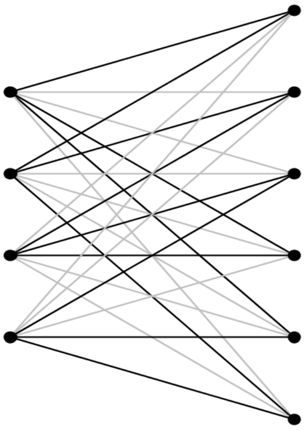


Figure 11: 2色 $K_{4,6}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,2}$子圖。

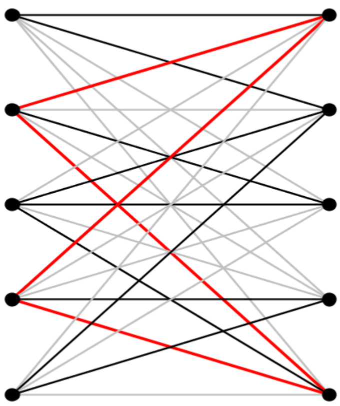


Figure 12: 2色 $K_{5,5}$ 不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,2}$子圖。

3 棋盤著色討論 s-四角單色矩形

引理 4. 當 m(棋盤列數)=5 時, 給定兩種顏色

① 2色 5×11 棋盤, 不論如何著色, 一定含有 3-四角單色矩形。

② 2色 5×10 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含 3-四角單色矩形。

證明. ① 由鴿籠原理得知,2色 5×11 棋盤不論如何著色, 使得棋盤中, 某一顏色方格至少有 $[\frac{5\times 11}{2}] + 1 = 28$ 個。不失一般性, 令2色 5×11 棋盤內共有28個黑格, d_i 為棋盤上第 i 行黑格個數, $i = 1, 2, \cdots\cdots, 11$

$\Rightarrow d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{11} = 28$

且 $C_2^{d_i}$ 為第 i 行中上下兩端方格均為黑格之長方形個數,$i = 1, 2, \cdots, 11$。假設2色 5×11 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含 3-四角單色矩形, 將這11行中, 每一行由上下兩頭均是黑格的長方形, 全部平移至第一行, 則黑格不會有2次重疊。由鴿籠原理得知,

$$C_2^{d_1} + C_2^{d_2} + \cdots\cdots + C_2^{d_{11}} \le 2C_2^5$$

$$\frac{d_1(d_1-1)}{2} + \frac{d_2(d_2-1)}{2} + \cdots\cdots + \frac{d_{11}(d_{11}-1)}{2} \le 20$$

$$(d_1^2 + d_2^2 + \cdots\cdots + d_{11}^2) - (d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{11}) \le 40$$

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots\cdots + d_{11}^2 \le 68$$

由柯西不等式

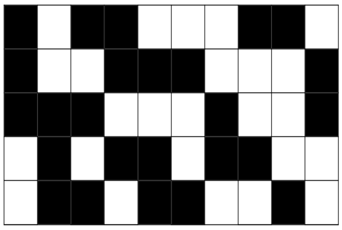
$$\frac{1}{11}(d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{11})^2 \le d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{11}^2 \le 68$$

$$\frac{1}{11} \cdot 28^2 \le 68$$

$71.27 \le 68$ 矛盾。

所以, 2色 5×11 棋盤不論如何著色, 一定含有 3-四角單色矩形。 □

② 由圖容易確認, 此2色 5×10 棋盤內沒有3行, 其最上與最下方格均為同色(黑色或白色), 故2色 5×10 棋盤存在一種著色方式不含 3-四角單色矩形。



5 × 10

Figure 13: 2色 5×10 棋盤存在一種著色方式不含 3-四角單色矩形

定理 2. 令 $m \leq n, m = 3, 4, 5, s \geq 2$

1. 當 $m = 3$

① 若 $n > (C_2^3 + C_1^3)(s-1)$, 2色 $3 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 s-四角單色矩形。

② 若 $n \leq (C_2^3 + C_1^3)(s-1)$, 2色 $3 \times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 s-四角單色矩形。

2. 當 $m = 4$

① 若 $n > C_2^4(s-1)$, 2色 $4 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 s-四角單色矩形。

② 若 $n \leq C_2^4(s-1)$, 2色 $4 \times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 s-四角單色矩形。

3. 當 $m = 5$

① 若 $n > (10s - 16)$, 2色 $5 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2s-2)$-四角單色矩形。

② 若 $n \leq (10s - 16)$, 2色 $5 \times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 $(2s-2)$-四角單色矩形。

③ 若 $n > (10s - 10)$, 2色 $5 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2s-1)$-四角單色矩形。

④ 若 $n \leq (10s - 10)$, 2色 $5 \times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 $(2s-1)$-四角單色矩形。

證明. 1. ① $m = 3, s \geq 2$, 取 $n = 6(s-1) + 1 = 6s - 5$ (只須證明棋盤最小行數 n), 由鴿籠原理得知, 2色 $3 \times n$ 棋盤不論如何著色, 至少有$[\frac{6s-5}{2}] + 1 = 3s - 2$ 行, 每行某一顏色方格至少有2個。不失一般性, 令此顏色爲黑色,2色 $3 \times n$ 棋盤前 $3s - 2$ 行, 每行黑格皆爲2個。令 d_i 爲棋盤上第 i 行中黑格個數,

$i = 1, 2, \cdots\cdots, (3s-2)$,

$\Rightarrow d_1 = d_2 = \cdots\cdots = d_{3s-2} = 2$

假設2色 $3 \times n$ 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含單色 s-四角單色矩形, 將這 $(3s-2)$ 行上之黑格, 全部平移至第一行, 則黑格不會有 $(s-1)$ 次重疊。由鴿籠原理得知,

$$C_2^{d_1} + C_2^{d_2} + \cdots\cdots + C_2^{d_{3s-2}} \leq (s-1) \cdot C_2^3$$

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots + 1}_{(3s-2)} \leq 3s-3$$

$$3s-2 \leq 3s-3$$

$1 \leq 0$ 矛盾

所以, 2色 $3 \times n$ 棋盤 $(n \geq 6s-5)$ 不論如何著色, 一定含有 s-四角單色矩形 $(s \geq 2)$。

② 由圖得知 (找棋盤最大行數 n),2色 $3 \times n$ 棋盤 $(n \leq 6s-6)$ 存在一種著色方式, 使得不含 s-四角單色矩形 $(s \geq 2)$。

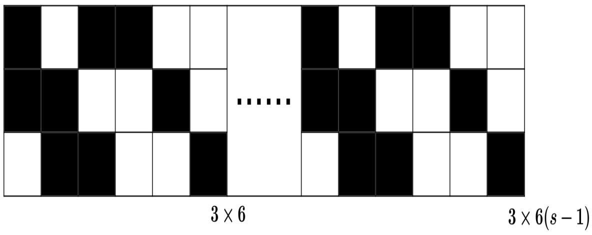


Figure 14: 2色 $3 \times 6(s-1)$ 棋盤圖

2. ① $m = 4, s \geq 2$, 取 $n = 6(s-1)+1 = 6s-5$ (只須證明棋盤最小行數 n), 由**定理** 2.1 得知,2色 $3 \times n$ 棋盤不論如何著色, 含有 s-四角單色矩形, 所以2色 $4 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 s-四角單色矩形。

② 由圖得知 (找棋盤最大行數 n),2色 $4 \times n$ 棋盤 $(n \leq 6s-6)$ 存在一種著色方式, 使得不含 s-四角單色矩形 $(s \geq 2)$。

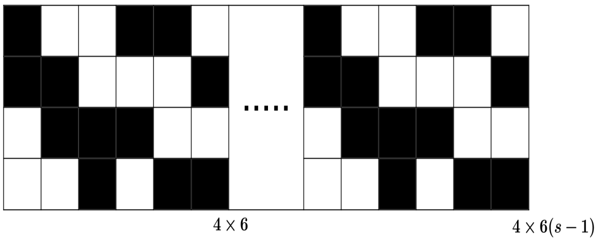


Figure 15: 2色 $4 \times 6(s-1)$ 棋盤圖

3. ① 利用數學歸納法證: 若 $n = (10s-16)+1 = 10s-15$ (只須證明棋盤最小行數 n), 2色 $5 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2s-2)$-四角單色矩形。

(a) 當 $s = 2$, 由 **引理** 3.1 得知,2色 5×5 棋盤不論如何著色, 一定含有四角單色矩形 成立。

(b) 設 $s = t$ 命題成立, $t \geq 2$且 $t \in \mathbb{N}$

2色 $5 \times (10t-15)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2t-2)$-四角單色矩形。

(c) 則 $s = t+1$ 時, $n = 10(t+1)-15 = 10t-5$, 在 2色 $5 \times (10t-5)$ 棋盤中, 將棋盤分爲前有 $(10t-15)$ 行, 後有10行。因爲, 2色 $5 \times (10t-15)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2t-2)$-四角單色矩形 (由數學歸納法 (b) 已知), 且由 **引理** 4.2 得知,2色 5×10 棋盤存在一種著色方式不包含 3-四角單色矩形, 但一定包含四角單色矩形。所以, 2色 $5 \times (10(t+1)-15)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有單色 $(2(t+1)-2)$-四角單色矩形。

由數學歸納法得知, 對於所有 $s \geq 2$且 $s \in \mathbb{N}$, 2色 $5 \times (10s-15)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2s-2)$-四角單色矩形。

② 由圖得知,2色 $5 \times (10s-16)$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 $(2s-2)$-四角單色矩形 $(s \geq 2)$。

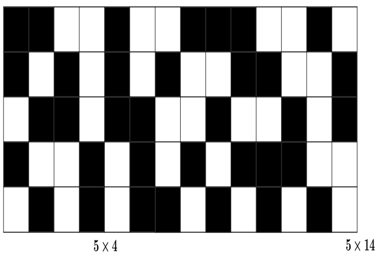


Figure 16: 2色 5×14 棋盤圖 $(s = 3)$, 存在一種著色方式不含 4-四角單色矩形。

③ 利用數學歸納法證: 若 $n = (10s-10)+1 = 10s-9$ (只須證明棋盤最小行數 n), 2色 $5 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2s-1)$-四角單色矩形。

(a) 當 $s = 2$, 由 **引理** 4.1 得知,2色 5×11 棋盤不論如何著色, 一定含有 3-四角單色矩形 成立。

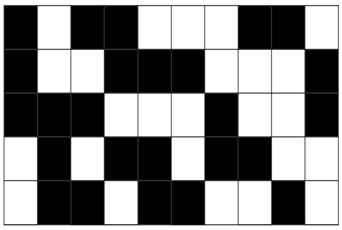
(b) 設 $s = t$ 命題成立, $t \geq 2$且 $t \in \mathbb{N}$

2色 $5 \times (10t-9)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有單色 (2t-1)-四角單色矩形。

(c) 則 $s = t+1$ 時, $n = 10(t+1)-9 = 10t+1$, 在2色 $5 \times (10t+1)$ 棋盤中, 將棋盤分爲前有 $(10t-9)$ 行, 後有10行。因爲, 2色 $5 \times (10t-9)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2t-1)$-四角單色矩形 (由數學歸納法 (b) 已知), 且由 **引理** 4.2 得知,2色 5×10 棋盤存在一種著色方式不包含 3-四角單色矩形, 但一定包含四角單色矩形。所以, 2色 $5 \times (10(t+1)-9)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2(t+1)-1)$-四角單色矩形。

由數學歸納法得知, 對於所有 $s \geq 2$且 $s \in \mathbb{N}$, 2色 $5 \times (10s-9)$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 $(2s-1)$-四角單色矩形。

④ 由圖得知,2色 $5 \times (10s-10)$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 $(2s-1)$-四角單色矩形 $(s \geq 2)$。 □



5×10

Figure 17: 2色 5×10 棋盤圖 $(s = 2)$ 存在一種著色方式不含 3-四角單色矩形。

將定理 2 , 棋盤轉爲圖論問題:

定理 3. 令 $m \leq n, m = 3, 4, 5, s \geq 2$

1. 當 $m = 3$

① 若 $n > (C_2^3 + C_1^3)(s-1)$, 2色 $K_{3,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,s}$子圖。

② 若 $n \leq (C_2^3 + C_1^3)(s-1)$, 2色 $K_{3,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,s}$子圖。

2. 當 $m=4$

① 若 $n>C_2^4(s-1)$, 2色 $K_{4,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,s}$子圖。

② 若 $n\le C_2^4(s-1)$, 2色 $K_{4,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,s}$子圖。

3. 當 $m=5$

① 若 $n>(10s-16)$, 2色 $K_{5,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,(2s-2)}$子圖。

② 若 $n\le(10s-16)$, 2色 $K_{5,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,(2s-2)}$子圖。

③ 若 $n>(10s-10)$, 2色 $K_{5,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{2,(2s-1)}$子圖。

④ 若 $n\le(10s-10)$, 2色 $K_{5,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{2,(2s-1)}$子圖。

證明. 如定理 2所示。 □

當棋盤列數大於5時, 上述情形均包含在棋盤內, 所以列數大於5之情形不予討論。

第四章　棋盤著色討論 s-六角單色矩形

1　棋盤著色討論 六角單色矩形

將棋盤列數分為 $3、4、5、6$ **給予討論。**

當 m(棋盤列數)=3 時, 給定兩種顏色

① 若至少有 2行均爲某一顏色, 則棋盤恆產生 s-六角單色矩形 ($s \geq 2$)。

② 若每一行皆有兩種顏色, 則棋盤恆不會產生六角單色矩形。

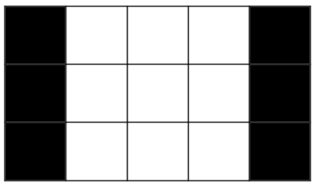


Figure 1: 棋盤內有2行均爲某一顏色, 則棋盤恆產生六角單色矩形

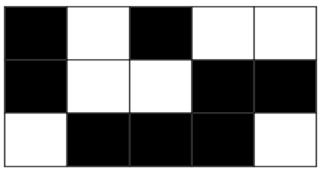


Figure 2: 棋盤內每一行皆有黑、白兩種顏色, 則棋盤不會產生六角單色矩形

當 m(棋盤列數)=4 時, 給定兩種顏色

① 若至少有 2行均爲某一顏色, 則棋盤恆產生 s-六角單色矩形 ($s \geq 2$)。

② 若每行均有 3個方格爲某一顏色, 則須至少5行, 棋盤不論如何著色恆產生六角單色矩形。

③ 若每行兩種顏色均都恰有2個, 則棋盤恆不會產生六角單色矩形。

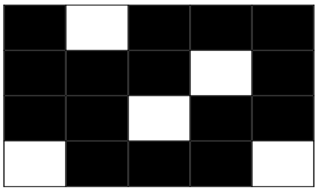


Figure 3: 棋盤內每行均有 3個方格爲黑色, 則須至少5行, 棋盤恆產生六角單色矩形

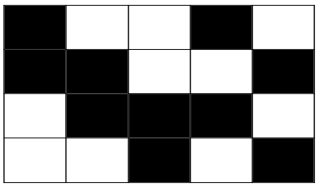


Figure 4: 棋盤內每行黑格、白格均恰有2個, 則棋盤不會產生六角單色矩形

故 m=3、4 之情形不予證明。

引理 5. 當 m(棋盤列數)=5 時, 給定兩種顏色

① 2色 5×21 棋盤不論如何著色, 一定含有六角單色矩形。

② 2色 5×20 棋盤存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形。

證明. ① 由鴿籠原理得知, 2色 5×21 棋盤不論如何著色, 使得棋盤中, 某一顏色方格至少有 $[\frac{5\times21}{2}] + 1 = 53$個, 令此顏色爲黑色, 且至少有11行, 每行黑格至少有3個。不失一般性, 令2色 5×21 棋盤內共有 53 個黑格, 且棋盤前11行, 每行黑格皆爲 3 個, 其餘後 10 行, 每行黑格皆爲 2 個。

令 d_i 爲棋盤上第 i 行中黑格個數, $i = 1, 2, \cdots\cdots, 11$

$\Rightarrow d_1 = d_2 = \cdots\cdots = d_{11} = 3$

假設2色 5×21 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形, 將這前11行之黑格, 全部平移至棋盤第一行, 則不會重疊, 由鴿籠原理得知,

$$C_3^{d_1} + C_3^{d_2} + \cdots\cdots + C_3^{d_{11}} \leq C_3^5$$

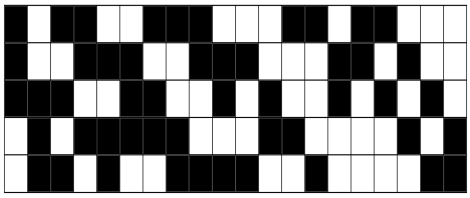
$$C_3^3 + C_3^3 + \cdots\cdots + C_3^3 \leq C_3^5$$

$$1 + 1 + \cdots\cdots + 1 \leq 10$$

$11 \leq 10$ 矛盾。

所以,2色 5×21 棋盤不論如何著色, 一定含有六角單色矩形。 $\square$

② 由圖得知,2色 5×20 棋盤 存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形。



5×20

Figure 5: 2色 5×20 棋盤圖

引理 6. 當 m(棋盤列數)=6 時, 給定兩種顏色

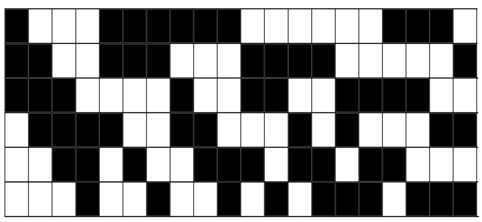
① 2色 6×21 棋盤不論如何著色, 一定含有六角單色矩形。

② 2色 6×20 棋盤存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形。

證明. ① 由 **引理** 5.1 得知,2色 5×21 棋盤, 不論如何著色, 含有六角單色矩形, 所以2色 6×21 棋盤, 不論如何著色, 一定含有六角單色矩形。

$\square$

② 由圖得知,2色 6×20 棋盤 存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形。



6×20

Figure 6: 2色 6×20 棋盤圖

將引理5,6，棋盤轉為圖論問題:

定理 4. 令 $m \leq n, m = 5, 6$

1. 當 $m = 5$

① 若 $n > C_3^5 + C_2^5$, 2色 $K_{5,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{3,2}$子圖。

② 若 $n \leq C_3^5 + C_2^5$, 2色 $K_{5,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{3,2}$子圖。

2. 當 $m = 6$

① 若 $n > C_3^6$, 2色 $K_{6,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{3,2}$子圖。

② 若 $n \leq C_3^6$, 2色 $K_{6,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{3,2}$子圖。

證明. 如引理5、6所示。 □

2 棋盤著色討論 s-六角單色矩形

定理 5. 令 $m \leq n, m = 5, 6, s \geq 2$

1. 當 m=5

① 若 $n > (C_3^5 + C_2^5)(s-1)$, 2色 $5 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 s-六角單色矩形。

② 若 $n \leq (C_3^5 + C_2^5)(s-1)$, 2色 $5 \times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 s-六角單色矩形。

2. 當 m=6

① 若 $n > C_3^6(s-1)$, 2色 $6 \times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 s-六角單色矩形。

② 若 $n \leq C_3^6(s-1)$, 2色 $6 \times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含 s-六角單色矩形。

證明. 1. ① $m = 5, s \geq 2$, 取 $n = 20(s-1)+1 = 20s-19$ (只須證明棋盤最小行數 n), 由鴿籠原理得知,2色 $5\times n$ 棋盤不論如何著色, 至少有 $[\frac{20s-19}{2}]+1 = 10s-9$ 行, 每行某一顏色方格至少有3個。不失一般性, 令此顏色為黑色, 且2色 $5 \times n$ 棋盤前 $(10s-9)$ 行, 每行黑格皆為3個。

令 d_i 為棋盤上第 i 行中黑格個數, $i = 1, 2, \cdots\cdots, (10s-9)$,

$\Rightarrow d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{10s-9} = 3$

假設2色 $5\times n$ 棋盤, 存在一種著色方式, 使得不含 s-六角單色矩形, 將這前 $(10s-9)$ 行上之黑格, 全部平移至棋盤第一行, 則黑格不會有 $(s-1)$ 次重疊, 由鴿籠原

理得知,

$$C_3^{d_1}+C_3^{d_2}+\cdots\cdots+C_3^{d_{10s-9}}\le(s-1)\cdot C_3^5$$

$$\underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{(10s-9)}\le 10s-10$$

$$10s-9\le 10s-10$$

$1\le 0$ 矛盾

所以, 2色 $5\times n$ ($n\ge 20s-19$) 不論如何著色, 一定含有單色 s-六角單色矩形。

② 令$s=2$, $n=20$, 由**引理** 5.2 得知, 2色 $5\times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形。

2. ① $m=6, s\ge 2$, 取 $n=20(s-1)+1=20s-19$ (只須證明棋盤最小行數 n), 由**定理** 5.1 得知,2色 $5\times n$ 棋盤不論如何著色, 含有 s-六角單色矩形, 所以2色 $6\times n$ 棋盤不論如何著色, 一定含有 s-六角單色矩形。

② 令$s=2$, $n=20$, 由**引理** 6.2 得知, 2色 $6\times n$ 棋盤存在一種著色方式, 使得不含六角單色矩形。

□

將定理5 , 棋盤轉爲圖論問題:

定理 6. 令 $m\le n, m=5,6,\ s\ge 2$

1. 當 m=5

① 若 $n>(C_3^5+C_2^5)(s-1)$, 2色 $K_{5,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{3,s}$子圖。

② 若 $n\le(C_3^5+C_2^5)(s-1)$, 2色 $K_{5,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{3,s}$子圖。

2. 當 m=6

① 若 $n>C_3^6(s-1)$, 2色 $K_{6,n}$不論如何著色, 一定含有單色 $K_{3,s}$子圖。

② 若 $n\le C_3^6(s-1)$, 2色 $K_{6,n}$存在一種著色方式, 使得不含單色 $K_{3,s}$子圖。

證明. 如定理 5所示。 □

當棋盤列數大於6時, 上述情形均包含在棋盤內, 所以列數大於6之情形不予討論。

參考文獻

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Application*, MacMillan Press, London and Basingstoke, 1976.

[2] R. L. Graham, B. L. Rothschild and J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons Press, New York, 1980.

[3] V. Longani, *Some Bipartite Ramsey Numbers*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics(2002)26: 583-592.

[4] 張克民——Ramsey 理論; 數學傳播期刊, 數學傳播24卷4期, 35-39頁。

[5] 李炯生——棋盤染色問題與二部 Ramsey 數; 數學傳播21卷3期, 63-72頁。