國立政治大學

應 用 數 學 研 究 所

碩 士 論 文

離散型熱帶曲線因子秩之計算

Calculating Rank of Discrete Divisors on Tropical Curves

研 究 生： 張穎泓
指導教授： 蔡炎龍博士

中華民國102年6月

離散型熱帶曲線因子秩之計算

Calculating Rank of Discrete Divisors on Tropical Curves

研 究 生：張穎泓　　Student: Ying-hung Chang
指導教授：蔡炎龍博士　　Advisor: Dr. Yen-lung Tsai

A Thesis
Submitted to Department of Mathematical Sciences
Master of Science
June 2013

國立政治大學
National Chengchi University

中華民國102年6月

離散型熱帶曲線因子秩之計算

學生： 張穎泓　　指導教授： 蔡炎龍博士

國立政治大學應用數學研究所

摘　　要

本篇論文主要是在討論熱帶曲線上，離散型的因子應具備有哪些性質，而在討論熱帶曲線上因子的性質時，我們會發現到致的計算，在低次熱帶曲線上，或是因子本身的係數總和高時，並不是太困難。但再高次的熱帶曲線上，致的計算就成線的極其繁雜，因此我們想要藉由在熱帶曲線上離散型的 Riemann-Roch 定理 [1]來幫助我們計算。

最後我們可以得到的結論是，若 Γ 是一平滑的熱帶曲線，則 Γ 上因子的致，將會受到 Γ 的虧格(genus)所限制，大幅的簡化了我們在離散型熱帶曲線因子致的計算。

國立政治大學 National Chengchi University

Calculating Rank of Discrete Divisors on Tropical Curves

Student: Ying-hung Chang Advisor: Dr. Yen-lung Tsai

Submitted to Department of Mathematical Sciences
National Cheng Chi University

ABSTRACT

This paper mainly discussed the property discrete version divisor on tropical curve, and in the discussion of the property of a divisor oftropical curve. we will find that the rank of the calculation, a tropical curve in the low degree, or high degree of divisor, not too difficult. But again higher degree tropical curve, calculated on a consistent line of extremely complicated. So we want to use Riemann-Roch theorem [1] of discrete version tropical curve to help us calculate.

Finally, we can get the conclusion that, if Γ be a smooth tropical curve, then the rank of divisor in Γ , will be dominate of Γ genus. So dramatically simplifies calculating we rank of discrete divisors on tropical curves.

國立政治大學 National Chengchi University

誌　　謝

想當年高中畢業來到政大，一轉眼已過了七年，開心的從大學畢業，從軍中退伍，如今又要拿一張碩班的畢業證書，一切看起來是如此的自然，但我深知這背後有著衆人對我的支援與照顧，才能讓我這七年過的如此輕鬆愉快。

感謝我的父母，讓我衣食無缺的在北部求學，不必為了金錢壓力而四處奔走，每天通電話也只關心我的身體健康，不對我的課業成績施予壓力，我想這是我這七年來生活安穩的一大主因。

感謝我的指導教授蔡炎龍老師，願意接收並指導我這種對學術研究毫無興趣的懶散學生，這幾年來，跟老師學到很多咖啡應有的正確觀念，以及程式繪圖的技巧，最重要的是觀察老師對待所有學生，無論是在教學或生活上，都想給予最好的那份用心和耐心，實在是讓我受益良多。

感謝國立政治大學應用數學系陳榮譽教授天進老師，感謝您這幾年來對我的照顧，從大學部到現在，雖然您不是我的指導教授，但對我的關心卻不亞於自己的研究生，雖嫌我吃素麻煩，但還是常常帶著我去吃飯，雖厭惡學生在課堂中睡覺，但仍不厭其煩的讓我一睡再睡的，睡了整整四年，感謝老師，讓我的研究生活過的如此的趣味與充實。

感謝余屹正老師，在這段時間對於我所做的指導，雖然沒修過老師的課，但每次看老師對於學術的嚴謹態度，就覺得實在了不起，平時也常常到研究室來關心研究生們，有如此亦師亦友的老師，真的是很幸運。

感謝我的口試委員張宜武老師，雖然每次修您的課都沒有好好認真上課，但這些年來的下午茶點心八卦時光，也讓我們這些學生感到樂趣無窮，希望畢業之後有機會可以常常回到學校來找老師們喝茶聊天。

感謝我的好學長威德師兄，從大一開始就受到你的不少幫助，指導我怎麼讀數學，當兵玩了一年回來讀研究所，你也幫了我許多，給了我很多很好的建議，一起當高微助教的時光，也是因為有你檔在前面，讓我避開了不少腥風血雨，我想要不是因為有你，我可能連大學都無法順利畢業，更別說是這張碩班的畢業證書了。

感謝我的好兄弟博班大學長澤佑，感謝你跟我一樣過了快二十五年的單身生活，跟你再一起鬼混，讓我覺得我的世界似乎不是如此的悲哀，也感謝你不管是在學術上或是咖啡上，始終對於龜毛的我不離不棄，雖然嘴上常常唾棄我，但總給我最有力的支援。

感謝將太學長、盈穎學姊，在我需要幫助的時候，都不厭其煩的幫助我，還要接受我的各種嘴砲，真是讓我深感抱歉，我想你們再一起也七年了，快點一不小心結婚吧，不然七年之癢這實在也太可怕。

感謝我的同居人彥文學長，雖然你走得很突然，讓大家措手不及，但我們在一起玩樂的那段趣味時光，實在是很令我懷念，上帝已幫你開了一扇幸福的窗，想必你在另一個世界會過得很爽，有空記得回來看老闆啦！

感謝芭樂哥政瑋，雖然跟你在一起玩的時間不多，但還是覺得你很有趣，當兵注意安全，活著最重要，有空也記得回來看老闆啦！

感謝系辦的助教們，容忍我在行政上的各種拖延，對你們沒大沒小，你們辛苦了。

感謝研究室的大家，容忍我對於研究室的嚴重汙染，相信我畢業後，會還給大家一個清淨的環境。

感謝系上的各位阿宅同胞，浪費掉了我人生最精華的七年沉迷於電玩，聽起來實在很悲哀，但我過得很快樂，也讓我在這無聊的數學深淵中，依然喜愛著應用數學系。

感謝我的哥哥，在台北的這七年，一直照顧我，接受我的各種擺爛偷懶，幫我打理許多的生活起居，讓我在台北也不會孤單寂寞覺得冷，祝你在祖國工作一切安好。

最後在一次的感謝所有曾經在我成長路上幫助過我的人，因為你們，我才能開開心心的結束我的求學生涯，邁向生命的另一個開端，感謝大家。

國立政治大學 National Chengchi University

目　　錄

書名頁 i

論文口試委員審定書 ii

授權書 iii

中文摘要 iv

英文摘要 v

誌謝 vi

目錄 viii

圖目錄 ix

第一章、緒論 1

第二章、熱帶幾何 2

第三章、古典定理 11

第四章、圖形中的因子 17

第五章、熱帶幾何上的因子 25

國立政治大學 National Chengchi University

圖　目　錄

2.1 C=$\{z \in (\mathbb{C}^*)^2 | e^{-5}z_1 + e^{-4}z_2 = 1\}$ 2

2.2 $C_t = \{z \in \mathbb{C}^2 | t^{-5}z_1 + t^{-4}z_2 = 1\}$ 3

2.3 $C_t = \{z \in K^2 | t^{-5}z_1 + t^{-4}z_2 = 1\}$ 5

2.4 折線軌跡投影 6

2.5 透由對偶圖形所生成的平面熱帶曲線 8

2.6 一次熱帶曲線及其對偶圖形 9

2.7 二次熱帶曲線及其對偶圖形 10

3.1 相同熱帶曲線聯集 11

3.2 三次平面熱帶曲線 14

3.3 兩平滑平面曲線交集 15

3.4 相同熱帶曲線交集 15

4.1 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ 17

4.2 G上的因子 18

4.3 函數f生成的因子 19

4.4 路徑圖形 G 20

5.1 二次熱帶曲線 Γ 28

5.2 $(f_0) = 1(v_0) - 1(v_1) + 0(v_2) + 0(v_3)$ 30

5.3 $(f_1) = -1(v_0) + 2(v_1) - 1(v_2) + 0(v_3)$ 30

5.4 $(f_2) = 0(v_0) - 1(v_1) + 2(v_2) - 1(v_3)$ 30

國立政治大學 National Chengchi University

5.5 $(f_3) = 0(v_0) + 0(v_1) - 1(v_2) + 1(v_3)$ 30

5.6 原本的因子 D 31

5.7 以 v_0 為中心作+2次的 Chip-Firing 搬移 32

5.8 以 v_1 為中心作+1次的 Chip-Firing 搬移 32

5.9 以 v_2 為中心作-1次的 Chip-Firing 搬移 32

5.10 以 v_3 為中心作0次的 Chip-Firing 搬移 32

5.11 Chip-Firing 搬移完成後的因子 E 33

5.12 一次熱帶曲線因子 $D = 3(v_0)$ 34

5.13 二次熱帶曲線因子 $D = 2(v_0) - 1(v_1) + 1(v_2) + 0(v_3)$ 34

5.14 三次熱帶曲線因子 D 36

5.15 deg(E)=0 36

5.16 deg(E_0)=1 37

5.17 deg(E_1)=1 38

5.18 deg(E_2)=1 38

5.19 deg(E_3)=1 39

5.20 deg(E_4)=1 39

5.21 deg(E_5)=1 40

5.22 deg(E_6)=1 40

5.23 deg(E_7)=1 41

5.24 deg(E_8)=1 41

國立政治大學 National Chengchi University

第 一 章　緒論

熱帶幾何是近幾年來熱門的研究議題，在熱帶幾何中我們可以觀察到，在抽像空間當中所無法觀察到的性質，而熱帶曲線與古典的代數幾何所討論的代數曲線，是否有著同樣的性質，或是在哪些條件之下，可以滿足這些性質，也是在學術上值得研究的部分。

本篇論文在一開始將會將熱帶曲線的建構過程做一個較為詳細的說明，介紹及分析一些在熱帶曲線上所具備的性質及定理。也會探討在高次熱帶曲線中虧格，受到了哪些條件的影響 [7]，進而在我們討論熱帶曲線上的因子性質時，可以提供更多的討論空間。

在討論熱帶曲線上因子的定義與性質時，我們將引用 Riemann-Roch 定理來進行計算。

Riemann-Roch 定理 在 2007 年由 Baker-Norine [2]發表了在組合領域圖形上的定理。

在 2008 年 Baker-Norine [1]又證明了，在熱帶曲線上離散行的 Riemann-Roch 定理。

而 Gathmann-Kerber [6]應用 Baker-Norine 的方法證明了，在熱帶曲線上連續行的 Riemann-Roch 定理。

在這之後，Mikhalkin 和 Zharkov [8]運用了不同的方式，透由代數以及組合，也證明了在熱帶曲線上連續行的 Riemann-Roch 定理。

本篇文章中，我們所討論的將會是這代曲線上離散形式的因子，並透由熱帶曲線本身的性質，來討論虧格，以及熱帶因子致的計算，與其虧隔個數之關聯性。

國立政治大學 National Chengchi University

第 二 章　熱帶幾何

在這個章節當中，我們將介紹熱帶幾何的建構過程。

對於一個複數平面上的曲線 C，令 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，我們將他限制在一個平面上的開集合 $(\mathbb{C}^*)^2$ 上，並透過一個函數，將之對應到實數平面上。我們將此函數定為

$$\begin{aligned} \mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ z = (z_1, z_2) &\mapsto (x_1, x_2) := (\log|z_1|, \log|z_2|) \end{aligned}$$

而所對應出來的圖形 $A = \mathrm{Log}(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ 我們將它稱作阿米巴

例 2.1.

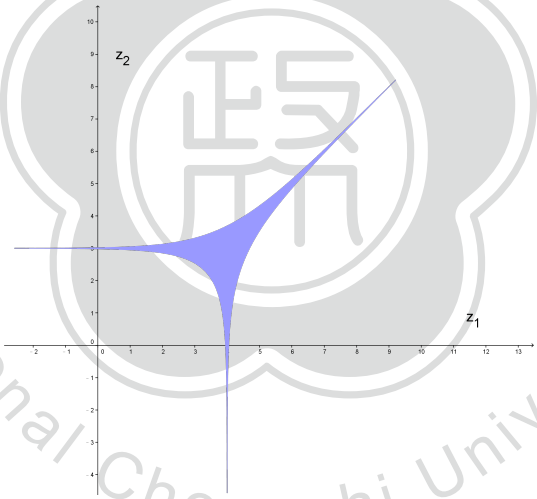


圖 2.1: C=$\{z \in (\mathbb{C}^*)^2 | e^{-5}z_1 + e^{-4}z_2 = 1\}$

在上述的例子當中，曲線 C 恰巧存在一個點 $(0, e^4)$，使得 z_1 軸的座標示0。考慮 $\log 0 \to -\infty$ 所以在 $(0, e^4)$ 這點的函數值在圖形中會趨近於負無窮大，而同樣的 $(e^5, 0)$ 這一點也會將函數值對應到負無窮大。再來看 $(z, e - e^5 z)$ 這點也都會被曲線 C 所包含住，故當 $|z| \to \infty$ 時，函數值也將對應到無窮大。

接下來我們觀查另外一個函數

$$\begin{aligned} \mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ z = (z_1, z_2) &\mapsto (x_1, x_2) := (-\log_t|z_1|, -\log_t|z_2|) \\ &= (-\frac{\log|z_1|}{\log t}, -\frac{\log|z_2|}{\log t}) \end{aligned}$$

當 $t \in \mathbb{R}$ 很小時，圖形$\Gamma = \mathrm{Log}_t(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ 跟C所生成的阿米巴圖形 A 是很相似的，但當 t 趨近於零時，A 的寬度也會趨近於零，此時我們稱圖形 Γ 為 C 所生成的熱帶曲線

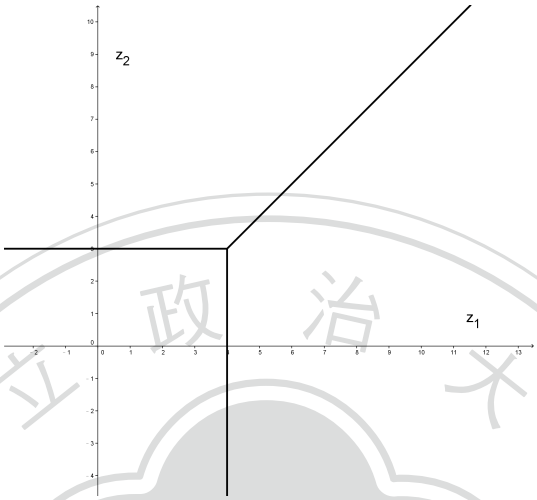


圖 2.2: $C_t = \{z \in \mathbb{C}^2 | t^{-5}z_1 + t^{-4}z_2 = 1\}$

上圖中的曲線的表示法不一定是唯一的，所以我們不只考慮曲線 $C = \{z \in (\mathbb{C}^*)^2 | e^{-5}z_1 + e^{-4}z_2 = 1\}$，還要考慮，曲線 $C_t = \{z \in \mathbb{C}^2 | t^{-5}z_1 + t^{-4}z_2 = 1\}$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 很小的時候。這個曲線必定通過 $(0, t^{-4})$和$(t^{-5}, 0)$,$\forall t$，因此讓 $\Gamma = \mathrm{Log}_t(C_t \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ 分別在 $z_2 = 4$ 和 $z_1 = 5$ 會有水平跟垂直的觸手，所以如果將 t 趨近到零，我們稱這圖形為 C_t 所生成的熱帶曲線

定義 2.2. 當一個形式級數 $\sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q t^q, a_q \in \mathbb{C}$ 滿足以下條件時

(i)集合 $\{q \in \mathbb{Q} | a_q \neq 0\}$ 有下界

(ii)集合 $\{q \in \mathbb{Q} | a_q \neq 0\}$ 是一個有限集

我們稱它為Puiseux級數，或分式冪級數。而將這些級數收集起來可以構成一個體的代數結構 K。

$\forall a \in K$ 我們可以將 a 表示為 $a = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q t^q$，我們可以定義 val$a$

$$\mathrm{val}a = \inf\{q \in \mathbb{Q} | a_q \neq 0\} = \min\{q \in \mathbb{Q} | a_q \neq 0\}$$

$\forall a = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q t^q \in K$，當 t 夠小時，a 會近似於指數最小的那一項，(i.e.$a \approx$

$a_{\mathrm{val}a}t^{\mathrm{val}_a}$)，所以剛剛的函數 $\log_t$若將a帶入，我們可以得到

$$\log_t|a| \approx \log_t|a_{\mathrm{val}a}t^{\mathrm{val}_a}| = \mathrm{val}a + \log_t|a_{\mathrm{val}a}| \approx \mathrm{val}a$$

因此當t夠小時，我們都可以利用這種近似方式，故 Log_t在t趨近於零時，可以轉換為另一個函數

$$\begin{aligned} \mathrm{Val} : (K^*)^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (x_1, x_2) := (-\log_t|z_1|, -\log_t|z_2|) = (\text{-val}z_1, \text{-val}z_2) \end{aligned}$$

現在我們可以利用這函數來定義一個熱帶平面曲線

定理 2.3. 當 C 是 K^* 上的平面代數曲線時，$\mathrm{Val}(C \cup (K^*)^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的平面代數曲線。

以曲線 $C = \{z \in K^2 | t^5z_1 + t^4z_2 = 1\}$ 為例，若 $(z_1, z_2) \in C \cup (K^*)^2$，則 $\mathrm{Val}(z_1, z_2)$ 可以分成下列三種狀況進行討論

1.若 $\mathrm{val}z_1 > -5$ 則 $\mathrm{val}z_2 = \mathrm{val}(t^{-4} - tz_1) = -4$ 所以當 $x_1 < 5$時x_2 的值皆是4，在圖形中構成一條由 $(5, 4)$ 向左延伸的水平射線

2..若 $\mathrm{val}z_2 > -4$ 則 $\mathrm{val}z_1 = \mathrm{val}(t^{-5} - tz_2) = -5$ 所以當 $x_2 < 4$時x_1 的值皆是5，在圖形中構成一條由 $(5, 4)$ 向下延伸的垂直射線

3..若 $\mathrm{val}z_1 \leq -5, \mathrm{val}z_2 \leq -4$ 則 $t^5z_1 + t^4z_2 = 1$ 可推導出 $\mathrm{val}(t^5z_1) = \mathrm{val}(t^4z_2)$,i.e.$\mathrm{val}z_1 + 5 = \mathrm{val}z_2 + 4$，所以當 $x_1 > 5$且$x_2 > 4$ 時 $x_2 = x_1 - 1$，在在圖形中構成一條由 $(5, 4)$ 向 $(1, 1)$ 延伸的斜率為1的射線0

我們會發現用 Val 所定義出的函數，與 Log_t 所定義出的函數圖形是相同的

現在我們透由下面的多項式令出一個平面代數曲線 $C \subset K^2$

$$C = \{(z_1, z_2) \in K^2 | f(z_1, z_2) := \sum_{i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_{ij}{z_1}^i{z_2}^j = 0, a_{ij} \in K\}$$

$\forall i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 非零的 a_{ij} 只存在有限個，$f(z_1, z_2)$ 中每一項拿出來進行計算可導出

$$\mathrm{val}(a_{ij}{z_1}^i{z_2}^j) = \mathrm{val}a_{ij} + i\mathrm{val}z_1 + j\mathrm{val}z_2$$

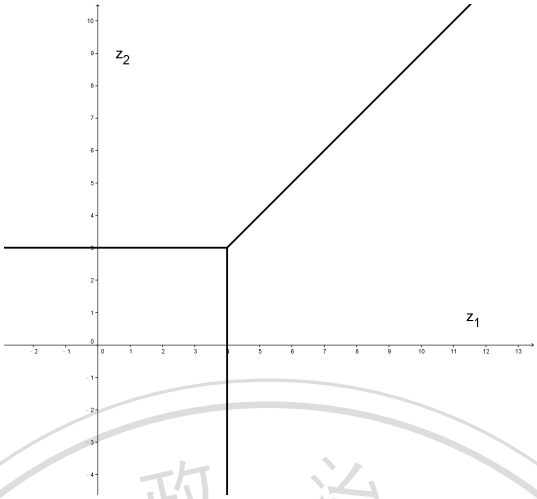


圖 2.3: $C_t = \{z \in K^2 | t^{-5}z_1 + t^{-4}z_2 = 1\}$

現在若曲線 C 上的任一點 (z_1, z_2) 要使得 $\sum_{i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} a_{ij}{z_1}^i{z_2}^j = 0$ 成立，則將 (z_1, z_2) 帶入後，所有係數不為零的最小項次至少都會有2個以上，否則的話彼此之間就沒有辦法相互消去為零。而我們又知道 $\{(x_1, x_2) = \mathrm{Val}(z_1, z_2) = (-\mathrm{val}z_1, \mathrm{val}z_2) | (z_1, z_2) \in C\}$ 是我們想要的一條熱帶曲線，故我們另一個從 $\mathbb{R}^2$打到$\mathbb{R}$ 的函數

$$g(x_1, x_2) := \max\{ix_1 + jx_2 - \mathrm{val}a_{ij} | (i, j) \in \mathbb{N}^2, \text{with } a_{ij} \neq 0\}$$

這如果可以取得最大值至少2次，那他將決定出我們要的 C 所生成的熱帶曲線，而凸函數$g(x_1, x_2)$ 所構成的三圍圖形中，不可微的部分會構成摺線軌跡，將他投影到 $\mathbb{R}^2$ 後，則構成了 C 所生成的熱帶曲線。

定理 2.4. 若函數 $val : K^* \to \mathbb{R}$ 是映成函數，則熱帶曲線 $\Gamma \subset \mathbb{R}$會與凸函數 g 所構成的摺線軌跡投影吻合。

以下舉例說明，我們將之前的曲線 $C = \{z \in (\mathbb{C}^*)^2 | e^{-5}z_1 + e^{-4}z_2 = 1\} \subset K^2$ 繼續拿出來做討論，根據之前的推演，曲線C所對應到的凸函數 $g(x_1, x_2) = \max\{x_1 - 5, x_2 - 4, 0\}$。圖3中所呈現的就是函數 g 所生成的折線軌跡投影，與曲線 C 所生成的熱帶曲線 Γ 吻合的狀態。

根據以上的建構過程，我們可以定義兩種運算，分別是熱帶幾何的加法，以及熱帶幾何的乘法，而這兩種運算將升成一種代數結構

定義 2.5. 令 $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，我們定義加法 $\oplus : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 和乘法 $\odot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

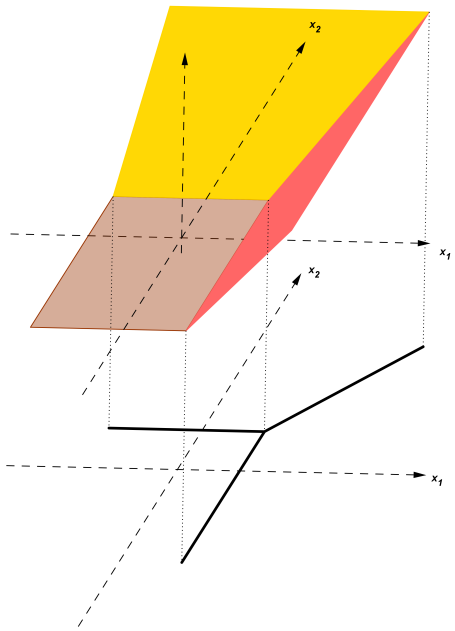


圖 2.4: 折線軌跡投影

為

$$x \oplus y \quad := \quad \max\{x, y\}$$
$$x \odot y \quad := \quad x + y$$

這裡所定義的運算 $\oplus$ 即為熱帶幾何的加法，而運算 $\odot$ 即為熱帶幾何的乘法。

而 $\forall a \in \mathbb{T}, a \oplus (-\infty) = a, \forall x \in \mathbb{T}, x \odot 0 = x$，所以 $\mathbb{T}$ 有加法單位元素 $-\infty$，以及乘法單位元素 0

定義 2.6. 若一個代數結構 $(R, +, \cdot)$ 符合以下的條件，那麼我們稱他為一個半群(semiring)

(i) $(R, +)$ 是一個交換半群，並且有單位元素0

(ii) $(R, \cdot)$ 是一個半群，並且有單位元素1

(iii)乘法運算對加法運算有分配律

(iv) S 中的任何元素對 0 做成法運算皆為 0

根據以上對於半群的定義以及先前所建立的一些性質可以得到

結論 2.7. $(\mathbb{T}.\oplus,\odot)=(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\max,+)$ 是一個半群

定義 2.8. 對於所有的 $a_n\in\mathbb{T},n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}$

定義熱帶幾何的指數

$$a_1^{\odot k}:=a_1\times k$$

定義熱帶幾何的除法

$$a_1\oslash a_2:=a_1-a_2$$

定義連加

$$\bigoplus_{i=1}^{n}a_i:=\max\{a_1,...,a_n\}$$

定義連乘

$$\bigodot_{i=1}^{n}a_i:=a_1+...+a_n$$

$$\begin{aligned}g(x_1,x_2):&=\max\{ix_1+jx_2-\mathrm{val}a_{ij}|(i,j)\in\mathbb{N}^2,\text{with } a_{ij}\neq 0\}\\&=\bigoplus_{i,j}(-\mathrm{val}\ a_{ij})\odot x_1^{\odot i}\odot x_2^{\odot j},i,j\in\mathbb{N},\text{with } a_{ij}\neq 0\end{aligned}$$

從此處可得知，我們可將原本的多項式函數 $f(z_1,z_2)$ 轉換為熱帶幾何的多項式 $g(x_1,x_2)$，例如$t^5z_1+t^4z_2=1$ 經過轉換後可得到

$$(-5)\odot x_1\oplus(-4)\odot x_2\oplus 0=\max\{x_1-5,x_2-4,0\}$$

若推展為一般式的狀態 $f(z)=f(z_1,...,z_n)=\sum_{i=1}^{p}a_iz_1^{i1}...z_n^{in}$ 轉換為熱帶幾何的形式

$$\begin{aligned}g(x)=g(x_1,...,x_n)&=\max_{1\le i\le p}\{i_1x_1+...+i_nx_n-\mathrm{val}a_i\}\\&=\bigoplus_{i=1}^{p}(-\mathrm{val}a_i)\odot x_1^{\odot i_1}\odot...\odot x_n^{\odot i_n}\end{aligned}$$

$x_j=-\mathrm{val}z_j,i_j\in\mathbb{N},\ \text{for all } 1\le j\le n,1\le i\le p$

結論 2.9. 熱帶幾何的多項式所生成的摺角投影，將會是在 $\mathbb{R}^2$ 上的平面熱帶曲線。

國立政治大學 National Chengchi University

接下來我們介紹另外一種做法，當我們將熱帶幾何多項是寫成

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2): &= \bigoplus_i x_1^{\odot a_1^{(i)}} \odot x_2^{\odot a_2^{(i)}} \\ &= \max\{a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 | i=1,...,n\} \end{aligned}$$

令 $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}) \in \mathbb{N}^2$，$\Delta$ 為這些 $a^{(i)}$所連結起來的在$\mathbb{R}^2$上的凸集合，此時從 Δ 中任意取一點對 Δ 的邊做垂線，生成曲線 Γ，我們稱此 Δ 為此曲線 Γ 的對偶圖形

例 2.10.

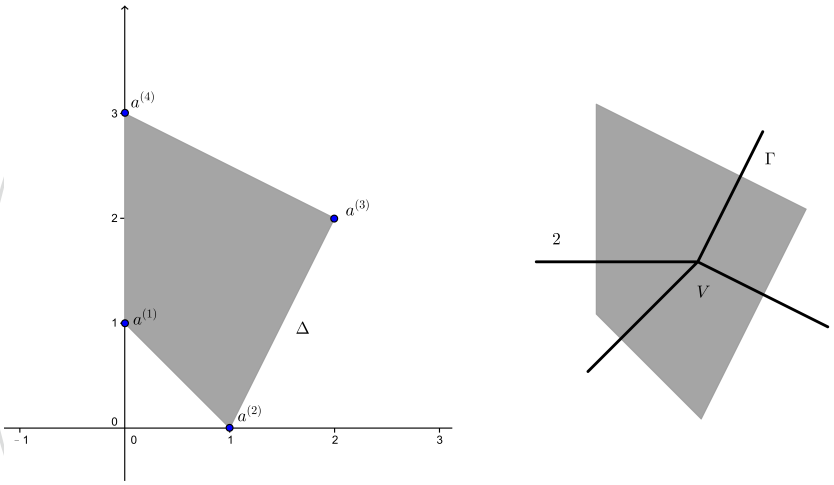


圖 2.5: 透由對偶圖形所生成的平面熱帶曲線

圖形中，由 V 點所生出的四條向量，我們可以經由四邊形的各邊的線段端點所計算出來，我們令 $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}), a^{(1)} = a^{(n+1)}$ 則四條向量依序為 $v^{(i)} := (a_2^{(i)} - a_2^{(i+1)}, a_1^{(i+1)} - a_1^{(i)})$，很容易的可以觀察到 $\sum_{i=1}^{n} v^{(i)} = 0$，而我們希望每一條向量都可以是由最小的整數比構成，故令 $v^{(i)} = w^{(i)} \cdot u^{(i)}, w^{(i)} \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n$，我們將此分解分出來的最大整數$w^{(i)}$ 就稱為此向量的權重。

定義 2.11. 若次方為 d 的平面熱帶曲線是一個有權重的圖形 Γ，則滿足以下條件

(i) Γ 所擁有的線段，斜率皆為有理數

(ii) Γ 對於 $(-1,0),(0,-1),(1,1)$這三個方向各有 d 條單點線段
(若權重為 n 則算 n 條)

(iii) Γ 中的所有點 v 對於其擁有的邊向量和保持平衡

假定熱帶曲線 Γ 是由熱帶多項式 g 的摺線投影生成

$$g(x_1, x_2) = \max\{a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + b^{(i)} |, i = 1, ..., n\}$$

若 g 是一個 d 次的熱帶多項式，則所有的正整數點 $a^{(i)}$將會在三角形Δ_d 中，

$$\Delta_d := \{(a_1, a_2) | a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 \leq d\}$$

例 2.12. 我們繼續來觀察

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= (-4) \odot x_1 \oplus (-3) \odot x_2 \oplus 0 \\ &= (-4) \odot x_1^1 \odot x_2^0 \oplus (-3) \odot x_1^0 \odot x_2^1 \oplus x_1^0 \odot x_2^0 \odot 0 \end{aligned}$$

從中可觀察出 $a^{(1)} = (1, 0), a^{(2)} = (0, 1), a^{(3)} = (0, 0)$ 故可畫出以下圖形

圖 2.6: 一次熱帶曲線及其對偶圖形

從圖中可得知，此圖形形狀與之前所畫出的圖形也是吻合的

定理 2.13. 若 Δ_d 再進行分割之後的每個子分割，都呈現面積為 1/2 的三角形，則我們說此 Δ_d 所生成的熱帶曲線，為一個平滑曲線

例 2.14. 在 $d = 2$ 的狀況下，要符合平滑曲線的分割，一共只有四種型式，而他們所生成的熱帶曲線分別為下

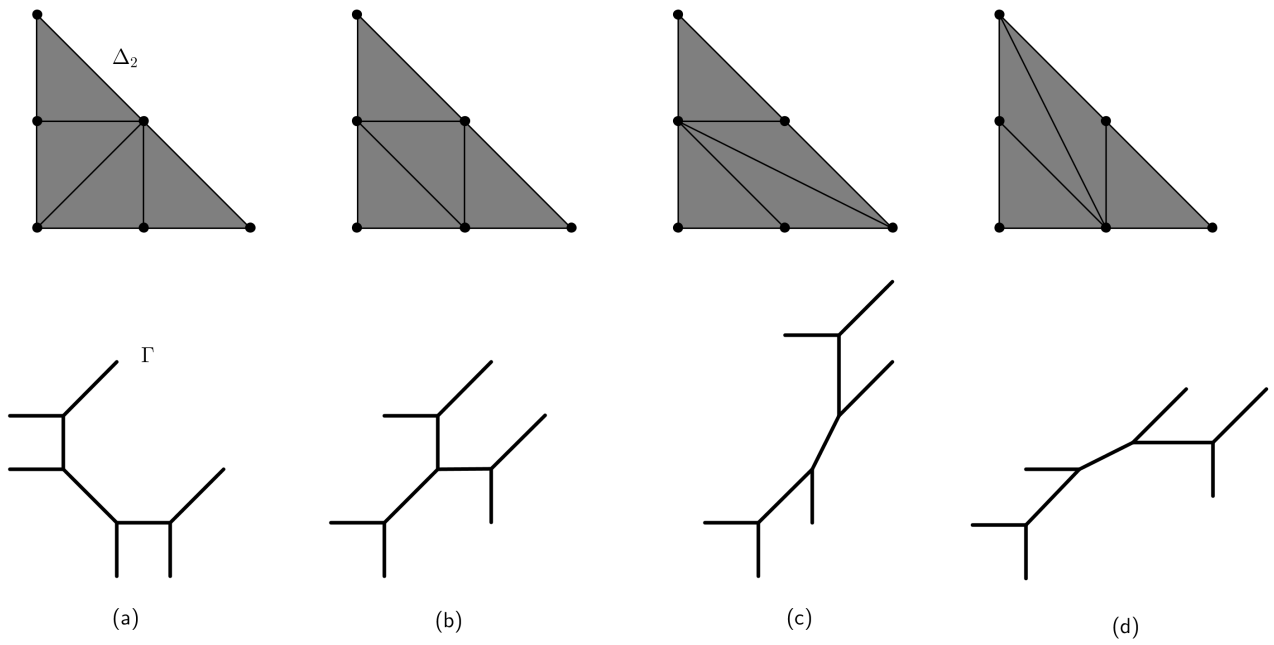


圖 2.7: 二次熱帶曲線及其對偶圖形

第 三 章　古典定理

在這個章節當中我們將介紹一些，在古典幾何中的重要定理，轉換到熱帶幾何中是否依然成立，若不完全吻合，加入哪些條件後將可以成立

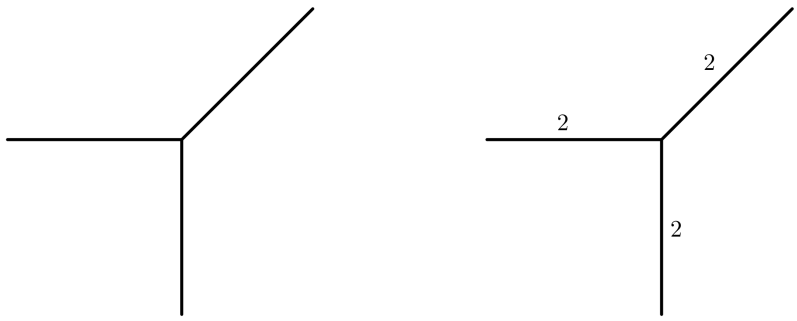
在古典幾何中若有兩個次方分別為 d_1, d_2 的多項式 $f_1, f_2 \in K[z_1, z_2]$ ，則等式 $(f_1 \cdot f_2)(z) = 0$ 次方則為 $d_1 + d_2$且所生成的平面曲線，將會是 $f_1(z) = 0$ 和 $_2(z) = 0$ 這兩個等式所生成曲線的聯集。

在熱帶幾何中若 g_1, g_2 是次方為 d_1, d_2 的熱帶多項式，可以很容易的觀察到 $g_1 \odot g_2 = g_1 + g_2$ 的摺線投影，即是 g_1 和 g_2 摺線投影的聯集，而此兩次方為 d_1, d_2 的平面熱帶曲線聯集而成的圖形，則為次方為 $d_1 + d_2$ 的平面熱帶曲線。

而在此可以特別注意到的部分是，若由代數的角度進行觀察，這的確可以看作是兩個平面熱帶曲線的聯集，但由於熱帶曲線中具備有權重的因素，因此從幾何的角度觀察是必須要將權重額外的加進去，另一方面入由幾何的角度觀察一個較高次方的圖形，可視為兩個較低次方的圖形所聯集而成，但並非所有在幾何中可分割的圖形，在代數的熱代方程式中，也可分成兩個低次方程式的乘積。

例 3.1.

令 $g_1(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 0$ 因為這兩個圖形相同，因此聯集就是原來的圖形所有的權重都乘2



$g_1(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 0$　　$g_1(x_1, x_2) \odot g_2(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2 \oplus 0)^{\odot 2}$

圖 3.1: 相同熱帶曲線聯集

國立政治大學 National Chengchi University

若將這兩方程式相乘

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2)\odot g_2(x_1,x_2) &= x_1^{\odot 2}\oplus x_2^{\odot 2}\oplus 0\oplus (x_1\odot x_2)\oplus x_1\oplus x_2 \\ &= \max\{2x_1,2x_2,0,x_1+x_2,x_1,x_2\} \end{aligned}$$

這個方程式所生成的熱帶曲線與前面的圖形是一樣的(權重依然是2)，而此圖形與

$$\max\{2x_1,2x_2,0\}=x_1^{\odot 2}\oplus x_2^{\odot 2}\oplus 0$$

所生成的熱帶曲線也相同，但熱帶多項式 $x_1^{\odot 2}\oplus x_2^{\odot 2}\oplus 0$ 卻無法寫成兩個一次熱帶多項式的乘積。

從上述的例子當中我們可以了解到，一個在幾何圖形上可分解的熱帶曲線，其原始的熱帶多項式是不一定能被分解的。

接下來我們將討論熱帶曲線的虧格(genus)，特別要提出來說明的是，這裡所用的虧格(genus)是代數幾何中的虧格，與圖論中的 genus 是不同的，而在圖論中我們是用面(face)來表示他。

在複數平面上，若 C 是一個 d 次的平滑複數平面曲線，我們知道這曲線的虧格(genus)，可經由 degree-genus formula(i.e.$g=(d-1)(d-2)/2$)計算出來，而此曲線 C 若不是平滑曲線，則他genus的個數則不會超過 $(d-1)(d-2)/2$

接下來我們將討論在熱帶幾何中 degree-genus formula 是否成立

定義 3.2. 若 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ 是一個平面熱帶曲線，則我們令此曲線上的虧格為曲線上的迴圈個數 (i.e.$g=\dim H_1(\Gamma,\mathbb{R})$)

定義 3.3. 我們令 V 為 Γ 的點所構成的集合，E 為 Γ 的線段(不算射線)所構成的集合，而對於任意的點 $v\in V$ 我們定 $\mathrm{val}v$ 為此點連接的邊的個數(包括線段與射線)

若 Γ 為 d 次的熱帶曲線，我們可以很容易的觀察出 Γ 有 $3d$ 條射線，和 $|E|$ 條線段，而一條射線連接一個點，一條線段連接兩個頂點，故可推導出以下等式。

$$3d+2|E|=\sum_{v\in V}\mathrm{val}v$$

利用尤拉公式，即可計算出 Γ的虧格 $g = 1 + |E| - |V|$，將前式帶入可得到

$$\begin{aligned} g &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{v\in V}\mathrm{val}v - \frac{3}{2}d - |V| \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{v\in V}\mathrm{val}v - \frac{3}{2}d - 2\sum_{v\in V}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}d^2 \\ &= \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \underbrace{\left(\frac{1}{2}d^2 - \sum_{v\in V}\frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2)\right)}_{(*)} \end{aligned}$$

從上面的等式中，可以看見若 $(* = 0)$ 則 $g = (d-1)(d-2)/2$ 的等式就會成立，因此我們將對 $(*)$ 的部分進行討論 再上一個章節當中，我們有討論到 d 次的熱帶多項式可以用 Δd 的圖形進行生成，在 Δ 中，每個 $v \in V$ 都對應一個多邊形，此多邊形的邊數即為 $\mathrm{val}v$，故此多邊形的面積 $A(v)$ 至少有 $\frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2)$，故$A(v) - \frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2) \geq 0, \forall v \in V$，而$\Delta d$的面積即為$\frac{1}{2}d^2$，因此

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2}d^2 - \sum_{v\in V}\frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2) \\ &= \sum_{v\in V}A(v) - \sum_{v\in V}\frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2) \\ &= \sum_{v\in V}A(v) - \frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2) \geq 0 \end{aligned}$$

從上述的等式中可以發現，要使 $g = (d-1)(d-2)/2$ 成立的條件為，所有的頂點 $v \in V$ 所對應的多邊形面積必須恰巧等於 $\frac{1}{2}(\mathrm{val}v - 2)$。而若曲線 Γ 為平滑曲線，則並定符合這個條件。

結論 3.4. d 次平面熱帶曲線 Γ 的虧格至多為 $(d-1)(d-2)/2$ 個，若此曲線為平滑的熱帶曲線，則虧格必為 $(d-1)(d-2)/2$ 個，滿足 degree-genus formula。

例 3.5.

在複數平面曲線中，令 C_1 和 C_2 為兩個不相同，且分別為d_1 次即 d_2 次的平滑複數平面曲線，Bezout's 定理告訴我們，此兩曲線的交集 $C_1 \cap C_2$ 所產生的交點個數至多為 $d_1 \cdot d_2$ 個。

現在我們也將觀察再熱帶幾何中，兩熱帶曲線圖形在聯及之後所產生交點的性質

令 Γ_1 和 Γ_2 為兩個不相同，且分別為 d_1 次即 d_2 次的平滑熱帶平面曲線，連聯集後的 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$，依然是一個平面熱帶曲線，而在本章最初所提及的性質中，我

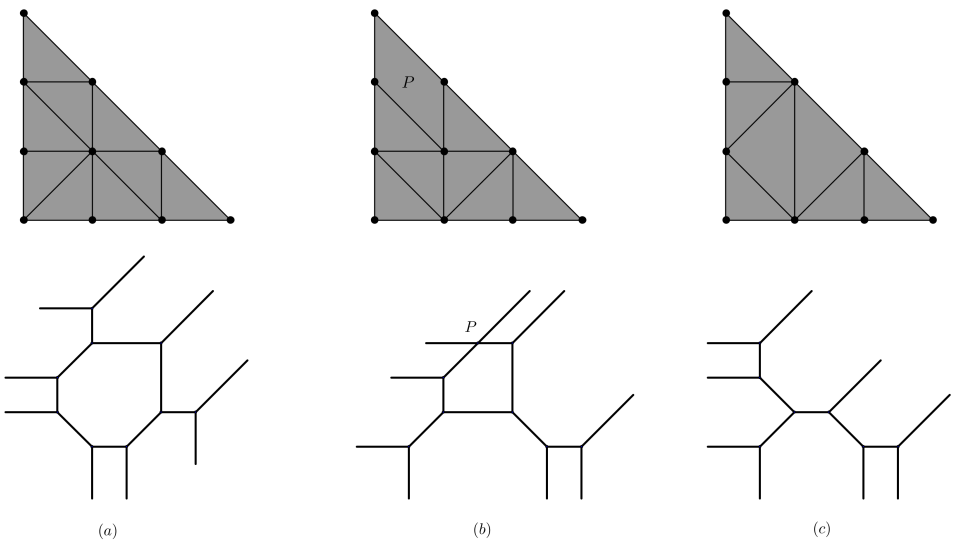


圖 3.2: 三次平面熱帶曲線

們可以了解，$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 為一個 $d_1 + d_2$ 次的平面熱帶曲線，因此將對應到對偶圖形 $\Delta_{d_1+d_2}$，我們把 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 中的點分兩種狀況來討論。

(1)若 $v_{(3)} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 連接的邊數為3，則存在一個$\delta > 0$，使得在 $\mathrm{B}(v_3, \delta)$ 圓盤中的區域圖形，與原本在 Γ_1 或 Γ_2 的區域圖形會相同，故在對偶圖形 $\Delta_{d_1+d_2}$ 中，所對應的三角形，也與原本在 Δ_{d_1} 或 Δ_{d_2}中的三角形相同。

(2)若 $v_{(4)} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 連接的邊數為4，我們可以了解，這是由兩條線段聯集之後所產生出的交點，也就是說 $v_(4) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$，因此在對偶圖形 $\Delta_{d_1+d_2}$ 中，所對應的多邊形，即為平行四邊形。

例 3.6.

我們可以從例子中觀察到所有 $P \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 所對應的平行四邊形的和即為

$$\mathrm{area}(\Delta_{d_1+d_2}) - \mathrm{area}\Delta_{d_1} - \mathrm{area}\Delta_{d_2} = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)^2 - \frac{1}{2}d_1^2 - \frac{1}{2}d_2^2 = d_1 d_2$$

從此等式中得知，若我們令 $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 所對應到的平行四邊形面積 a_P，即為 P 的交集權重 w_P，則交點個數即為 $\sum\limits_{p \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2} w_P = d_1 d_2$。

透由上一章節所介紹的對偶圖形的建構過程，以及平行四邊形面積的求法，我們可以很容易的產生出下面的定理

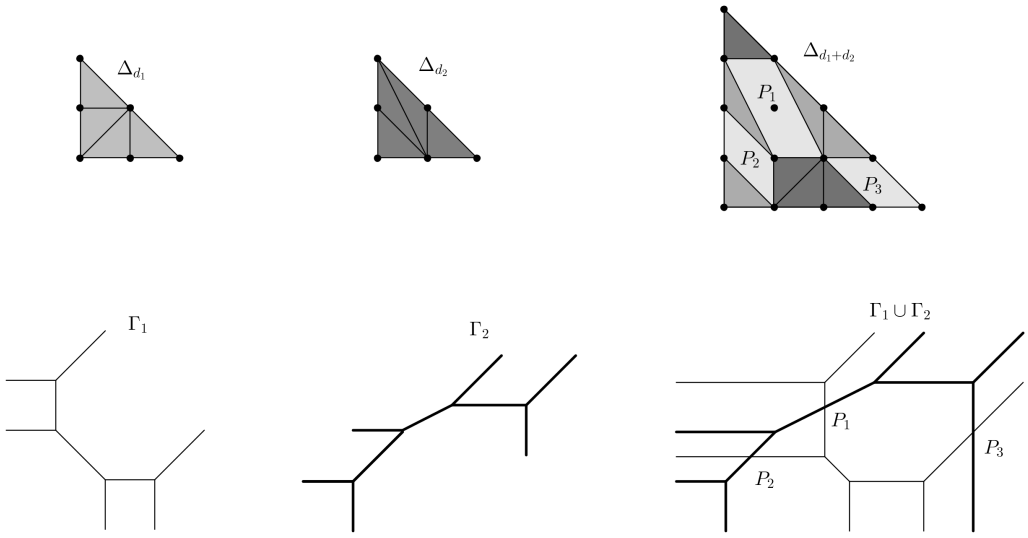


圖 3.3: 兩平滑平面曲線交集

定理 3.7. 若$P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 是由權重分別為 w_1, w_2 的兩條整係數向量u_1, u_2 所交集而成，則 P 的權重 $w_P = w_1 \cdot w_2 |\det(u_1, u_2)|$。

此時我們化思考到另一個問題是，若兩熱帶曲線相同時，或著局部相同時，應該如何的取交點個數

如同下面的例圖，若 $\Gamma_1 = \Gamma_2$ 時，我們令一個很小的 $t \in \mathbb{R}^2$，使得 $\Gamma_2^{(t)} = \{x+t | x \in \Gamma_2\}$，則$\Gamma_1$ 與 $\Gamma_2^{(a)}$ 將產生出交點 P_1, P_2, P_3, P_4，此時再將 $|t|$ 收斂到0，則 $|P_i - V_i| \geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$ 將會遞減，且有下界。故 P_i 皆收斂至 $Q_i, \forall i = 1, 2, 3, 4$

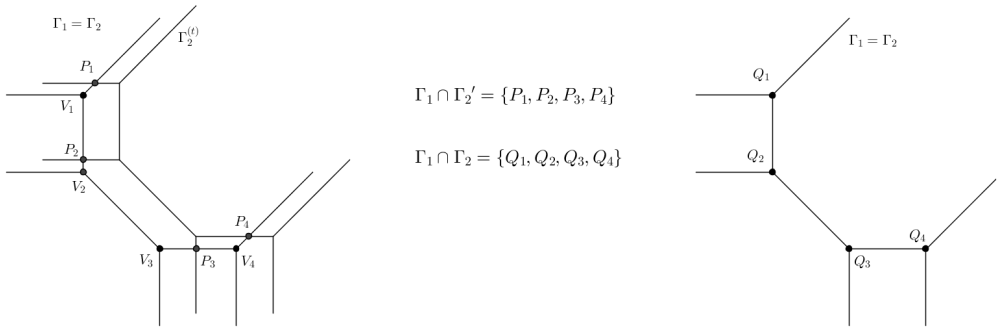


圖 3.4: 相同熱帶曲線交集

定理 3.8. 若兩熱帶曲線 Γ_1, Γ_2 相同，或局部相同，則我們取該圖形的頂點，或

局部頂點，作為 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 的交點。

結論 3.9. 若 Γ_1, Γ_2 是平滑的平面熱帶曲線，並採用權重加成計算交點各數，則Bezout 定理將會成立。

國立政治大學
National Chengchi University

第 四 章　圖形中的因子

這個章節當中我們將介紹一些有關圖形因子的定義

首先介紹一些圖形的相關符號

定義 4.1. 若圖 G 是一個沒有無窮遠線條的圖形，則我們定 $V(G)$ 為這個 G 中所有頂點(vertex)所構成的集合，而 $E(G)$ 為這個 G 中所有線段(edge)所構成的集合。

在圖形中的每個頂點，都連結著少許的線段，因此我們想計算線段個個數，並將同一個頂點的所連接的線段收集起來，構成一個集合。

定義 4.2. 若 $v \in V(G)$，則我們把 v 所連接的線段個數，記作 $\mathrm{val}(v)$，而所有連接 v 點之線段所構成的集合，記作 $E_v(G)$。

例 4.3.

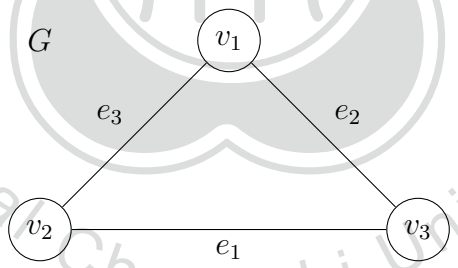


圖 4.1: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$

從圖4.1中我們可以很簡易的計算出

$$\mathrm{val}(v_1)=2,\ \mathrm{val}(v_2)=2,\ \mathrm{val}(v_3)=2$$
$$E_{v_1}(G) = \{e_2, e_3\}, E_{v_2}(G) = \{e_1, e_3\}, E_{v_3}(G) = \{e_1, e_2\}$$

在進行因子的定義前，我們先對可定義因子的圖形 G 作一些條件的限制

(i) G 不可包含單點迴圈(loop) (ii) G 不可包含重復線段(multiple edges) (iii) G 必須要是連通(connected)圖形

我們令 G 是一個滿除上述條件的任意的圖形 若可以找到一個函數 $D(x): V(G) \to \mathbb{Z}$，可以將 G 中的所有頂點對應到一些整數，則我們可以定義一個 G 上的因子(diviser)。

定義 4.4. 若D是G上的一個因子，則

$$D = \sum_{p \in S \subseteq G} D(p)(p), D(p) \in \mathbb{Z}\text{fi}$$

而 $\mathrm{Div}(G)$ 則是將所有 G 上的因子收集起來所構成的集合。

從定義中可以看出，若

$$D = \sum_{v \in V(G)} D(v)(v), D(v) \in \mathbb{Z}$$

則 D 是 G 上的一個因子。

在G的因子中，我們同樣的可以去定義次數(degree)以進行分類，而因子 D 中的每個頂點的係數加總，即為 D 的次數(degree)。

定義 4.5. 若令 $D = \sum_{v \in V(G)} D(v)(v) \in \mathrm{Div}(G)$，則 D 的次數記作

$$\deg D = \sum_{v \in V(G)} D(v)$$

例 4.6.

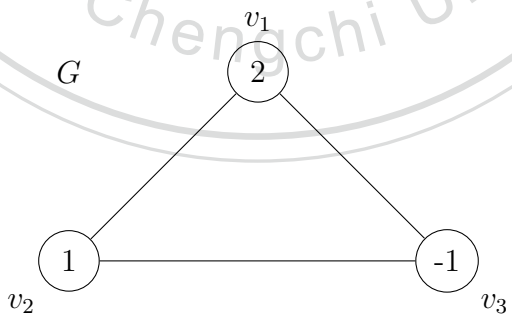


圖 4.2: G上的因子

如圖我們可以令 $D = 1(v_1) + 2(v_2) + (-1)(v_3)$，則 $\deg(D) = 1 + 2 + (-1) = 2$。

在 G 的因子中，如果有因子 D 的每個頂點個數都是非負的整數，則我們把這種因子 D 也稱作非負的因子。

國立政治大學 National Chengchi University

定義 4.7. 令 $D = \sum_{v \in V(G)} D(v)(v) \in \mathrm{Div}(G)$，若 $D \geq 0$，則$D(v) \geq 0$, 對於所有的$v \in V(G)$。

接下來我們介紹一類透由函數 f 所轉換的因子

若 f 是一個從 $V(G)$ 打到 $\mathbb{Z}$ 的函數，我們將所有這類的 f 收集起來所構成的集合定為 $\mathcal{M}(G)$=hom$(V(G), \mathbb{Z})$，則我們可以定一個從 $\mathcal{M}(G)$ 打到 $\mathrm{Div}(G)$ 的轉換 (Laplician Operator)Δ，將 f 轉換為 Γ 上的因子 $\Delta(f)$。

定義 4.8. 若 $f : V(G) \to \mathbb{Z}$，則我們定

$$\Delta_v(f) = \sum_{e=\overline{vx} \in E_v(G)} (f(v) - f(x)), v \in V(G)$$

$$\Delta(f) := (f) = \sum_{v \in V(G)} \Delta_v(f)(v) \in \mathrm{Div}(G)$$

例 4.9.

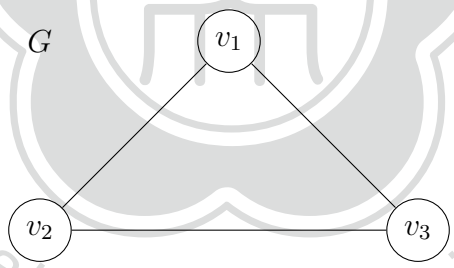


圖 4.3: 函數f生成的因子

若$f(v_1) = 3, f(v_2) = -2, f(v_3) = 1$，則

$$\begin{aligned}
\Delta_{v_1}(f) &= (3+2) + (3-1) = 7 \\
\Delta_{v_2}(f) &= (-2-3) + (-2-1) = -8 \\
\Delta_{v_3}(f) &= (1+2) + (1-3) = 1 \\
\Delta(f) = (f) &= 7(v_1) - 8(v_2) + 1(v_3) \in \mathrm{Div}(G)
\end{aligned}$$

我們可以透由 (f) 這種特殊的因子來定義出，在 Div(G) 中的因子之間的等價關係。

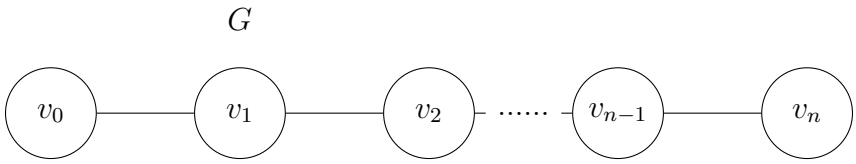


圖 4.4: 路徑圖形 G

定義 4.10. 對於所有 $D, E \in$Div(G) 若這兩個因子等價 $(D \sim E)$，則一定存在一個函數 f，使得 $D - E = (f)$。

例 4.11. 若 $D = 1(v_1) + 2(v_2) + (-1)(v_3)$, $E = -6(v_1) + 10(v_2) + (-2)(v_3)$，則 $D - E = 7(v_1) - 8(v_2) + 1(v_3)$，故存在一個 $f(v_1) = 3, f(v_2) = -2, f(v_3) = 1$ 的函數 f，使得 $D - E = (f)$。

我們可以很容易個觀察出若 G 上的兩個因子 D E等價，則此兩因子的係數何必定相同 (i.e.deg(D)=deg(E))，在下一章也會有更詳細的證明。而在此我們要提出疑問的是若 G 上的兩個因子係數和相同，那此兩因子是否必定等價？或是在甚麼樣的情況下必定等價。

在許多例子的計算過程中，我們發現到，若圖形 G 的虧格等於0時，若 G 上的兩個因子係數和相同，那此兩因子必定等價，而虧格若大於零，則必存在係數和相同但不等價的兩個因子。

以下我們將一步步推導出此定理

引理 4.12. 若 G 為一同構於路徑(path)的圖形。D, E 為 G 上的因子，且 deg(D)=deg(E)=0。則 D 與 E 必等價。

證明:

若 $|V(G)| = n$ 則圖形如同圖4.4一般，我們假設

$$D = \sum_{i=0}^{n} D(v_i)(v_i)$$

而因為 deg(D)=0，所以

$$\sum_{i=0}^{n} D(v_i) = 0$$

令一個頂點係數皆為零的因子

$$O = \sum_{i=0}^{n} 0(v_i)$$

我們先證明 存在一個函數$f : V(G) \to \mathbb{Z}$使得 $O - D = (f)$ 令

$$\begin{aligned}
f(v_0) &= 0 \\
f(v_1) &= D(v_0) \\
f(v_2) &= 2D(v_0) + D(v_1) \\
&\vdots \\
f(v_{n-1}) &= (n-1)D(v_0) + (n-2)D(v_1) + ... + 2D(v_{n-3}) + D(v_{n-2}) \\
f(v_n) &= nD(v_0) + (n-1)D(v_1) + ... + 2D(v_{n-2}) + D(v_{n-1})
\end{aligned}$$

因此經過 Δ 轉換後

$$\begin{aligned}
\Delta_{v_0}(f) &= (f(v_0) - f(v_1)) = -D(v_0) \\
\Delta_{v_1}(f) &= (f(v_1) - f(v_0)) + (f(v_1) - f(v_2)) = -D(v_1) \\
\Delta_{v_2}(f) &= (f(v_2) - f(v_1)) + (f(v_2) - f(v_3)) = -D(v_2) \\
&\vdots \\
\Delta_{v_{n-1}}(f) &= (f(v_{n-1}) - f(v_{n-2})) + (f(v_{n-1}) - f(v_n)) = -D(v_{n-1}) \\
\Delta_{v_n}(f) &= (f(v_n) - f(v_{n-1})) = D(v_0) + D(v_1) + D(v_2) + ... + D(v_{n-1})
\end{aligned}$$

又因為 $\sum_{i=0}^{n} D(v_i) = 0$

所以$\Delta_{v_n}(f) = (f(v_n) - f(v_{n-1})) = D(v_0) + D(v_1) + D(v_2) + ... + D(v_{n-1}) = -D(v_n)$

因此我們得到

$$(f) = \sum_{i=0}^{n} -D(v_i)(v_i)$$

故

$$D + (f) = \sum_{i=0}^{n} D(v_i)(v_i) + \sum_{i=0}^{n} -D(v_i)(v_i) = \sum_{i=0}^{n} 0(v_i) = O$$

所以存在函數$f : V(G) \to \mathbb{Z}$使得 $O - D = (f)$

同理若 deg(E)=0，則也會存在 $f' \in \mathcal{M}(G)$，使得 $O - E = (f')$

所以 D 等價於 O 等價於 E

故在deg(D)=deg(E)=0 的狀況下 D 與 E 必等價。

國立政治大學 National Chengchi University

引理 4.13. 若 G 為一同構於路徑(path)的圖形。D, E 為 G 上的因子，且 deg(D)=deg(E)。則 D 與 E 必等價。

證明一:

如圖4.4，我們假設$A_0 = 1(v_0) + 0(v_1) + 0(v_2) + ... + 0(v_n)$，$B = 0(v_0) + 0(v_1) + ... + 0(v_{n-1}) + 1(v_n)$

令$f \in \mathcal{M}(G)$,對於所有的 $1 \leq i \leq n$, $f(v_i) = i$

經過計算

$$\begin{aligned}
\Delta_{v_0}(f) &= (0-1) = -1 \\
\Delta_{v_1}(f) &= (1-0) + (1-2) = 0 \\
\Delta_{v_2}(f) &= (2-1) + (2-3) = 0 \\
&\vdots \\
\Delta_{v_{n-1}}(f) &= ((n-1)-(n-2)) + ((n-1)-n) = 0 \\
\Delta_{v_n}(f) &= (n-(n-1)) = 1
\end{aligned}$$

我們得到

$$(f) = (-1)(v_0) + 0(v_1) + 0(v_2) ... + 0(v_{n-1}) + 1(v_n)$$

因此存在一個函數 $f \in \mathcal{M}(G)$ 使得 $B - A_0 = (f)$，故 B 與 A_0 等價。

若我們令

$$A_k = \sum_{i \neq k} 0(v_i) + 1(v_k), \forall 0 \leq k \leq n$$

我們依然可以用相同的方式讓 A_k 與 B 同構。

而 G 上的任意因子 D，若 deg(D)=$t \in \mathbb{Z}$， 我們即可依照係數的值，將 D 拆成t 個不盡相同的 A_k 相加，因此 D 則等價於$t * B$。

所以如果D, E 為 G 上的因子，且 deg(D)=deg(E)=t，則D 等價於 $t * B$ 等價於 E，故 D 與 E 必等價。

證明二:

若D, E 為 G 上的兩個因子，且 deg(D)=deg(E)=t，則 deg($D - E$)=0，根據引理4.12我們可以得到，存在一個$f \in \mathcal{M}(G)$ 使得 $(D - E) - O = (f) = D - E$，故 D 與 E 必等價。

定理 4.14. 若 G 是一個虧格為0的圖形，D, E 為 G 上的因子，且 $\deg(D)$=$\deg(E)$。則 D 與 E 必等價。

因為G的虧格是0，所以沒有循環(cycle)在圖形中，因此我們可以將 G 看成一個樹狀圖(tree)，若將 G 視為樹狀圖，我們即可將他視為數條單向的路徑，再藉由4.13得證。

例 4.15.

若 G 如圖4.1為虧格等於1的圖形，我們令$D = D(v_1)(v_1) + D(v_2)(v_2) + D(v_3)(v_3)$，則必存在 $E = (D(v_1) + 1)(v_1) + (D(v_2) - 1)(v_2) + D(v_3)(v_3)$ 使得 $E - D = 1(v_1) - 1(v_2) + 0(v_3)$，若存在 $f \in \mathcal{M}(G)$ 使得 $f = 1(v_1) - 1(v_2) + 0(v_3)$，則我們可以得到以下的方程式
$2f(v_1) - f(v_2) - f(v_3) = 1$
$2f(v_2) - f(v_1) - f(v_3) = -1$
$2f(v_3) - f(v_1) - f(v_2) = 0$ 而在計算之後發現$3f(v_1) - 3f(v_2) = 2$，但$f(v_1)$, $f(v_2)$皆為整數，故此等式矛盾，因此不存在滿足條件的 f 所以 D 與 E 不等價。

在有了等價關係的定義之後，對於所有 G 上的因子 D 我們可以利用等價關係來定一個與 D 有關係的線性系統 (linear system)$|D|$。

定義 4.16. 對於所有 G 上的因子 D 我們可以定一個集合

$$|D| = \{E \in \mathrm{Div}(G) | E \geq 0, E \sim D\}$$

例 4.17. 若 $D = 1(v_1) + 2(v_2) + (-1)(v_3)$，我們令 $f(v_1) = a, f(v_2) = b, f(v_3) = c, a, b, c \in \mathbb{Z}$，則$(f) = (2a - b - c0(v_1) + (2b - a - c)(v_2) + (2c - a - b)(v_3)$，故 $|D| = \{(2a - b - c + 1)(v_1) + (2b - a - c + 2)(v_2) + (2c - a - b - 1)(v_3) | a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

對於 G 上的因子 D，有了線性系統$|D|$之後，我們想給定與 D 相關的數值，來觀察此因子 D 能夠創建出來的空間大小。

定義 4.18. 一個 G 上的因子 D，若 $|D|$ 是空集合，則我們定 $\mathrm{rank}(D)= -1$，若 $|D|$ 不是空集合,則 $\mathrm{rank}(D)$=$\min\{\deg(E) - 1 | E \geq 0, |D - E| = \phi, E \in \mathrm{Div}(G)\}$。

例 4.19. 若 $D = 1(v_1)+2(v_2)+(-1)(v_3)$，則 $E = 0(v_1)+2(v_2)+0(v_3)$ 時，$|D-E| = |1(v_1) + 0(v_2) + (-1)(v_3)| = \phi$，而考慮 $E_1 = 1(v_1) + 0(v_2) + 0(v_3), E_2 = 0(v_1) + 1(v_2) + 0(v_3), E_3 = 0(v_1) + 0(v_2) + 1(v_3)$ 這三種 deg(E_1)=deg(E_2)=deg(E_3)=1 的狀況，皆無法讓 $|D - E_i|, i = 1, 2, 3$成為空集合，故rank(D)=2-1=1。

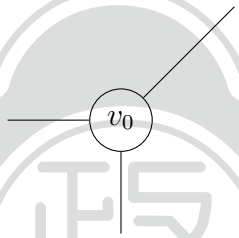
國立政治大學
National Chengchi University

第 五 章　熱帶幾何上的因子

在上個章節中，我們介紹了一些有關因子的定義，而在這個章節當中，我們將討論在熱帶幾何圖型上的因子會有哪些性質。

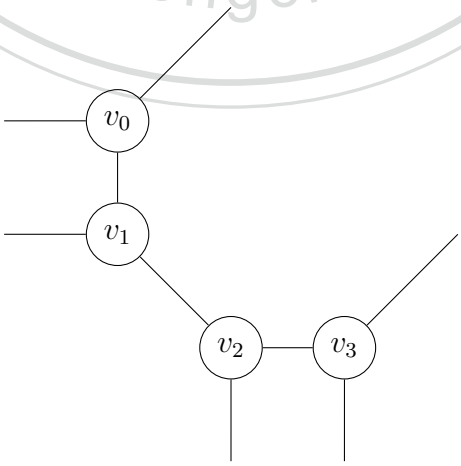
在前幾個章節中我們知道熱帶曲線中的線包括了線段，和射線兩種，而在這個章節當中，我們將移除射線的部分，只取頂點與線段進行討論，而我們稱移除射線後的圖形為 Γ。而此章節所使用的熱帶曲線，皆為移除射線的圖形 Γ。

例 5.1. 這是原來我們所熟知的，一次熱帶曲線圖形。



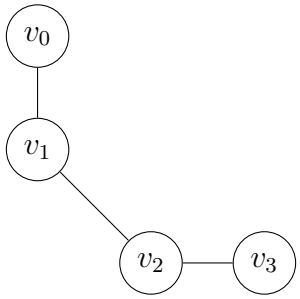
若將射線的部分移除，Γ 只剩一個點。

例 5.2. 這是原本的二次熱帶曲線



移除射線後的 Γ

國立政治大學 National Chengchi University



從上述的兩個例子都中可以觀察到，若我們將射線從原本的熱帶曲線中移除，則 Γ 即可滿足前一章節定義線段及頂點的條件，因此我們也可以對 Γ 線段與頂點的集合進行定義。

定義 5.3. 若圖 Γ 是一個移除所有射線的熱帶曲線圖形，我們定 $V(\Gamma)$ 為這個 Γ 中所有頂點所構成的集合，而 $E(\Gamma)$ 為這個 Γ 中所有線段所構成的集合

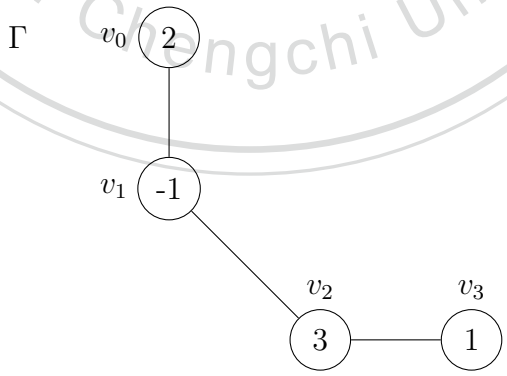
在熱帶曲線 Γ 上，我們可以使用前一章節得方式來定義出他的因子。

定義 5.4. 若 D 是熱帶曲線 Γ 上的一個因子，

$$D = \sum_{x \in V(\Gamma)} D(x)(x), D(x) \in \mathbb{Z}$$

，而 $\mathrm{Div}(\Gamma)$ 則是將所有 Γ 上的因子收集起來所構成的集合。

例 5.5.



如圖所示我們可以定$D = 2(v_0) + (-1)(v_1) + 3(v_2) + 1(v_3)$ 是 Γ 上的一個因子。

所有非空的的熱帶曲線 Γ 上，我們都可以根據頂點係數的改變，創造出無限多個因子，然而每個熱帶曲線 Γ 上必定存在一種特別的因子，此因子是透由頂點

國立政治大學 National Chengchi University

所連接的邊數來定義的，對於每個熱帶曲線 Γ 此因子存在且唯一，我們稱這種因子為 G 上的典型因子(canonical divisor)。

定義 5.6. 我們定義一個 Γ 的典型因子(canonical divisor)，

$$K_\Gamma = K = \sum_{v \in V(\Gamma)} (\mathrm{val}(v) - 2) \cdot (v) \in \mathrm{Div}(\Gamma)$$

由於典型因子的頂點係數是由所連結的邊所決定，因此我們可以透過代數幾何中的尤拉公式，得到以下定理。

定理 5.7. 若 K 是 Γ 的典型因子，g 是 Γ 的虧格，則 $\deg(K) = 2g - 2$。

證明:根據定義，

$$\begin{aligned} \deg(K) &= \sum_{v \in V(\Gamma)} (\mathrm{val}(v) - 2) \\ &= \sum_{v \in V(\Gamma)} \mathrm{val}(v) - \sum_{v \in V(\Gamma)} 2 \\ &= 2|E(\Gamma)| - 2|V(\Gamma)| \\ (\text{根據尤拉公式 ；} g = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| - 1) &= 2g - 2 \end{aligned}$$

在熱帶曲線 Γ 上，若f 是一個從 $V(\Gamma)$ 打到 $\mathbb{Z}$ 的函數，我們可以用同樣的方式定義由函數 f 所轉換的因子。

定義 5.8. 若 $f \in \mu(\Gamma)$, $f : V(\Gamma) \to \mathbb{Z}$，則我們定

$$\Delta_v(f) = \sum_{e = \overline{vx} \in E_v(\Gamma)} (f(v) - f(x)), v \in V(\Gamma)$$

$$\Delta(f) := (f) = \sum_{v \in V(\Gamma)} \Delta_v(f)(v) \in \mathrm{Div}(\Gamma)$$

也就是說每一個頂點的函數值與所連結的其餘頂點的函數值差加總後，即為該頂點的係數。故用此方式可將函數 f 轉換為 Γ 上的因子 $\Delta(f)$。

例 5.9.

若Γ 如圖5.1所示，$f \in \mu(\Gamma)$，而$f(v_0) = 2, f(v_1) = 1, f(v_2) = -1, f(v_3) = 0$，我們可以計算出$\Delta(f)$

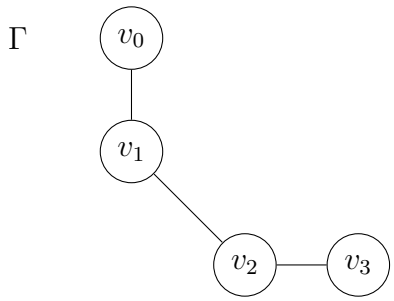


圖 5.1: 二次熱帶曲線 Γ

$$
\begin{aligned}
v_0\text{的係數}\Delta_{v_0}(f) &= (2-1)=1 \\
v_1\text{的係數}\Delta_{v_1}(f) &= (1-2)+(1-(-1))=-1+2=1 \\
v_2\text{的係數}\Delta_{v_2}(f) &= (-1-1)+(-1-0)=-2-1=-3 \\
v_3\text{的係數}\Delta_{v_3}(f) &= (0-(-1))=1
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\Delta(f) := (f) &= \Delta_{v_0}(v_0)+\Delta_{v_1}(v_1)+\Delta_{v_2}(v_2)+\Delta_{v_3}(v_3) \\
&= 1v_0+1v_1-3v_2+1v_3 \in \mathrm{Div}(\Gamma)
\end{aligned}
$$

從剛剛例子的計算過程中可以發現到，每一個頂點的係數，都是由彼此頂點函數值的差所構成，因此我們導證出下述定理。

定理 5.10. 對於所有的$f: V(\Gamma) \to \mathbb{Z}$， $\deg(\Delta(f)) = 0$

我們可以透由定義來進行證明

證明:

$$
\begin{aligned}
\deg(\Delta(f)) &= \sum_{v\in V(\Gamma)} \Delta_v(f) \\
&= \sum_{v\in V(\Gamma)} \sum_{e=\overline{vx}\in E_v(\Gamma)} (f(v)-f(x)) \\
&= \sum_{v\in V(\Gamma)} \mathrm{val}\ (v)f(v) - \mathrm{val}\ (v)f(v) \\
&= \sum_{v\in V(\Gamma)} 0 = 0
\end{aligned}
$$

在前一個章節我們定義過，若存在一個從 $V(\Gamma)$ 打到 $\mathbb{Z}$的函數，使得某兩個因子 $D, E \in$Div(Γ) 之間的差 $D - E$ 等於 (f)，則我們說D和E這兩個因子之間滿足等價關係。

因此若因子 D 跟因子 E 等價，我們可以得知這兩個因子的係數和是相同的

結論 5.11. 若 Γ上的兩個因子D, E 等價 (i.e. D E)，則deg(D)=deg(E)。

證明:
若因子 D 跟因子 E 等價，根據定義，存在一個函數$f : V(\Gamma) \to \mathbb{Z}$，使得

$$D - E = (f)$$

故

$$\deg(D - E) = \deg((f))$$

從定理5.10可以發現到說

$$\deg(D - E) = \deg((f)) = 0$$

而兩因子的係數和式線性的因此可以線性拆開

$$\deg(D) - \deg(E) = 0$$

因此

$$\deg(D) = \deg(E)$$

我們想要了解一些有關 (f) 的特性 因此在同樣的二次熱帶曲線下(圖5.1)分別取四個函數 f_0, f_1, f_2, f_3 來做觀察，
我們令

$$f_0(v) = \{^{1, v=v_0}_{0, v\neq v_0}$$

$$f_1(v) = \{^{1, v=v_1}_{0, v\neq v_1}$$

$$f_2(v) = \{^{1, v=v_2}_{0, v\neq v_2}$$

$$f_3(v) = \{^{1, v=v_3}_{0, v\neq v_3}$$

則可以得到下面四個因子及其對應圖形

國立政治大學 National Chengchi University

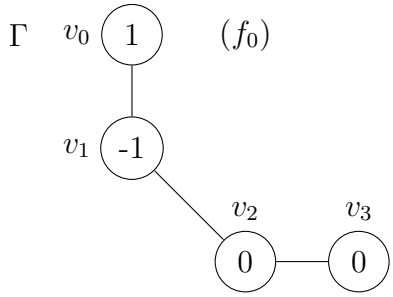


圖 5.2: $(f_0) = 1(v_0) - 1(v_1) + 0(v_2) + 0(v_3)$

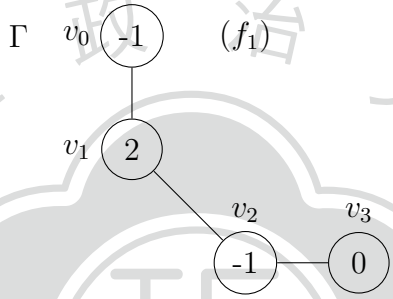


圖 5.3: $(f_1) = -1(v_0) + 2(v_1) - 1(v_2) + 0(v_3)$

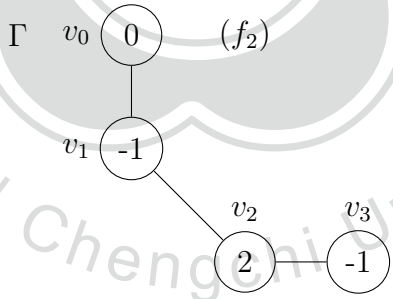


圖 5.4: $(f_2) = 0(v_0) - 1(v_1) + 2(v_2) - 1(v_3)$

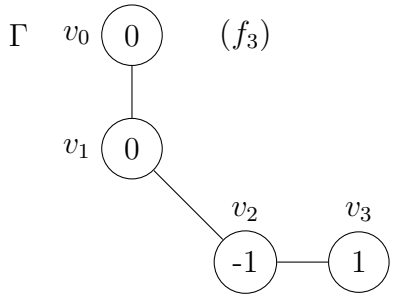


圖 5.5: $(f_3) = 0(v_0) + 0(v_1) - 1(v_2) + 1(v_3)$

國立政治大學
National Chengchi University

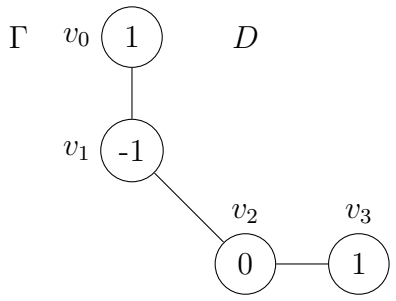


圖 5.6: 原本的因子 D

從上面的四個圖形中，我們可以觀察到，當 i 分別等於0,1,2,3時，(f_i) 的圖形就像是以頂點 (v_i) 為中心，從周遭相鄰的頂點，搬移1的係數，集中到 (v_i) 上，我們將這種搬移方式稱作 Chip-Firing 搬移。

而我們又知道對於 $\mathcal{M}(\Gamma,\mathbb{Z})$ 中的所有函數 $f : V(\Gamma) \to \mathbb{Z}$，都可以由 f_0, f_1, f_2, f_3 線性組合出來，故所有的 $f \in \mathcal{M}(\Gamma,\mathbb{Z})$，都可以對 Γ 的頂點係數進行Chip-Firing 搬移。

而更進一步的，我們知道說在 $\mathrm{Div}(\Gamma)$ 中，等價的兩個因子 D, E 必定存在一個 $f \in \mathcal{M}(\Gamma,\mathbb{Z})$ 使得 $D - E = (f)$ ，因此我們也了解，若在Γ 上的因子 D 跟因子 E 是等價，則 D 可經過 Chip-Firing 搬移後得到 E，另一方面，若在 Γ 上若有一個因子 D 經過了 Chip-Firing 搬移後得到的因子 E，則D 跟 E 必定等價。

例 5.12.

我們一樣以二次曲線Γ(圖5.1)為例，若 Γ 上的因子 $D = 1(v_0)(-1)(v_1) + 0(v_2) + 1(v_3)$，因子 $E = 2(v_0) + 0(v_1) - 3(v_2) + 2(v_3)$，
在例子5.9中，我們知道函數$f \in \mathcal{M}(\Gamma,\mathbb{Z})$，每個頂點的函數值為$f(v_0) = 2, f(v_1) = 1, f(v_2) = -1, f(v_3) = 0$ 時 ，$(f) = 1(v_0) + 1(v_1) - 3(v_2) + 1(v_3)$ 而

$$E - D = 1(v_0) + 1(v_1) - 3(v_2) + 1(v_3)$$

因此因子D跟因子E是等價因子。
我們可以從以下的圖形來觀察他的 Chip-Firing 搬移過程

由例子中我們可以更清楚的了解到，利用 Chip-Firing 搬移，可以方便的創造出衆多的等價因子，因此我們想要試著將任意在 Γ 上的因子 D 經過 Chip-Firing

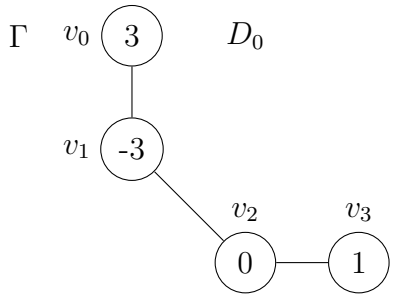


圖 5.7: 以 v_0 為中心作+2次的 Chip-Firing 搬移

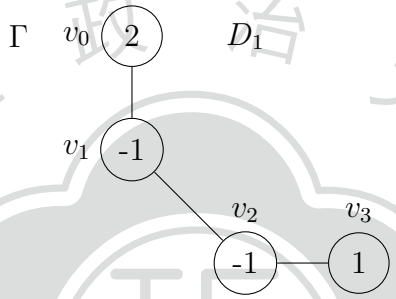


圖 5.8: 以 v_1 為中心作+1次的 Chip-Firing 搬移

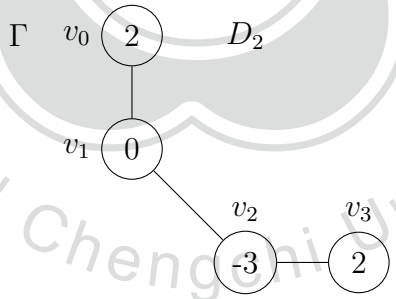


圖 5.9: 以 v_2 為中心作-1次的 Chip-Firing 搬移

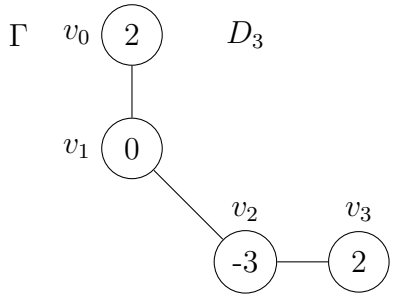


圖 5.10: 以 v_3 為中心作0次的 Chip-Firing 搬移

國立政治大學 National Chengchi University

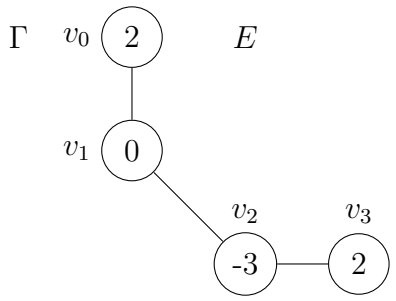


圖 5.11: Chip-Firing 搬移完成後的因子 E

搬移後，是否能夠將所有頂點的係數都轉變為非負整數的因子 E。

而在在熱帶曲線 Γ 上的因子 D 我們仍然可以用同樣的方式的定一個與 D 有關係的線 性系統 (linear system)$|D|$。

定義 5.13. 對於所有Γ上的因子D我們定義集合

$$|D| = \{E \in \mathrm{Div}(\Gamma) | E \geq 0, E \sim D\}$$

根據 $|D|$ 的定義我們也了解到，若 $|D|$ 不是空集合，則我們是可以將 Γ 上的因子 D 經過 Chip-Firing 搬移後，創造出以頂點係數皆為非負整數的因子 E。

而我們想了解 Γ 上的因子 D，所產生的搬移空間究竟有多大，並將他量化，因此我們定義 D 的 rank。

定義 5.14. 一個Γ上的因子 D，若$|D|$是空集合，則我們定rank$(D)= -1$，若$|D|$不是空集合,則rank(D)=$r(D)$=min$\{\deg(E) - 1 | E \geq 0, |D - E| = \phi, E \in \mathrm{Div}(\Gamma)\}$

根據定義，進行簡單的推導以及判斷，我們可以得到以下兩個有關 rank 的性質。

性質 5.15. 若$D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，則$r(D)$=max$\{\deg(E) | E \geq 0, |D - E| \neq \phi, E \in \mathrm{Div}(\Gamma)\}$

性質 5.16. 若$D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，$r(D) \leq \deg(D)$

以下計算幾種在不同的熱帶曲線下因子的rank

例 5.17. 在 Γ 為一次熱帶曲線時。令 $D = 3(v_0)$

很顯而易見的，我們令 $E = 3(v_0)$ 時，$|D - E| = |0(v_0)| = \{0(v_0)\}$，而$E = 4(v_0)$ 時，$|D - E| = |(-1)(v_0)| = \phi$，故 rank$(D)$=4-1=3。

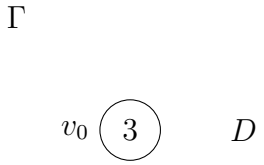


圖 5.12: 一次熱帶曲線因子 $D = 3(v_0)$

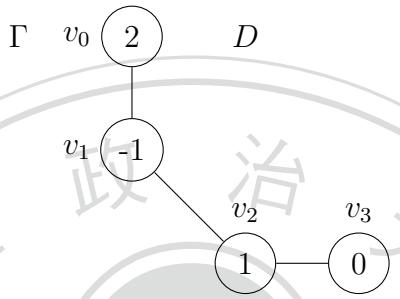


圖 5.13: 二次熱帶曲線因子 $D = 2(v_0) - 1(v_1) + 1(v_2) + 0(v_3)$

例 5.18. 在 Γ 為二次熱帶曲線時。令 $D = 2(v_0) - 1(v_1) + 1(v_2) + 0(v_3)$

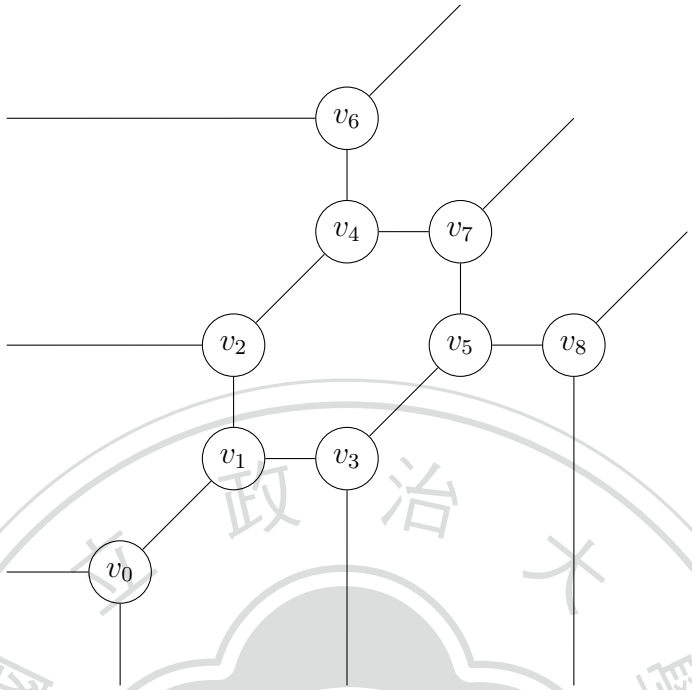
根據性質5.16，我們可以知道 rank(D)≤deg(D)=2，因此我們從deg=2 的因子先開始討論。

從引理4.13和定理4.14得知所有 Γ 上 deg=2 的因子 E 都與 D 等價，所以 $|E-D| = \{0(v_0)+0(v_1)+0(v_2)+0(v_3)\} \neq \phi$ 因此$r(D)$=max$\{\deg(E)|E \geq 0, |D-E| \neq \phi, E \in \mathrm{Div}(\Gamma)\} = 2$

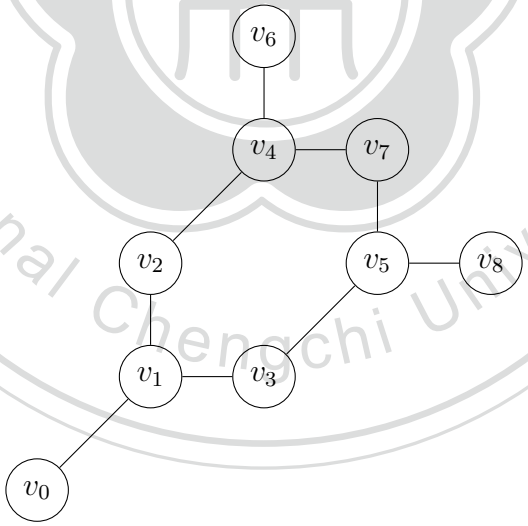
例 5.19. 接下來我們討論次數比較高的三次熱帶曲線

這是原本的三次熱帶曲線

國立政治大學 National Chengchi University



去掉射線之後的 Γ



我們隨意的另一個 D 如圖5.14，我們可以計算出 deg(D)=1，因此我們討論 $E \in$Div(Γ)，$E \geq 0$，deg(E)=0 和 deg(E)=1的兩種情況。

首先討論 deg(E)=0 的狀況 若 deg(E)=0 則僅有如圖5.15一種可能，且$(D - E) = D$很明顯的可經過 Chip-Firing 搬移後，將所有的係數變成非負整數，故$|D - E| \neq \phi$

接下來討論 deg(E)=1 的狀況 若 deg(E)=1 ，則有會有9個因子滿足此條件，

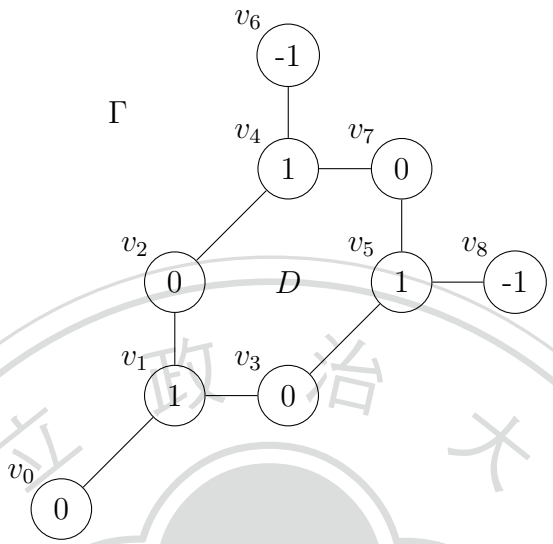


圖 5.14: 三次熱帶曲線因子 D

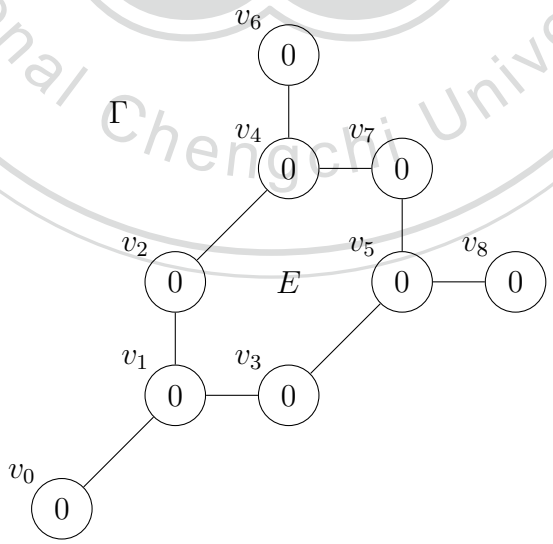


圖 5.15: deg(E)=0

國立政治大學 National Chengchi University

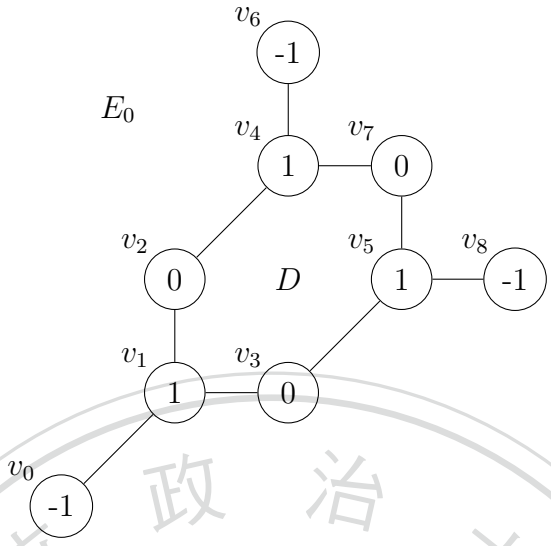


圖 5.16: deg(E_0)=1

也是就是其中一個頂點係數是1，其餘係數皆為0，我們將這種個因子依序記作 E_0 至 E_8，而 $D-E_0$ 至 $D-E_8$的九個圖形分別為圖5.16至5.24，從圖中我們可以發現，經過 Chip-Firing 搬移後僅有圖5.16及圖5.17可以轉換為圖5.15，而圖5.18，圖5.19，圖5.20，圖5.21，圖5.22，圖5.23，圖5.24，皆無法轉換成圖5.15，故我們了解，當$E=E_2$至E_8時，$|D-E|=\phi$，因此$r(D)=1-1=0$ 。

從例子當中可以發現，經過了一連串激烈的計算，一般對於熱帶曲線 Γ 上的因子 D 而言 $r(D)$ 的計算，是有著些許的麻煩，而困難程度也會隨著 deg(D) 的值增加而遞增，因此我們希望可以尋找一些規律，或著是可以找到一個範圍，來增加 $r(D)$再計算上的容易度。

為了增加在計算 rank(D) 上的方便性與速度，我們果斷的引用 Riemann-Roch 定理來進行討論

定理 5.20. (Tropical Riemann-Roch Theorem) 若 D 是一個熱帶曲線 Γ 上的因子，且Γ的虧格為 g，則

$$r(D)-r(K-D)=\deg(D)+1-g$$

有了這個定理後 我們可以拿剛剛的例子5.17、例子5.18和例子5.19來驗證看看

在例子5.17中，$D=3(v_0)$ 而 $K=(0-2)(v_0)=(-2)(v_0)$，故 $K-D=(-5)(v_0)0$，顯而易見的 $|K-D|=\phi$ ，我們得到 $r(K-D)=-1$，帶入 Riemann-

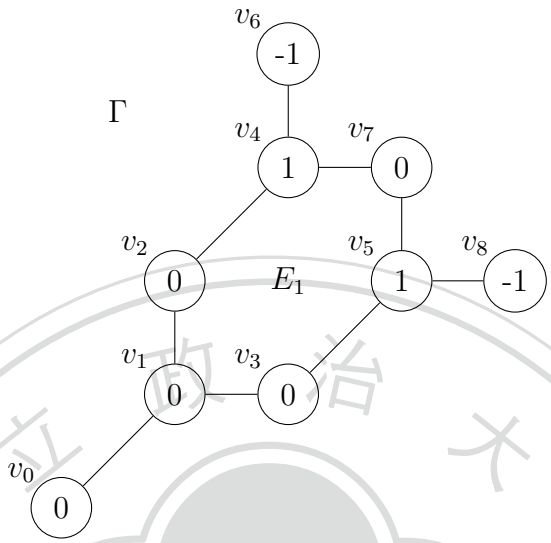


圖 5.17: deg(E_1)=1

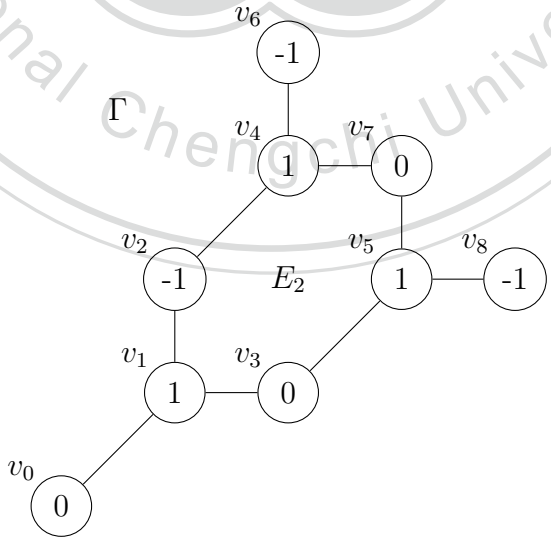


圖 5.18: deg(E_2)=1

國立政治大學 National Chengchi University

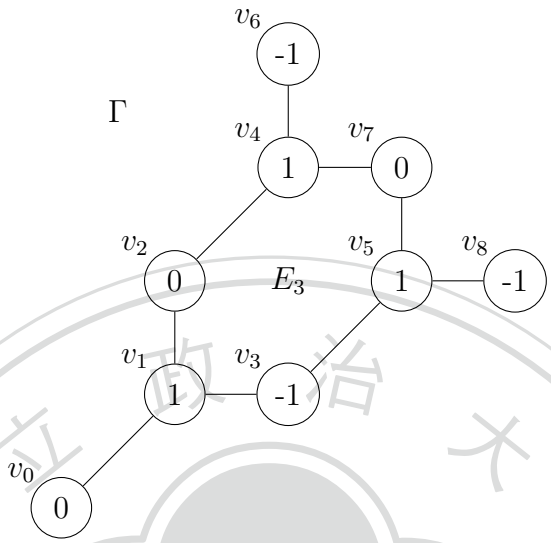


圖 5.19: deg(E_3)=1

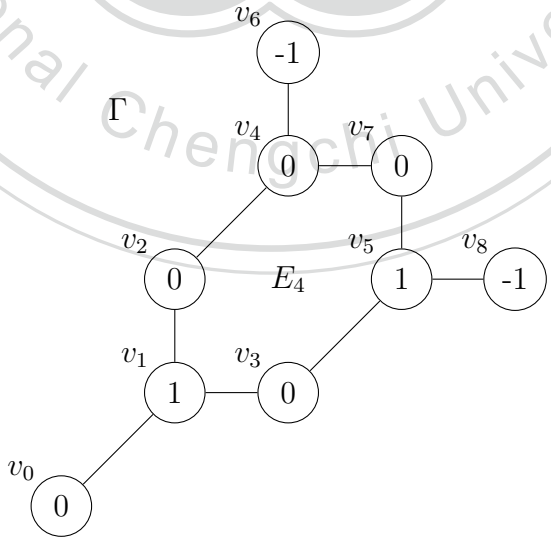


圖 5.20: deg(E_4)=1

國立政治大學 National Chengchi University

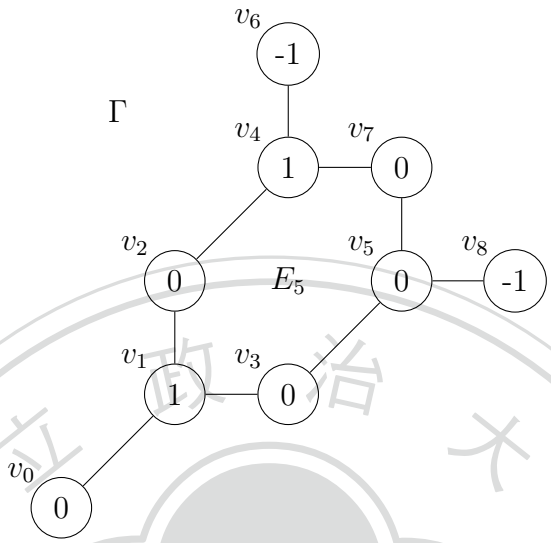


圖 5.21: deg(E_5)=1

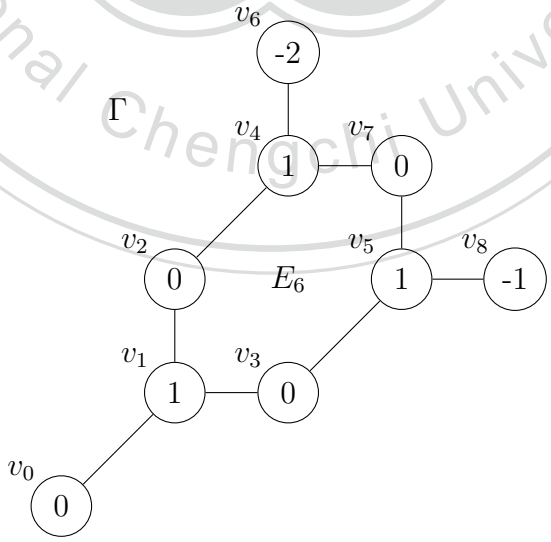


圖 5.22: deg(E_6)=1

國立政治大學 National Chengchi University

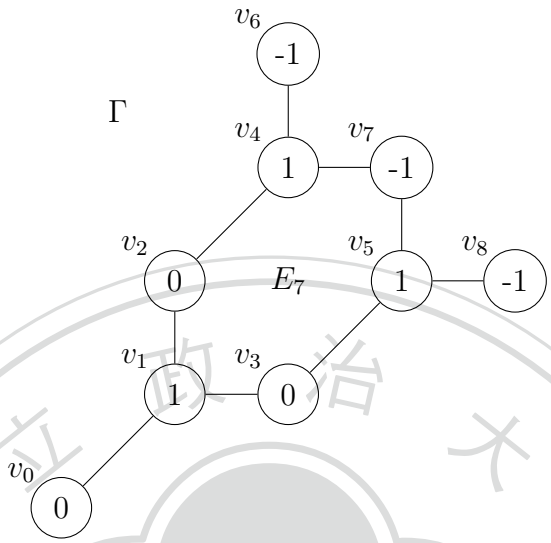


圖 5.23: deg(E_7)=1

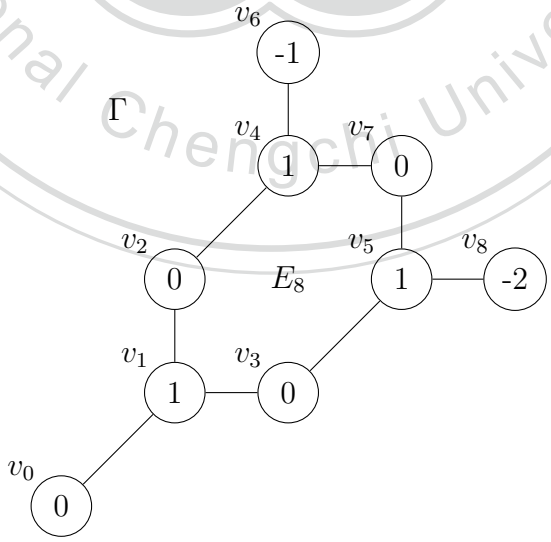


圖 5.24: deg(E_8)=1

國立政治大學 National Chengchi University

Roch 定理得到

$$r(D)-(-1)=3+1-0$$

所以

$$r(D)=3$$

與例子5.17所得到的結果無誤。

接下來我們驗證例子5.18 在例子5.18中 $D=2(v_0)-1(v_1)+1(v_2)+0(v_3)$ 而 $K=(-1)(v_0)+0(v_1)+0(v_2)-1(v_3)$，$K-D=(-3)(v_0)+1(v_1)-1(v_2)-1(v_3)$，顯而易見的 $|K-D|=\phi$ ，我們得到 $r(K-D)=-1$，帶入 Riemann-Roch 定理得到

$$r(D)-(-1)=2+1-0$$

所以

$$r(D)=2$$

與例子5.18所得到的結果無誤。

最後是例子5.19 在例子5.19中 $\deg(D)=1$ 而 根據定理5.7deg(K)=2g-2=2-2=0，因此 $\deg(K-D)=0-1=(-1)$，顯而易見的 $|K-D|=\phi$ ，我們得到 $r(K-D)=-1$，帶入 Riemann-Roch 定理得到

$$r(D)-(-1)=1+1-1$$

所以

$$r(D)=0$$

與例子5.19所得到的結果無誤。

在驗證完以上三個例子後，我們還是希望能夠在各種的狀況下，都可以有著比較精準且快速的計算方式，因此進行以下討論。

我們先討論$\deg(D)<0$時的狀況，當$\deg(D)<0$時，則$|D|$必定為空集合，所以根據定義可以得到以下引理。

引理 5.21. 對於所有$D\in \mathrm{Div}(\Gamma)$，若$\deg(D)<0$，則$r(D)=-1$

而在$\deg(D)\geq 0$的狀況下，我們將引用 Riemann-Roch 定理來進行討論

國立政治大學 National Chengchi University

從此 Riemann-Roch 定理中可以觀察到，$\deg(D)$，g皆為已知數值，因此計算$r(K-D) \geq -1$，即為較主要的工作，然而 $r(K-D) \geq -1$，所以可以得到以下兩個引理。

引理 5.22. 若D是一個熱帶曲線Γ上的因子，$\deg(D) \geq 0$，Γ的genus個數為g，且$|K-D| = \phi$則

$$r(D) = \deg(D) - g$$

證明:因為$|K-D| = \phi$，故$r(K-D) = -1$，將之帶入Riemann-Roch 定理，即得證

引理 5.23. 若D是一個熱帶曲線Γ上的因子，$\deg(D) \geq 0$，且Γ的genus個數為g，則

$$r(D) \geq \deg(D) - g$$

證明:根據Riemann-Roch 定理，我們可以得到

$$\begin{aligned} r(D) &= r(K-D) + \deg(D) + 1 - g \\ &\geq -1 + \deg(D) + 1 - g \\ &= \deg(D) - g \end{aligned}$$

根據性質5.16和引理5.23我們可以逐漸的縮小我們想計算的 $r(D)$ 範圍，因此推導出以下定理

定理 5.24. 若$D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，$\deg(D) \geq 0$，且$\Gamma$的genus個數為$g$,則

$$\deg(D) - g \leq r(D) \leq \deg(D)$$

從定理5.24中我們可以發現 $r(D)$ 的上界與下界只差一個 g 的數值，故在做計算時，只需對 $g+1$ 種狀況進行驗證即可，增加了許多在計算上的方便性，同時也可以了解虧格 g 越小則 $r(D)$ 越容易計算，若虧格 $g=0$ 時，上下界的數值將會相等，故可得到以下結論。

國立政治大學 National Chengchi University

結論 5.25. 若$D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，$\deg(D) \geq 0$，且 Γ 的虧格 $g = 0$，則

$$r(D) = \deg(D)$$

得到這個結論之後我們會想說，為什麼 Riemann-Roch 定理中的一個很重要的數值 $r(K-D)$就如此的消失了，是不是 $K-D$ 這個因子在計算過程中出了什麼問題，因此我們再次的對 $(K-D)$ 作觀察，得到以下結論。

結論 5.26. 若$D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，$\deg(D) \geq 0$，且 Γ 的虧格 $g = 0$，則

$$|K-D| = \phi$$

證明:根據結論5.25 因為當$g = 0$時$r(D) = \deg(D)$，帶回 Riemann-Roch 定理後，得到

$$\deg(D) - r(K-D) = \deg(D) - g + 1$$

兩邊同時將$\deg(D)$消去後得到

$$r(K-D) = -1$$

因此

$$|K-D| = \phi$$

用另外一個角度去驗證

若 Γ 的虧格 $g = 0$，則 $\deg(K)$=2g-2=0-2=-2，但 $\deg(D) \geq 0$，所以

$$\deg(K-D) \leq 0$$

顯而易見的

$$|K-D| = \phi$$

最後扣回到我們最常討論的熱帶曲線，會發現在 $d = 2$ 時，平滑二次熱帶曲線的虧格必定是0，因此此可以得到下面的結論。

國立政治大學 National Chengchi University

結論 5.27. 若Γ為對偶圖形 Δ_2 所生成的平滑熱帶曲線時，則對於所有的 $D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，

$$r(D) = \deg(D), |K - D| = \phi$$

證明:根據結論5.25和結論5.26得證。

而在 $d = 3$ 時，平滑三次熱帶曲線的虧格必定是1，因此此可以得到下面的結論。

結論 5.28. Γ為對偶圖形 Δ_3 所生成的平滑熱帶曲線時，對於所有的 $D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，若$\deg(D)> 0$ 則

$$r(D) = \deg(D) - 1, |K - D| = \phi$$

證明: 根據性質5.16我們可以得到 deg(K)=2g-2=0，因為 deg(D)> 0，所以$\deg(K - D)< 0$ 故

$$|K - D| = \phi$$

而$|K - D| = \phi$根據定義$rank(K - D) = -1$，帶回 Riemann-Roch 定理

$$r(D) = -1 + \deg(D) + 1 - 1 = \deg(D) - 1$$

從以上的許多定理當中，我們可以發現熱帶曲線上因子的致，明顯受到虧格的限制，因此大幅的增加了離散型熱帶曲線因子致的計算上的容易度。

而在本篇論文中僅僅對於離散型的熱帶因子進行討論。然而熱帶曲線上依然可以建構連續型的因子，也依然有連續型的 Riemann-Roch 定理 [6]，因此在未來我們仍然可以對於連續型的熱帶因子性質，有更深入的研究。

國立政治大學 National Chengchi University

Bibliography

[1] Matthew Baker. Specialization of linear systems from curves to graphs. *Algebra Number Theory*, 2(6):613–653, 2008. With an appendix by Brian Conrad.

[2] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.

[3] Lucia Caporaso and Joe Harris. Counting plane curves of any genus. *Invent. Math.*, 131(2):345–392, 1998.

[4] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[5] S. Gao and A. G. B. Lauder. Decomposition of polytopes and polynomials. *Discrete Comput. Geom.*, 26(1):89–104, 2001.

[6] Andreas Gathmann and Michael Kerber. A Riemann-Roch theorem in tropical geometry. *Math. Z.*, 259(1):217–230, 2008.

[7] Grigory Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2):313–377, 2005.

[8] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov. Tropical curves, their Jacobians and theta functions. In *Curves and abelian varieties*, volume 465 of *Contemp. Math.*, pages 203–230. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[9] Shinsuke Odagiri. Tropical algebraic geometry. *Hokkaido Math. J.*, 38(4):771–795, 2009.

[10] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

國立政治大學 National Chengchi University

[11] David Speyer and Bernd Sturmfels. Tropical mathematics. *Math. Mag.*, 82(3):163–173, 2009.

[12] Vitaly I. Voloshin. *Introduction to graph theory.* Nova Science Publishers Inc., New York, 2009.

國立政治大學
National Chengchi University