

國立政治大學應用數學系

數學教學碩士在職專班

碩士學位論文

九年級學生如何處理直線型位置—時間圖之研究

**A study of 9<sup>th</sup> grade students'  
comprehension of  
the linear position — time graph**

碩專班學生：高抬主 撰

指導教授：譚克平 博士

宋傳欽 博士

中華民國 九十九 年 七 月 二十八 日

## Abstract

The purpose of this study is to understand whether 9<sup>th</sup> grade students can actually manipulate the states of motion of objects and understand the concepts of mathematics embedded in the graphs when they are dealing with the linear position—time graphs.

Ten tool graphs were designed based on the position-time graph as the research tools in this study. Twelve 9<sup>th</sup> grade students, 6 males and 6 females, were chosen randomly. Through doing semi-structured interviews, the researcher collected the data and deeply explored whether participants could manipulate the states of motion of objects and comprehend the mathematical concepts embedded in the graphs when they were dealing with the linear position time graphs. The collected data were analyzed qualitatively and organized. The conclusions are as follows:

1. The students' capability of slope and intercept in mathematics is insufficient, and it influences their learning of the position-time graphs.
2. Students only have little understanding of the presentation of the graphs. Thus, they cannot apply mathematical abilities or interpret real phenomena.

Following suggestions are provided according to the conclusions in this study:

1. Mathematical teaching should be emphasized on the connection with the science domain.
2. Mathematical teaching should highlight the connection between abstract symbols and real situations
3. Science teaching should guide the students to transfer the new knowledge to the learned knowledge.
4. Multiple teaching resources should be used properly to help students proceed to learn multiple intelligences.

The direction of further studies can aim at different participants, different patterns of questions or expanding the study on speed-time graphs and acceleration-time graphs to apply the knowledge and theories of science and mathematics in life.

Keywords: linear, position-time graph, slope, intercept

## 摘要

本研究的目的是在於了解九年級國中學生在處理直線型的位置-時間圖形時，是否可真實操作物體的運動狀態，及了解圖形中所隱含的數學概念。

本研究將位置-時間圖設計成十張工具圖形作為研究工具，隨機抽取十二名國中九年級學生，男女各六位，透過半結構性晤談，以蒐集個案在處理直線型的位置-時間圖時，是否可操作物體的真實運動狀態，以及能否掌握圖形中所隱含的數學概念逐一作深入的探討，再以質化的方式分析及統整所蒐集的資料，得到的結論如下：

- 一、學生數學的斜率、截距能力不足，以致影響位置-時間圖的學習。
- 二、學生圖形表徵的理解薄弱，以致於無法應用數學能力及解釋真實現象。

根據本研究的結果，可提出下列建議：

- 一、數學教學應加強與科學領域之連結
- 二、數學教學應著重抽象符號與真實情境之連結
- 三、科學教學應輔導學生建立新舊知識之遷移
- 四、數學教學應善用多元教學資源，以協助學生進行多元智慧之學習

在未來的研究方向，可考慮不同的研究對象、題目型態或是繼續擴大研究至速度-時間圖、加速度-時間圖，加強科學與數學的知識理論應用於生活中。

關鍵字：直線型、位置-時間圖、斜率、截距

# 目 錄

Abstract.....	I
摘要.....	II
目 錄.....	III
表 目 錄.....	IV
圖 目 錄.....	V
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與研究動機.....	1
第二節 研究目的.....	5
第三節 研究問題.....	5
第四節 名詞界定.....	5
第五節 研究限制.....	5
第二章 文獻探討.....	6
第一節 數學與科學之密切關係.....	6
第二節 表徵.....	9
第三節 x-t 圖相關之研究.....	14
第四節 多元智慧.....	19
第三章 研究方法與步驟.....	22
第一節 研究設計.....	22
第二節 研究工具.....	23
第四節 研究方法的構思.....	34
第四章 資料分析.....	37
第一節 x-t 圖形的截距概念.....	38
第二節 x-t 圖形的斜率概念.....	54
第三節 x-t 圖形的方向性概念.....	80
第四節 x-t 圖形的截距概念與斜率概念之相關影響.....	89
第五章 結論與建議.....	120
第一節 結論.....	120
第二節 建議.....	124
附錄 A 直線型 x-t 圖形之研究-專家效度半結構式訪談大綱.....	127
附錄 B 工具.....	130
附錄 C 訪談文字稿.....	138
參考文獻.....	180

## 表 目 錄

表 3-1 直線型 x-t 圖形參與校訂之現職教師、研究所博士生一覽表.....	29
表 3-2 專家訪談建議與修定情形對照表 .....	31
表 3-3 學生之數理能力對照表 .....	34
表 4-1 高數理能力受試者在處理直線型 x-t 圖的截距概念表現之比較.....	41
表 4-2 中數理能力受試者在處理直線型 x-t 圖的截距概念表現之比較.....	46
表 4-3 低數理能力受試者在處理直線型 x-t 圖的截距概念表現之比較.....	52
表 4-4 高中低三種不同數理能力探討截距概念之表現 .....	53
表 4-5 高數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形比較物體運動快慢 .....	60
表 4-6 高數理能力受試者在探索直線型 x-t 圖形的斜率概念比較.....	60
表 4-7 數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形比較物體運動快慢 .....	69
表 4-8 中數理能力受試者在探索直線型 x-t 圖形的斜率概念比較.....	70
表 4-9 低數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形比較物體運動快慢 .....	77
表 4-10 低數理能力受試者在探索直線型 x-t 圖形的斜率概念比較.....	78
表 4-11 高中低三種不同數理能力探討斜率概念之表現 .....	79
表 4-12 高數理能力受試者在方向性之表現比較 .....	81
表 4-13 中數理能力受試者在方向性之表現比較 .....	84
表 4-14 低數理能力受試者在方向性之表現比較 .....	86
表 4-15 高中低數理能力受試者在方向性之表現比較 .....	88
表 4-16 高數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念.....	98
表 4-17 中數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念.....	108
表 4-18 低數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念.....	118
表 4-19 高中低三種不同數理能力探討受截距影響之斜率概念表現 .....	119

## 圖目錄

圖 1 圖形視為圖像.....	3
圖 3-1 直線傾斜度較大 .....	23
圖 3-2 直線傾斜度較小 .....	24
圖 3-3 地圖 .....	32
圖 3-4 實施步驟流程圖 .....	36
圖 4-1 低數理能力學生 BL2 在圖形上之表現 .....	48
圖 4-2 低數理能力學生 BL2 在圖形上之表現 .....	50
圖 4-3 高數理能力受試者 GH2 在過原點圖形之斜率表現 .....	54
圖 4-4 中數理能力受試者 GM1 在過原點圖形之斜率表現.....	62
圖 4-5 中數理能力受試者 GM2 在過原點圖形之斜率表現.....	63
圖 4-6 中數理能力受試者 BM2 在過原點圖形之斜率表現.....	63
圖 4-7 中數理能力受試者 BM2、GM2 在 t 軸之上水平直線圖形斜率概念表現 .....	67
圖 4-8 中數理能力受試者 BM2 在 t 軸之下水平直線圖形斜率概念表現 .....	68
圖 4-9 高數理能力受試者 GH1、GH2、BH2 在過原點直線型 x-t 圖形表現 .....	90
圖 4-10 高數理能力受試者 GH1、GH2、BH2 在非過原點正截距之斜率表現 ...	93
圖 4-11 高數理能力受試者 GH1、GH2、BH2 在非過原點負截距之斜率表現 ...	95
圖 4-12 中數理能力受試者 BM2 在過原點的直線型 x-t 圖形之表現.....	100
圖 4-13 中數理能力 GM2、BM1、BM2 在非過原點圖形正截距之斜率表現 ...	102
圖 4-14 中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2 在圖形的負截距概念之表現 ...	105
圖 4-15 低數理能力受試者 BL1、BL2 在過原點直線型 x-t 圖形之表現.....	110
圖 4-16 低數理能力 GL2、BL1、BL2 在非過原點正截距圖形之表現.....	112
圖 4-17 低數理能力 GL2、BL2 在非過原點負截距圖形之表現.....	115
附錄 B 圖 1 .....	130
附錄 B 圖 1a .....	130
附錄 B 圖 1-1 .....	131
附錄 B 圖 1-2 .....	131
附錄 B 圖 2-1 .....	132
附錄 B 圖 2-2 .....	132
附錄 B 圖 2-3 .....	133
附錄 B 圖 2-4 .....	134
附錄 B 圖 2-5 .....	135
附錄 B 圖 2-6 .....	135
附錄 B 圖 2-7 .....	136
附錄 B 圖 3-1 .....	136
附錄 B 圖 3-2 .....	137

# 第一章 緒論

## 第一節 研究背景與研究動機

國際知名數學學家丘成桐曾說：數學是科學的語言，數學也是協助工業和商業發展的工具之一，學習數學不僅能讓我們擁有解決困難問題的能力，還能幫助我們了解大自然以至於宇宙的運作。蔡淑君（2010）指出科學知識源自人們科學現象的觀察，透過歸納與推理而建立科學概念，漸漸形成知識，進一步了解科學現象中變項與變項之間的關係。而這些關係即使頗為複雜，然而數學卻能夠簡潔的、明確的表達變項與變項之間的關係，因此，科學知識常以數學作為表徵的工具或語言，而好的科學學習則是將科學現象、科學知識、數學知識三者緊緊相扣。隨著科技的進步我們的生活愈來愈便利，例如，自2007年高鐵通行後，台北到高雄不再需要費時一天的車程，只要短短兩個小時以內就能抵達；大眾捷運的文湖線開通以後，從內湖到木柵動物園看貓熊，也能在四十分鐘內抵達，便捷與快速的大眾運輸縮短兩地的距離以及時間的花費，這些都需歸功於科學家為提升我們生活品質所做的貢獻。從科學史可以發現在自然現象中，從觀察物體運動的快慢，到深入了解以及描述速度的概念，進而發展了數學的變量及函數等概念作為描述的工具，對物體運動的問題建立起運動學的科學知識。

既然速度問題環繞在日常生活中，研究者發現不同的求學階段，所能傳達的物理概念也不同，根據皮亞傑的認知發展論，本國國小學童在學習速度問題時，大多學童屬於具體運思期（concrete operational stage）的認知階段，尚未到達形式運思期（formal operational stage），對於負速度用來表示物體反向運動之概念，以及生活經驗影響的緣故，是以「速度」一詞取代物理定義中的速率概念來描述物體運動的快慢，並且不涉及方向的問題；到了國中階段，才開始引入物理定義的速度概念：所謂速度（velocity）是描述物體運動的快慢以及運動方向的物理量，包含單位時間內物體位移的距離和方向三種要素，是一

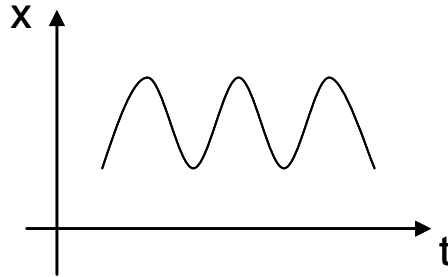
個向量 (vector quantity)；而速率是物體位移的距離與所耗費時間之比，它是速度的大小不含方向，只是一個純量 (scalar) (大華百科全書，1995；牛頓數學辭典，1997；物理大辭典，1974)。由於物體運動速度的快慢根據物理的定義是位移與時間的關係，洪健寶 (2005) 指出變項與變項之間的關係，時常會透過數學式、表列，以及圖形三種方式描述。而常雲惠 (2002) 則認為數學式與表列或圖形的功能相當，皆可表示變項與變項之間的關係，通常數學式是最簡潔的表達方式；表列是把各個變項的數值以列表的方式呈現；圖形則是利用視覺的方式，透過對圖形的觀察掌握各個變項之間的關係，甚至用來預測變項之間未來的發展，亦能釐清數學式中的係數所表示的意義，或是表列中許許多多的數字間所隱藏的意涵。換句話說，描述運動中的物體位置隨著時間的改變，可以透過數學的語言作轉換，分別以數學式、表列、圖形三種不同的型式來呈現。

對於科學學習來說，大部分都以圖形作為教學上的考量，陳秋萍 (2004) 指出在科學的教科書或有關於科學的報導中，圖形的應用相當普遍，我國中小學的教科書就含有大量的圖形。科學運用數學上的圖形工具是因為它不但可以視覺化的解釋各變項之間的關係 (Bastide, 1990; Chambers, Cleveland, Kleiner & Tukey, 1983; Lemke, 1998)，可以取代文字敘述之外，亦將抽象概念轉化成具體的圖像，也比較容易引起學習者的注意力，進而幫助記憶。科學家從觀察科學現象中取得訊息，利用圖形將訊息做有系統、具體的呈現。我國在國中階段自然科學所學的直線運動單元，對於描述物體運動的狀態，便足以直線的關係圖形來表示，像是位置-時間圖、速度-時間圖、加速度-時間圖等，而直線雖然是圖形中較簡單的圖形，但卻令人意外的是，在許多人的研究中發現：以直線圖形呈現的物理概念，常常是讓學生感到比較難理解的部份 (簡順永，1999；McDermott, 1986; Trowbridge, 1980; Brasell & Rowe, 1993)。研究者在陳秋萍的文獻中發覺學生會將速度-時間圖形混淆成位置-時間圖形，亦如圖形視同圖像 (graph as picture)，然低分組的學生較容易產生這類的錯誤，圖形視同運動的軌跡，而研究者也在一本教科書中發現到這個問題，學生會將圖形的曲線視為物體所走的路徑 (Janvier, 1978)，如下圖1所示：



圖1 圖形視為圖像

資料來源：by Janvier C. (1987)



也有的學生視位置-時間圖為物體運動的軌跡圖，將線段的方向認為是物體運動的方向，線段往上就表示物體往上運動，線段往下就表示物體往下運動。研究者在去年任教九年級的學生，學生正值理化科學習等速度運動單元及數學科複習進度在線型函數的單元，研究者亦發現許多學生在這兩科相關的學習上並沒有利於正向遷移，反而產生許多混淆及當成不相關的片面知識，進而造成許多學生對於科學，特別是對物理產生了莫大的恐懼感，當他們產生這樣的感受時，又正值學習時數減少和國中基本學力測驗的升學壓力，也難怪學生對於圖形及相對的公式，自然就以背誦和記憶的方式處理，如此的能力與九年一貫所培養的「帶著走的能力」有著極大的差異。

美國數學教育協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)認為數理教育應當注重學生在數學課中所學得的概念應用到數學以外的活動，轉化數學技能到應用的領域問題。故加強學生在圖形與真實情境間的轉換、以及數學式間的轉換的同時，讓學生明白數學與科學之間的關係，就是學生所學習到部份的科學知識是科學家們將所觀察到的科學現象，透過嚴謹的數學方法驗證及描述後建立起來的，而抽離了這些情境後的數學，自然就是一堆抽象的符號。在McDermott 等人 (1987) 的研究發現有些學生無法將他們在數學課裡學到的圖形概念應用到其他學科。根據研究者在國中的教學經驗，學生學完三年數學後，即使了解數學與科學之間關係密切，但對數學的觀感仍是

一堆公式、符號、證明、計算，根本無法連結、應用到其他學習領域，徐文鈺（1992）認為像是數線、座標圖等都是與數學學習有關的呈現方式，將抽象的概念或內心所想概念以視覺的方式表現。因此，研究者欲探討學完數學線型函數能力的九年級學生，在科學課程所面臨到的位置-時間圖形是否能改變一次函數，及對於圖形所對應到真實情境之相關性為何，並對學生解讀圖形之歷程作質化分析，以提供數學、科學教學者，在未來兩大學習領域有更多的連結。



## 第二節 研究目的

鑒於以上研究動機，本研究的研究目的為了解九年級學生在處理位置-時間圖形問題，是否掌握位置-時間圖形中所隱含的數學概念，以及位置-時間圖所對應真實物體之運動狀態。

## 第三節 研究問題

- 1.九年級學生如何處理直線型 $x-t$ 圖形中的截距和斜率概念？
- 2.九年級學生在處理直線型 $x-t$ 圖形時，是否能對應到的真實物體運動狀態？

## 第四節 名詞界定

- 1.直線型：本研究所探討的位置時間圖皆以直線型為主。
- 2.位置-時間圖：縱軸表示物體的位置、橫軸表示物體運動的時刻，此研究將以 $x-t$ 圖簡稱。
- 3.正向遷移：學習過的舊事物後的經驗有助於以後新學習現象。
- 4.斜率：在座標平面上，直線上的某一點水平往右一個單位時，再往上或往下移動多少單位才回到直線，此量以斜率稱之。
- 5.截距：直線與  $x$  軸交點的坐標稱為直線的  $x$  截距，與  $y$  軸交點的坐標稱為直線的  $y$  截距。

## 第五節 研究限制

- 1.本研究欲探討教學現場的真實現況，但限於人力、物力及客觀的因素，且九年級學生正逢考試衝刺期，無法有大量時間做前測，故不預設工具施測結果，以探索性的心態蒐集原案全貌。僅以台北市立某國中十二位九年級學生為樣本，因此不宜過度推論。
- 2.本研究以半結構性晤談的方式來蒐集學生對應到的數學能力及  $x-t$  圖轉換到的真實物體運動，但礙於受試者有時候很難同步作到邊看、邊說、邊想、邊寫，故有時候難以得到受試者完整的訊息。
- 3.本研究只限於研究  $x-t$  圖，且以單一直線為主，未來可以探討綜合圖形或是兩條以上的直線圖形，甚至可以再深入研究  $v-t$  圖、 $a-t$  圖。

## 第二章 文獻探討

### 第一節 數學與科學之密切關係

#### 一、數學與科學之關係

數學不僅僅讓學生擁有解決困難問題的能力，還能協助學生了解大自然、宇宙的運作。獲得諾貝爾獎的物理學家楊振寧（1995）：「我欣賞數學家的價值觀，我讚美數學的優美和力量：它有戰術上的機巧與靈活，又有戰略上的雄才遠慮，而且，奇蹟的奇蹟，它的一些美妙概念竟是支配物理世界的基本結構。」然而，愛好科學的人，多半知道從牛頓以來，數學與科學之間密切的關係，今日許多科技成果追本溯源，處處皆可見到數學的足跡。

據說文解字，科，會意字：「從禾從斗，斗者量也」；故「科學」一詞乃取「測量之學問」之義為名，並將所有的知識統稱為「學問」。而數學是人類面對實際生活時，解決問題而產生的，依循嚴謹的邏輯程序發展成一個知識體系，它的特點在於能從問題的本質，探究內在深層的模式與結構，它的敘述方式更是一種抽象形式的語言（教育部，2003）。而學習科學的目的，不只是學習科學的知識內容，更重要的是學習科學的態度與科學的精神。科學是製造新知識的過程，在這個過程中，我們會加以仔細觀察發生的現象，在觀察後建立了一些理論作為描述與解釋所觀察到的事物與現象。

學校的科學知識，除了讓學生熟悉之外，更應該讓學生了解這些知識的產生過程，並非告知學生產出的結果，學生認為科學難以學習之處就是在此，幾千年的科學知識，是透過嚴謹的科學方法推論所得的結果，學生縮短了前人從觀察到驗證的時間外，更須要想辦法從理解到應用，從分析再到創造，才能促使科學進步，相信這應當是現今科學教育中最需要改進的地方，原因是我們只是學了科學知識，而沒有學到真正的科學。賴燕慶（2006）表示學習科學就像是學習累積新知識的過程，透過謹慎的觀察、嚴密的設計、精進的分析，才能為全人類累積新的知識，並也主張學生應多做實驗、研究，從中學習累積新知

的步驟，不能只是讓學生記憶前人累積的科學知識，所謂真正的科學是要在人類還未發掘的領域中，透過科學的方法來驗證、探索出人類從未探索的知識，才是九年一貫自然與生活科技學領域的精神所在。

同樣的，在九年一貫的數學學習領域中，學生應當重視數學知識形成的過程、理解數學的知識，培養驗證和批判的研究精神，並將數學應用在真實生活的問題解決中，清楚的了解到我們的世界是奠定在數學基礎上，發掘數學其實是生活的、實用的、無所不在的，體驗數學的真實感受。科學當數學是一種檢查外在世界的語言，為的是發現其次序和其和諧，這些事物透過數學而裸露在我們的面前，所以，課程的設計更應該注重數學與各學習領域內在結構的互相連結，以及數學在生活情境、歷史、其它學科（如自然科學）的連結。

## 二、加強科學與數學的連結是為課程重要目標之一

Halloun & Hestenes (1985) 指出有好的數學基礎才能成就好的物理。像是萊布尼茲的微積分與牛頓定理的結合，對於變化速率的分析更為快速容易，不論是在地板上滾動的球或太空中行星的運轉，或是人造衛星環繞地球的運動，都能更精確的加以了解和控制(林炎全等, 民72)。Rutherford & Ahlgren(1990) 提出的2061計劃方案(Project 2061) 中談論數學本質，亦指出科學與數學之關係，科學提供數學有趣的探究問題之情境，而數學則提供了科學作為有用的分析工具，也提醒所有的數學或是科學教師，應該別於過往著重於科學理論及數學的抽象學習，應當加強連結科學與數學的知識理論於生活中，並非只是單純的傳授或學習知識。美國數學教育協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) 主張數理的教育應當重視學生們將數學課堂裡所學到的應用到數學以外的相關課程或活動中，這項主張也指示了數學技能應用到其他領域的問題。

近年來數學教育的改革開始重視數學應用在實際生活的問題解決，即使許多人對數學的印象是抽象的、理論的、符號的、不實用的、艱深難懂的科目，透過教育的落實與改革，從日常的生活經驗著手，運用、綜合相關學科的知識

及技能，以培養解決實際問題的態度及能力，如科學中的運動學與數學的函數概念極為密切、力的測量單元必須具備數學的解讀圖表訊息的能力、溶液的PH值單元必須具備數學的對數基本概念、電磁感應單元必須具備數學向量外積的概念等，不論是物理現象、還是化學現象皆存在許多數學知識的概念。

九年一貫數學領域課程綱要提及數學能力為國民素質的一項重要指標，除了數學知識外，計算能力、抽象能力及邏輯推演能力的培養是整個數學教育的主軸(教育部，2004)。而計算能力、抽象能力及邏輯推演能力，正是科學學習過程技能中所需要的能力之一，另外，也包括圖表的製作與解讀、數據的分析等都是透過數學能力進行科學學習。若學生沒有具備所必須的知識與能力，學生困擾的不僅是數學課程的學習，也影響著科學課程的學習( Czerniak et al, 1999)。

試想，學生在學習科學時所需的數學概念若不足以運用時，則學生在學習科學概念將處處受到阻礙。此外，自然與生活科技領域課程的能力指標中，有許多部分都需要具備基本的數學能力。而數學能力依據在科學學習上的運用可歸類為：製作圖表的能力、數據分析的能力、判斷的能力、推理的能力等，可見數學在科學中的角色並非單純計算而已。因此，教師必須在理化教學中運用到數學概念，學生也必須發揮數學能力進行科學的學習。楊宗達（2001）在自然科學課程的設計上強調應考量重視科學知識的傳達，以及科學與其它學習領域的關聯性。張惠博（1986）發現九年級的理化課程，學生缺乏繪製正確的座標圖形的能力，甚至在處理具有誤差的測量值時，也未能依變量之間的函數關係繪成應有的函數圖形，僅能將諸點數據資料以線段連接起來；也就是說，有待加強學生在函數概念應用在物理實驗數據的處理能力。

## 第二節 表徵

### 一、認知心理學的表徵

「認知」這個名詞，通常指與知識的獲得有關的心理活動或歷程，包含推理、判斷、感覺、視覺、語言、情感、記憶、學習和肢體技能等。在認知心理學上，所謂表徵就是把某件事物「重新呈現」，在我們心裡的任何標記、符號、或一組象徵，但是該項事物並沒有實際出現（Eysenck & Keane，李素卿譯，2003）。而以認知心理學的觀點，表徵的概念可以用來說明幾乎所有的人類的心智活動（韓承靜，1998）。Bruner將人類對其環境週遭事物，經知覺而將外在物體或事件轉換為內在心裡事件的過程，稱為認知表徵，或知識表徵。意指人類經由認知表徵的過程獲得知識，可分為三個階段（鍾瑞珍，2002）：

- （一）動作表徵為靠動作來獲得知識。
- （二）形象表徵或圖像表徵為經由物體知覺留在記憶中的心像，或靠圖形、照片等獲得知識。
- （三）符號表徵或象徵表徵指運用符號、語言文字為依據的獲得知識的方式。

Hibert 和 Carpenter 將表徵依其存在的方式區分為外在表徵（external representation）與內在表徵（internal representation），分述如下（引自黃永和，1997）：

#### （一）外在表徵

指以語言、文字、符號、圖片、具體物、活動或實際情境等形式存在的表徵。透過外在表徵，我們可以表達出自己的想法而與他們達到溝通的目的。

#### （二）內在表徵

指存在於個人心中或腦海裡，他人無法直接觀察的心智表徵。透過內在表徵，個體可以進行想像、構思、推理等心智思考的活動。

綜合上述，我們可以理解在心理學「表徵」一詞，是在描述個體內在或心理的建構和外在表現的形式，而本研究中所指的表徵即是指外在表徵。

### 二、數學表徵

在數學學習中，「表徵」（representation）是個非常重要的概念。就認知

心理學家 Sternberg (1996) 所下的定義是指：「個人心智中對於外界的人、事、物所了解到的形式」。李伯黍等譯 (2003) 指出一般心理學的表徵是指代表、取代、象徵或表示一個事物為另一個的事物。張春興 (1989) 認為表徵是將外在真實世界轉換為心理事件的歷程。彭聃齡和張必隱 (2000) 對表徵作出兩種解釋，第一種是某種東西的信號，包括內容和形式；第二種是知識的組織方式。曾靖雯 (2002) 將表徵定義為數學學習中，思考、解釋接收到的訊息，並用以表達想法，和他人溝通的媒介。蔣治邦 (1994) 表徵以某種型式，將事物或想法重新顯現出來，達成溝通的目的；切實掌握其所表示的意義後，表徵則可以進一步地成為運思材料，簡化解題的過程。換句話說，「溝通工具」和「運思活動材料」是表徵的功能。劉秋木 (1996) 認為使用一個符號表示一組經驗時，我們所使用的符號便是該組經驗的表徵 (或譯為表象)，所用的符號可以是動作、擬聲、圖畫、圖形，或是心像，亦可以是抽象的文字；在數學學習上，表徵應被視為幫助學生了解數學概念和關係的有效概念。

數學表徵的研究是者根據莊凱安 (2002)、魏君芝 (2002) 以及謝孟珊 (2000) 三位研究者的研究資料整理而成。數學的表徵分為四種互動的表徵類型 (Kaput, 1987; 吳昭容, 民 81)

- (一) 認知及知覺表徵 (cognitive and perceptual representation)：指學生在使用數學符號 (外在表徵) 時所形成的內在系統。
- (二) 解釋的表徵 (explanatory representstion)：指聯結自然語言或心像與其他數學符號之間關係的系統。
- (三) 數學內的表徵 (representation within mathematics)：指以數學的某一種結構呈現到另一結構特性的系統。
- (四) 外在符號表徵 (external symbol representstion)：指以外的符號表徵數學性質的系統。

國內外各國的數學教育對表徵都相當重視，美國數學教師協會 (簡稱 NCTM) 在二 0 0 0 年出版的《學校數學的原則和標準 (Principles and standards for school mathematics)》中提到由幼稚園至中學的學生在表徵方面所應該達到的三個教育目標：

- (一) 建立和使用表徵來組織、記錄及溝通數學思維；
- (二) 選擇、應用和轉譯數學各種表徵來解決問題；



(三) 使用表徵模式化和詮釋物理的、社會的和數學的現象。

我國在九年一貫課程綱要數學學習領域中就提到許多表徵，發展抽象化能力始於能運用符號、記號、模型、圖形或其它數學語言、清楚傳達量化、邏輯關係；溝通包括理解與表達兩種能力，所以，數學溝通一方面要能了解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊，另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思。在「連結」主題的指標 (C-S-02) 明列「能選擇使用合適的數學表徵」；在「溝通」主題的指標 (C-C-01) 明列「為了解數學語言 (符號、用語、圖表、非形式化演繹等) 的內涵」。此外，強調數學教育要能啟發學生自行在不同數學概念之間做連結，並連結數學與其它學習領域 (教育部，2003)。

由此，看出國內外數學教育對表徵學習的重視，表徵被視為學習數學所應具備的重要能力之一。Von Glasersfeld (1995) 認為學生將他們所參與的活動，透過心理的表徵而建構他們對活動內容的運思。

### 三、科學表徵

研究者發現中、高程度的學生大多數皆可以掌握文字表徵，只需多指導學生圖形所聯結的科學意義；而低程度的學生則須從引導理解文字表徵再逐步轉換至圖形表徵。從科學教育的眼光來看，推理的過程是可以機械模組化的，但此機械式的過程可能讓學習者本身失去了創造力、想像力，若能夠根據問題情境，彈性的運用適當的數學表徵，如具體操作的、圖表的、符號的...等等具體或抽象的方式，思考和培養解決問題能力的基本要素，也就是說數學表徵在數學學習的過程當中佔有相當重要的地位。而科學表徵就是一種現實世界的表現，圖表以及具體操作亦是表徵的一部分，所以彈性的運用與結合數學表徵以及科學表徵，做適當地轉換，對學習者來說肯定是一種正增強的刺激。

其表徵類型大部份是以圖片及附加文字說明來聯結科學學習概念，圖片除了是表徵的一種型態之外，Hegarty & Just (1989) 指出圖形具備可以描繪事物的空間與視覺上的性質以及提供更快速、簡明的訊息。除了圖片之外，還有實驗紀錄表，亦是科學表徵的一部分。另外透過教具、動畫、實際的操演，也同

樣的能使學生學習到運用相同的技巧表徵所欲學習的科學概念。除此，尚有一個最重要的表徵，就是科學符號的使用，學習者對於科學符號的來由，科學符號的使用，以及整個公式背後所代表的自然現象又為何，學習者極有可能是不了解背後所代表的科學意義，進而導致無法連結。

當學生在從事科學學習時，做科學問題思考與解題過程中所呈現的一切實務作為，包括運用不同方式的外在表徵詮釋科學現象、表達想法，在學習過程運用表徵做預測，在學習情境中使用表徵溝通科學概念，及學習成果的呈現方式，當然也必須是自身經驗與現實世界的結合。

Lesh等人（Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lesh, Landau & Hamilton, 1983; Lesh, Post & Behr, 1987）以Bruner認知表徵理論為基礎，利用溝通觀點，將圖形表徵分成動態的操作模型和靜態的圖畫或圖解；符號表徵分為口述的語言和書寫的符號，分為下列五種類型：

- （一）以經驗作為基礎的腳本（**experience-based script**）：在這個種類中，知識由「真實世界（**real world**）」的事件組織起來，提供一般性的脈絡以解釋或解決具有相同的或相類情境的問題。
- （二）可操作的模型（**manipulatable models**）：如古氏積木、算術積木、分數棒、數線等，在這些表徵中的「元素（**elements**）」，本身沒有多少意義，而在這些模型中所加入的關係與操作，可以適用於許多日常情境。
- （三）靜態圖形或圖片（**static pictures**）：這些是靜態的模型，可以動手操作模型，內化為「心像（**images**）」。
- （四）口述的語言（**spoken language**）：運用日常生活所使用的口語來敘述，以表達想法或解題過程。
- （五）書寫的符號（**written symbols**）：常用數學符號或數學式，和語言一樣，亦包含特殊化的句子和片語。

Lesh等人是以溝通為主的表徵，表示某些約定成俗的共識（蔣治邦，1994），除了五個互動的表徵很重要外，表徵間的轉譯和表徵內的轉換同等重要。也就是說，不只是構成的元素重要，而元素與元素間的動態關係亦為重要。九年一貫課程綱要數學領域的基本理念裡，對於培養學生的溝通能力，在於要了解他人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊，相對地，也要能以書

寫、圖形，或口語的形式，運用正確的數學語言表達自己的意思。對照於Lesh等人以溝通為觀點的表徵，學生要能做好與他人的溝通，對書寫的符號表徵、圖畫或圖解表徵以及口述的語言表徵來說，學習更加顯得特別重要。蔣治邦（1994）認為，儘管這五種表徵都是可以讓外人察覺，但是圖形與符號的運思，都屬於內部的活動，難以立即觀察得到。是故，在評估時，亦需依賴學生將其活動過程表現出來，才有辦法進行溝通。也就是這兩種表徵這兩種表徵都必須在教學者的要求下，學習者才可能利用再表現的方式呈現出來（王淵智，2005）。

經閱讀眾多學者對表徵的論點，可見表徵在學生的數學學習上具有相當的重要性，因此，研究者認為欲探討學生線型函數概念，可以從其對應的位置-時間圖形的表徵著手，從探討學生表徵之間的連結及轉譯，以了解學生在學習線型函數與操作情境轉換間的歷程。故研究者將以直線型位置-時間圖為外在符號表徵工具，並以玩具小汽車、地圖等外在表徵為驗證工具，再請學生以口述及行為表達出來，以便了解學生圖像表徵理解程度，並追蹤其學習過程中內在表徵的轉譯。

### 第三節 x-t 圖相關之研究

#### 一、速度與速率概念的迷失與困難

##### (一) 速度與速率的差別

許多的研究中發現，九年級學生在學習速度概念時，常常有許多的困難與迷思，別與在小學階段所學習的速率。根據物理大辭典（1974）的定義，速度（velocity）是物體在平均單位時間內之位移，包含時間、距離和方向三種要素；而速率（speed）是物體行進的距離與所耗費時間之比，用來描述物體運動或過程進行的快慢，是無方向的量。除此，牛頓數學辭典（1997）也解釋：速度(velocity)的符號為 $\vec{V}$ 。當運動方向標明時，位置相對於時間的改變量，速度因而是一向量（vector quantity），其大小 $V$ 稱為速率（speed），單位為米／秒（m/s）或類似單位。速率是為單位時間內，粒子、質點、物體等移動的距離，沒有標明方向，只是向量速度(velocity)的大小。由上所述，物理上對於速率與速度的定義大同小異，速度是指物體在單位時間內的位移，包含時間、距離、方向三種關係；而速率是指物體行進的距離與所耗費時間之比，即指在所耗時間內（ $\Delta t$ ），所經路程長度（ $\Delta s$ ）的平均值，不考慮行進方向的純量，所以，速率和速度是有區別的。

##### (二) 學習上常犯的錯誤

在我國小學學習速率概念時，從許多文獻中可以發現，學生有非常多的迷思及困難。常犯錯誤解法的原因是為學生欠缺速率、距離以及時間的基本概念，且部分學生太過依賴公式導致只注意各數字所代表的變項，便直接套用公式以求得答案（方正吉，1995；陳秋萍，2004）。學生並不是真的了解公式所代表的科學本意，只是單純的計算、盲目的記憶和使用。針對台北市國民小學中年級兒童對物體運動快慢與力之間的另有概念分析研究中，注意到兩件相當直覺性的錯誤，其一為當兩輛車同時出發，同時到達目的地，但是中間路徑不同時，可發現大部份的中年級兒童是以路徑的長短來判斷運動快慢；其二為兩輛車先後出發，但中間路徑相同且同時抵達目的地時，中年級兒童多數是以時間的先後出發來判斷運動快慢。由此可知，中年級兒童多以直觀思考的方式來判斷運動快慢，而非同時考量距離及時間兩個因素判斷物體運動快慢（陳勇

全，2000；陳美月，2000）。

除了上述錯誤之外，尚有速度正負值的理解問題，洪木利（1983）在兒童重力概念發展的研究中，認為大部分學生對於速度的概念尚未建立完整，並在我國兒童慣性概念的研究中發現兒童在速度概念的三個次概念中，發展的順序依次為：距離→時間→方向。蔡枚芳（1999）在兒童牛頓第二運動定律相關次概念之研究中，更進一步指出兒童的概念發展順序為距離→時間→方向→位移→速度。他認為兒童不論年齡大小，難以結合方向與速度的概念，以「快慢」來描述速度，並對「加速度」的認知程度會比「速度」來的高，換言之，速度概念對於兒童來說是相當困難的。Matsuda(1994)針對四至十歲兒童，探討在直線運動時，速率、時間及距離中，距離—時間（速率固定，當時間增加或減少時距離的改變）、時間—距離、距離—速率、速率—距離、時間—速率、速率—時間的六種關係中，探討兒童如何判斷與解釋。研究結果發現兒童是以直覺作為判斷，並且以距離、時間、速率三者中的兩兩之間關係來判斷，而非以「距離—時間—速率」系統關係來判斷。是故，每個階段是否發展健全都會直接影響到下一個階段的學習與理解，更別說九年級學生必須一口氣學完所有關於速度的相關概念。

若以速率概念作為速度概念的基石，除了距離、時間之外，再加上方向、位移等概念，前所述的研究中發現學生隨著年齡的增長，越能克服速率概念，陳勇全（2000）對「速度快慢的判別」，我國八年級學生正確判斷達最高。但是，Goldberg & Anderson（1989）的研究指出學生們雖然知道速度有方向，但他們只關心物體運動的快慢，而不會關心方向和物體運動的速度間的關係，且大部分的高中學生會將「速度」認為是「速率」，因此學生對於「速度」有負值一直感到困惑。Brasell & Rowe（1993）學生易認為物體慢下來，即代表物體的速度為負值。何以見得，速度與速率所計算的數值為正或負數，對於學生來說，能否真的感受物體實際運動情形，更是一個相當大的困難。

## 二、學習速度概念之數學概念

我國國小階段學習何謂速率概念，意即速度之大小，國中階段是到九年級

的科學課程中的直線運動單元，才開始學習速度概念，若在其中引入數學的概念，不僅是學習公式的內容概念，更在開始學習科學知識之前，建立學生的重要觀念，主要是因為科學中的各種數學符號，都是對應到真實環境相關特性的紀錄與描述。美國數學教育協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）認為數理教育應當注重學生在數學課中所學得的概念應用到數學以外的活動，轉化數學技能到應用的領域問題。

在此，研究者更注意到另一件事，學生早在七年級就已習得座標平面以及直線方程式的相關概念，但許多研究文獻發現九年級學生對於圖形的解釋、公式的結合運用以及現實生活經驗的連結無法一氣呵成、前後呼應，像是鄭如芬（2001）發現大多學生欠缺將生活中的直線運動相同參數間的關係轉成平面圖形的能力。也就是說，同樣的直線圖形若放在數學上，學生會相當直覺的當成數學問題，若將此問題轉移到理化課程中，學生也單純的看成理化問題，數學與理化之間似乎毫無相關。蔡淑君（2010）運動學的知識表徵包含許多符號與方程式，看似數學作為核心的問題，但實際所應用的數學技巧卻是非常簡單，主要是理解數學符號中的係數與真實世界的關聯性，包括將起始位置、初速度、方向之概念融入直線方程式的詮釋，對這些關係的詮釋更是數理知識不可不重視的觀點。在國內科學課程中，不難發現如果學生具有良好的數學基礎能力，其所反應在科學上的學習，像是計算形式的問題，通常都會有較良好的表現，特別在運動學單元的計算中，更為明顯。例如，方程式  $x = 2t + 5$ ，其中  $x$  表示物體在  $t$  時刻的位置，若需計算  $t = 4$  的  $x$  值，或在4秒後的物體所在位置  $x$ ，八年級以上的學生大部分均能透過代入  $t = 4$  的值，求出  $x = 13$ 。但同樣的方程式，若以不同的表徵方式，假設  $x$  所描述的是一輛小汽車的運動，要求學生不透過計算，對這輛車大致的運動情形作一說明，例如：從方程式中，觀察初始位置在5的位置。針對這種的轉換方式，大部分學生除了反覆計算、或再逐一描點外，鮮少能夠從公式中相關的符號關係，直接觀察到方程式數值所代表的意義與不同的表徵方式，或是對應到真實世界的運動情形。從中，研究者亦發覺，類似的方程式  $x = -2t + 5$ ，八年級以上的學生大部分依然能透過代入  $t = 4$  的值，來求出  $x = -3$ ，但此時產生極嚴重的兩個問題，一為學生不清楚  $t$  前面的係數  $-2$  所代表的意義？而  $t = 4$  代入後，得到的值為  $-3$  又是何意？更不用談論實際給小汽車操作的運動情形。

Halloun & Hestenes (1985) 以及 Hestenes、Wells 與 Swackhamer (1992) 在力與運動概念之研究中，學生孤立情境而單純的套用科學公式，這樣或許不會出現問題，但是一旦加入情境條件的描述，方程式所代表的意義可能就被忽略或混淆。倘若學生不能透過抽象的方程式來解決相關問題時，如同直線運動的概念相對於線型函數的數學概念，只是一些支離破碎的科學知識，無法連結、融合成完整的大概念，分離數學與科學之關係。因此，錢正之 (2003) 在學習直線運動的過程中，老師應協助學生以具體的心像 (concrete and meaningful image) 連結數學形式與其對應的運動公式，唯有建立、加強此一能力，在解決相關問題時，才能進一步將理論作為分析之工具。

科學知識中運用了數學許多不同的表徵，最普遍使用的是圖形表徵，其主要的目的是為透過視覺化來解釋不同變項間的關係 (Bastide, 1990; Chambers, Cleveland, Kleiner & Tukey, 1983; Lemke, 1998)。就研究者教授數學的經驗來說，圖形是轉換文字敘述最好的工具之一，也是讓學生較為接受的一種方法，但是在研讀許多文獻資料的時候發現：雖然在科學與數學教育中強調圖形的表徵，實際上，卻很少研究認同能夠運用圖形表徵的方式來強調許多的主題的研究 (Testa, Monroy & Sassi, 2002)。學生在數學課之外時常接觸圖形，像在直線運動單元中的主要表徵為物理公式和圖形，而這兩項表徵若要能操作得好，必需建立在良好數學基礎之上。然而所需要的數學概念對學生來說並不是困難的，學生遭遇到的問題通常出現在科學與數學的連結上，例如方程式所對應的科學情境意義，或理解、詮釋  $x-t$ 、 $v-t$ 、 $a-t$  圖形等；甚至，發現為學生在不同表徵之間的轉換有著極大的困難，即使是優秀的學生在處理代數與圖形的表徵時，如同他們面對這些數學問題是彼此獨立、無法產生連結 (Mevarech & Kramarsky, 1997; McDermott et al., 1987; Moschkovich et al., 1993)。如同研究者前所述，數學與科學是平行的雙軌，而非相輔相成的朋友。相關的研究也指出，大多國內九年級學生並不怎麼了解這些圖形的基本意義，而再進一步將這些曲線圖轉換到不同的數學符號系統 (如方程式)，則更加困難 (Kramarski & Mevarech, 1997; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990)。因為對圖形的意義不了解，學生容易在運動曲線圖中產生迷思，將位置隨時間變化的  $X-T$  圖，視做實際的路線繪圖，更別談與數學的直線方程式結合，而且這些迷思即使經過正式的教學之後，學習者對曲線圖的錯誤概念還是不易改變 (Kramarski &

Mevarech, 1997; Wainer, 1992)。

綜合上述，數理教師應該教導學生透過建構或詮釋曲線圖、表格數據、方程式在相關的學科中作為表徵的工具進行溝通或推理，例如詮釋即是指能從曲線圖中獲得意義，而這項能力需藉助數學的能力 (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Mevarech & Kramarsky, 1997)。

當然，研究資料顯示出尚有其他數學能力也會間接影響速度概念之學習，吳連鴻 (2003) 學童具備比和比值的概念有助於速度解題運算，但與「時間」、「距離」沒有關聯結構的順序性產生。廖鴻禧 (2003) 的研究中，意識到速度的快慢不只決定於距離或時間單一因素，而是跟時間、距離都有關係，但只有少數的學生會利用數學上的比例關係“距離÷時間=速度”。Trowbridge 與 McDermott (1980, 1981) 認為「速率」的觀念是「路程長度」，為相對於「歷經時間」的函數關係，而不認為「速率」僅是「路程長度」與「經歷時間」之間單純的比例關係。根據研究者的觀察，部分九年級學生會把在數學上習得的能力，當成是理化運動學的解題技巧，若請這些學生說明，會明顯發現數學和理化是平行的雙軌，換言之，學生只能先把題目轉換成單一面向的思考，再進而回答題目的需求，當然這些並非科學學習的本意，而這些間接的影響因素亦不在本研究的討論範圍中。



## 第四節 多元智慧

Howard Gardner 於 1983 年《智力架構》著作中發表「多元智慧論 (multiple intelligences)」，認為智慧不是單一的，每個人至少擁有八種不同的智慧，經由適當引導，每一種智慧都有其發展的可能性。此智力的理論涵蓋了傳統智力觀點，且進一步的拓展了其範圍，更重要的是它提供了一個可以發揮自我潛能與肯定自我長處的觀點，因為透過各種探索與引導，每個人都可以找到自己的長才 (王美充，2005；王涵儀，2002)。八種智慧分別如下：語文智慧、邏輯-數學智慧、空間智慧、音樂智慧、肢體-動覺智慧、人際智慧內省智慧和自然觀察智慧 (林義祥，2000；張滄敏，2001；郭俊賢等譯，1999)。以下介紹八種智慧的意義：

### 一、語文智慧 (linguistic intelligence)

語文智慧是指對口語表達或文字書寫有運用自如的能力，結合句法、音韻、語義、語言實用學等能力。此類學童學習運用語言及文字來思考，教師應提供閱讀材料、寫作工具、錄音帶、對話及討論等教學材料與活動。

### 二、邏輯-數學智慧 (logical-mathematical intelligence)

邏輯-數學智慧是指對數字運算和邏輯推理有效地運用的能力，包括對量化和假設的抽象概念的敏感性。此類學童特別喜歡數學及科學類的課程，較接受可被測量、歸類、分析的事物。此類學童學習靠推理來思考，教師須提供可探索和思考的事物、科學資料、操作、參觀科學、工藝博物館等教學材料及活動。

### 三、空間智慧 (spatial intelligence)

空間智慧是指能準確地感覺與體認視覺環境的能力，包括對色彩、線條、形狀、形式、空間之敏感性。此類學童學習用意象及圖像來思考，教師須提供藝術、樂高玩具、錄影帶、幻燈片、想像遊戲、視覺遊戲、圖畫書、參觀美展、畫廊等教學材料及活動。

### 四、音樂智慧 (musical intelligence)

音樂智慧是指察覺、辨別、改變和表達音樂的能力，包括對節奏、音調、

旋律或音色的敏感性。此類學童學習透過節奏旋律來思考，教師須提供樂器、音樂錄音帶、CD、唱遊時間、聽音樂會、彈奏音樂等教學材料及活動。

#### 五、肢體-動覺智慧 (bodily-kinesthetic intelligence)

肢體-動覺智慧是指善於運用身體四肢靈巧的傳達想法和感覺，包括協調平衡、敏捷彈性和力量速度等特殊的身體技巧。此類學童很難長時間呆坐不動，其學習透過身體感覺來思考，教師須提供演戲、動手操作、建造成品、體育和肢體遊戲、觸覺經驗等教學材料及活動。

#### 六、人際智慧 (interpersonal intelligence)

人際智慧是指善解人意和察言觀色，能區分別人的情緒感覺、動機意向的能力，此類學童學習靠他人的回饋來思考，教師須提供小組作業、群體遊戲、朋友社交聚會、社團活動、社區參與等教學材料及活動。

#### 七、內省智慧 (intrapersonal intelligence)

內省智慧是指建構正確自我知覺的能力和善用知識來計畫和導引自己的人生，包括對自我了解，意識到自己的內在情緒、脾氣、意向、動機和欲求，以及自律、自知和自尊的能力。此類學童學習以深入自我的方式來思考，教師須提供秘密的處所、獨處的時間及自我選擇等。

#### 八、自然觀察智慧 (naturalist intelligence)

自然觀察智慧是指對自然景物有誠摯興趣、強烈關懷及敏銳觀察力、辨識動植物和自然界事物的能力，包括狩獵、農耕、和生物科學等。教師須提供參觀動物園、植物園、水族館、天文台、戶外觀察昆蟲、樹林、岩石、飼養寵物、種植蔬菜、花卉並記錄生長情形等教學材料及活動。

多位學者認為多元智慧論有下列六項特性(王為國, 2000; 田耐青, 1999; 侯淑蓉, 2004; 張滄敏, 2001; Aborn, 2006; Diaz-Lefebvre, Rene, 2006):

一、每個人都具備八種智慧，只是有些智慧發達，有些則不發達。

二、每種智慧皆有多樣化的表現方式和不同的發展時機。

- 三、每一個人有不同獨特的智慧組合，並以複雜方式統合運作。
- 四、智慧沒有判斷聰明與否的一組標準特質。
- 五、人類是以豐富的方式揉和各項智慧，表現其特有的天賦才能。
- 六、多元智慧在適當的教導下，在特定領域裡可以得到相當的發展。

研究者從 Gardner 的理論獲得關於人類智慧的理論基礎，而且對於學生能力的信念給予有力的支持，因此本研究想要從學生在圖形、口述，以及操作玩具小汽車的表現來探討學生的不同多元智慧，並提醒教師在教學時，注意多元智慧具有可教導、會成長、因人而異、多樣化、獨特性、互動性等特質，以提升教學成效。



## 第三章 研究方法與步驟

### 第一節 研究設計

Hoyles(1982)利用半結構的面談法，要84位14歲的中學生說出一個好的，一個不好的學習經驗，據此，檢討學生心目中對數學課的印象。因為學生很自由的在描述中學階段的學習經驗，且面談時，不可能採用固定的系列問題，不過為了系統的探討與收集資料。

Hoyles將面談內容分成六個階段：

- 1.不拘形式的交談，目的是讓學生覺得自在，並向學生說明將以聊天方式進行。
- 2.蒐集學生的一般資料。
- 3.正式請學生談一段很難忘好的及壞的學習經驗。
- 4.誘導學生說出具體的細節。
- 5.誘導學生描述當時的感受。
- 6.問還有沒有其它的故事。

本研究為探索性研究，與 Hoyles 的研究有相似的地方，故此參考該研究的方式，以半結構性晤談法為研究方法，本研究的研究進行如下：

- 1.不拘形式的交談，目的是讓學生覺得自在，並向學生說明此施測並非考試，答對、答錯都不影響成績，免得學生因過度緊張而影響作答。
- 2.說明施測方式及歷程，並請學生提出對施測的疑慮。
- 3.依照編排的工具施測。
- 4.依學生的理解程度給予指導語說出具體的細節。
- 5.施測時，先給予學生直線型 $x-t$ 圖形探索圖形之概念，再要求學生在地圖上操作玩具小汽車，以透過實務操作驗證學生對於直線型 $x-t$ 圖形的處理方式。
- 6.按照學生回應以決定下一步的施測工具。

## 第二節 研究工具

研究工具的形成分四個時期，其中，第一個時期為起始期，與指導教授討論後，將基本直線型  $x-t$  圖形分為十八張工具圖形。第二個時期為探索期，這個時期研究者在閱讀文獻後，找出學生在直線型  $x-t$  圖中常見的迷思概念與錯誤類型，並擬製十八張直線型  $x-t$  圖形探討不同程度的學生，在處理直線型  $x-t$  圖形時是否可以順利理解，若無法解讀時的迷思歷程為何。第三個時期為修正期，因直線型  $x-t$  圖形涉及數學與理化，研究者另找若干專家討論與修正十八張工具圖形，因為有些工具圖形會牽涉到截距、斜率，以及方向性的三個概念，有些工具會牽涉到兩個不同的概念，專家提出在此過程應以單純涉及一個概念的方式作為施測工具，故建議以牽涉單一概念的圖形作為施測工具，剔除牽涉兩個以上概念的圖形，最後產生十張圖形作為施測工具，並將訪談結果轉錄於附錄 C。第四時期為施測期，除了以十張直線型  $x-t$  圖形作為施測工具，並以操作玩具小汽車在地圖上的運動狀態來驗證圖形的概念。

### 一、起始期

研究者與指導教授討論後，以開放性蒐集學生資料，將研究工具分為十八張基本直線型  $x-t$  圖形，探討學生處理直線型  $x-t$  圖形時，是否受到圖形的截距與斜率概念影響。以下分作為兩個向度，縱向為斜率概念，橫向為截距概念，如圖所示。再者，由於斜率有大小之分，故將圖中的斜率大小做調整，其中，零斜率的部份因無法再調整，故縮短原本直線長度，如圖 3-2 與圖 3-3 所示。

圖3-1 直線傾斜度較大

截距 斜率	+	0	-
+			
0			
-			

圖3-2 直線傾斜度較小

截距 斜率	+ (正截距)	0 (零截距)	- (負截距)
+			
0			
-			

## 二、探索期

經過起始期確定十八張工具圖形後，因十八張工具圖形尚未形成明確架構作為施測工具，所以，研究者在第二階段的探索期，整理了國、內外文獻，並歸納出學生在直線型  $x-t$  圖形中常見的迷思概念與錯誤類型為三類，以此支持本研究中的學生在處理直線型  $x-t$  圖常見的迷思概念與錯誤類型。

### 1. $x-t$ 圖學習上常見的錯誤概念

以下研究者從簡順永（1999）、李如斌（2003）、陳秋萍（2004）三人對  $x-t$  圖形的研究，分成下列幾部分說明學生在  $x-t$  圖形常見的迷失概念與錯誤：

#### (1) 誤將圖形視為物體運動圖像( graph as picture)

蔡昆諭（2005）指出直線方向為右上左下或左上右下，學生會視圖形中的升、降代表上坡、下坡之運動方向，也就是將圖形視為圖像（graph as picture），直觀的錯誤連結到現實世界的運動狀態（Cross & Mehegan, 1988；Goldberg & Anderson, 1989；Brasell & Rowe, 1993；Beichner, 1994；簡順永, 1999；李如斌, 2003；陳秋萍, 2004；William, Tamara, and Judit, 2008）。

在學習等速度直線運動時，簡順永（1999）發現學生會以二維的

時空座標關係來表示一維的「目睹」運動現象。舉例來說，與日常生活行進的習慣有關，學生只憑水平數線描述物體運動的狀態，換句話說，學生難以接受物體在一個軌道上以等速作運動的情形，轉換成座標平面的x-t圖。

Trowbridge (1980) 從運動實況的移動記錄圖的判讀，無法真正瞭解「等速度」的物理涵義應包括「快慢」和「方向」兩個因素。McDermott (1986) 也發現學生視右上左下(向右遞增)的直線圖形，意即位置的數值越來越大，物體運動的速度越來越快；相對的，學生自然會誤以為左上右下(向右遞減)的直線圖形，意即位置的數值越來越小，那麼物體運動的速度就是越來越慢，自然而然地無法從直線圖形了解到物體真實的運動狀態。有研究發現函數圖的曲線就是物體實際運動軌跡曲線，以路線的形狀判斷物體運動的快慢，而無考慮到距離、時間對物體運動快慢的影響(Goldberg & Anderson, 1989; Cross & Mehegan, 1988)。

Brasell & Rowe (1993) 提到學生易認為左上右下的圖形代表物體慢下來，亦代表物體的速度為負值，反之，若線圖為左下右上，速度變為正值，且代表物體正在加速。簡順永(1999)指出部分九年級學生無法瞭解運動現況時負向運動之意義。

綜合上述，學生在詮釋x-t圖形時，受到「線段方向」的干擾，將「線段方向」視為「運動方向」，例如：垂直線段方向向上，就是物體往上運動，缺乏探討圖形的合理性，而水平線段方向向右，即物體往右運動，右上左下(向右遞增)或左上右下(向右遞減)直線圖形的方向，表示為物體運動的方向，物體的直線運動從一維的單一數線表示到二維的座標平面表示，明明是同一運動狀態，但解讀上卻可以是完全不同。

## (2) 忽略等速度直線運動的出發點

學生在學習為非原點出發的直線圖形時，易將讀點的數值直接視為答案，如：讀取y軸的數值，直接視為答案(陳秋萍, 2004; Brasell & Rowe, 1993; Beichner, 1994)。舉例來說，學生對一個非原點出發的x-t直線圖形，直接將y軸數值直接除x軸數值，視為物體運動的

速度。主要是因為在直線圖形為原點出發時，剛好物體運動的速度是可以直接將y軸數值直接除x軸數值計算得到，因而過度推論非原點出發的直線圖形亦是如此，而忽略物體的起始位置並非原點出發。

### (3) 缺乏等速度直線傾斜程度意義的理解

學生看到兩相交直線所對應到的物理概念，常以直覺來判斷兩個物體在此時具有相同的速度，不了解交點在x-t圖上表示在該時刻兩個物體具有相同位置之物理意義（Trowbridge & McDermott，1980；Halloun & Hestenes，1985；Cross & Mehegan，1988；Hestenes等人，1992；陳秋萍，2004；李如斌，2003）。

在互相平行的兩直線圖形，學生會認為位置較高的直線，其運動速度較快，並非是兩個運動速度相同之物理意義。另外，學生會以位置高低來判斷物體的速度，相同的位置，速度一樣快（簡順永，1999；李如斌，2003；陳秋萍，2004）。

Cross & Mehegan（1988）發現學生以時間來判斷快慢，同時出發同時到達的物體，其所經過的時間相同就是一樣快。還有，學生也很容易把題意理解為速度一樣時，所花的時間較短的物體就是運動速度比較快，或是在一秒時間內走的距離愈遠，所花的時間愈久，物體運動速度就是愈慢，視時間與速率為同義詞。

Brasell & Rowe（1993）的研究也指出x-t圖的詮釋能力與語文能力有關。如當線段斜率最大或線段最高時，代表物體的速度「最快」或是位置變化量「最大」；若為線段呈水平線，斜率為零即是「不變」沒有「變化量」，表示物體的加速度沒有變化，即速度也保持固定，所以真正做等速度直線運動的物體，若用x-t圖表示，應為水平線。

由此可知，學生對一物體運動狀態的x-t圖，若未從頭到尾的理解清楚，也就是學生缺乏從各種直線圖形取得足夠的訊息轉化成物體真實的運動狀態，當兩直線運動的物體放在同一座標平面上，在解讀上當然是難上加難，更不用應用同一座標平面上有三條以上的情形。

## 2.x-t 圖工具編製

依據文獻整理常見 x-t 圖學習上的錯誤類型，研究者擬製十八張直線



型  $x-t$  圖形，並劃分成三種不同概念作為，分別是：

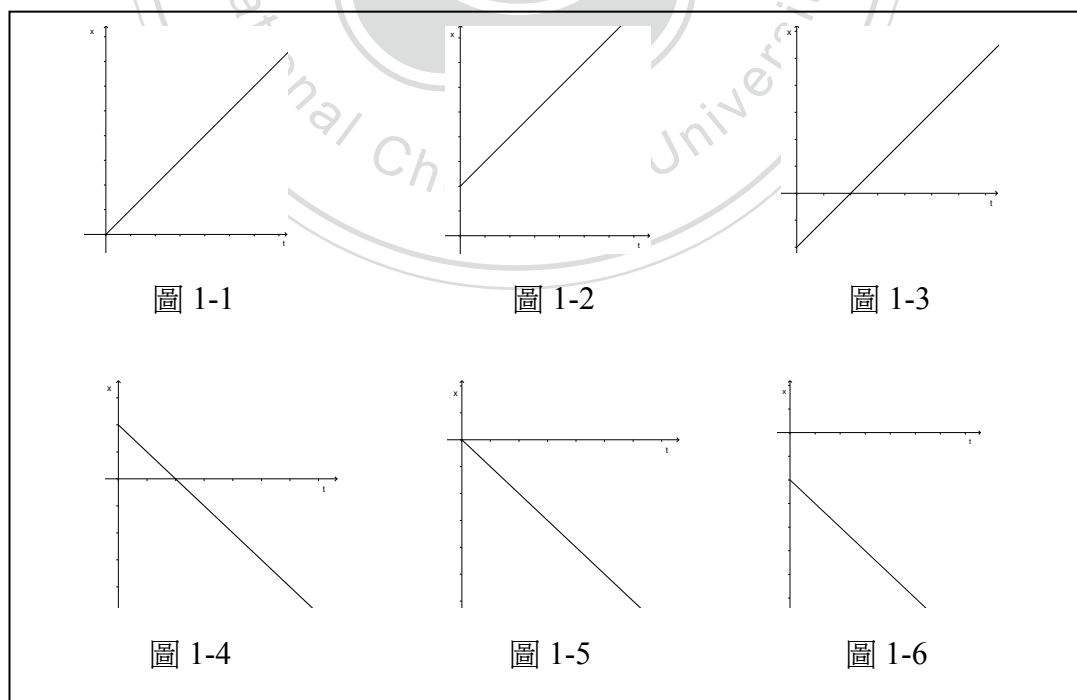
- (1) 是否理解圖形非物體運動圖像。
- (2) 是否注意到等速度直線運動的出發點。
- (3) 是否理解不同等速度直線傾斜程度的意義。

以為探討不同程度的學生在處理直線型  $x-t$  圖形時，再透過操作玩具小汽車的方式，以確認學生對於直線型  $x-t$  圖形概念的理解。

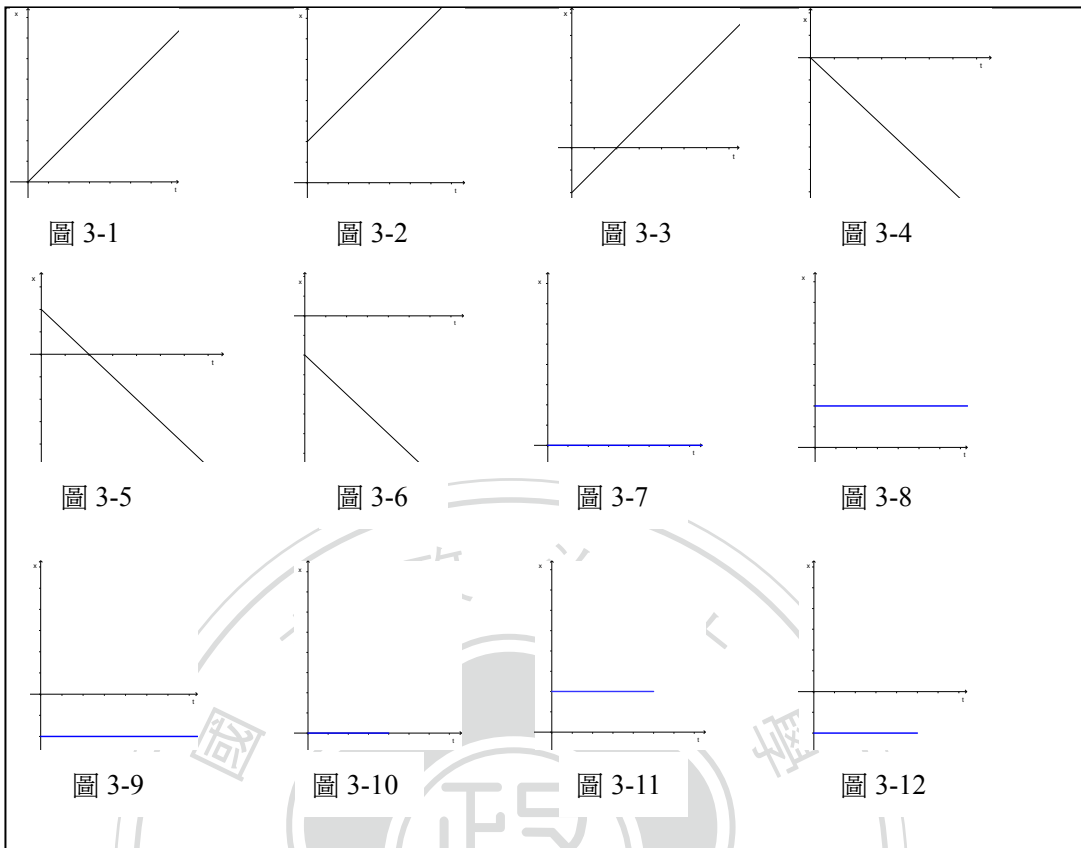
### 三、修正期

在修正期，研究者與指導教授討論後，希望能夠將探索期的十八張工具圖形重新定義成附有概念性的工具，也因本研究跨越理化與數學兩科，再加上斜率與截距屬於高中數學課程，於是，研究者向若干專家請益，將原本的三種錯誤類型重新命名為方向性、截距、斜率三大概念，因截距較為單純，命為第一概念，再以斜率作為第二概念，最後則是方向性概念。專家效度訪談表如附錄 A，專家資料背景如表 3-1 所示，分別是一位高中化學老師、一位高中物理老師、一位國中理化老師、兩位高中數學老師，其中一位高中數學老師是為兼博士生之進修教師。

#### (1) 截距概念：



(2) 方向性概念：



(3) 斜率概念：

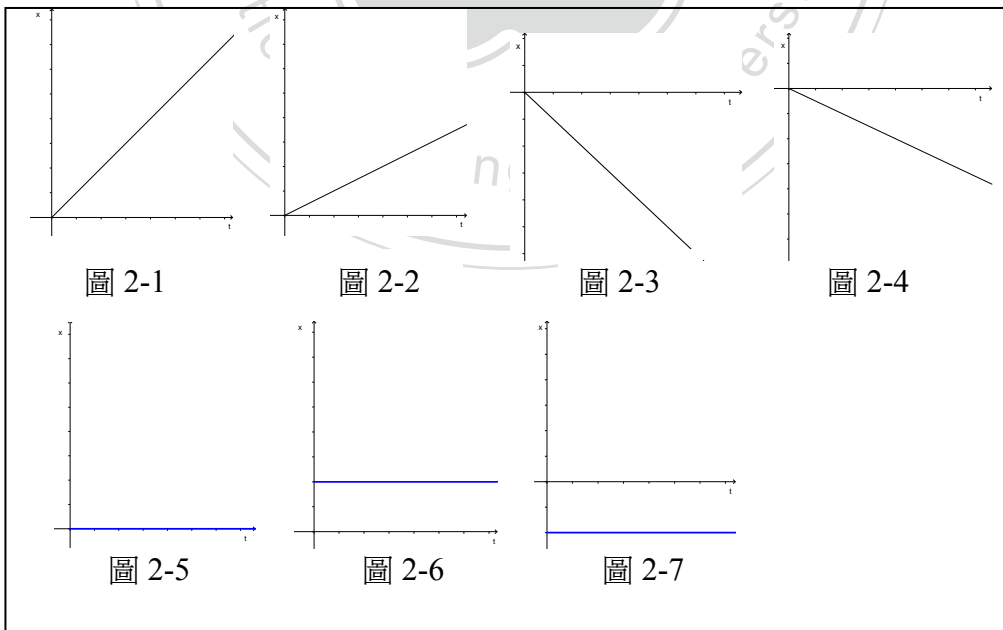


表 3-1 直線型 x-t 圖形參與校訂之現職教師、研究所博士生一覽表

類別	專家編號	年資	職稱	任教地區	專長
現職教師	1	7	導師	桃園某市立高中	化學
	2	8	導師	台南某縣立高中	數學
	3	15	導師	台北某市立高中	物理
	4	20	教學組長	台北市明湖國中	理化
現職研究所進修教師	5	7	導師兼博士生	台北某市立高中	數學

編號一號的專家表示：一針對截距概念，只需要圖形 1-1、1-2、1-3 即可讓學生瞭解截距的概念，圖形 1-1 可由其截距瞭解到出發點為原點，而利用圖形 1-2 與圖 1-3 則可以用 X 軸截距去判斷出發點為正方向或負方向。若我們只將焦點放在截距上，圖形 1-4、1-5、1-6 除了截距部分外，另外還牽扯到速度方向性的問題，較為麻煩。二針對斜率概念，認為單純抓圖形 2-1、2-2、2-5，因學生在這邊只有快、慢的觀念，尚無方向性的概念，所以，我們可以利用圖形 2-5、2-1、2-2 這三個圖形作為判斷的標準。斜率越大，代表速度越快。圖形 2-3、2-4 因其斜率為負，學生容易產生出盲點，例如：說在數學上斜率 (-2) 大於 (-4)，但是以物理的觀點，-4 的速度是比-2 來的快。另外，若有考慮到出發點的不同，那可將 2-5、2-6、2-7 三個圖形做比較。三針對方向性概念，個人認為圖形 3-1、3-4 兩個圖形即可。出發點相同、斜率相同，我們只將變因操作於其方向性。學生在只學一個觀念的情況下，較不會產生觀念上的迷思。

編號二號的專家表示：一截距概念，下排三張圖 1-4、圖 1-5、圖 1-6 牽涉到方向問題，因為也有單純測方向性概念的圖形，若只是為了物體出發點的問題，建議：截距部份只需使用圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3 對學生做施測，會比較單純。在截距的問法上，不建議問學生一次函數。二斜率概念，斜率在物理上就是代表速度，而傾斜大小就是速度大小，建議給學生刻度和單位，讓學生容易算出，就施測圖形部分，建議使用圖 2-1、圖 2-2、圖 2-5、圖 2-6、圖 2-7，而圖 2-3、圖 2-4 牽涉到負斜率，不建議使用。三方向性概念，方向性重點是要了解學生看 x-t 圖時能否直觀反應，不需要這麼多張，建議使用圖 3-1、圖 3-4、圖 3-7、圖 3-8、圖 3-9。建議：在施測時，不宜給予學生太多的線索，宜耐心等待學生的思考及反應。

編號三號的專家表示：一截距問題，圖 1-1 與圖 1-5 是詢問同一種的能力的、圖 1-2 與圖 1-4 是詢問同一種的能力的、圖 1-3 與圖 1-6 是詢問同一種的能力的，問最基本的圖形測驗截距概念即可，建議：圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3。二斜率問題，數學上的斜率相當於是物理上物體運動的速度，而傾斜的大小就是物體運動速度之大小。國中生在初學等速度運動時，最好在座標軸上加上刻度，建立基本的函數對應關係，以銜接高中物理。就施測圖形部分，建議使用圖 2-1、圖 2-2、圖 2-5、圖 2-6、圖 2-7，從直線的改變討論物體運動速度之快慢。三方向性問題，在圖形 3-1、3-4、3-7 三個圖形即可。先在物體出發點相同、斜率相同作為討論，變項只有方向性。單純一個觀念的情況下，較不會產生觀念上的迷思。建議：建議攝影、錄影器材以便詳實紀錄受試者的回答內容。

編號四號的專家表示：一截距概念，由圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3 比起圖 1-4、圖 1-5、圖 1-6 比較容易讓學生理解時間越久距離越長，加入起始點概念；而圖 1-4、圖 1-5、圖 1-6，雖然還是在闡述時間越久距離越長，但因使用了位移、路徑長之觀念，學生易混淆。二斜率概念，圖 2-1、圖 2-2，學生易理解由兩點距離觀念中找出斜率為其速度。圖 2-3、圖 2-4，學生易理解由兩點距離觀念中找出斜率為其速度，但斜率為負值產生減速須加入向量觀念。圖 2-5、圖 2-6、圖 2-7，學生易理解等速運動。三方向性概念，圖 3-1~3-6 皆容易判斷出其車子的運動方向，須給予學生定義正負向量觀念。圖 3-7~3-12 學生易產生混淆。建議：給予學生一隻鉛筆、一張紙有利學生思考。每次施測前須跟學生說明不是考試，答對、答錯都不影響成績，免得學生因過度緊張而影響作答。

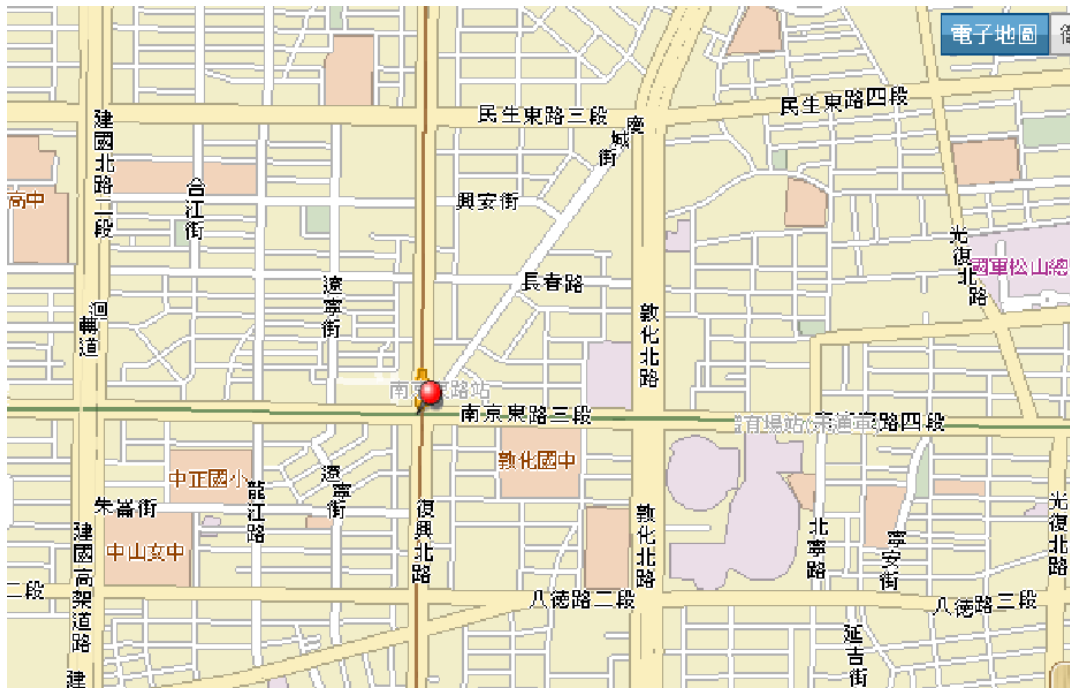
編號五號的專家表示：一截距概念，配合數學所學的一次函數概念，可以求出直線的一次函數式，建議圖 1-1、1-2、1-3 的差別是截距上的差異，另外，圖 1-4、1-5、1-6 則是負斜率的問題，又牽涉到另一個概念，雖然也可以問出截距概念，但建議單純的問法。二斜率概念，在一次函數  $y=ax+b$  中影響到斜率的是係數  $a$ ，圖 2-1、2-2、2-5 固定在原點的直線比較能夠比較出直線的傾斜變化，比較基本的題型，干擾比較小。三方向性概念，圖形過多，學生一時無法逐一判斷，有的同時牽涉到斜率、截距，有的更加複雜，三個概念都有涉略，還是以基本為原則，若只問方向性概念，請以圖 3-1、圖 3-4 為基本。將專家對於施測工具之保留與刪除建議，以表 3-2 所示。建議：顧及學生的疲勞影響測驗之結果，應採取三次給題施測，建議每題施測建議以 45 分鐘為限。

表 3-2 專家訪談建議與修定情形對照表

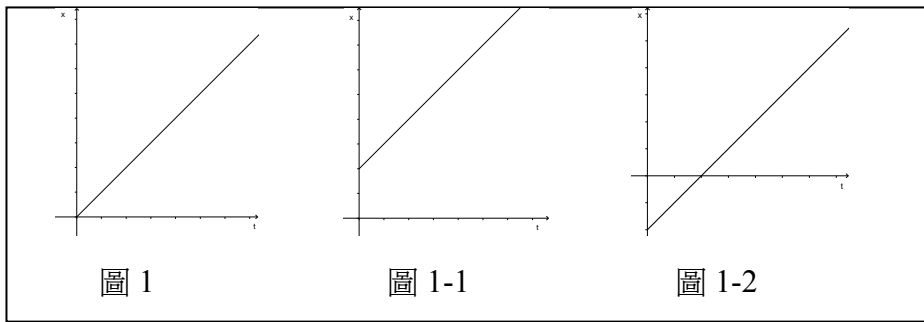
概念	工具	專家 1		專家 2		專家 3		專家 4		專家 5	
		保留	刪除	保留	刪除	保留	刪除	保留	刪除	保留	刪除
截距	圖 1-1	√		√		√		√		√	
	圖 1-2	√		√		√		√		√	
	圖 1-3	√		√		√		√		√	
	圖 1-4		√		√		√		√		√
	圖 1-5		√		√		√		√		√
	圖 1-6		√		√		√		√		√
斜率	圖 2-1	√		√		√		√		√	
	圖 2-2	√		√		√		√		√	
	圖 2-3		√		√		√		√		√
	圖 2-4		√		√		√		√		√
	圖 2-5	√		√		√		√		√	
	圖 2-6		√	√		√		√		√	
	圖 2-7		√	√		√		√		√	
方向性	圖 3-1	√		√		√		√		√	
	圖 3-2		√		√		√		√		√
	圖 3-3		√		√		√		√		√
	圖 3-4	√		√		√		√		√	
	圖 3-5		√		√		√		√		√
	圖 3-6		√		√		√		√		√
	圖 3-7		√	√		√		√		√	
	圖 3-8		√	√		√		√		√	
	圖 3-9		√	√		√		√		√	
	圖 3-10		√				√		√		√
	圖 3-11		√				√		√		√
	圖 3-12		√				√		√		√

四、施測期：依據專家的建議，將上述十張工具圖形、地圖，如圖 3-4。本研究分三天探討不同程度學生在三種不同概念的表現，如以下所示。

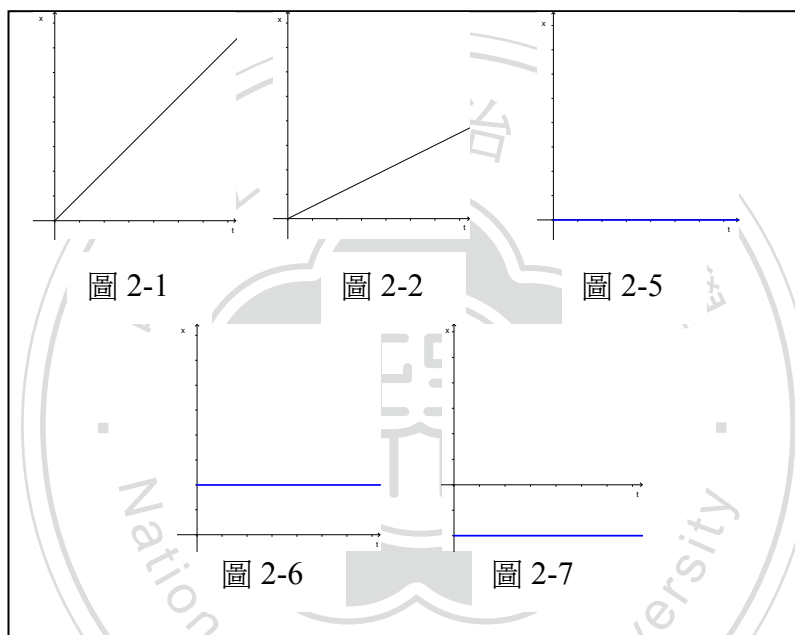
圖3-3 地圖



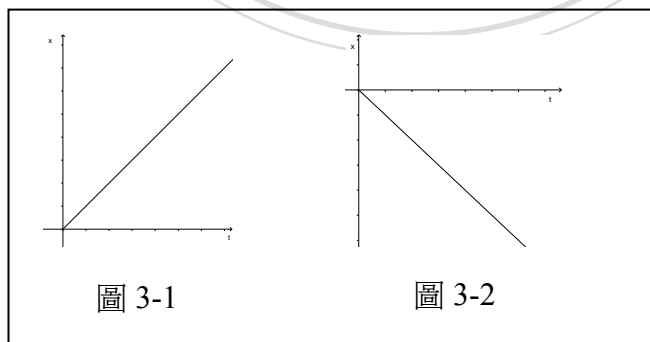
(一) 截距概念：



(二) 斜率概念



(三) 方向性概念



### 第三節 研究對象

本研究以前四學期段考數學和理化成績總分為全校前百分之二十七為母群隨機抽樣(郭生玉,1990),其中二男二女共四人,為高數理成就受測對象,以下稱為高數理能力;以段考前四學期數理成績為全校前百分之二十八到百分之五十四為母群隨機抽樣,其中二男二女共四人,為中數理成就受測對象,以下稱為中數理能力;以段考前四學期數理成績為全校後百分之二十七為母群隨機抽樣,其中二男二女共四人,為低數理成就受測對象,以下稱為低數理能力。

表 3-3 學生之數理能力對照表

	高數理能力	中數理能力	低數理能力
學生	男：BH1、BH2	男：BM1、BM2	男：BL1、BL2
編號	女：GH1、GH2	女：GM1、GM2	女：GL1、GL2

施測時間：依實驗工具，分三種概念，為顧及九年級學生疲勞影響測驗結果，故採三天施測。

實驗工具：x-t圖表十張、簡易地圖一張，如圖3-4、玩具小汽車兩台，一黑一紅原子筆兩支、直尺一把、錄音機一台、錄影機一架、空教室一間。

### 第四節 研究方法的構思

綜合前三節所述，本研究之研究方法第一個階段是研究者正巧複習九年級數學線型函數，且正值學生學習理化直線型 x-t 圖形，發現學生在這兩顆相關的學習上似乎沒有利於正向遷移，反而產生許多混淆與不相關的片面知識，經過閱讀國、內外相關數學與科學文獻，研究者無法得到由數學角度切入運動學的文獻。

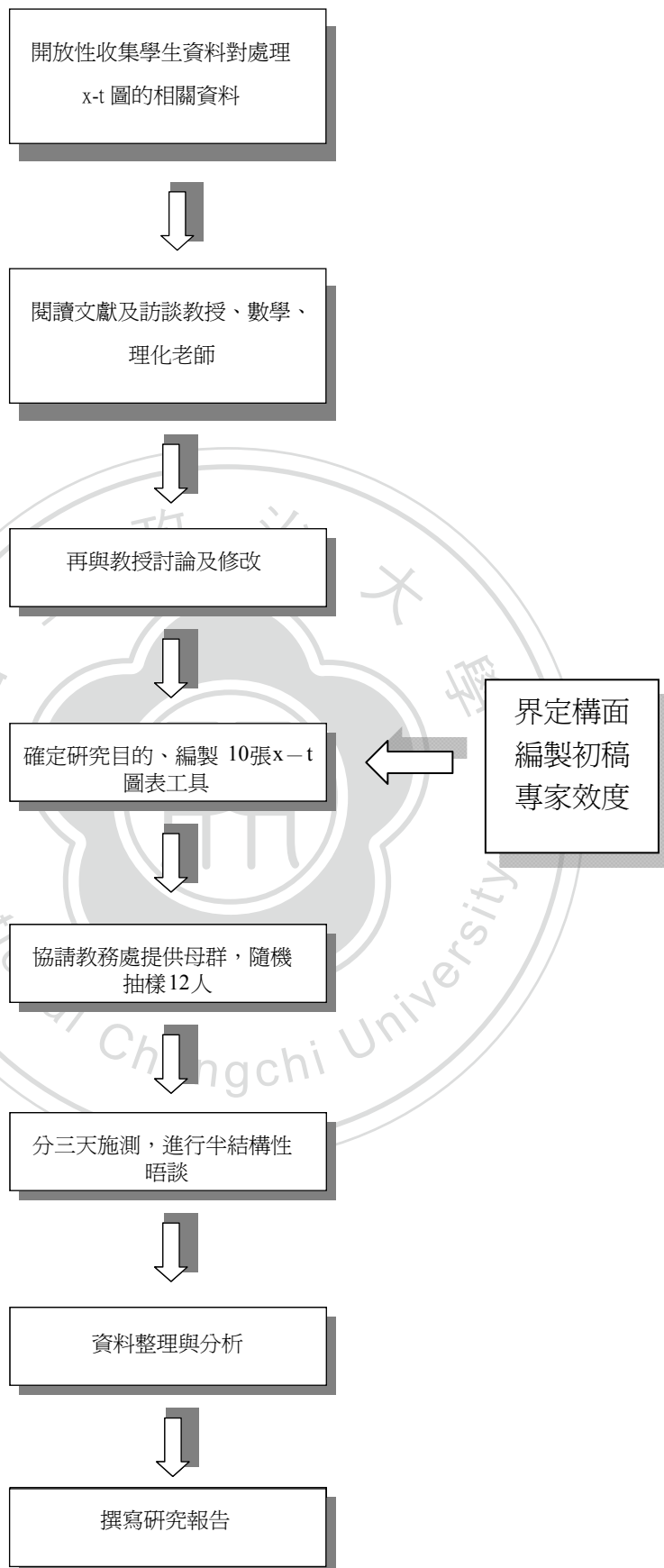
本研究方法第二個階段，與指導教授討論後，以最基本的直線型 x-t 圖形與班上的九年級學生先進行開放性討論，以蒐集學生的想法與疑問，發現選擇題、計算題、給圖說故事的方式似乎無法得到學生真正的想法與錯誤的概念，但在此階段卻意外得圖 3-1、圖 3-2 的工具，總共是有十八張的基本直線型 x-t



圖形。但是，這十八張工具圖形似乎存在某種概念，於是，請教許多國、高中資深數學、理化（物理）老師，單純探討一個概念，以探討學生如何處理直線型  $x-t$  圖形，再經由操作小汽車的方式驗證其概念，而透過專家的建議，將工具由十八張修正為十張作為本研究測驗學生截距、斜率、方向性三個面向之概念，專家效度訪談表如附錄 A，並分成三天施測，主要是因為不希望學生受到其他概念之影響。第一天，先以截距概念為主，因為直線所牽涉到的變項只有單純一項，就是直線圖形與  $x-t$  圖的  $x$  軸之交點，分別是交於原點、原點之上的正截距概念、原點之下負截距概念三種情形。再來，因為方向性的問題牽涉到斜率，如不先處理學生看到直線的傾斜程度，就無法確實了解學生能否連結傾斜程度就是代表速度大小，而傾斜方向才是代表物體運動方向，所以，再依據專家問卷訪談的總結，也支持這樣的順序較為單純，遂決定以斜率做為第二天的概念，最後一天再處理方向性的問題。再根據教學經驗指出，在學習直線運動時或是數學上的座標平面概念，大多是以第一象限出發，不會一開始牽涉易使學生受到直線方向混淆的負向直線圖形，故研究工具唯有在方向性的部分才出現負斜率的圖形。

本研究的最後階段，透過學校前四個學期的成績隨機抽樣出數理能力高、中、低三組學生，男女各六位，經加強自我質性研究的觀念及充實半結構性晤談技巧後，進行正式施測，以錄音、錄影方式記錄學生訪談之過程，視為原始資料，經轉錄等處理方式，完成原案，再根據施測結果進行研究分析。以半結構式的晤談模式探討學生如何處理直線型  $x-t$  圖形，再以操作小汽車的方式加以驗證。而資料分析的方式則是由圖形的表現對應到操作玩具小汽車，對應兩者之間的表現，再以分別探討高、中、低三種不同程度學生之間的表現，詳盡的紀錄於第四章，圖 3-4 為本研究的實施流程步驟。

圖3-4 實施步驟流程圖



## 第四章 資料分析

本研究將直線型 $x-t$ 圖形分作三個面向探討，分別是截距、斜率、方向性。研究者挑選高、中、低三種不同數理能力之九年級學生，其中男女學生各六人，共計十二位；在十二位九年級學生完成學校理化科 $x-t$ 圖課程後，研究者進行研究，探討學生受到圖形的斜率與截距概念的影響，對應到真實物體的運動狀態，最後進行原案分析，並將獲致之結果分述於本章各節。

以下研究對象以代號簡稱，受試者若為男生，則以B為代號，受試者若為女生，則以G為代號；高數理能力之學生，則以H為代表，中數理能力之學生，則以M為代表，低數理能力之學生，則以L為代表；各數理能力學生之編號，則以1、2為每個區段。如：BH1，表示受試者為男高數理能力學生編號1。位置（ $x$ ）-時間（ $t$ ）圖形，以下位置軸簡稱 $x$ 軸，時間軸簡稱 $t$ 軸，位置-時間圖形簡稱 $x-t$ 圖形。

施測順序為截距、斜率、方向性三大概念，此三大概念為學生在處理直線型的 $x-t$ 圖形所牽涉的概念，故本章資料分析以此三大概念為討論。

在各節中，除了分析九年級學生在處理直線型的 $x-t$ 圖形時，在圖形的截距、斜率、方向性三大概念下的表現為何，以及對應到真實的物體運動狀態的表現，兩者之間的表現是否一致之外，學生處理直線型 $x-t$ 圖形中的截距、斜率、方向性概念透過實際操作小汽車之表現作為再次驗證的方式。

## 第一節 x-t 圖形的截距概念

### 一、高數理能力受試者的理解情形

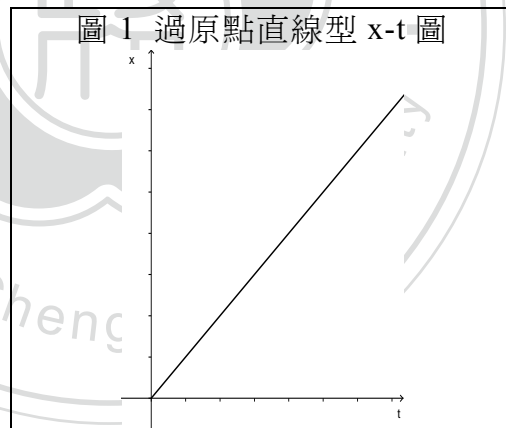
#### 1. 過原點的傾斜直線圖形：

##### (1) 圖形表現方面：

四位高數理能力受試者，皆能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示原點是為參考點，如同直線在圖形中的起始點。研究者觀察四位高數理能力受試者，皆能說出直線從原點出發，因此，研究者推斷四位高數理能力受試者，了解當傾斜的直線通過原點時，直線圖形的截距為零。

##### (2) 實際操作方面：

四位高數理能力受試者都能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置是原點。擷取部分對話及所觀察的圖 1，如下：



T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車從原點出發。

GH2：將小汽車移到原點上。

BH1：小汽車從原點出發。

BH2：將小汽車放到原點上。

##### (3) 零截距小結：

綜合以上 (1)、(2) 兩點來看，四位高數理能力受試者能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置為原點，以

及原點為參考點。故研究者推論四位高數理能力受試者，不受直線圖形零截距概念之影響，才會將小汽車放在地圖上的參考點位置，也就是說，四位高數理能力在處理直線型  $x-t$  圖形時，對於圖形中的截距概念與操作真實物體運動狀態均有一致的表現。

## 2.非過原點的傾斜直線圖形：

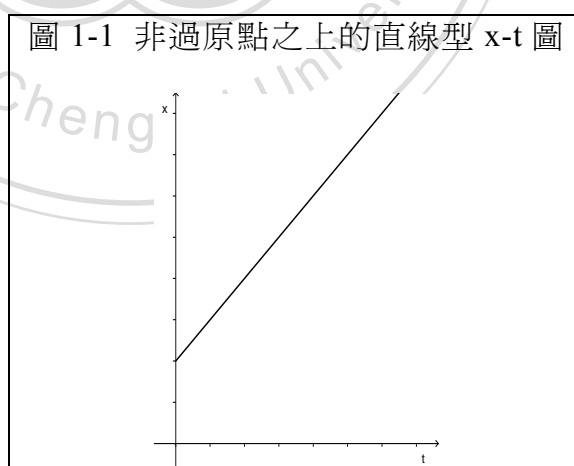
### (1) 正截距

#### I.圖形表現方面：

四位高數理能力受試者能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示原點為參考點，並且注意到直線交於原點之上，以該點為起始點。研究者觀察四位高數理能力受試者，皆能了解直線並非以原點為直線起點的圖形，故研究者推論四位高數理能力受試者，了解非過原點傾斜的直線  $x-t$  圖形交於原點之上，則直線圖形的截距大於零，亦即理解圖形中的正截距概念。

#### II.實際操作方面：

四位高數理能力受試者都能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置是為離原點正向兩個單位長的距離。如以下部份對話及所觀察的圖 1-1：



T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車從距離原點 2 個單位長的地方出發。

GH2：小汽車在原點的左邊 2 公里的地方出發。

BH1：小汽車從離原點 2 個單位長的地方移動。

BH2：小汽車從離原點 2km 的地方出發。

### III. 正截距小結：

綜合以上 I、II 兩點，四位高數理能力受試者皆能理解非過原點之上傾斜的直線型  $x-t$  圖形，能正確說出直線圖形與  $x$  軸相交於原點之上，並對應到小汽車的起始位置是離原點正向幾個單位長的位置。故研究者推斷四位高數理能力受試者不受到直線圖形正截距概念之影響，才能夠將小汽車放在地圖上距離參考點正向兩個單位長的位置。

## (2) 負截距

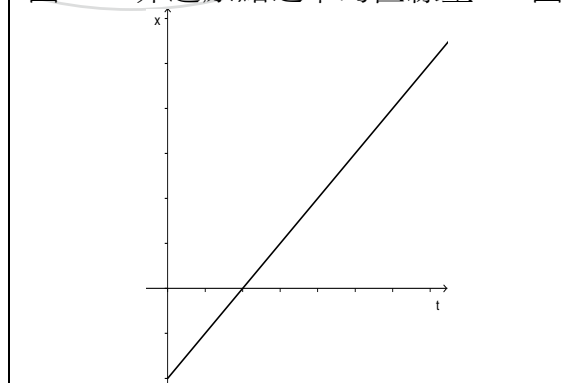
### I. 圖形表現方面：

四位高數理能力受試者能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示原點為參考點，並且注意到直線交於原點之下，以該點為起始點。研究者觀察四位高數理能力受試者，皆能了解直線並非從原點為直線起點的圖形，故研究者推斷四位高數理能力受試者，了解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形交於原點之下，則直線圖形的截距小於零，亦即理解圖形中的負截距概念。

### II. 實際操作方面：

四位高數理能力受試者都能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置是為離原點負向兩個單位長的距離。如以下部份對話及所觀察的圖 1-2：

圖 1-2 非過原點之下的直線型  $x-t$  圖



T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車在原點的左邊 2 個單位的地方出發。

BH1：小汽車在原點的負向 2 個單位的地方出發。

### III.負載距小結：

綜合以上 I、II 兩點，四位高數理能力受試者皆能理解非過原點之下傾斜的直線型 x-t 圖形，能正確說出直線圖形與 x 軸相交於原點之下，並對應到小汽車的起始位置是離原點負向幾個單位長的位置。故研究者推斷四位高數理能力受試者不受到直線圖形負載距概念之影響，才能夠將小汽車放在地圖上距離參考點負向兩個單位長的位置。

### 3.高數理能力截距表現的總結：

綜合上述 1、2 兩點，若固定直線的傾斜程度，在不同直線型 x-t 圖形與真實物體起始位置之表現，研究者發現高數理能力四位受試者，不受圖形的截距概念所影響，當圖形是固定傾斜程度，只單純的從截距來討論受試者的表現情形，都能夠將圖形資訊正確轉換成真實物體起始的位置，故高數理能力受試者在圖形上的理解與真實操作上表現是一致的。表 4-1 表示四位高數理能力受試者，在處理直線型 x-t 圖形受截距影響之表現比較，其中，○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念；再由表 4-1 可以發現：四位高數理能力的受試者對於過原點以及非過原點直線型 x-t 圖的截距概念有百分之百的答對率。

表 4-1 高數理能力受試者在處理直線型 x-t 圖的截距概念表現之比較

受試者		高數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2
過原點	零截距	○	○	○	○
非過原點	正截距	○	○	○	○
	負截距	○	○	○	○
○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念。					

## 二、中數理能力受試者的理解情形

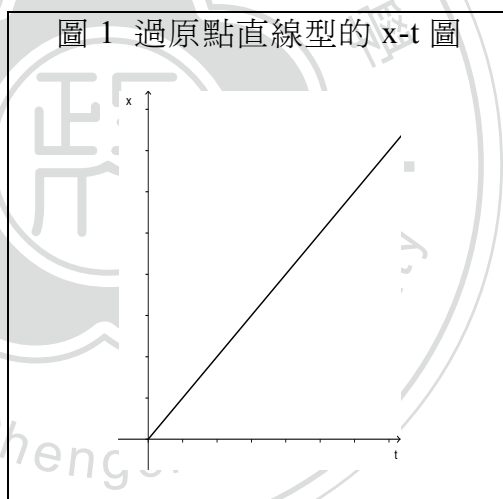
### 1. 過原點的傾斜直線圖形：

#### (1) 圖形表現方面：

四位中數理能力受試者能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示原點為參考點，如同直線在圖形中的起始點。研究者觀察的情形為四位中數理能力的受試者，皆能說出直線從原點出發，因此，研究者推斷四位中數理能力受試者，了解當傾斜的直線通過原點時，直線圖形的截距為零。

#### (2) 實際操作方面：

四位中數理能力受試者都能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置為原點。擷取部分對話及所觀察的圖 1，如下：



T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：小汽車從原點出發。

GM2：小汽車從基準點出發。

BM1：小汽車從原點出發。

BM2：小汽車在原點出發。

#### (3) 零截距小結：

綜合以上 (1)、(2) 兩點來看，四位中數理能力受試者能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置為原點，以及原點為參考點。故研究者推斷四位中數理能力受試者，亦不受到



直線圖形上零截距的概念影響，才會將小汽車放在地圖上的參考點位置。也就是說，四位中數理能力在處理直線型  $x-t$  圖形時，對於圖形中的截距概念與操作真實物體運動狀態均有一致的表現。

## 2.非過原點的傾斜直線圖形：

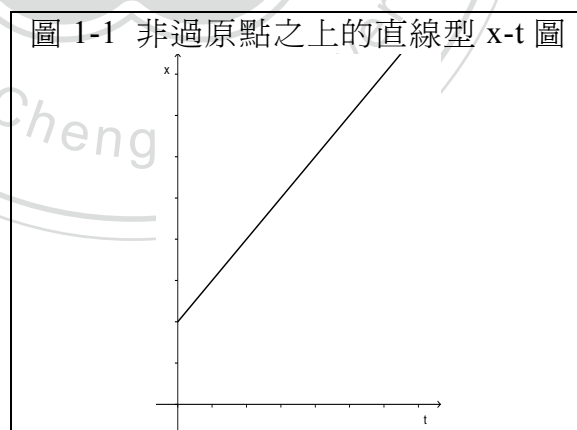
### (1) 正截距

#### I.圖形表現方面：

四位中數理能力受試者，只有一位受試者 GM1 無法理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，該生無法理解直線於與  $x$  軸相交所代表的意義，而其他三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2，皆能說明原點為參考點的圖形中，直線交於  $x$  軸上方兩個單位長，也就是說，除了受試者 GM1 之外的三位中數理能力受試者，能夠理解圖形的正截距概念。

#### II.實際操作方面：

中數理能力四位受試者，唯有受試者 GM1 不能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置是離原點正向兩個單位長的距離，而其他三位受試者 GM2、BM1、BM2，皆能理解正截距所代表的意義。如以下對話及所觀察的圖 1-1：



T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：沒有辦法操作小汽車，因為不懂直線與  $x$ （位置）軸交點的意義，可是它似乎影響到小汽車的運動狀態。

GM2：小汽車從距離基準點 2 個單位長出發。

BM1：小汽車從是離原點 2 個單位的地方出發。

BM2：小汽車從離原點 2 個單位的地方出發。

### III. 正截距小結：

綜合以上 I、II 兩點，三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2，能理解非過原點之上傾斜的直線型  $x-t$  圖形，且正確說出直線圖形與  $x$  軸相交於原點之上，並對應到小汽車的起始位置是離原點正向兩個單位長的位置。故研究者推斷三位中數理能力受試者，不受到直線圖形正截距概念之影響，才能夠將小汽車放在地圖上距離參考點正向兩個單位長的位置。

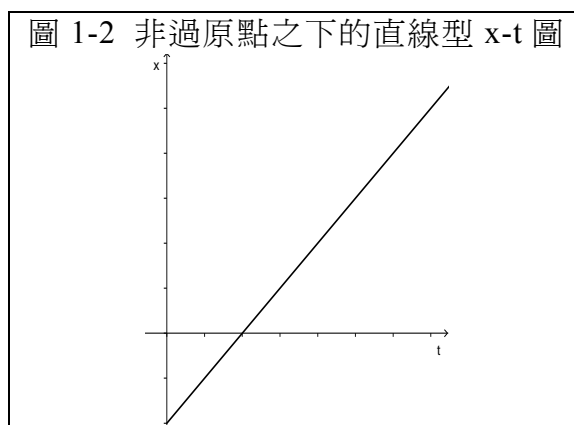
### (2) 負截距

#### I. 圖形表現方面：

四位中數理能力受試者，只有受試者 GM1 無法理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，該受試者無法理解直線與  $x$  軸相交所代表的意義，而其他三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2，皆能說明以原點為參考點的圖形中，直線交於  $x$  軸下方兩個單位長，也就是說，除了受試者 GM1 之外的三位中數理能力受試者，能夠理解圖形的負截距概念。

#### II. 實際操作方面：

中數理能力的四位受試者，唯有受試者 GM1 不能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置是離原點負向兩個單位長的距離，而其他三位受試者 GM2、BM1、BM2，皆能理解負截距所代表的意義。如以下對話及所觀察的圖 1-2：



T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖

上操作。

GM1：沒有辦法操作小汽車，因為和剛剛一樣。

GM2：將截距看成小汽車與基準點的距離。

BM1：小汽車從原點後面 2 公里的地方出發。

BM2：小汽車從離原點下方 2 個單位的地方出發。

### III.負截距小結：

綜合以上 I、II 兩點來看，三位中數理能力受試者 GM2、BM1 以及 BM2 能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，能正確說出直線圖形與  $x$  軸相交於原點之下，並對應到小汽車的起始位置是離原點負向兩個單位長的位置，只有中數理能力受試者 GM1 受到直線圖形與  $x$  軸之交點的影響，而導致無法理解真實的小汽車的起始點的位置。

### 3.中數理能力截距表現的總結：

綜合上述 1、2 兩點，若固定直線的傾斜程度，在不同直線型  $x-t$  圖形與真實物體起始位置之表現，研究者發現中數理能力四位受試者，在過原點直線型  $x-t$  圖形的表現中，皆能對應到小汽車真實的起始位置。唯有中數理能力受試者 GM1 在非過原點圖形受到截距所影響，無法理解圖形的截距概念，導致無法表示小汽車的起始點位置，而其他三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2，都能夠從非過原點圖形對應到小汽車的起始位置，雖然說中數理能力受試者 GM1，無法從圖形資訊對應到真實物體運動狀態，但是，這四位中數理能力受試者從圖形對應到真實物體狀態的表現是有一致性的，亦即受試者 GM1 無法從圖形訊息轉換到小汽車的起始位置，其他三位受試者可以從圖形訊息轉換到小汽車的起始位置，不會有受試者無法從圖形取得訊息，但卻又可以理解小汽車的起始位置的情形產生。

表 4-2 為四位中數理能力受試者在處理直線型  $x-t$  圖形受截距影響之表現比較，其中，○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念，X 代表該受試者無法理解圖形的截距概念，從表 4-2 可以發現：四位中數理能力受試者對於過原點直線型  $x-t$  圖的截距概念有百分之百的答對率；在非過原點直線型  $x-t$  圖的截距概念有百分之七十五的答對率

表 4-2 中數理能力受試者在處理直線型 x-t 圖的截距概念表現之比較

圖形 \ 受試者		中數理能力			
		GM1	GM2	BM1	BM2
過原點	零截距	○	○	○	○
非過原點	正截距	X 不了解	○	○	○
	負截距	X 不了解	○	○	○

○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念。  
X 代表該受試者無法理解圖形的截距概念。



### 三、低數理能力受試者的理解情形

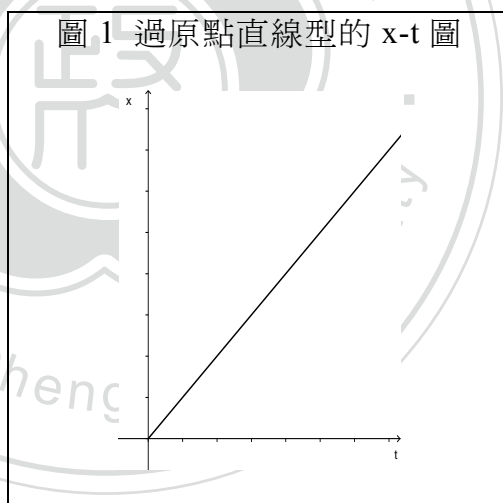
#### 1. 過原點的傾斜直線圖形：

##### (1) 圖形表現方面：

四位低數理能力受試者皆能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示原點是參考點，如同直線在圖形的起始點。研究者觀察到四位低數理能力受試者，皆能說出直線從原點出發，因此，研究者推斷四位低數理能力受試者 GL1、GL2、BL1、GL2，能夠理解當傾斜的直線通過原點時，直線圖形的截距為零。

##### (2) 實際操作方面：

四位低數理能力受試者，都能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置為原點。擷取部分對話及所觀察的圖 1，如下：



T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：小汽車從紅點出發。

GL2：小汽車從原點點出發。

BL1：小汽車在原點出發。

BL2：小汽車在原點出發。

##### (3) 零截距小結：

綜合以上 (1)、(2) 兩點來看，四位低數理能力受試者能理解過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，表示小汽車的起始位置為原點，以

及原點為參考點。故研究者推斷四位低數理能力受試者，亦不會受到直線圖形為零截距概念之影響，才能正確將小汽車放在地圖上的參考點位置。也就是說，四位低數理能力在處理直線型  $x-t$  圖形時，對於圖形中的截距概念與操作真實物體運動狀態有一致的表現。

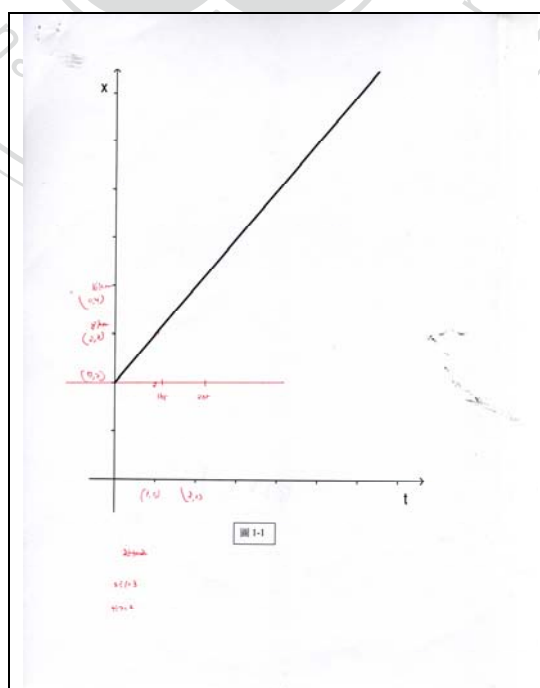
## 2.非過原點的傾斜直線圖形：

### (1) 正截距

#### I.圖形表現方面：

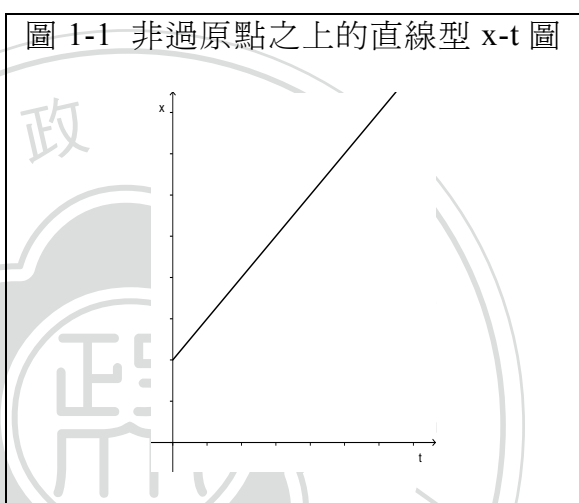
四位低數理能力受試者中，只有一位受試者 BL2 無法理解非過原點的傾斜直線圖形，研究者發現該受試者對圖形的理解有誤，將  $t$  軸往上平移使原點與直線和  $x$  軸的交點位置重疊，認定此交點位置為新原點。在此以圖 4-1 佐證該受試者 BL2 的表現。而其他三位低數理能力受試者 GL1、GL2、BL1，皆能說明原點為參考點的圖形中，直線交於  $x$  軸上方兩個單位長。也就是說，除了受試者 BL2 之外的三位低數理能力受試者，能夠理解圖形的正截距概念。

圖4-1 低數理能力學生BL2在圖形上之表現



## II. 實際操作方面：

低數理能力四位受試者，唯有受試者 BL2 不能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，研究者發現該受試者 BL2，因在處理圖形時，將  $t$  軸往上平移至起始點位置，以致影響小汽車起始點位置當成原點來處理，很明顯的，缺少座標軸的對應概念。而其他三位受試者 GL1、GL2、BL1，皆能理解正截距所代表的意義，表示小汽車的起始位置是離原點正向兩個單位長的距離，如以下部份對話及所觀察的圖 1-1：



T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：觀察圖 1-1 後，在  $x$  軸上標上起始點 2，小汽車從地圖上距離紅點 2 單位長的地方出發。

GL2：觀察圖 1-1 後，小汽車從地圖上距離紅點 2 單位長的地方出發。

BL1：觀察圖 1-1。小汽車從離原點任意方向的 2 公里處出發。

BL2：先標刻度，把  $t$  軸平移上來。然後，小汽車從原點的地方出發，速度是以越來越慢的方式前進。

## III. 正截距小結：

綜合以上 I、II 兩點來看，三位低數理能力受試者 GL1、GL2 以及 BL1 能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，能正確說出直線圖形與  $x$  軸相交於原點之上，並對應到小汽車的起始位置是離原點正向兩個單位長的位置，只有低數理能力受試者 BL2 因圖形的理解有誤而影響到真實世界小汽車所在的起始位

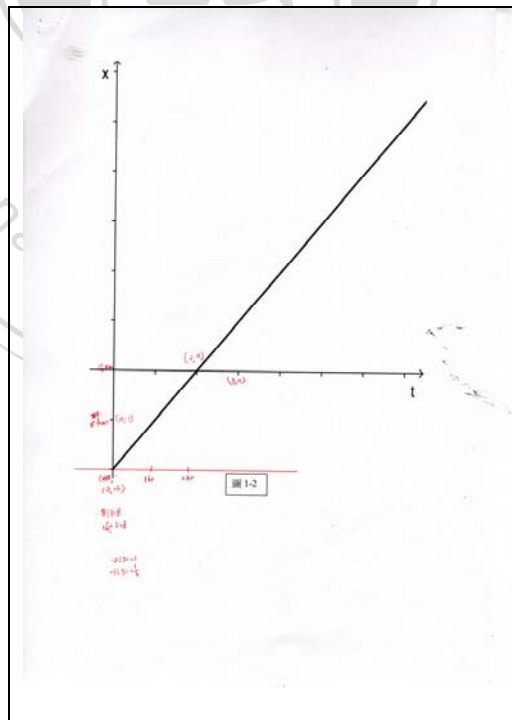
置。這四位低數理能力的受試者，從圖形資訊對應到真實物體起始位置之表現一致。

## (2) 負截距

### I. 圖形表現方面：

四位低數理能力受試者，也是只有一位受試者 BL2 無法理解非過原點的傾斜直線圖形，發現該受試者對圖形的理解有誤，將 t 軸往下平移使與直線和 x 軸的交點位置重疊，重新認定此交點位置為新原點。在此以圖 4-2 佐證該受試者 BL2 的表現。而其他三位低數理能力受試者 GL1、GL2、BL1，皆能說明原點為參考點的圖形中，直線交於 x 軸下方兩個單位長；也就是說，除了受試者 BL2 之外的三位低數理能力受試者，能夠理解圖形的負截距概念。

圖4-2 低數理能力學生BL2在圖形上之表現

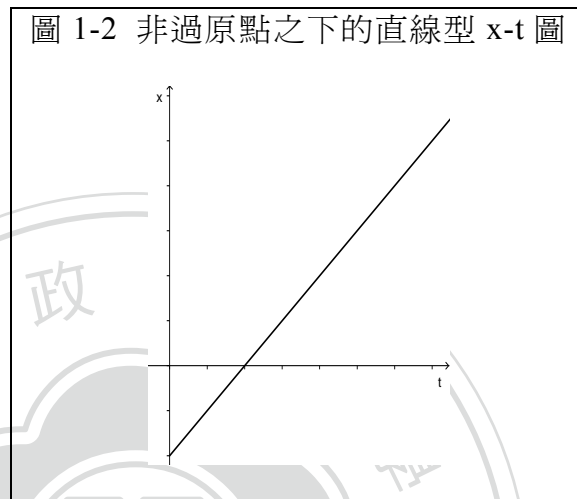


### II. 實際操作方面：

低數理能力四位受試者，唯有受試者 BL2 不能理解非過原點傾斜的直線型 x-t 圖形，研究者發現該受試者 BL2，因在處



理圖形時，將  $t$  軸往下平移至起始點位置，以致影響小汽車起始點位置當成原點來處理，很明顯的，缺少座標軸的對應概念。而其他三位受試者 GL1、GL2、BL1，皆能理解正截距所代表的意義，表示小汽車的起始位置是離原點負向兩個單位長的距離，如以下部份對話及所觀察的圖 1-2：



- T：從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。
- GL1：觀察圖 1-2 後，在紅點下方 2 公里出發。
- GL2：觀察圖 1-2 後，將小汽車移到原點下方 2 個單位處出發。
- BL1：小汽車開到原點下方 2km 處。
- BL2：先標刻度，把  $t$  軸平移下來。然後，小汽車是以往後退的方式運動，且速度漸漸變慢行駛。

### III. 負截距小結：

綜合以上 I、II 兩點來看，三位低數理能力受試者 GL1、GL2 以及 BL1 能理解非過原點傾斜的直線型  $x-t$  圖形，能正確說出直線圖形與  $x$  軸相交於原點之下，並對應到小汽車的起始位置是離原點負向兩個單位長的位置，只有低數理能力受試者 BL2 因圖形的理解有誤而影響到真實世界小汽車所在的起始位置。這四位低數理能力的受試者，從圖形資訊對應到真實物體起始位置之表現一致。

### 3. 低數理能力截距表現的總結：

綜合上述 1、2 兩點，若固定直線的傾斜程度，在不同直線型的  $x-t$

圖形與真實物體起始位置之表現，研究者發現低數理能力的四位受試者 GL1、GL2、BL1、BL2，在過原點直線型  $x-t$  圖形的表現中，皆能對應到小汽車真實的起始位置。唯有低數理能力受試者 BL2 在非過原點圖形受到截距所影響，將  $t$  軸往上或往下的平移處理，以致無法理解圖形所代表的意義，導致小汽車的起始點位置無法正確表示。而其他三位低數理能力受試者 GL1、GL2、BL1，都能夠從圖形對應到小汽車的起始位置，雖然低數理能力受試者 BL2，無法從圖形對應到真實物體運動狀態，但是，這四位低數理能力受試者從圖形對應到真實物體狀態的表現是有一致性的。

表 4-3 為四位低數理能力受試者在處理直線型  $x-t$  圖形受截距影響的表現之比較，其中，○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念，X 代表該受試者無法理解圖形的截距概念，從表 4-3 可以發現：四位低數理能力的受試者對於過原點直線型  $x-t$  圖截距概念有百分之百的答對率，在非過原點直線型  $x-t$  圖截距概念有百分之七十五的答對率

表 4-3 低數理能力受試者在處理直線型  $x-t$  圖的截距概念表現之比較

圖形		受試者	低數理能力			
			GL1	GL2	BL1	BL2
過原點	零截距		○	○	○	○
非過原點	正截距		○	○	○	X 往上平 移 $t$ 軸
	負截距		○	○	○	X 往下平 移 $t$ 軸
○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念。						
X 代表該受試者無法理解圖形的截距概念。						

#### 四、總結：

在本節中，探討的截距概念是不牽涉直線其他的變項，即固定直線的傾斜程度所探討的截距概念，本研究發現若圖形為過原點的直線型  $x-t$  圖形，不論是高、中、低三種不同數理能力的受試者，皆能從圖形資訊對應到小汽車的起

始點位置，全體受試者皆能由圖形資訊對應到小汽車的起始位置。但若是非過原點得直線型  $x-t$  圖時，高數理能力受試者可以百分之百對應到小汽車的起始點位置，而中、低數理能力的受試者，分別是 GM1 以及 BL2 無法從圖形資訊對應到小汽車的起始點位置，答對率高達百分之七十五；換句話說，約有七成以上的受試者能夠由圖形資訊對應到小汽車的起始點位置。

最後，研究者以表 4-4 作為高中低三種不同數理能力在處理直線型  $x-t$  圖形截距概念之表現比較，其中，○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念，X 代表該受試者無法理解圖形的截距概念。

表 4-4 高中低三種不同數理能力探討截距概念之表現

		高數理能力				中數理能力				低數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2	GM1	GM2	BM1	BM2	GL1	GL2	BL1	BL2
過	零	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
原	截												
點	距												
過	正	○	○	○	○	X	○	○	○	○	○	○	X
非	截					不							往
	距					了							上
						解							平
													移
													t
													軸
原	負	○	○	○	○	X	○	○	○	○	○	○	X
點	截					不							往
	距					了							下
						解							平
													移
													t
													軸
○代表該受試者能夠理解圖形上的截距概念。													
X 代表該受試者無法理解圖形的截距概念。													

## 第二節 x-t 圖形的斜率概念

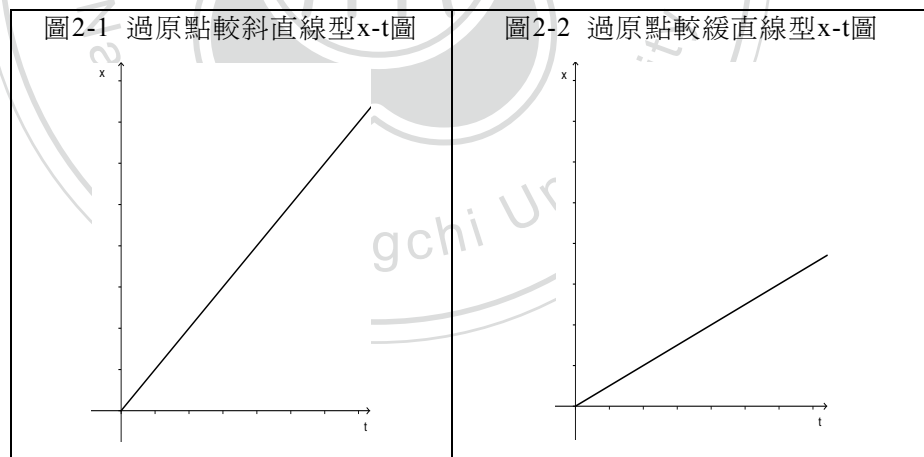
本節所要探討的是從直線型 x-t 圖形的斜率概念，對應到小汽車的運動狀態。研究者在此以單純的傾斜程度，作為探討直線型 x-t 圖形中斜率概念的分析，測試的工具為圖 2-1、圖 2-2、圖 2-3、圖 2-4、圖 2-5、圖 2-6、圖 2-7，而圖 2-3、圖 2-4 兩張工具是提供受試者圖 2-1 與圖 2-2 需有刻度才能求得物體的運動速度。

### 一、高數理能力受試者的理解情形

#### 1. 過原點不同傾斜程度的直線圖形：

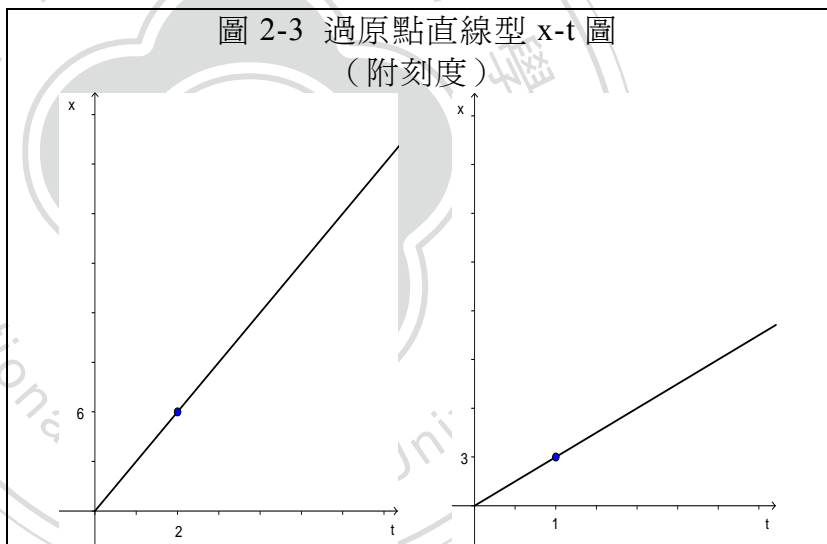
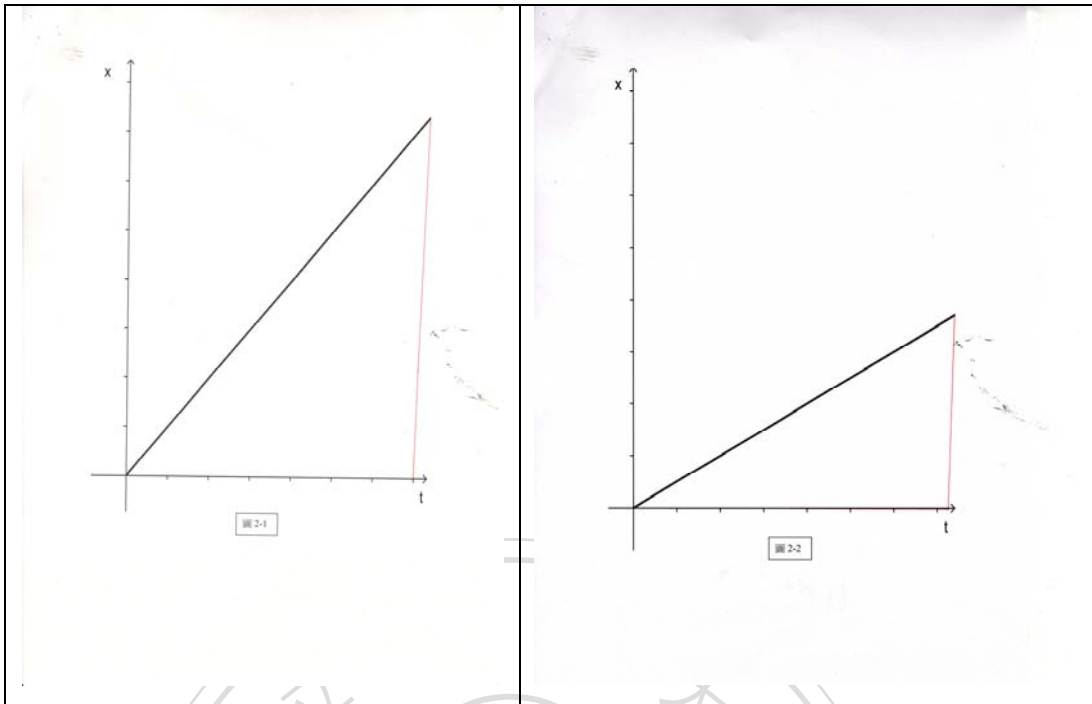
##### (1) 圖形表現方面：

在兩張沒有標示刻度的座標平面下，分別給了兩條不同傾斜程度的直線，如圖2-1及圖2-2。三位高數理能力受試者GH1、BH1、BH2，第一時間皆以傾斜程度的大小直接反應成物體運動速度的快慢，即直線越斜則速度越快。而受試者GH2卻是以單位時間內的路程長短來決定速度快慢，從圖形獲得運動速度的訊息，如圖4-3所示（見下頁）。



三位高數理能力受試者GH1、BH1、BH2，特別注意到x軸與t軸刻度比例大小也會影響到傾斜程度，換句話說，在座標軸沒有刻度的情況下，雖然傾斜程度不同，可以透過兩軸刻度的變化，是可能讓兩條直線的速度是一樣的，因此研究者再以圖2-3（見下頁）測驗受試者是否真的能從圖形獲得物體運動的速度。

圖4-3 高數理能力受試者GH2在過原點圖形之斜率表現



值得一提的是高數理能力受試者BH2更發現：傾斜程度雖然不同，但是受到兩軸刻度比例之影響，有可能產生相同的速度，故不能單從直線的傾斜程度來判斷速度的快慢，除非是在相同的座標之下，這也是本研究十二位受試者中，唯一充分說明刻度比例大小對於直線傾斜程度之影響的重要性。以下對話：

BH1：……，但要考慮刻度，若刻度不一樣的兩個圖形，就不能從直線的傾斜程度判斷小汽車運動的快慢。

T：計算圖 2-3 上、下兩個圖形之速度？

BH1：圖 2-3 得到，不一樣斜度的直線受到不同的座標軸刻度可能速度會是相同的。

GH1：在圖 2-3 發現，不一樣斜度的直線因不同的座標軸刻度，則速度可能是相同。

BH2：圖 2-3 的上圖與圖 2-1 相比較，連同直線與 t 軸的夾角都一樣，但速度是不一樣的。所以，刻度的改變會造成速度的影響，也就是直線的傾斜程度，即使斜度一樣，仍有可能速度不同，除非是在相同的座標軸上，才可以利用直線的傾斜程度比較快慢。

(2) 實際操作方面：

四位高數理能力受試者皆能理解過原點不同傾斜的直線型 x-t 圖形，表示小汽車的運動狀態是以不相同的等速度前進。如以下對話：

T：請從圖 2-1 和圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH1：觀察圖 2-1、2-2。因為圖 2-1 的直線比圖 2-2 還斜，所以，圖 2-1 小汽車運動的速度比圖 2-2 小汽車運動的速度還快。

BH2：在圖 2-1 的小汽車以等速度朝北方向前進。在圖 2-2 的小汽車以等速度朝北方前進，且速度比圖 2-1 的慢。

GH2：在圖 2-1 的小汽車往右 7 格，再往上 7 格，以  $1 \frac{km}{hr}$  的速度朝正方向走。在圖 2-2 的小汽車往右 7 格，再往上  $3 \frac{2}{3}$  格，以  $\frac{3 \frac{2}{3}}{7} \frac{km}{hr}$  的速度朝正方向前進。

T：還有別的作法嗎？

GH2：以相同時間作比較，圖 2-2 走的距離較短，當然速度比較慢。也就是相同時間的話，以路程的長短判斷速度的快慢。

(3) 過原點不同傾斜程度的直線小結：

綜合以上 (1)、(2) 兩點來看，四位高數理能力受試者能理解過原點不同傾斜程度的直線型 x-t 圖形，表示小汽車是以不同的等速度前進。其中，三位高數理能力受試者 GH1、BH1、BH2，除了在第一時間內以直線的傾斜程度判斷小汽車運動速度之快慢，也提出在不同座標軸刻度大小的直線，有可能會有相同的斜率，亦即小

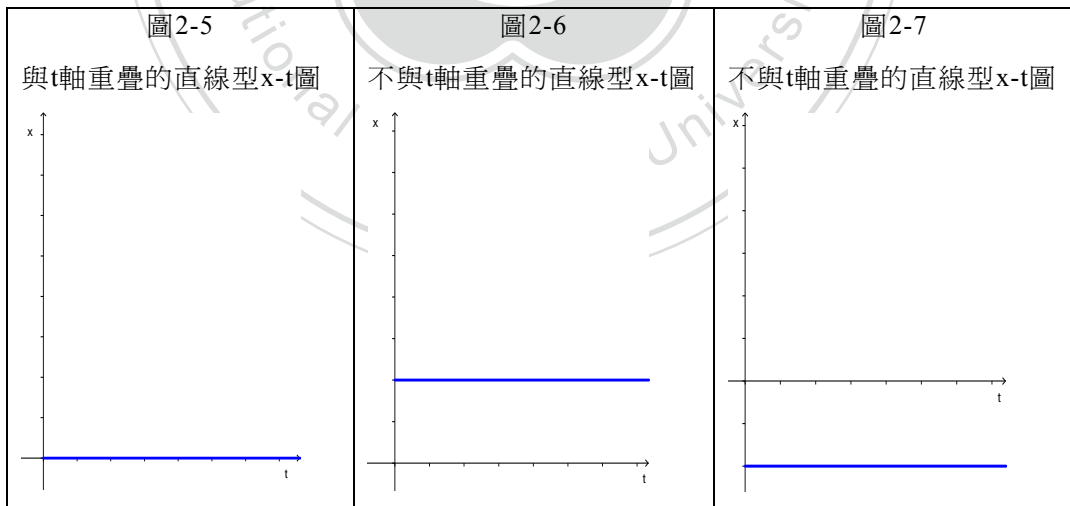
汽車的運動速度可能會相同，因而主張不可從直線的傾斜程度直接判斷小汽車運動速度的快慢。而高數理能力受試者 BH2 也特別提到，除非是在相同的座標軸下，才能夠以直線的傾斜程度比較小汽車運動速度之快慢。

另一位高數理能力受試者 GH2 則是自行標示座標軸刻度，從不同圖形獲得小汽車的運動速度快慢差異之訊息，故研究者推斷四位高數理能力受試者在圖形與真實物體運動狀態均有一致表現。

## 2. 水平直線的圖形：

### (1) 圖形表現方面：

三位高數理能力受試者GH1、BH1、BH2，很清楚地說明水平直線圖形，如圖2-5、圖2-6、圖2-7。當時間軸越往右增加，位置軸皆為固定不改變，即表示物體的位置不會改變。但，高數理能力受試者GH2當水平直線與t軸重疊時，才認為物體是靜止不動，主要是因為位置在零的地方。而當水平直線不與t軸重疊的時候，產生錯誤的解釋，隨時間軸往右增加的改變，忽略位置軸並未改變，故受試者GH2在水平直線圖形不與t軸重疊的情況下判斷有誤。



### (2) 實際操作方面：

#### I. 與 t 軸重疊：

四位高數理能力受試者，皆能理解與 t 軸重疊的水平直線圖形，所對應的小汽車為靜止不動，如以下對話：

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車在地圖上的原點靜止不動。

GH2：小汽車在原點不動，速度是 0。

BH1：小汽車在地圖上的原點靜止不動。

BH2：小汽車在原點靜止不動。

## II. t 軸之上的水平直線：

三位高數理能力受試者 GH1、BH1、BH2，皆能理解不與 t 軸重疊，但在 t 軸之上的水平直線圖形，所對應的小汽車離原點正向兩個單位的位置，運動狀態為靜止不動。而受試者 GH2 對圖形產生錯誤的解讀，解釋成圖形中的 t 軸每向右增加一個單位，物體也向右移動一個單位長，忽略 x 軸從未改變的事實，進而操作成小汽車的運動狀態以等速度前進，而非靜止狀態。如以下對話：

■ T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車在離原點 1km 處靜止不動。

BH1：小汽車在離原點 2km 處靜止不動。

BH2：小汽車在原點北方 2 個單位的地方，就像是待在新家不動。

GH2：小汽車從離原點 2 格的地方出發，再往右走 7 格，且速度是  $1\text{ km/hr}$ 。

## III. t 軸之下的水平直線：

同樣地，三位高數理能力受試者 GH1、BH1、BH2，皆能理解不與 t 軸重疊，但在 t 軸之下的水平直線圖形，所對應的小汽車離原點負向兩個單位的位置，運動狀態為靜止不動。而受試者 GH2 對圖形產生錯誤的解讀，解釋成圖形中的 t 軸每向右增加一個單位，物體也向右移動一個單位長，忽略 x 軸從未改變的事實，進而操作成小汽車的運動狀態以等速度前進，而非靜止狀態。如以下對話：



T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車離原點負向 1km 處靜止不動。（一個單位長為 0.5km）

BH1：小汽車離原點負向 2km 處靜止不動。

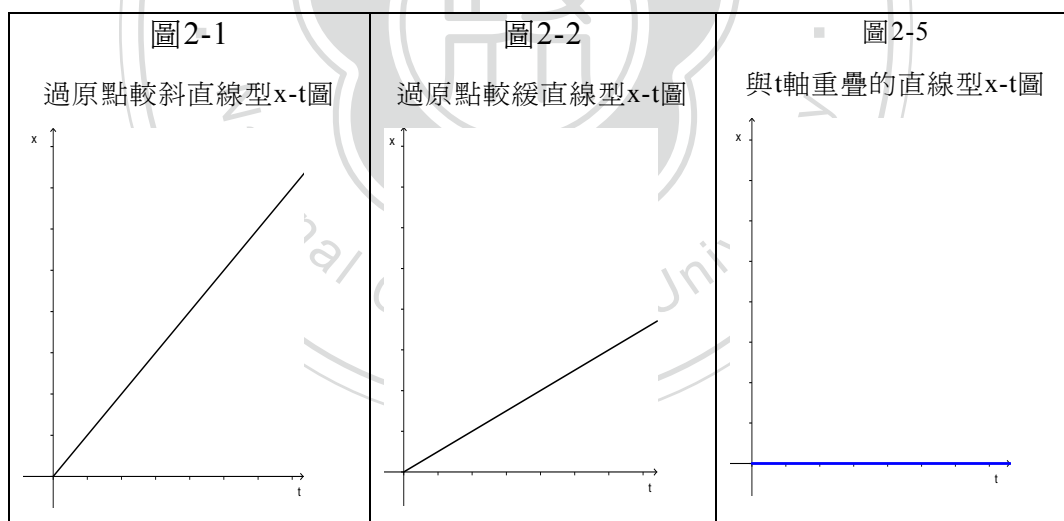
BH2：小汽車在原點下方 2 個單位的地方，換到另一個新家不動。

GH2：小汽車從離原點左邊 2 格的地方出發，再往右走 7 格，且速度是  $1 \text{ km/hr}$ 。

### (3) 水平直線圖形的小結：

三位高數理能力受試者皆能理解水平直線圖形所對應的小汽車運動狀態為靜止不動的。而高數理能力受試者GH2，卻因圖形的解讀發生錯誤，在不與t軸重疊的水平線圖形，視小汽車為等速度運動前進。故，四位高數理能力受試者在圖形與真實運動狀態的表現亦是一致的。

### 3.圖形的斜率概念對物體運動速度影響之總結：



研究者以圖2-1、圖2-2、圖2-5三張工具，對四位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1、BH2在圖形與小汽車運動狀態做整理與分析，檢視四位受試者是否在相同的座標軸刻度圖形，能夠判斷直線越斜，對應到小汽車的運動速度越快，並以表4-5做為整理，其中，以○表示該受試者能夠理解。從表4-5可以發現，四位高數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形有百分之百的答對率。最後，再以表4-6作為四位高數理能

力受試者在探索直線型x-t圖形的斜率概念比較，其中，包含受試者在不  
 相同座標軸刻度下的討論，以及不與t軸重疊的水平直線，以○表示  
 該受試者能夠理解，X表示該受試者不能夠理解，-表示該受試者沒有  
 在此項並無作答。

表 4-5 高數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形比較物體運動快慢

直線 圖形	小汽車 速度	高數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2
斜	快	○	○算	○	○
緩	慢	○	○算	○	○
水平	靜止	○	○	○	○

表 4-6 高數理能力受試者在探索直線型 x-t 圖形的斜率概念比較

直線圖形	小汽車速度	高數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2
斜	快	-	○算式有問題	-	-
緩	慢	-	○算式有問題	-	-
直覺		○	-	○	○
刻度	影響	刻度	-	刻度	刻度 座標軸
	不影響	-	○	-	-
與t軸重疊之水平線		○	○	○	○
t軸之上水平線		○	X運動方式	○	○
t軸之下水平線		○	X運動方式	○	○

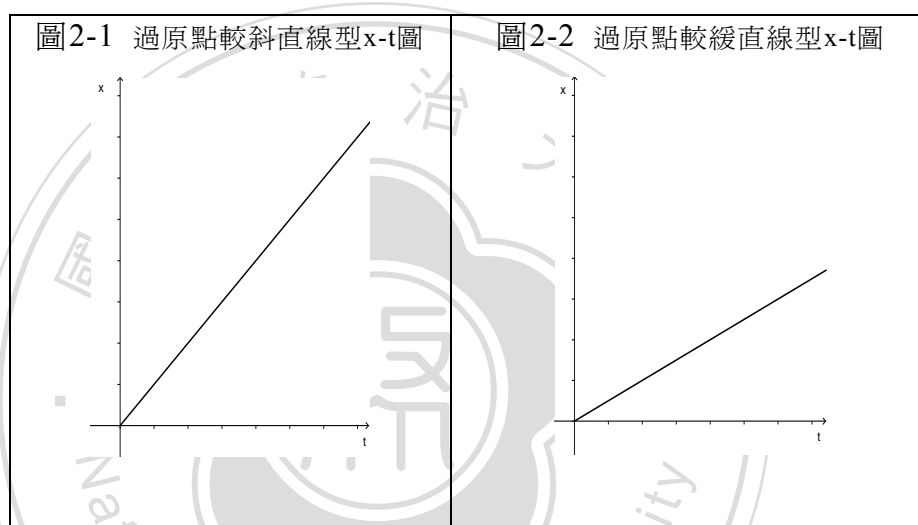
○算：表示不受座標軸刻度的影響，會自行標示刻度。  
 ○：表示該受試者能夠從圖形對應到小汽車的運動狀態。  
 X：表示該受試者無法從圖形對應到小汽車的運動狀態。  
 X運動方式：小汽車為等速度，但運動的模式錯誤：如往右7格、再往上7格。  
 -：表示該受試者在此項並無作答。

## 二、中數理能力受試者的理解情形

### 1. 過原點不同傾斜程度的直線圖形：

#### (1) 圖形表現方面：

在兩張沒有清楚刻度的座標平面下，分別給了兩條傾斜程度不同的直線，如圖2-1及圖2-2。中數理能力受試者BM1、GM1、GM2，三位一開始皆認定速度是一樣的，研究者推論中數理能力受試者認為座標平面上直線的傾斜程度並不是代表物體運動速度之快慢。



但中數理能力受試者BM2則是以直線傾斜程度的直覺，判斷物體運動速度的快慢，如以下為部份對話：

T：請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1：速度是一樣的。

GM1：速度是一樣的。

GM2：各自以相同的等速度前進。

BM2：小汽車從原點出發，圖 2-2 的速度比圖 2-1 的慢，朝正方向前進。

當問及不同直線傾斜程度所代表的速度快慢，四位中數理能力受試者，皆會主動標上刻度，透過運算求出速度大小，達到比較結果。如以下部份對話及圖4-4、圖4-5、圖4-6分別為三位中數理能力GM1、GM2、BM2在過原點圖形之斜率表現，而受試者BM1

單純以目視結果後，再口頭回答。

T : 圖 2-1 和圖 2-2 鐘的小汽車之速度？

GM1 : 圖 2-1 的速度是  $2 \div 2 = 1 (km/hr)$  ; 圖 2-2 的速度是

$$2 \div 4 = \frac{1}{2} (km/hr)$$

GM2 : 小汽車在圖 2-1 , 以速度  $2 \div 2 = 1 (km/hr)$  朝正方向前進 ;

在圖 2-2 以速度  $2 \div 4 = \frac{1}{2} (km/hr)$  朝正方向前進。

BM2 : 在圖 2-1 , 小汽車的速度是  $\frac{7}{7} = 1$  ; 在圖 2-2 , 小汽車的速度

$$\text{是 } \frac{3 \dots}{7 \dots} = 0.428$$

BM1 : 圖 2-1 的速度是  $2 \div 2 = 1 (km/hr)$  ; 圖 2-2 的速度是

$$1 \div 4 = \frac{1}{4} (km/hr)$$

圖4-4 中數理能力受試者GM1在過原點圖形之斜率表現

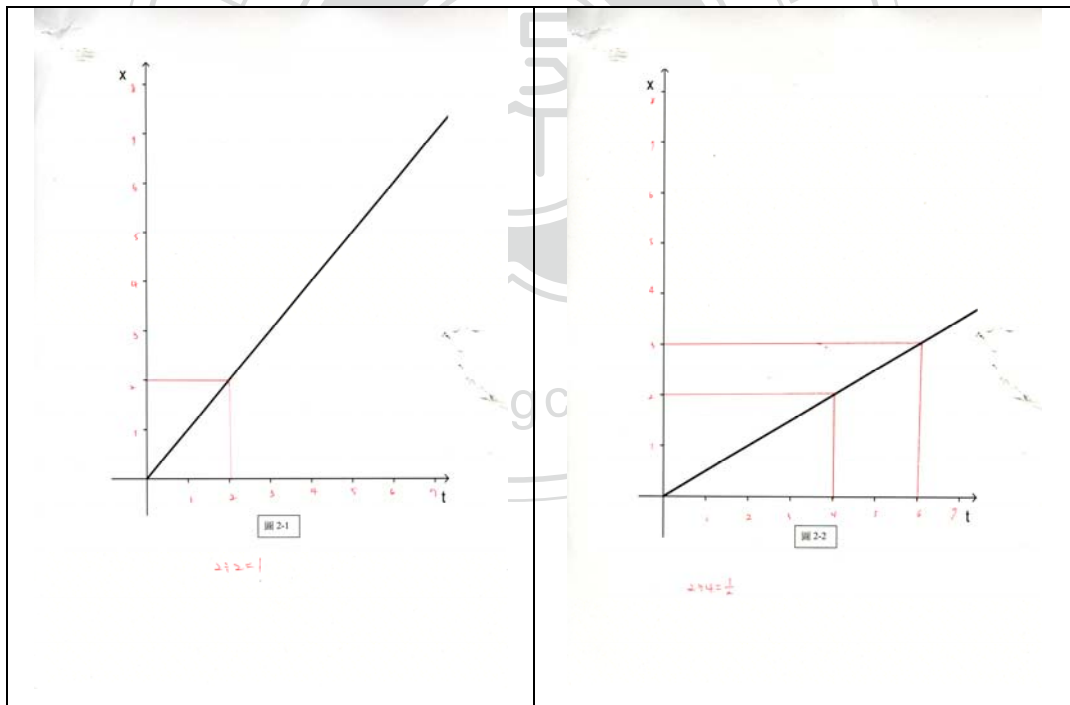


圖4-5 中數理能力受試者GM2在過原點圖形之斜率表現

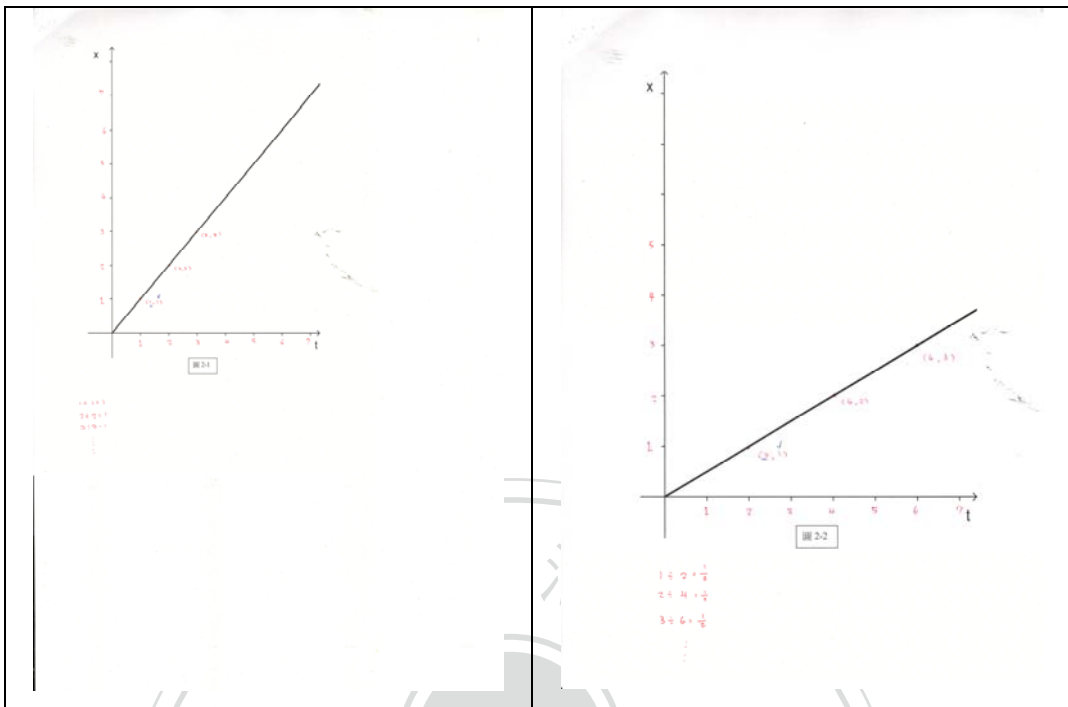
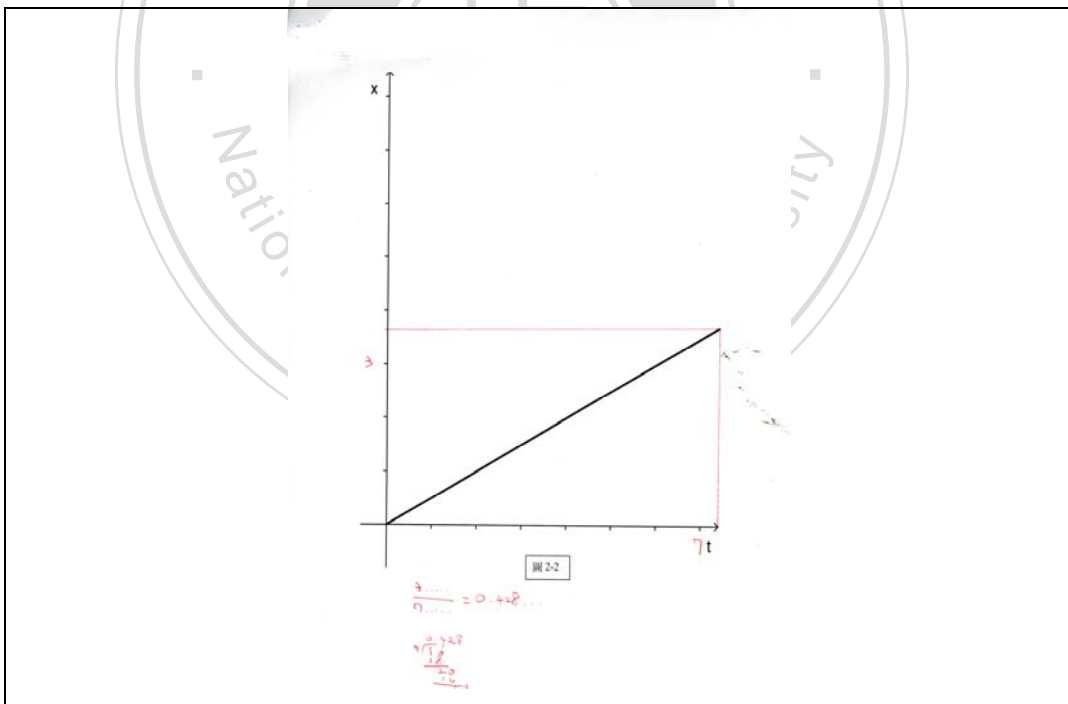


圖4-6 中數理能力受試者BM2在過原點圖形之斜率表現



但是，必須注意中數理能力受試者BM2在圖2-2是以計算格子的方式，求算圖形中的物體運動速度，雖然能夠比較兩張圖形的速度，研究者斷定受試者BM2受到直線長度影響，而以直線長度為為物體所走的距離來計算路程；而圖2-1是以直接目視，並未在

圖形上留下計算，故無圖形佐證。除此之外，受試者BM1也注意到若改變座標軸刻度，有可能會發生不一樣傾斜程度的直線，物體卻會有相同的運動速度，如以下對話：

T：剛剛怎麼會認為兩個速度一樣？

BM1：改變刻度的話，有可能讓兩個速度一樣。

(2) 實際操作方面：

四位中數理能力受試者皆能理解過原點不同傾斜程度的直線型x-t圖形，對應到小汽車是以等速度前進的運動狀態，但受試者BM2速度錯誤計算的結果，對應到小汽車正確的運動狀態。

T：請從圖 2-1 和圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：觀察圖 2-1、2-2。速度是一樣的，但是，等到標上刻度後，發現兩速度是不同的，圖 2-1 的速度是  $2 \div 2 = 1 (km/hr)$ ，

圖 2-2 的速度是  $2 \div 4 = \frac{1}{2} (km/hr)$

GM2：小汽車在圖 2-1，以速度  $2 \div 2 = 1 (km/hr)$  朝正方向前進；

在圖 2-2 以速度  $2 \div 4 = \frac{1}{2} (km/hr)$  朝正方向前進，比較起來圖 2-2 的小汽車比較慢。

BM1：觀察圖 2-1、2-2。速度是一樣的，但是，等到標上刻度後，發現兩速度是不同的，其中，圖 2-1 的速度是  $2 \div 2 = 1 (km/hr)$ 、圖 2-2 的速度是  $1 \div 4 = \frac{1}{4} (km/hr)$ 。

BM2：觀察圖 2-1、2-2。看圖可知，小汽車從原點出發，且圖 2-2 的速度比圖 2-1 的慢。

T：圖 2-1 和圖 2-2 中的小汽車之速度？

BM2：在圖 2-1，小汽車的速度是  $\frac{7}{7} = 1$ ；在圖 2-2，小汽車的速度

是  $\frac{3 \cdots}{7 \cdots} = 0.428$

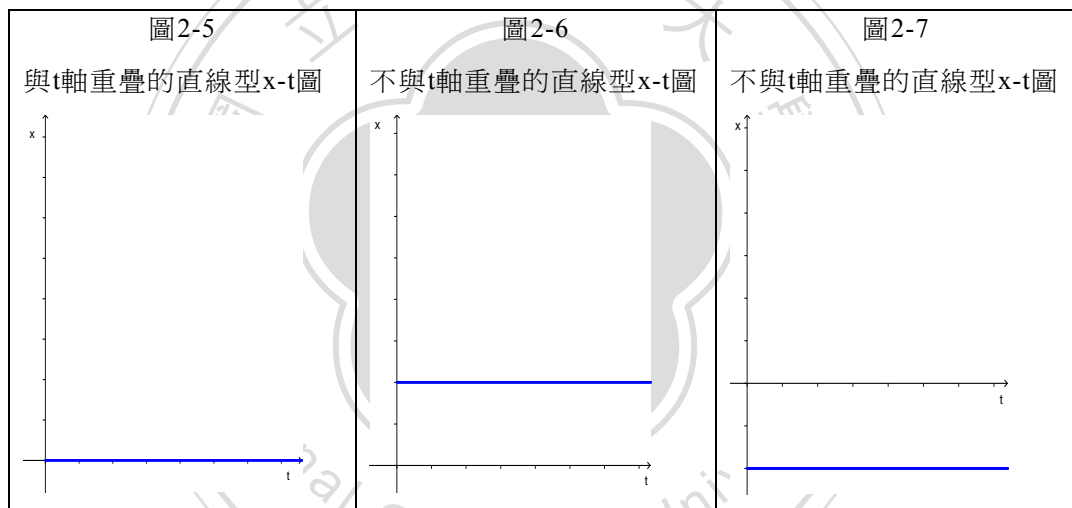
(3) 過原點不同傾斜程度的直線小結：

綜合以上(1)、(2)兩點來看，中數理能力受試者 BM1、GM1 以及 GM2，開始時以直覺認定速度是一樣的，研究者推論這三位中數理能力受試者認為座標平面上直線的傾斜程度並不是代表物

體運動速度快慢，在自行標示座標軸刻度後，透過計算的佐證，才確定對應兩張圖形的小汽車是以不相同的等速度前進。特別是中數理能力受試者 BM1 注意到改變座標軸的刻度，物體有可能會以相同的運動速度前進。

而研究者也發現中數理能力受試者 BM2 錯誤計算，雖然小汽車是以較慢的等速度前進，但計算出的速度值是錯誤的，也就是說，單純從圖形判斷物體的快慢，受試者 BM2 是可以正確回答，但若以計算的形式，則有很大的錯誤存在。故研究者推斷四位中數理能力受試者在圖形與真實物體運動狀態均有一致表現。

## 2. 水平直線的圖形：



### (1) 圖形表現方面：

四位中數理能力受試者，皆能夠清楚地說明水平直線圖形，如圖2-5。當時間軸越往右增加，位置軸皆為固定不改變，即表示物體的位置不會改變。

但從圖2-6、2-7，只有中數理能力受試者BM1當水平直線不與t軸重疊的時候，視為物體位在原點正向或負向2個單位長的位置靜止不動，其他三位中數理能力受試者皆有不相同的解讀。

在圖2-6，如受試者GM1、GM2、BM2雖然能夠正確判斷在t

軸上方的水平線也是代表靜止，但也發現物體從原點到出發點之間是有運動狀態的。而受試者GM2則和其他兩位有不相同的看法，她認為物體是以不同的速度前進。研究者推論這是受試者未連結座標平面上的水平線是不受t軸改變的影響，也就是不清楚對應關係。

在圖2-7，受試者GM1和GM2認為在t軸下方的水平線，因為距離是負的，而無法判斷物體的運動狀態。而受試者BM2受到負值的影響，誤認物體以等速從原點往出發點位置運動，抵達後才靜止不動。

(2) 實際操作方面：

I. 與 t 軸重疊：

四位中數理能力受試者，皆能理解與 t 軸重疊的水平直線圖形，所對應的小汽車為靜止不動，如以下對話：

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：小汽車在地圖上的原點靜止不動。

GM2：小汽車在地圖上的原點靜止不動。

BM1：小汽車在地圖上的原點靜止不動。

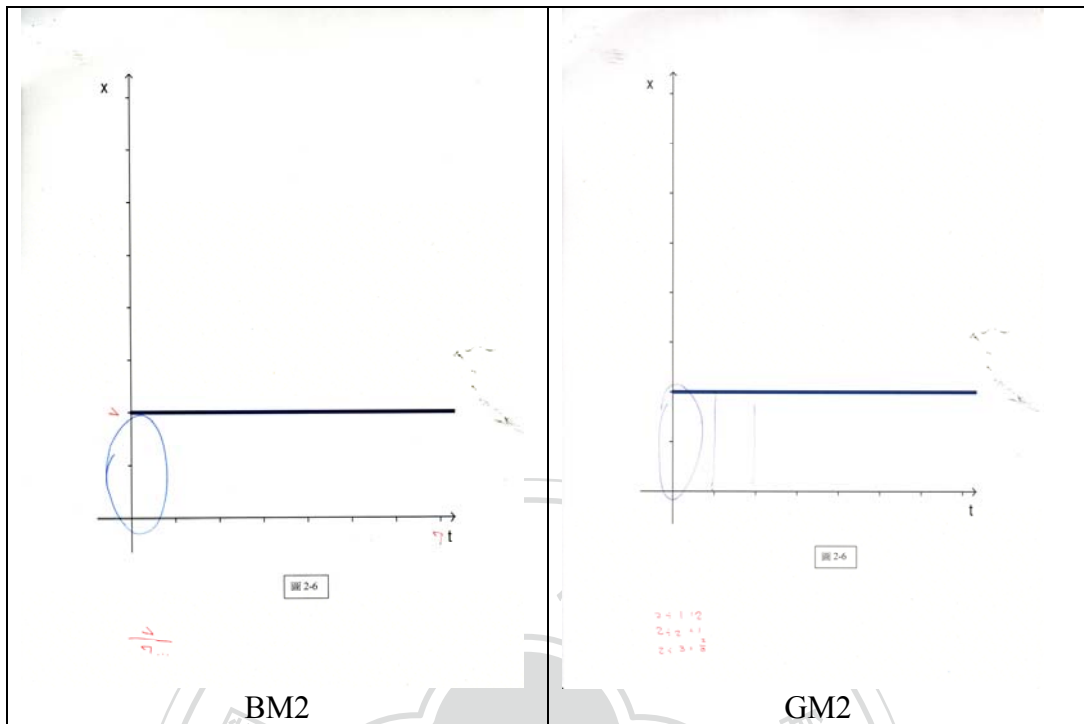
BM2：小汽車在地圖上的原點靜止不動。

II. t 軸之上的水平直線：

只有受試者 BM1、BM2、GM1 能夠正確判斷在 t 軸上方的水平線也是代表靜止，就表示小汽車是靜止不動的運動狀態。特別注意到，受試者 GM1、BM2 還認為小汽車從原點到出發點之間有運動狀態的，受試者 BM2 之表現如圖 4-7 所示。而受試者 GM2 則認為小汽車開到出發點之後，會以不同的速度運動，如下頁圖 4-7 所示及四位的對話：



圖4-7 中數理能力受試者BM2、GM2t軸之上水平直線圖形的斜率概念表現



T : 從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 小汽車在離原點上方 2km 處不動。

GM1 : 小汽車開到離原點 2km 處後，靜止不動。

BM2 : 小汽車從原點出發到 2 公里處，以  $\frac{2}{7 \dots}$  的速度抵達，.....。靜止不動。

GM2 : 小汽車開到離原點 2km 處後，每個時間的速度都不一樣。分別是：

$$2 \div 1 = 2, 2 \div 2 = 1, 2 \div 3 = \frac{2}{3} \dots$$

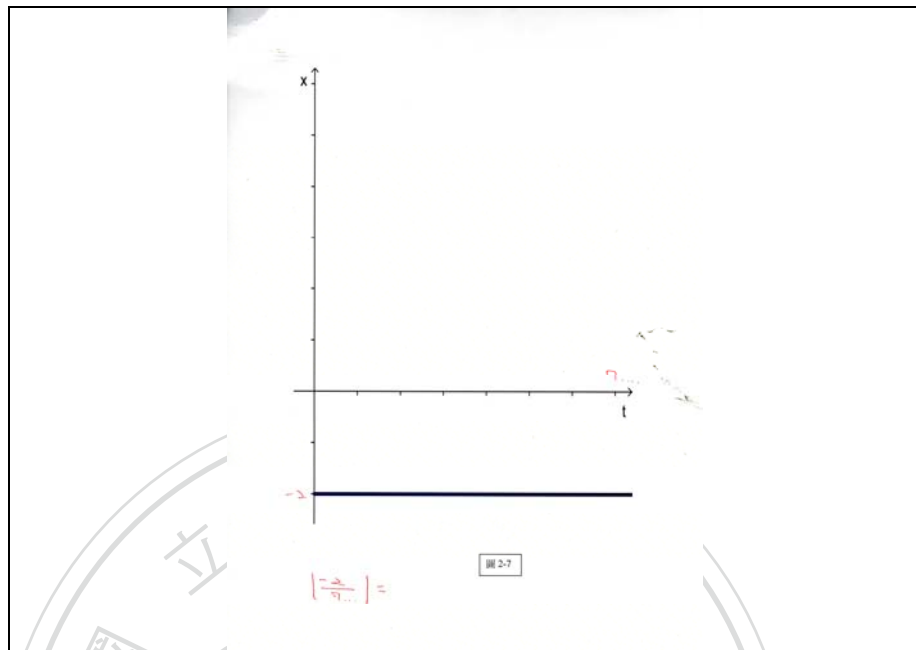
另外，研究者特別說明受試者 GM1 的狀況，第一天測試的截距概念時，尤以正截距的圖形，發現受試者 GM1 無法解釋正截距的圖形，卻在圖 2-6 能夠解釋小汽車開到出發點後，靜止不動，研究者推斷受試者 GM1 可能是受到圖 2-5 的影響，故才會在正截距的部分有不盡相同的解讀。

### III. t 軸之下的水平直線：

受試者 GM1 和 GM2 認為在 t 軸下方的水平線，因為距離是負的，而無法對應到小汽車的運動狀態。而受試者 BM2 受到負值的影響，誤認小汽車以等速從原點往出發點位置後退，

抵達後再靜止不動，如圖 4-8 所示及四位的對話如下：

圖4-8 中數理能力受試者BM2交t軸之下水平直線圖形的斜率概念表現



T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

■ BM1：小汽車在離原點下方 2km 處不動。

GM1：因為距離沒有負的，所以，不知道小汽車怎麼動。

GM2：因為距離沒有負的，所以，不知道小汽車怎麼動。

BM2：小汽車從原點往後退 2 公里，以  $|\frac{-2}{7...}|$  的速度抵達，...，  
靜止不動。

(3) 水平直線圖形的小結：

四位中數理能力受試者皆能理解與t軸重疊的水平直線圖形，其所對應的小汽車運動狀態為靜止不動的。唯獨受試者BM1能夠理解座標平面上的水平直線圖形，其所對應小汽車的運動狀態皆為靜止不動。

以下分為兩種情形探討：首先是t軸之上的水平直線圖形，受試者GM1、GM2、BM2皆認為小汽車是直接從原點開到正向兩個單位的位置後靜止，但GM2卻不認為小汽車到達之後是靜止的，而是以不一樣的運動速度前進。再來是t軸之下的水平直線圖形，受試者GM1、GM2則無法解讀負值的部份，無法對應到小汽車的運動狀態。但受試者BM2從圖形對應到的小汽車是以等速度後退

的方式到達原點負向2公里處，再靜止不動。故研究者推論四位中數理能力受試者在圖形與真實運動狀態的表現亦是一致的。

### 3.圖形的斜率概念對物體運動速度影響之總結：

研究者以圖2-1、圖2-2、圖2-5三張工具，對四位中數理能力受試者GM1、GM2、BM1、BM2在圖形與小汽車運動狀態做整理與分析，檢視四位受試者是否在相同的座標軸刻度圖形，能夠判斷直線越斜，對應到小汽車的運動速度越快，並以表4-7做為整理，其中，以○表示該受試者能夠理解。從表4-7可以發現，四位中數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形有百分之百的答對率，實際上，嚴格算起來只有百分之七十五的答對率。最後，再以表4-8作為四位中數理能力受試者在探索直線型x-t圖形的斜率概念比較，其中，包含受試者在不相同座標軸刻度下的討論，以及不與t軸重疊的水平直線。

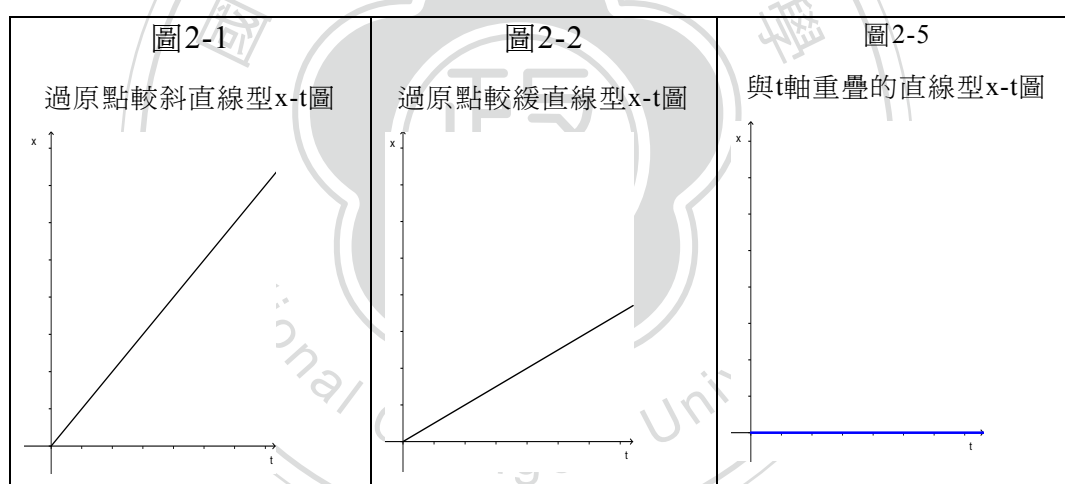


表 4-7 數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形比較物體運動快慢

直線 圖形	小汽車 速度	中數理能力			
		GM1	GM2	BM1	BM2
斜	快	○	○	○	○算式有問題
緩	慢	○	○	○	○算式有問題
水平	靜止	○	○	○	○

○表示該受試者能夠理解。

表 4-8 中數理能力受試者在探索直線型 x-t 圖形的斜率概念比較

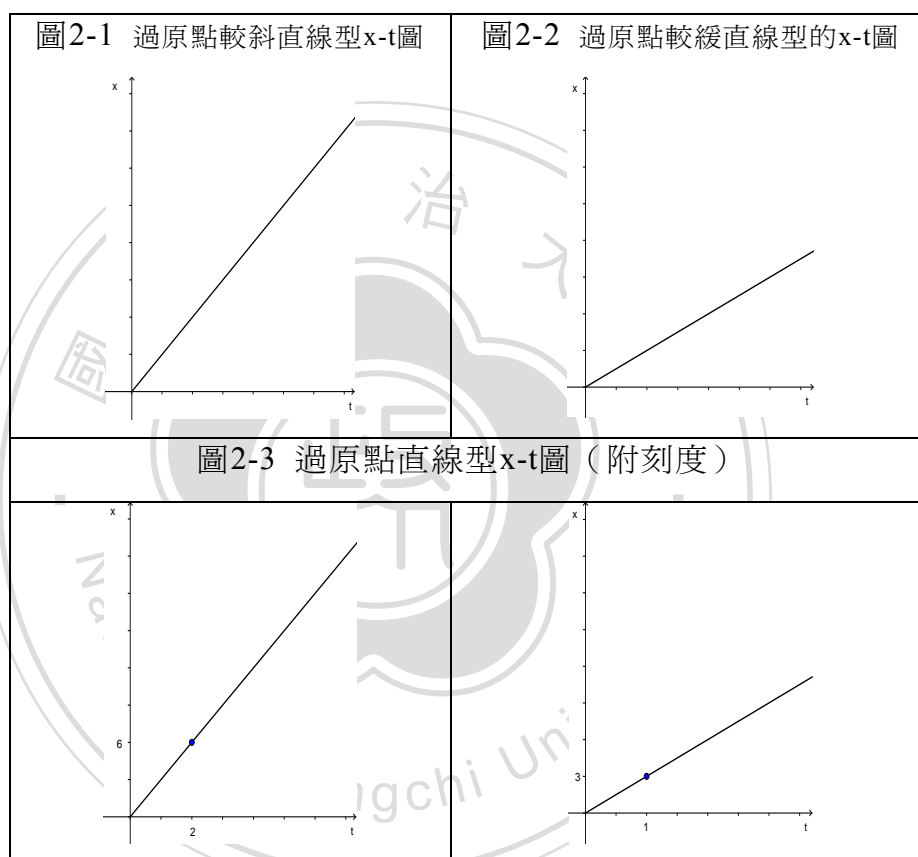
直線圖形	小汽車速度	中數理能力			
		GM1	GM2	BM1	BM2
斜	快	○算	○算	○算	○算式有問題
緩	慢	○算	○算	○算	○算式有問題
直覺		-	-	-	-
刻度	影響	-	-	-	-
	不影響	○	○	○	○
與t軸重疊水平線		○	○	○	○
t軸之上水平線		X <sub>開,靜</sub>	X <sub>開</sub>	○	X <sub>開,靜</sub>
t軸之下水平線		X <sub>負</sub>	X <sub>負</sub>	○	X <sub>後退,靜</sub>
<p>附註：</p> <p>○算：表示不受座標軸刻度的影響，會自行標示刻度。</p> <p>○：表示該受試者能夠從圖形對應到小汽車的運動狀態。</p> <p>X<sub>開,靜</sub>：表示該受試者無法從圖形對應到小汽車的運動狀態，且小汽車從原點到截距的位置有開車的動作，抵達後才靜止。</p> <p>X<sub>後退,靜</sub>：表示該受試者無法從圖形對應到小汽車的運動狀態，且小汽車從原點往後開車到截距的位置，抵達後才靜止。</p> <p>X<sub>負</sub>：表示該受試者無法從圖形對應到小汽車的運動狀態，且因為位置在負值而無法理解小汽車的運動狀態。</p> <p>-：表示該受試者在此項並無作答。</p>					

### 三、低數理能力受試者的理解情形

#### 1.過原點不同傾斜程度的直線圖形：

##### (1) 圖形表現方面：

研究者從四位低數理能力的受試者發現，皆會使用量化座標軸的方法，進而求出物體運動速度，只有BL2與GL2兩位受試者能夠在自己所標示的座標軸下，正確說明物體運動速度快慢。如以下對話：



T：圖 2-1 和圖 2-2 的小汽車之速度為多少？

BL2：在圖 2-1，圖 2-2 的小汽車的速度都是每小時 8 公里。

GL2：圖 2-1 的速度是 $1(km/hr)$ 、圖 2-2 的速度是 $\frac{1}{2}(km/hr)$

有兩位低數理能力受試者完全忽略座標軸刻度的比例大小，以直線的傾斜程度判斷物體速度之快慢，如受試者BL1的想法便是以直線傾斜程度的大小視為爬坡的的斜度，即直線越陡，物體運動速度越慢；研究者為深入了解該受試者是否完全忽略刻度比例，再以圖2-3繼續追問，隨即發現受試者認為只要斜度一樣，就是速度一

樣快，主要是因為直線的位置較陡代表爬的坡越斜，物體運動速度越慢。研究者推論該受試者將生活經驗直接套用在圖形上，以致於完全解讀錯誤，忽略了座標軸上的刻度單位，只以小汽車爬坡的斜度決定運動速度之快慢。

而受試者GL1雖也能透過圖形計算出物體運動速度，但卻是不正確的計算方式，以直線終點對應到x軸的刻度，視為物體所走的路程，再將兩值相除作為物體之運動速度。另外，研究者也發現該受試者GL1將傾斜的直線視為加速運動，在圖2-3發現到GL1有此情形產生。如以下對話：

T：請從圖 2-1 和圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1：小汽車從原點出發，做出兩個爬坡動作，皆朝正方向爬坡前進。

T：圖 2-1 和圖 2-2 中的小汽車之速度？

BL1：很簡單，不用算也知道。

T：不用算，也可以得到嗎？

BL1：當然可以，爬的坡越陡速度就越慢。

GL1：圖 2-1 的速度是  $7.5 \div 7 = \frac{7.5}{7} \left( \frac{km}{hr} \right)$ 。

圖 2-2 的速度是  $4 \div 7 = \frac{4}{7} (km/hr)$

比較起來圖 2-2 加快的速度比較慢。

(追問 GL1、BL1 在 2-3 視直線越斜，物體運動越快的情形)

GL1：加快速度都是 3。

T：請解釋什麼是加快速度都是 3？

GL1：就是越來越快，每次加快 3 公里。

BL1：一樣阿，小汽車在上圖的速度比下圖的速度慢。

## (2) 實際操作方面：

研究者從四位低數理能力的受試者發現，皆會使用量化座標軸的方法，進而求出物體運動速度，卻只有BL2與GL2兩位受試者能夠在自己所標示的座標軸下，正確說明物體運動速度快慢；也就是說，兩位低數理能力受試者BL2、GL2，能夠從過原點圖形對應到小汽車是以等速度運動前進。

另外兩位低數理能力受試者BL1、GL1，因在處理過原點圖形是受到直線所影響，導致其對應到的小汽車分別是爬坡運動及加速運動，如上述對話。

(3) 過原點不同傾斜程度的直線小結：

綜合以上(1)、(2)兩點來看，只有兩位低數理能力受試者BL2、GL2在自行標示座標軸刻度下，能理解過原點不同傾斜程度的直線型x-t圖形，表示小汽車是以不同的等速度前進。

另一位低數理能力受試者GL1雖然也是自行標示座標軸刻度，但受到直線的影響而認定小汽車是以加速的方式前進；與受試者GL1相同受到直線影響的受試者BL2，則是認為小汽車為爬坡運動，套用了生活經驗以致於錯誤解讀。故研究者推斷四位低數理能力受試者在圖形與真實物體運動狀態均有一致表現。

2. 水平直線的圖形：

(1) 圖形表現方面：

在圖2-5中，四位低數理能力的受試者中，GL2、BL1從圖形認定物體在原點靜止不動。但受試者BL2和GL1對於與t軸重疊的水平直線圖形仍有速度，並受到直線圖形向右的影響，認為物體從原點開始向右運動。研究者為了解兩位受試者所謂的與軸重疊的水平線仍有速度而繼續追問，卻發現受試者BL2透過科學公式( $x=vt$ )算出速度為0，這與他所說的相互矛盾；受試者GL1也無法連結一次函數與與t軸重疊的水平直線。研究者推論數理能力不好導致與科學運動狀態產生無法連結問題。如以下對話：

T：小汽車的速度、一次函數為何？

BL2：因為算出速度是0，但不會算一次函數，應該是 $x=vt$ ， $t=0$ 代入，這樣算吧。

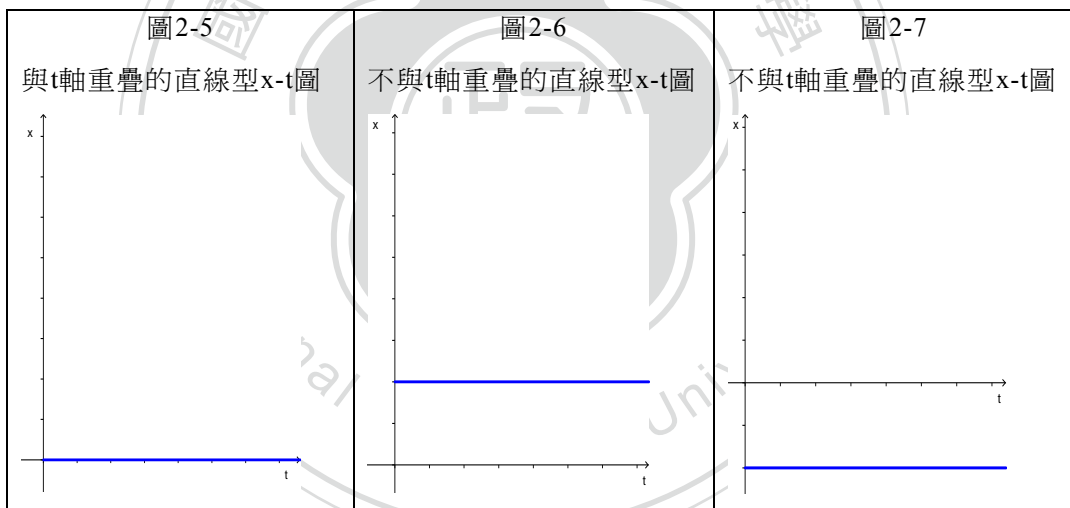
GL1：一次函數是 $x=0$ 。

在圖2-6交t軸之上的水平直線圖形中，受試者BL1和BL2認為物體是有前進的速度，且速度是越來越慢。受試者GL1受座標軸刻

度影響，從原點正向2個單位的位置，開始向右前進7個單位，但速度無法計算。受試者GL2則是將出發點的位置視為物體向右前進的速度。

在圖2-7交t軸之下的水平直線圖形中，受試者BL1仍是認為物體是有前進的速度，且速度是越來越慢。受試者GL1受座標軸刻度影響，從原點負向2個單位的位置，開始向右前進7個單位，但速度無法計算。受試者GL2仍是將出發點的位置視為小汽車向右前進的速度，因速度沒有負值而將負值取絕對值，作為小汽車向右前進的速度。另外，受試者BL2對於求算速度時，已經搞不清楚自己算的是什麼。

研究者推論四位受試者，皆受到直線圖形的影響，無法正確理解小汽車的真實運動狀態，甚至無法對應到座標軸上賦予的意義。



(2) 實際操作方面：

I. 與t軸重疊的水平直線

四位低數理能力的受試者中，GL2、BL1從圖形認定小汽車在原點靜止不動。但受試者BL2和GL1對於與t軸重疊的水平直線仍有速度，並且受到直線向右的影響，認為小汽車是向右運動的。如以下對話：

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL2：小汽車在地圖上的原點上沒有移動。



- BL1：小汽車在地圖上的原點靜止不動。
- GL1：小汽車在地圖上的紅點向右移動。
- BL2：小汽車在地圖上從原點往右開車。

## II. t軸之上的水平直線

受試者BL1和BL2認為小汽車是有前進的速度，且速度是越來越慢。受試者GL1從圖形對應到的小汽車是從原點正向2個單位的位置，開始向右前進7個單位，但無法計算小汽車的速度。受試者GL2則是將出發點的位置視為小汽車向右前進的等速度。

T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1：小汽車從離原點 2 公里向右出發，且速度越來越慢。速度從  $2 \div 2 = 1$  到  $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ ，往後越慢，但不會停止。

BL2：小汽車從離原點 2 公里向右出發，且速度越來越慢。速度從  $2 \div 1 = 2$  到  $2 \div 2 = 1$ ，往後越慢，但不會停止。

GL1：小汽車從離紅點 2 個單位處後，再向右方前進 7 個單位，速度不會算。

GL2：小汽車有移動，且速度是 2 的往右前進。

## III. t軸之下的水平直線

受試者GL1從圖形對應到的小汽車是從原點正向2個單位的位置，開始向右前進7個單位，但無法計算小汽車的速度。受試者GL2則是將出發點的位置視為小汽車向右前進的速度。受試者BL1和BL2認為小汽車是有前進的速度，且速度是越來越慢，但受試者BL2以分不清負數之大小。

T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：小汽車從離紅點下方 2 個單位處後，再向右方前進 7 個單位，但不會算速度。

GL2：小汽車有移動，且速度是  $|-2| = 2$  往右前進。

BL1：小汽車從離原點下方 2 公里處，速度越來越慢的方式向右前進。

BL2：小汽車從離原點下方 2 公里處，速度越來越慢的方式往後開。速度從  $-2 \div 1 = -2$  到  $-2 \div 2 = -1$ ，再變成

$$-2 \div 3 = -\frac{2}{3}, \text{ 往後越慢, 但也是不會停止。}$$

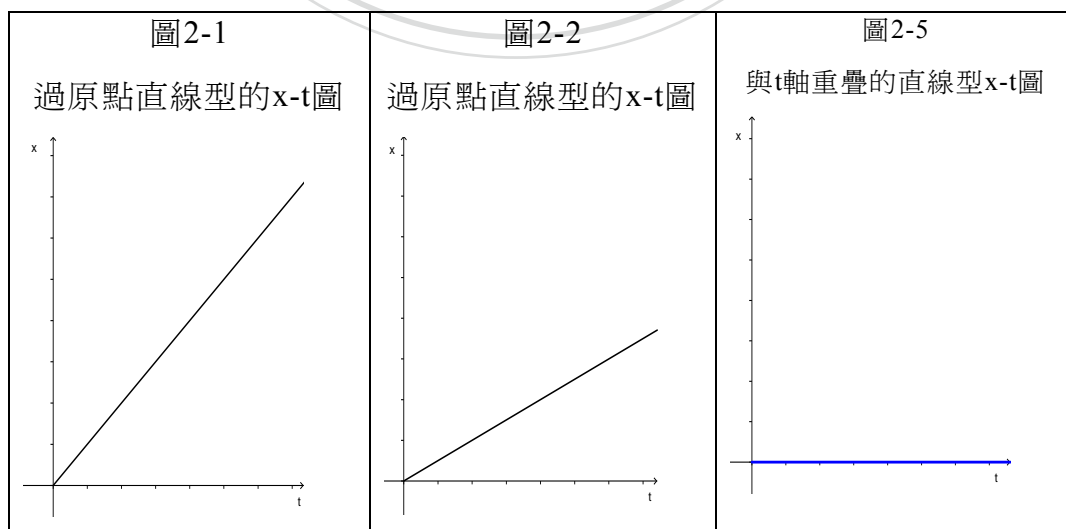
(3) 水平直線圖形的小結：

四位低數理能力受試者中，GL2、BL1從圖形認定小汽車在原點靜止不動。但受試者BL2和GL1對於與t軸重疊的水平線仍有速度，並且受到直線向右的影響，認為小汽車的運動是向右前進。

在t軸之上的水平直線圖形，受試者BL1和BL2認為小汽車是有前進的速度，且速度是越來越慢。受試者GL1從圖形對應到的小汽車是從原點正向兩個單位的位置，開始向右前進7個單位，但無法計算小汽車的速度。受試者GL2則是將出發點的位置視為小汽車向右前進的速度，錯把位置軸起始點當成小汽車以等速度前進速度。

t軸之下的水平直線圖形，受試者GL1從圖形對應到的小汽車是從原點正向2個單位的位置，開始向右前進7個單位，卻無法計算小汽車的速度。受試者GL2則是將出發點的位置視為小汽車向右前進的速度，並將負值取絕對值，認定小汽車以保持不變的速度前進。受試者BL1和BL2認為小汽車是有前進的速度，且速度是越來越慢，但受試者BL2以分不清負數之大小，對於水平直線沒有等速度的概念。故研究者推論四位低數理能力受試者在圖形與真實運動狀態的表現亦是一致的，但幾乎都是錯誤的。

3.圖形的斜率概念對物體運動速度影響之總結：



研究者以圖2-1、圖2-2、圖2-5三張工具，對四位低數理能力受試者GL1、GL2、BL1、BL2在圖形與小汽車運動狀態做整理與分析，檢視四位受試者是否在相同的座標軸刻度圖形，能夠判斷直線越斜，對應到小汽車的運動速度越快，並以表4-9做為整理，其中，以○表示該受試者能夠理解，X表示該受試者無法理解。最後，以表4-10（見下頁）作為低數理能力受試者在探索直線型x-t圖形的斜率概念表現比較，並從表4-10發現：四位低數理能力受試者對於直線型x-t圖形上的斜率概念有較低的答對率。

表 4-9 低數理能力受試者在相同座標軸刻度的圖形比較物體運動快慢

直線 圖形	小汽車 速度	低數理能力			
		GL1	GL2	BL1	BL2
斜	快	X算式錯誤 斜.加速多	○算	X 越陡越慢	○算
緩	慢	X算式錯誤 緩.加速少	○算	X 越緩越快	○算
水平	靜止	X向右	○	○	X向右

○表示該受試者能夠理解。  
X表示該受試者不能理解，並附上原因。

表 4-10 低數理能力受試者在探索直線型 x-t 圖形的斜率概念比較

直線圖形	小汽車速度	低數理能力			
		GL1	GL2	BL1	BL2
斜	快	X算式錯誤 斜.加速多	○算	X 越陡越慢	○算
緩	慢	X算式錯誤 緩.加速少	○算	X 越緩越快	○算
直覺		斜.加速多 緩.加速少	-	越陡.速度慢 越緩.速度快	○
刻度	影響	-	-	-	-
	不影響	-	○	-	○
與t軸重疊水平線		X向右	○	○	X向右
t軸之上水平線		X向右	X 出發點為速度	X越慢	X 越慢
t軸之下水平線		X向右	X 出發點為速度	X越慢	X算錯
<p>○：表示該受試者能夠理解。</p> <p>-：表示該受試者在此項並無作答。</p> <p>X：表示該受試者不能理解。X向右：表示小汽車向右前進。</p> <p>X越慢：表示小汽車運動速度漸慢。</p>					

四、總結：

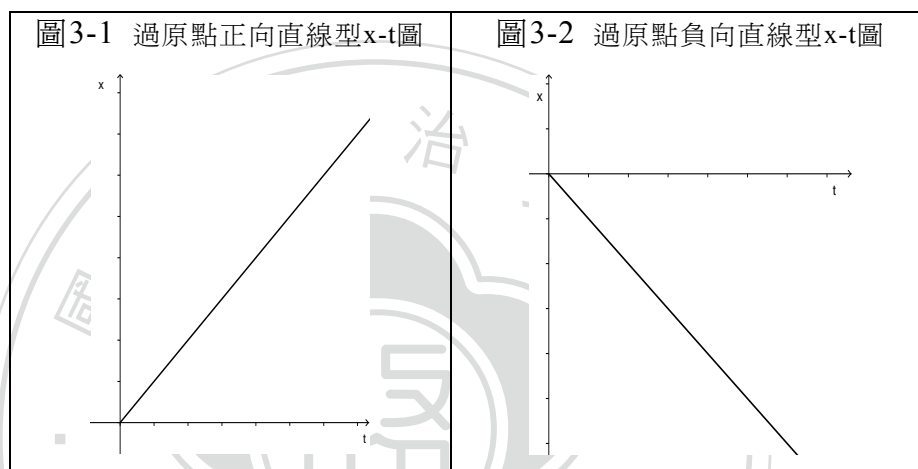
最後，以表 4-11 作為高、中、低數理能力受試者在探索直線型  $x-t$  圖形的斜率概念比較，其中，包含受試者在不相同座標軸刻度下的討論，以及不與  $t$  軸重疊的水平直線。

表 4-11 高中低三種不同數理能力探討斜率概念之表現

直線圖形	小汽車速度	高數理能力				中數理能力				低數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2	GM1	GM2	BM1	BM2	GL1	GL2	BL1	BL2
斜	快	-	○ 算式有問題	-	-	○算	○算	○算	○ 算式有問題	X 算式錯誤 線加過多	○算	X 陡慢	○算
緩	慢	-	○ 算式有問題	-	-	○算	○算	○算	○ 算式有問題	X 算式錯誤 線加過少	○算	X 緩快	○算
直覺		○	-	○	○	-	-	-	○	○ 線加過多 線加過少	-	○ 陡慢 緩快	-
刻度	影響	刻度		刻度	刻度 座標軸	-	-	-	-	-	-	-	-
	不影響	-	○	-	-	○	○	○	○	-	○	-	○
與 $t$ 軸重疊	水平線	○	○	○	○	○	○	○	○	X 向右	○	○	X 向右
$t$ 軸之上	水平線	○	X 運動方式	○	○	X 開,靜	X 開	○	X 開,靜	X 向右	X 出發點 為速度	X 越慢	X 越慢
$t$ 軸之下	水平線	○	X 運動方式	○	○	X 負	X 負	○	X 後退,靜	X 向右	X 出發點 為速度	X 越慢	X 算錯

### 第三節 x-t 圖形的方向性概念

本節探討三種不同數理能力受試者，在直線型 x-t 圖形之方向性概念，是否會影響小汽車的運動方向，研究者根據受試者的訪談作一整理與分析。使用的工具圖形為圖 3-1、圖 3-2，用來判斷受試者是否受到圖形的方向影響，主要是從前面兩節發現，受試者除了受截距概念影響外，對於直線通過負值的圖形也比較無法解釋清楚。因此，研究者以這兩個工具圖形，作為受試者受直線圖形對小汽車運動方向之探討。



#### 一、高數理能力受試者的理解情形

##### 1. 圖形對應到小汽車運動狀態的表現方面：

##### (1) 能夠由傾斜方向直接判讀正方向或反方向直線運動：

由GH1以及BH1的回答發現，這兩位學生都是從直線圖形的傾斜方向直覺轉換判讀成物體的真實運動狀態，即左下右上的傾斜方向為等速度正向直線運動，如圖3-1所示；同理，左上右下的傾斜方向為等速度反向直線運動，如圖3-2所示，研究者推論受試者數學以及科學上的能力較佳，在學習等速度直線運動時，有能力將學習直角座標平面時所得的經驗，應用於繪製時間位置的圖表上。如下對話：

T：請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：圖 3-1 小汽車作等速度運動，圖 3-2 朝負向作等速度運動。

BH1：圖 3-1 的小汽車作等速度運動，圖 3-2 向西作等速度運動。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GH1：兩輛小汽車的速度是一樣的，唯有方向相反。

BH1：兩台小汽車的速度一樣，也都是從原點出發，方向相反。

(2) 能夠正確量化座標平面：

由BH2的訪談發現，能夠自行標示座標軸刻度以及由單位化、量化圖形的角度，將速度正值與速度負值來連結正方向或反方向運動，以便支持自己的想法。而雖然受試者GH2可以從直線傾斜的方向，正確得知物體運動方向，但在描述小汽車運動方式時，仍是在計算速度上發生錯誤，將直線終點視為小汽車所走的距離以及所花的時間，而直線終點對應的並非確定的數值，導致小汽車的速度有誤。其中比較特別的是BH2是以倒車的說法來連結負方向等速前進的概念。如以下對話：

T：請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際運動狀態，並在地圖上操作。

BH2：觀察圖 3-1、3-2。圖 3-2 的小汽車是從原點開始向南邊倒車。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BH2：在圖 3-1 的小汽車以  $1\text{ km/min}$  的速度朝北方前進。圖 3-2 小汽車從原點以每分鐘 100 公尺的速度倒退。(單位換算)

GH2：在圖 3-1 的小汽車往右 7 格，再往上 7 格，以  $1\text{ km/hr}$  的速度朝正方向走。圖 3-2 小汽車先往右走 7 格，再往下走 6 格，以  $\frac{6}{7}\text{ km/hr}$  的速度走。

2. 小結：

高數理能力受試者GH1、BH2直接從圖形就能對應到小汽車運動方向，而受試者GH2、BH2兩人則須量化圖形座標後，才能夠對到小汽車的運動方向。研究者對於高數理能力受試者在方向概念之表現整理成表4-12，其中，○代表該受試者不受圖形方向性概念影響。

表 4-12 高數理能力受試者在方向性之表現比較

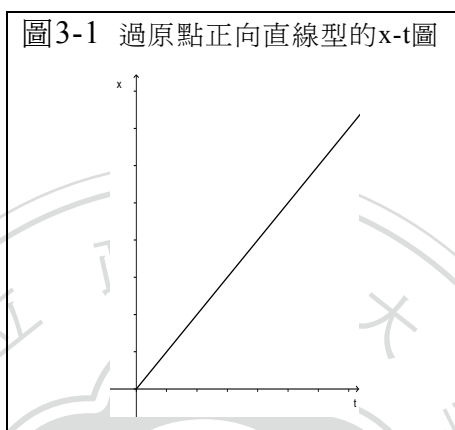
直線方向	小汽車運動方向	高數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2
左下右上	正向	○直覺	○量化座標	○直覺	○量化座標
左上右下	負向	○直覺	○量化座標	○直覺	○量化座標

## 二、中數理能力受試者的理解情形

### 1. 圖形對應到小汽車運動狀態的表現方面：

#### (1) 能正確判讀直線正斜率的方向性：

由受試者GM1、GM2、BM1的訪談中，對於從原點出發的直線圖形，如圖3-1，三位受試者可以理解物體是以等速度往正方向前進。如以下對話：



T：請從圖3-1觀察出小汽車實際運動狀態，並在地圖上操作。

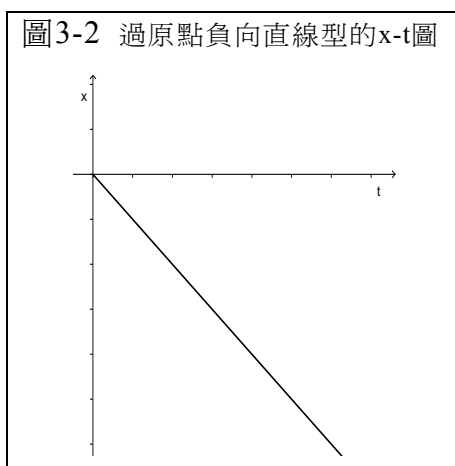
GM1：小汽車從原點出發，並以 $1\text{ km/hr}$ 的速度往前走。

GM2：小汽車是從基準點出發，並以每秒 $1\text{ km/hr}$ 的速度往前開。

BM1：小汽車從原點出發，並以 $\frac{1}{2}\text{ km/hr}$ 的速度往前開。

#### (2) 無法判讀直線負斜率的方向性：

由受試者GM1與GM2的訪談發現：對於原點出發的直線圖形，如圖3-2所示，兩位受試者受到位置軸的刻度為負值，產生了判斷上的問題，認為距離沒有負的，因而無法得知物體的真實運動狀態。如以下對話：





T：請從圖 3-2 觀察出小汽車實際運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：觀察圖 3-2。因為距離沒有負的，所以不知道如何運動。

GM2：圖 3-2 因為距離沒有負的，不清楚小汽車要怎麼開。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GM1：圖 3-2 的小汽車因距離沒有負的，沒辦法知道它的運動情形。

GM2：小汽車，因為距離沒有負的，就不清楚小汽車是如何開的。

### (3) 無法正確的量化計算：

從受試者BM1的訪談發現：面對位置軸的刻度為負值時，會加絕對值讓求出的速度變成正值，因為受試者無法接受負速度的存在。再根據直線的傾斜方向解讀，都是同一方向前進，圖3-1的解讀是表示車頭往參考點正向前進；圖3-2表示車尾往參考點正向前進，受直線圖形位在位置軸的負值，產生判斷的問題，研究者推論該受試者缺乏從圖形對應小汽車反方向運動的概念。如以下對話：

T：請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際運動狀態，並在地圖上操作。

BM1：圖 3-1 的小汽車作等速度運動，圖 3-2 因為距離沒有負的，所以取絕對值。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BM1：小汽車在圖 3-1 從原點出發，並以  $\frac{1}{2} \text{ km/hr}$  的速度往前開。

小汽車在圖 3-2 是從原點出發，以  $\frac{1}{2} \text{ km/hr}$  的速度往前開。

T：這兩輛小汽車都是往前開，而且根據你標示的刻度，所計算出兩輛小汽車的速度也都一樣，那為什麼圖形會長得不一樣？

BM1：我覺得一個是車頭往前開，另一個是車尾往前開。

T：也就是，你認為圖 3-2 的小汽車倒著前進嗎？

BM1：是阿。

### (4) 誤將直線圖形方向連結成實際的運動方向：

受試者BM2的訪談發現：直線的傾斜方向就是代表小汽車的運動方向，無法將座標平面上的對應關係連結成真實的運動狀態。如以下對話：

T : 請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際運動狀態，並在地圖上操作。

BM2: 觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車就是先前的圖 1-1。圖 3-2 因為距離沒有負的，所以取絕對值，然後小汽車從原點出發，以大約每小時 1 公里的速度，朝直線的方向前進。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

BM2: 圖 3-1 小汽車自原點出發，以固定的速度，車頭延直線方向前進。圖 3-2 小汽車從原點出發，以大約每小時 1 公里的速度，朝直線的方向前進。因為速度是  $\left| \frac{-6}{6} \right| \doteq 1 \text{ (km/hr)}$ ，因為 t 軸比 x 軸多一些，所以速度是未滿 1。

## 2.小結：

綜合上述第1點的(1)、(2)發現，中數理能力受試者GM1、GM2、BM1能夠直接從圖3-1能對應到小汽車運動方向，但在圖3-2的部分卻是有不盡相同的對應，由此可見，中數理能力受試者在負向的表現有待加強，並將中數理能力受試者在方向性概念之表現，整理成表4-13，其中，○代表該受試者不受方向性概念影響，X代表該受試者受方向性概念影響。

表 4-13 中數理能力受試者在方向性之表現比較

直線方向	小汽車運動方向	中數理能力			
		GM1	GM2	BM1	BM2
左下右上	正向	○直覺	○直覺	○直覺	X 朝直線方向
左上右下	負向	X 距離沒有負的	X 距離沒有負的	X 車尾向前開 取絕對值	X 距離沒有負的 延直線前進
○代表該受試者不受方向性概念影響。					
X代表該受試者受方向性概念影響。					

### 三、低數理能力受試者的理解情形

#### 1. 圖形對應到小汽車運動狀態的表現方面：

##### (1) 誤將直線圖形傾斜度連結成加速或減速的實際運動狀態：

從GL1的回答中發現，低數理程度的受試者易將直線的傾斜方向錯誤連結成物體運動的加速或煞車現象，完全沒有速度的概念。如以下對話：

T：請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：圖 3-1 的小汽車因直線往上，故在加速前進。圖 3-2 因為直線往下，所以小汽車是做煞車的動作，位置每減少一個單位，速度也隨之減少一個單位。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GL1：圖 3-1 因為直線往上，所以小汽車是從紅點開始作加速運動，位置每增加一個單位，速度也隨之增加一個單位。圖 3-2 因為直線往下，所以小汽車是從紅點作煞車運動，位置每減少一個單位，速度也隨之減少一個單位。

##### (2) 誤將直線圖形連結成爬坡或下坡的運動狀態：

由BL1的訪談發現，低數理程度的受試者易將直線的傾斜方向錯誤連結成物體運動的爬坡或下坡狀態，完全沒有方向概念。如以下對話：

T：請從圖 3-1 和圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1：觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車就是先前的圖 1-1。圖 3-2 小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的速度，任意方向的下坡前進。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BL1：圖 3-1 的小汽車在原點出發，直的、斜的、橫的、或縱的開車都可以，並以每小時 1 公里的等速度前進。圖 3-2 的小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的速度，任意方向的下坡前進。

##### (3) 小汽車的運動方向不符合真實現況：

由受試者BL2的訪談發現，雖然小汽車是以倒退的方式運動，但在真實的情況下，小汽車在前進時，並不會以倒退的方式

進行。如以下對話：

T：請從圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL2：小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的等速度往後退。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BL2：圖 3-1 小汽車在原點出發，直直的朝正向開車，並以等速度每小時 8 公里前進。圖 3-2 小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的等速度往後退。

(4) 無法正確的量化計算：

由受試者GL2的訪談發現，面對位置軸的刻度為負值時，會加絕對值讓求出的速度變成正值，小汽車仍是朝正向前進。如以下對話：

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GL2：圖 3-1 小汽車從原點出發，並以  $1 \frac{km}{hr}$  的速度往右方向走。

圖 3-2 因為距離沒有負的，所以取絕對值，故以  $1(km/hr)$  的速度往前開。

2. 小結：

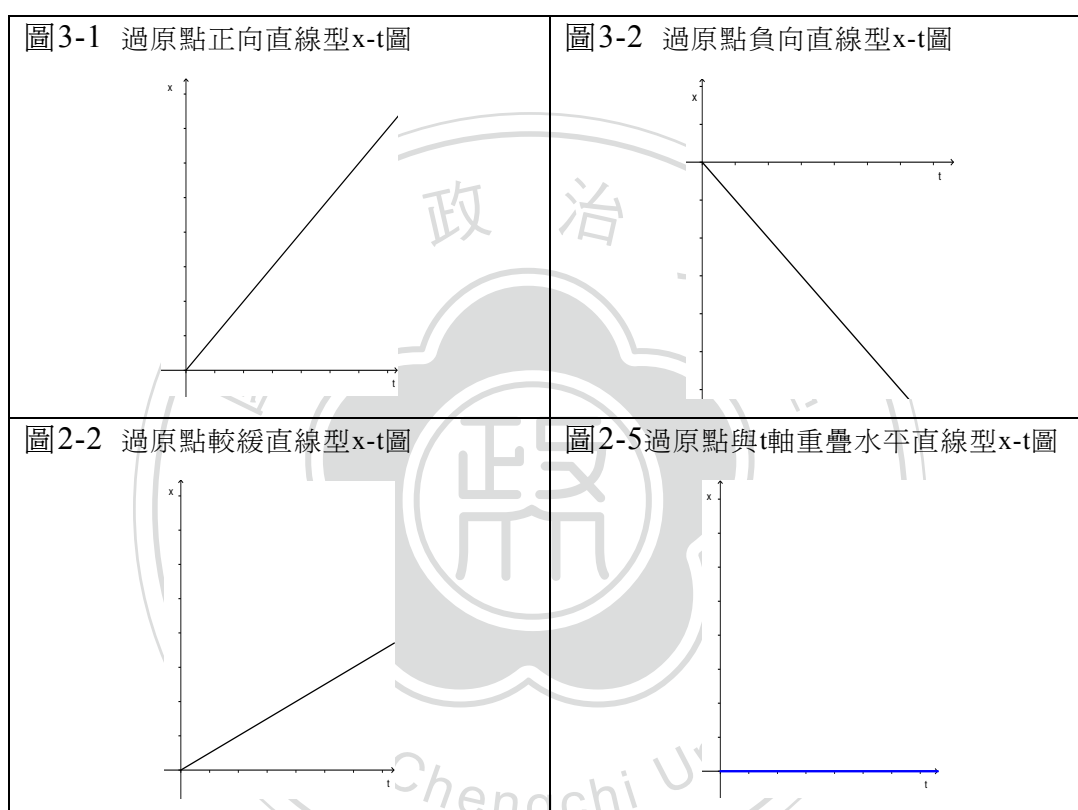
低數理能力受試者GL2、BL2能夠直接從圖3-1能對應到小汽車運動方向，但在圖3-2的部分卻是有不盡相同的解釋，由此可見，低數理能力受試者在負方向或反方向運動的表現有待加強，研究者將低數理能力受試者在方向性概念之表現，整理成表4-14，其中，○代表該受試者不受方向性概念影響，X代表該受試者受到方向性概念影響。

表 4-14 低數理能力受試者在方向性之表現比較

直線方向	小汽車運動方向	低數理能力			
		GL1	GL2	BL1	BL2
左下右上	正向	X 加速	○直覺	X 爬坡	○直覺
左上右下	負向	X 煞車	X 距離沒有負的 取絕對值	X 下坡	X 往後退
○代表該受試者不受方向性概念影響。 X代表該受試者受到方向性概念影響。					

#### 四、總結：

研究者將三種不同數理能力受試者，在直線型x-t圖形的方向性概念表現整理成表4-15（第51頁），其中，○代表該受試者不受方向性概念影響，X代表該受試者受方向性概念影響。最後，研究者發現大多中、低受試者在小汽車的操作上，較容易受直線方向的影響，故研究者再以四個工具圖形分別是圖3-1、圖3-2、圖2-2、圖2-5，如下所示，探討十二位受試者的表現，小汽車的運動方向是否受到直線方向的影響作為總結。



從表4-15可以發現到八位中數理能力受試者，全部都無法理解圖3-2對應到小汽車的真實運動狀態，而一位中數理能力受試者BM2及兩位低數理能力受試者GL1、BL2受到直線方向的影響，認為小汽車是以直線方向是以加、減速，或是爬坡、下坡的運動方式。

在圖2-2的表現，四位高數理受試者能夠由圖形對應到小汽車的運動為正方向；四位中數理能力受試者皆能描述小汽車的運動方向；低數理能力受試者除了GL1、BL1，其他兩位受試者也能表示小汽車的運動方向。

在圖2-5的表現，所有受試者中，只有兩位低數理能力受試者GL1、BL2受到直線方向之影響，認為小汽車的運動方向為向右前進。故研究者發現中、

低數理能力受試者較容易受到直線方向性的影響，無法對應小汽車運動方向。

表 4-15 高中低數理能力受試者在方向性之表現比較

直線方向	運動方向	高數理能力				中數理能力				低數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2	GM1	GM2	BM1	BM2	GL1	GL2	BL1	BL2
左下右上	正向	○直覺	○量化座標	○直覺	○量化座標	○直覺	○直覺	○直覺	X朝直線方向	X加速	○直覺	X爬坡	○直覺
左上右下	負向	○直覺	○量化座標	○直覺	○量化座標	X距離沒有負的	X距離沒有負的	X車尾向前開取絕對值	X距離沒有負的延直線前進	X減速	X距離沒有負的取絕對值	X下坡	X往後退
<p>○代表該受試者不受方向性概念影響。</p> <p>X代表該受試者受到方向性概念影響。</p>													

#### 第四節 x-t 圖形的截距概念與斜率概念之相關影響

前面的三節是單純的探討一個變項，分別是圖形的截距、斜率、方向性之概念；研究者在分析第一天圖形的截距概念時發現：大多受試者在處理斜率概念時，會受到截距概念之影響。因此，研究者在本節欲探討受試者在直線型 x-t 圖形截距概念對斜率概念的影響表現作整理與分析。

##### 一、高數理能力受試者

###### 1. 過原點的傾斜直線圖形：

###### (1) 圖形表現方面：

研究者觀察四位高數理能力受試者皆有零截距之概念。如圖1所示，高數理能力受試者GH2，在自行標示座標軸刻度後，能從圖形的資訊，獲得物體作等速度運動前進。而高數理能力受試者GH1、BH1因圖1的座標軸未標示刻度而無法作答，故給予兩位高數理能力受試者，附有刻度相同傾斜程度的直線，如圖1a所示，透過座標軸標示刻度，進而求出物體的運動速度。但高數理能力受試者BH2，因為座標軸標示錯誤，導致求算物體速度時產生錯誤，在此，以圖4-9呈現三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH2在不同座標軸刻度的圖形中，取得物體運動狀態之訊息。

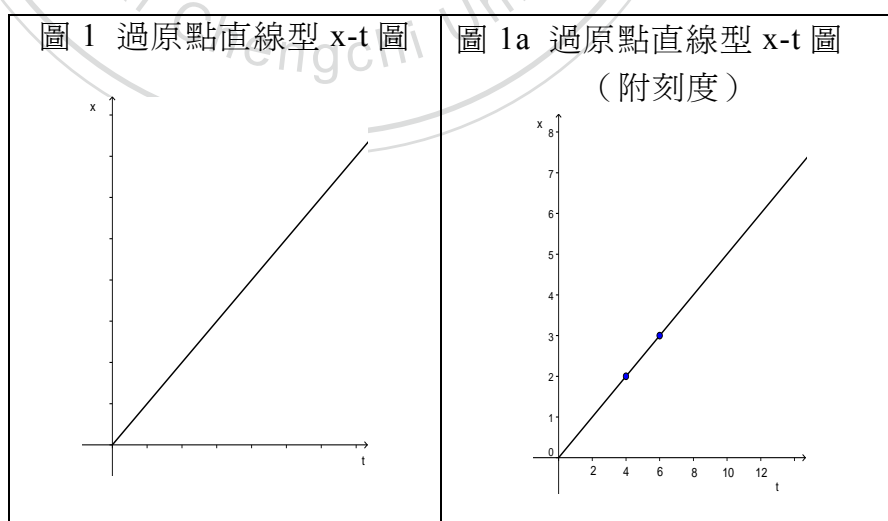
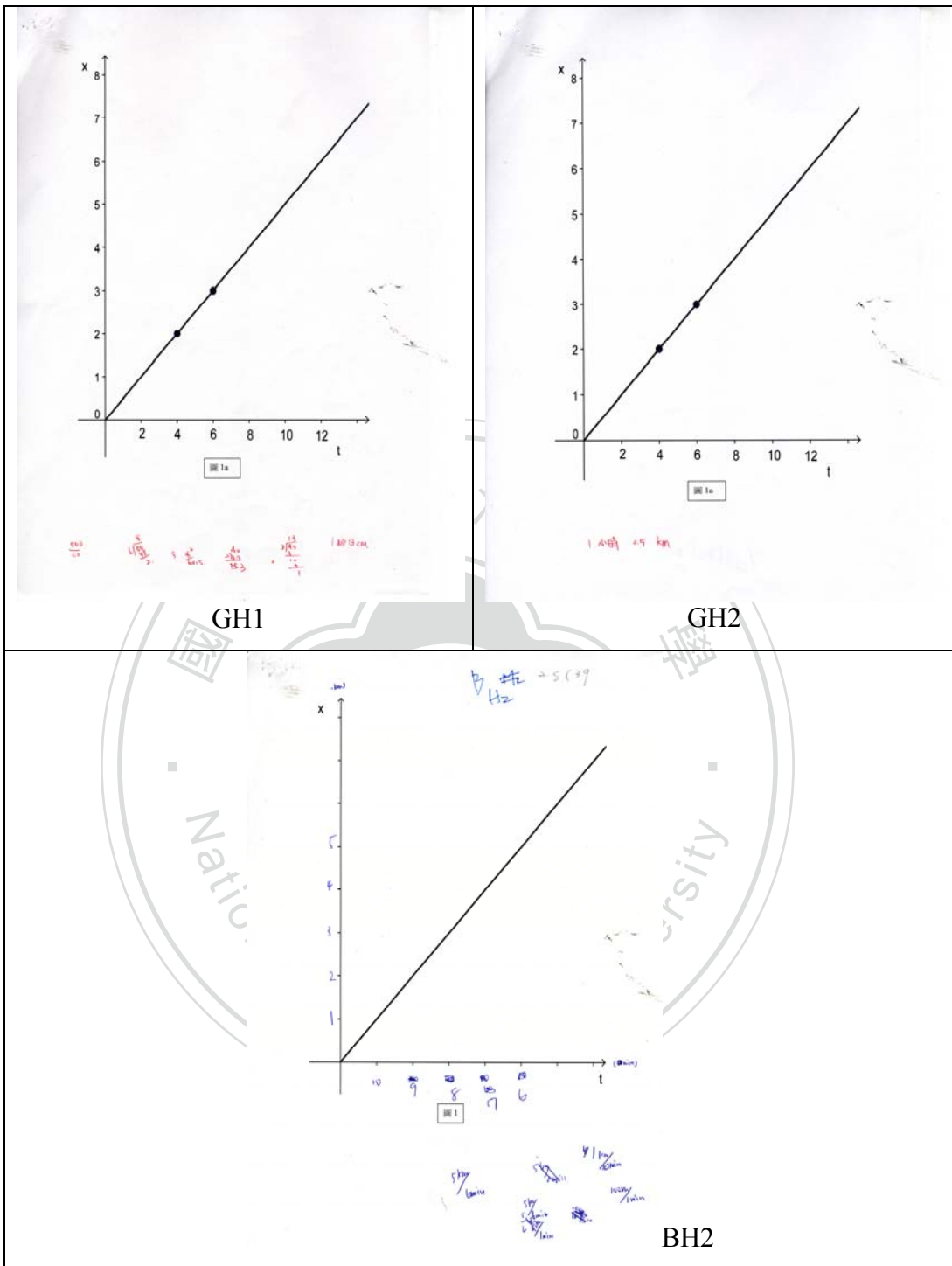


圖4-9 高數理能力受試者GH1、GH2、BH2在過原點直線型x-t圖形之表現



(2) 實際操作方面：

除了高數理能力受試者BH2在處理圖形時，將座標軸標示錯誤，影響實際操作小汽車的運動速度。而其他三位高數理能力受試者，都能理解過原點傾斜的直線型x-t圖形，代表小汽車的運動狀態為等速度前進。擷取對話如下：



T : 速度是多少呢？

GH1: 小汽車從原點出發，並以每秒 13 公分的速度朝正方向前進。  
(繼續追問 GH1，對於每秒 13 公尺的速度如何計算)

GH1: 速度是  $0.5 \frac{km}{hr}$ 。

$0.5 \frac{km}{hr} = \frac{2 m}{15 sec} = \frac{200 cm}{15 sec} \doteq \frac{13 cm}{1 sec}$ ，在地圖上畫出 13 公分的線段，小汽車 1 秒內走完。

GH2: 將小汽車移到原點上，以相同的速度，以  $1 \frac{km}{hr}$  相同的速度從原點往正方向前進。

BH1: 小汽車從原點出發，並以每小時 1 公里的速度向東前進。

BH2:  $\frac{1 km}{10 min} = 100 \frac{m}{min}$  (自己標座標刻度)

每分鐘 100 公尺的速度

等一下，速度應該是  $\frac{5 km}{6 min}$

所以，速度是越來越快

T : 速度為什麼從  $\frac{1 km}{10 min}$  變成  $\frac{5 km}{6 min}$

BH2: 我是看最後一個刻度的。

(3) 零截距小結：

四位高數理能力受試者中，以GH1、BH1因圖1的座標軸沒有刻度而無法說明物體運動狀態，研究者再以圖1a附有刻度的座標軸，使得受試者GH1、BH1能由足夠的圖形訊息獲得物體的運動速度，來說明小汽車以等速度前進。受試者GH2在圖1自行標示刻度後，由圖形取得小汽車的運動狀態是以等速度前進。唯有高數理能力受試者BH2因刻度自行標示座標軸刻度的錯誤，影響小汽車真實的運動狀態，主張小汽車的速度是越來越快的。從(1)、(2)發現，四位高數理能力受試者從圖形到真實的運動狀態之表現均有一致性。

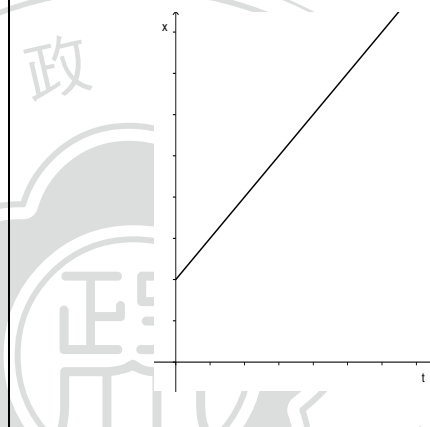
## 2.非過原點的傾斜直線圖形：

### (1) 正截距：

#### I.圖形表現方面：

三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1，皆能理解非過原點直線型x-t圖形正截距之概念，求算物體運動速度為單位時間內的位置變化量，如圖1-1所示；也就是說，必須扣掉直線的起始位置，才能正確求得速度，並且發現直線圖形即為物體正在作等速度直線運動。

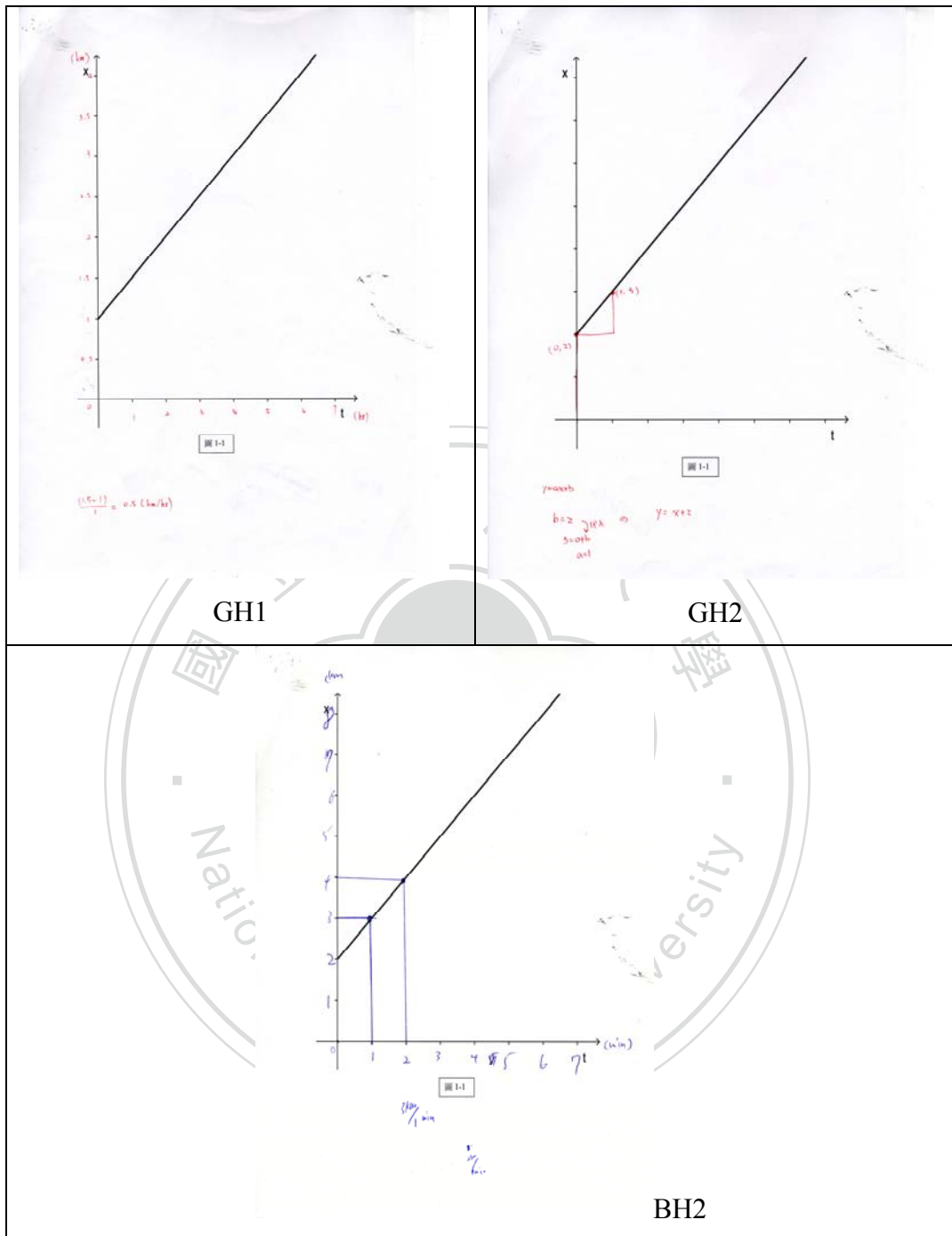
圖 1-1 非過原點之上的直線型 x-t 圖



而高數理能力受試者BH2則認為速度是x軸上的值除以對應到t軸的值，錯誤的求算方式以致物體的運動速度越來越慢。所以，研究者推論雖然受試者BH2有正截距的概念，錯誤的主要原因是受試者BH2在處理過原點的直線型x-t圖形時，將兩軸對應的值直接相除之求算方式，引用到非過原點直線型x-t圖形上。如圖4-10（見下頁），三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH2對圖形處理之表現。而受試者BH1直接口頭向研究者說明，並未在圖形中有所表示。

因此，研究者推論三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1能夠理解在正截距下的斜率概念，唯有受試者BH2不能理解。

圖4-10 高數理能力受試者GH1、GH2、BH2在非過原點正截距之斜率表現



II. 實際操作方面：

三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1，皆能理解非過原點正截距之直線型x-t圖形，表示小汽車是以等速度運動。受試者BH2受到圖形的影響，認為小汽車的運動速度越來越慢。如以下對話：

T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：小汽車以等速度  $V = \frac{1.5-1}{1} = 0.5 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$  朝正方向前進。

GH2：因為小汽車的移動是往右 1 格，再往上 1 格，所以，速度是  $1 \text{ km/hr}$ 。

BH1：...。時間每增加 1 個單位，小汽車就向東移動 1 個單位長，小汽車的速度是每小時 1 公里。

BH2：小汽車從離原點 2km 的地方出發，它的速度是每分鐘 3km，感覺怪怪的，.....，好像算不出來。然後，又變成每分鐘走 2km，應該是越來越慢。

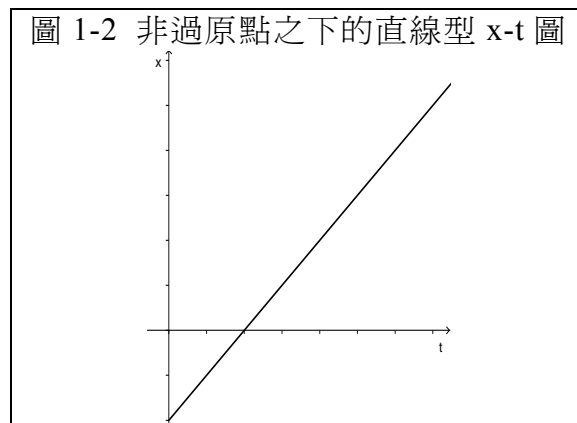
### III. 正截距小結：

綜合 I、II 兩點，三位高數理能力受試者 GH1、GH2、BH1，能夠理解在非過原點正截距之直線型  $x-t$  圖形，且對應到小汽車是在原點正向兩個單位的地方出發，並以等速度直線前進。而受試者 BH2 受到過原點直線型  $x-t$  圖所影響，雖然能夠理解正截距對應到小汽車的出發點，但對於小汽車的運動狀態是以越來越慢來呈現，主要是受試者 BH2 以錯誤的求算方式所致。故，研究者推論四位高數理能力受試者中，唯有受試者 BH2 斜率概念的表現受到正截距所影響，無法正確理解直線型的  $x-t$  圖形對應到的小汽車為等速度運動，且四位高數理能力受試者在圖形與對應到小汽車真實的運動狀態有一致性的表現。

### (2) 負截距：

#### I. 圖形表現方面：

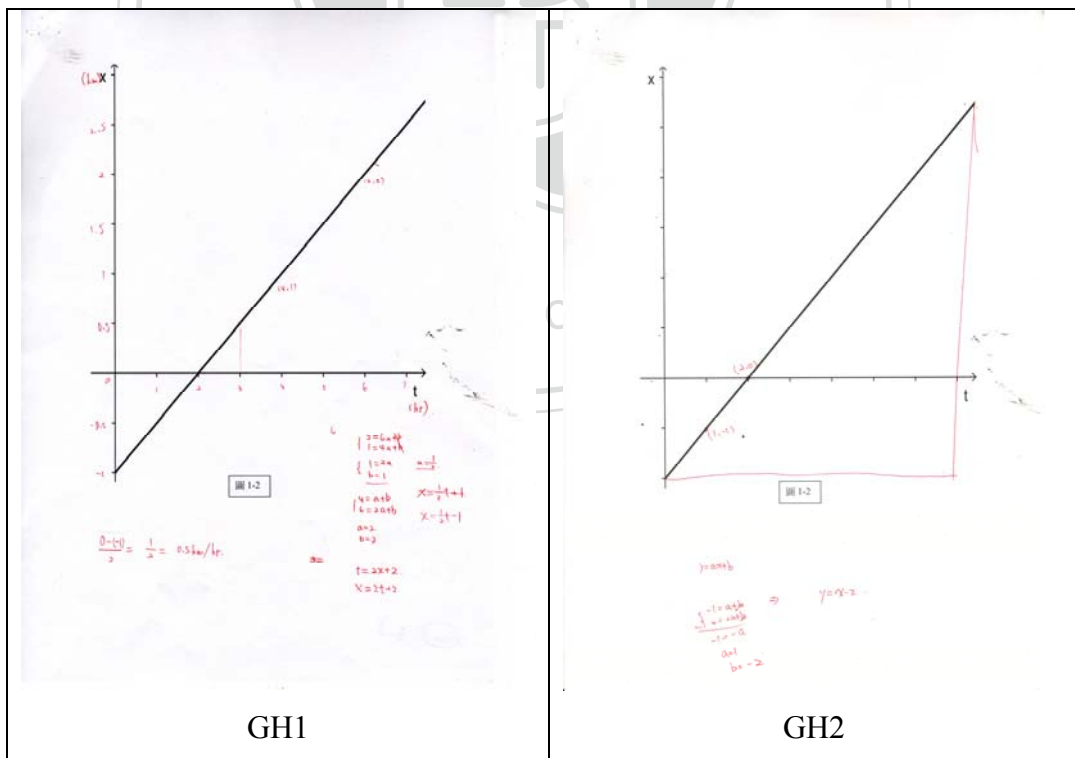
三位高數理能力受試者 GH1、GH2、BH1，皆能理解非過原點負截距之直線型  $x-t$  圖形，求算物體運動速度為單位時間內的位置變化量，如圖 1-2 所示；也就是說，必須扣掉直線的起始位置，才能正確求得速度，並且發現直線圖形即為物體正在作等速度運動。

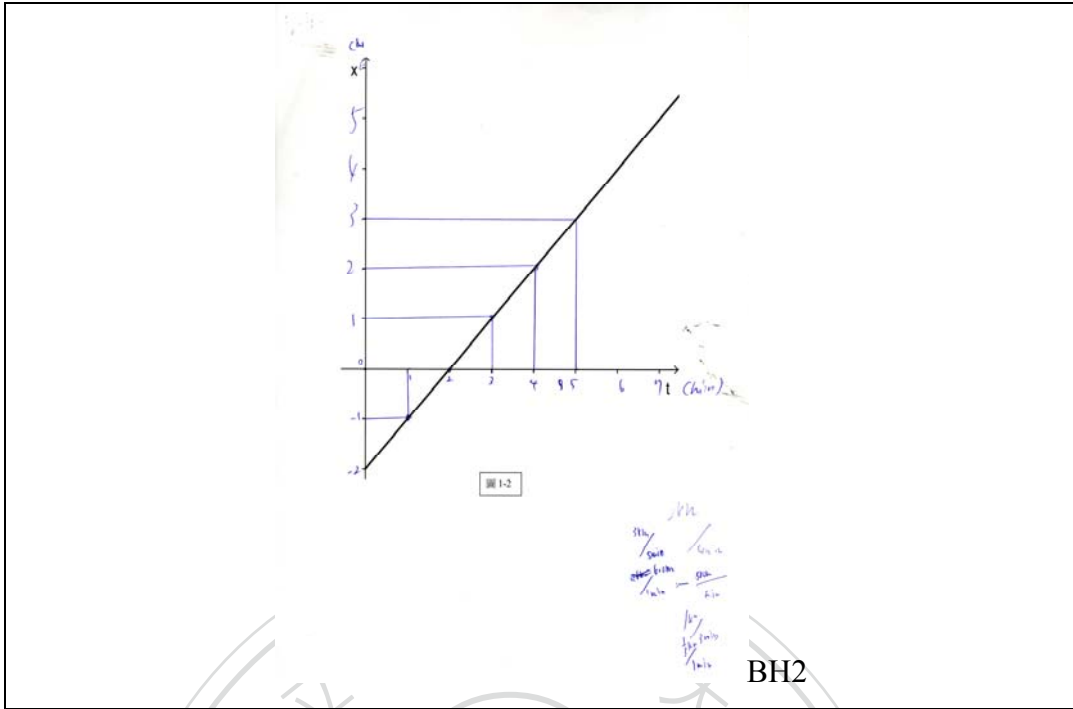


同樣地，高數理能力受試者BH2除了認為速度是x軸上的值除以對應到t軸的值，錯誤的求算方式以致物體的運動速度越來越快。尤以直線經過t軸下方的部份，因認定距離不可能有負值，故也將之取絕對值，研究者在此斷定受試者BH2已發生嚴重的錯誤，亦即，處理正截距圖形是以相同的方式，唯一的差別是在t軸下方的部分取絕對值。該受試者雖然能夠理解圖形的負截距概念，卻因錯誤的求算方式，造成對應物體之運動速度越來越快。

如圖4-11，三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH2對圖形處理之表現。而受試者BH1直接口頭向研究者說明，並未在圖形中有所表示。因此，研究者推論三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1能夠理解在負截距下的斜率概念，唯有受試者BH2不能理解。

圖4-11 高數理能力受試者GH1、GH2、BH2在非過原點負截距之斜率表現





## II. 實際操作方面：

三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1，皆能理解非過原點負截距之直線型x-t圖形，表示小汽車是以等速度運動。唯有受試者BH2受到圖形的影響，認為小汽車的運動速度越來越快。如以下對話：

T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1： $\frac{0 - (-1)}{2} = 0.5 \frac{km}{hr}$  (x 軸的單位長為 0.5 公里)

BH1：...。時間每增加 1 個單位，小汽車就向東移動 1 個單位長，小汽車的速度是每小時 1 公里。

BH2：觀察圖 1-2。小汽車一樣的從原點出發，速度從  $\frac{2}{4} \frac{km}{min} = 500 \frac{m}{min}$  變成  $\frac{3}{5} \frac{km}{min} = 600 \frac{m}{min}$ ，速度越來越快。

(以下為針對 BH2 繼續追問的對話)

T：請問前 20 分鐘的速度呢？

BH2：距離沒有負的，取絕對值就可以了。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BH2：小汽車從離原點南方 2km 出發，速度從  $\frac{2}{4} \frac{km}{min} = 500 \frac{m}{min}$  變成  $\frac{3}{5} \frac{km}{min} = 600 \frac{m}{min}$ ，越來越快的向北開。

### III.負載距小結：

綜合 I、II 兩點，三位高數理能力受試者GH1、GH2、BH1，能夠理解在非過原點負載距之直線型x-t圖形，且對應到小汽車是在原點負向兩個單位的地方出發，並以等速度前進。而受試者BH2受到過原點直線型x-t圖所影響，雖然能夠理解負載距對應到小汽車的出發點，但對於小汽車的運動狀態是以越來越快來呈現，主要是受試者BH2處理過原點圖形的方式，將兩軸對應值相除的方式，引用到過飛原點直線型x-t圖形所致。故研究者推論四位高數理能力受試者中，唯有受試者BH2斜率概念的表現受到負載距所影響，無法正確理解直線型的x-t圖形對應到的小汽車為等速度運動，且四位高數理能力受試者在圖形與對應到小汽車真實的運動狀態有一致性的表現。

### 3.高數理能力受試者在截距之下的斜率表現總結：

綜合上述 1、2 兩點，研究者發現高數理能力四位受試者中，三位受試者 GH1、GH2、BH1 不受圖形的截距概念所影響，都能夠將圖形中的斜率概念，正確對應成小汽車的起始位置及運動狀態，故三位高數理能力受試者在圖形上的理解與真實操作上表現是一致的。

唯有高數理能力受試者BH2在過原點的直線型x-t圖形是因為座標軸刻度自行標示錯誤，導致小汽車的運動狀態越來越快。在非過原點的直線型x-t圖形中，同樣受到正負載距的影響，雖然能夠理解小汽車的起始位置，但卻無法對應小汽車的運動狀態為等速度直線運動，反而是以直線圖形對應到兩軸的值相除作為小汽車的運動速度。研究者以表 4-16，作為四位高數理能力受試者由圖形對應小汽車運動速度之表現比較，其中，○代表該受試者不受截距概念影響，X代表該受試者受到截距概念影響。由表 4-16 發現：四位高數理能力受試者對於直線型x-t圖形受截距影響的斜率概念，有百分之七十五的答對率。

表 4-16 高數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念

		高數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2
過原點	零截距	○	○	○	○
	速度	○	○	○	X 錯誤標示 座標刻度
非過原點	正截距	○	○	○	○
	速度	○	○	○	X 兩軸相除
	負截距	○	○	○	○
	速度	○	○	○	X 兩軸相除
○代表該受試者不受截距概念影響。 X 代表該受試者受到截距概念影響。					



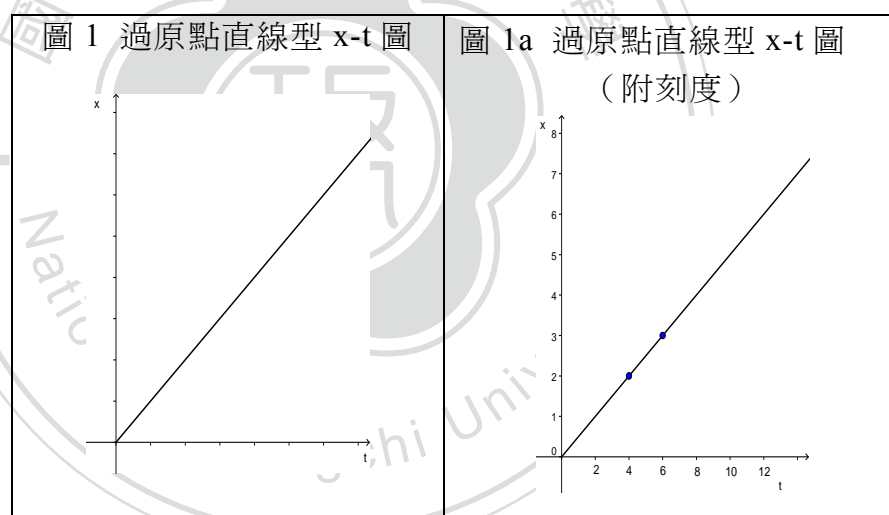
## 二、中數理能力受試者

### 1. 過原點的傾斜直線圖形：

#### (1) 圖形表現方面：

研究者觀察四位中數理能力受試者，皆有零截距之概念。如圖1所示，受試者BM2在自行標示座標軸刻度後，能從圖形資訊，獲得物體作等速度運動。受試者GM1也能自行在圖1上標示座標軸刻度，卻因忘記公式無法求算速度，但在給予公式後，便能求出物體的運動速度。

中數理能力受試者GM2、BM1因圖1的座標軸上，未標示刻度而無法作答，故給予兩位中數理能力受試者，附有刻度相同傾斜程度的直線，如圖1a所示，透過座標軸標示刻度，進而求出物體的運動速度。如以下對話：



T：速度是多少呢？

BM2：速度是1。

GM1：想一下.....，不會算。

T：是忘記公式嗎？

GM1：是，如果有公式的話，我應該會算。

(給該受試者速度的公式)

缺少刻度，自己先標上刻度，所以，小汽車行駛的速度是  $1 \text{ km/hr}$ 。

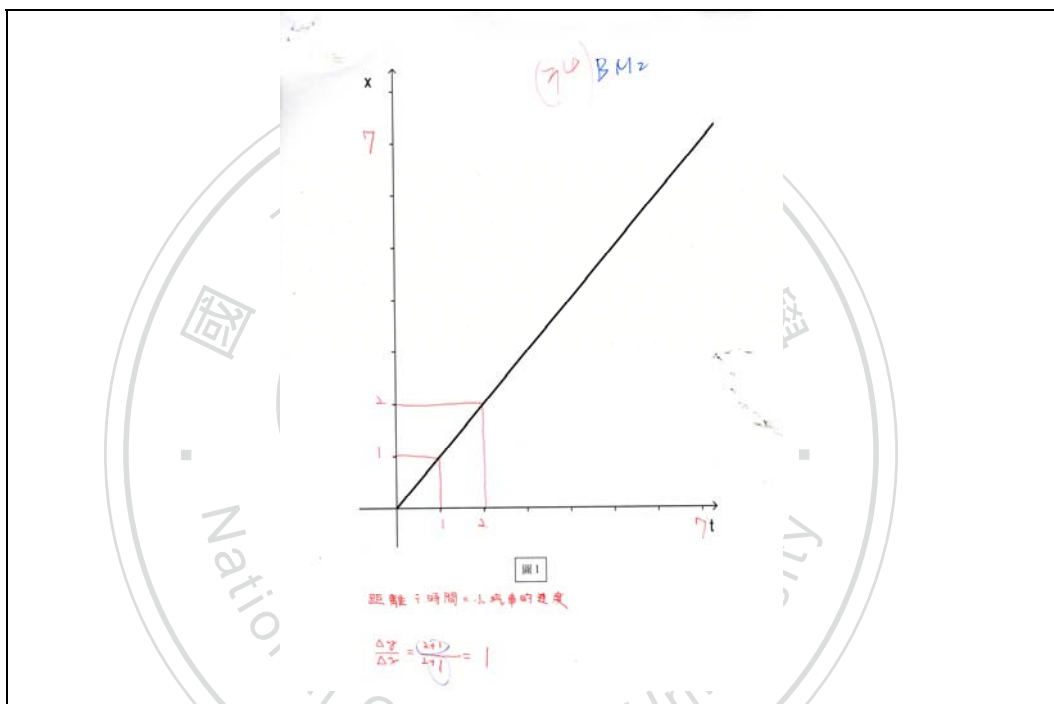
(由圖 1a 計算出來)

GM2：利用圖中的訊息，時間每增加一格，距離就會增加1格，所以，速度都是1。

BM1：速度是  $3 \div 6 = 2 \div 4 = \frac{1}{2} (km/hr)$ 。

在此特別說明中數理能力受試者BM2，從過原點圖形求算物體的運動速度雖是以直線斜率的方式計算，但在計算的過程中卻出現奇怪的計算方式來求算物體的運動速度，如圖4-12所示，並從其對話作為佐證。

圖4-12 中數理能力受試者BM2在過原點的直線型x-t圖形之表現



T：小汽車的速度多快？

BM2：利用斜率，找到  $\frac{7}{7} = 1$ ，且每一個時刻算出來都是 1，所以，速度是 1。

T：怎麼知道斜率就是速度？

BM2：因為直線的斜率為 x 軸的改變量除以 t 軸的改變量，和速度的概念一樣，速度是位置的改變量除以時間的改變量。所以，直線的斜率就是小汽車的速度。所以小汽車的速度  $\frac{2+1}{2+1} = 1$

(2) 實際操作方面：

四位中數理能力受試者從過原點直線型的x-t圖形中，皆能理解小汽車保持固定的速度前進。由以下對話顯示四位中數理能力受試者，從圖形對應在真實世界物體的運動情形：

GM1：小汽車從原點出發，並以 $1\text{ km/hr}$ 的速度往前走。

GM2：小汽車從基準點出發，並以 $1\text{ km/hr}$ 的速度往前開。

BM1：小汽車從原點出發，並以每秒 $\frac{1}{2}\text{ km/hr}$ 的速度往前開。

BM2：小汽車自原點出發，以固定的速度，……，以每小時1公里的速度前進。

### (3) 零截距小結：

四位中數理能力受試者中，GM2、BM1因圖1的座標軸沒有刻度而無法說明物體運動狀態，研究者再以圖1a附有刻度的座標軸，使得受試者GM2、BM1能由足夠的圖形訊息獲得物體的運動速度，以說明小汽車以等速度前進。

另外一位受試者GM1則是能夠從圖形中獲取足夠的資訊，對應到小汽車是以等速度運動前進。而受試者BM2在圖1中，自行標示刻度後，利用斜率概念由圖形取得小汽車的運動狀態是以等速度前進，但求算直線斜率的公式有誤，而在第二天測試斜率概念時，並未以此方法求算，在前面一段有說明，不再贅述。從(1)、(2)發現，四位中數理能力受試者，在處理過原點直線圖形與真實物體運動狀態上的表現一致。

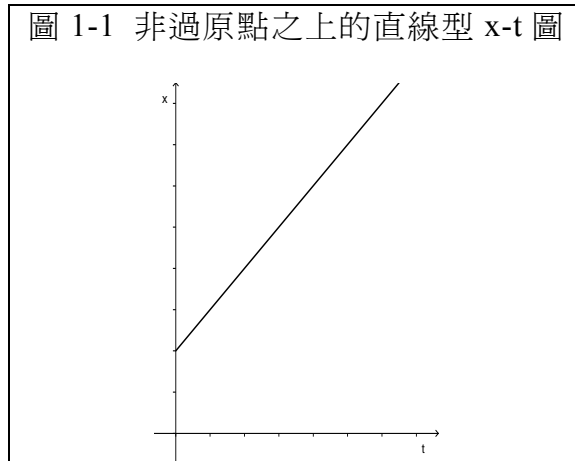
## 2. 非過原點的傾斜直線圖形：

### (1) 正截距：

#### I. 圖形表現方面：

如圖1-1所示，四位中數理能力受試者，除了GM1是因為無法理解非過原點直線型x-t圖形正截距概念之外，其他三位受試者GM2、BM1、BM2皆能理解正截距之概念；但是，從圖形求算物體運動速度時，因為沒有扣掉直線的起始位置，導致誤解物體的運動狀態，產生錯誤的地方是將過原點圖形求算速度的方法，引用到非過原點圖形，將直線所對應到兩軸的值相除所致。在此，研究者以圖4-13表示三位中數理能力受試者GM2、BM1、BM2，在非過原點直線型x-t圖形正截距概念的斜率表現。

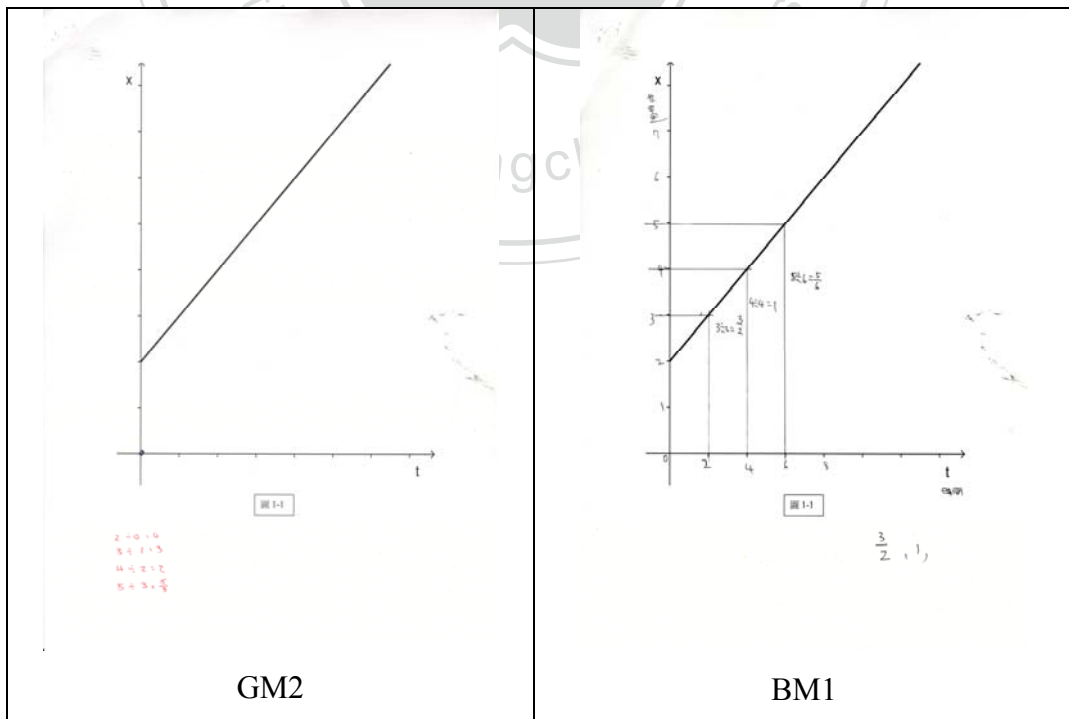
圖 1-1 非過原點之上的直線型 x-t 圖

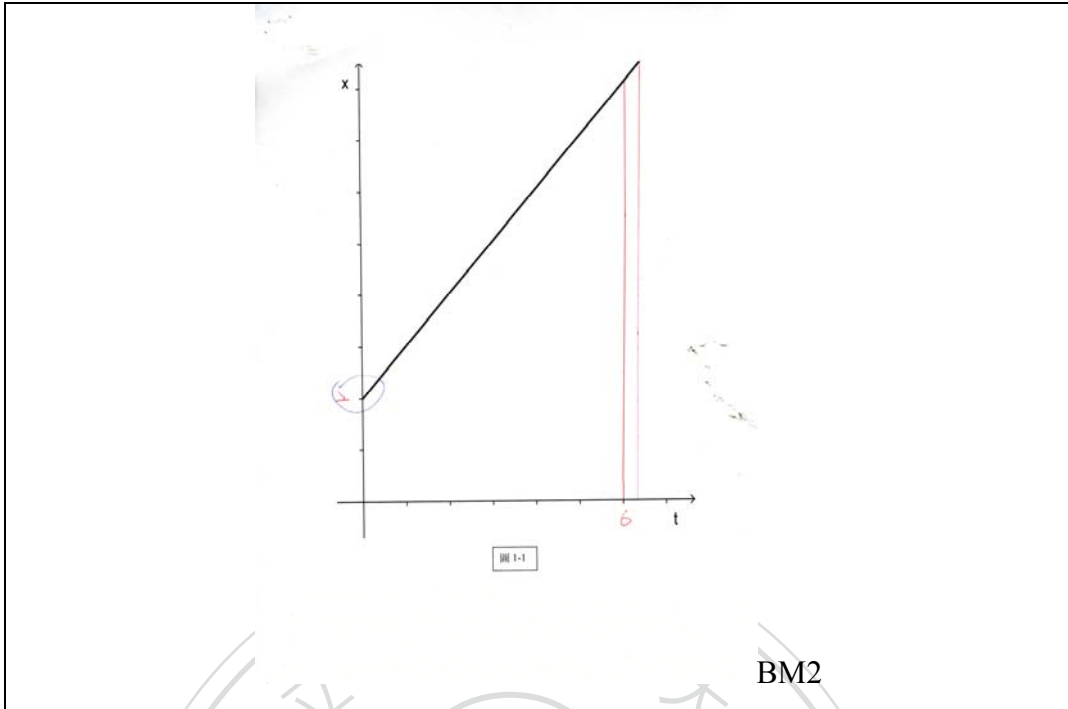


II. 實際操作方面：

除了中數理能力受試者GM1無法理解非過原點圖形的正截距概念，以致無法對應到小汽車的運動狀態，其他三位受試者GM2、BM1、BM2，皆能理解非過原點圖形之正截距概念，但卻無法正確的從圖形中，計算出小汽車的速度，認為小汽車是以不一樣的速度前進，雖然受試者BM2認為小汽車是以等速前進，但是以錯誤的方式計算。如以下對話：

圖4-13 中數理能力GM2、BM1、BM2在非過原點圖形正截距之斜率表現





BM2

T : 請請看圖 1-1，並在地圖上操作小汽車。

BM1：我想一下，小汽車是離原點 2 個單位的地方出發，因為是直線 x-t 圖，所以是等速度的前進。可是，算出來的

速度卻是  $\frac{3}{2} \rightarrow \frac{4}{4} \rightarrow \frac{5}{6} \rightarrow \dots$ ，好像速度越來越慢，慢

到小汽車自己停下來，不是等速度運動。(操作小汽車)

GM2：速度的話，因為小汽車從距離基準點 2 個單位長出發，要算的話，速度會有改變

$$2 \div 0 = 0$$

$$3 \div 1 = 3$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$5 \div 3 = \frac{5}{3}$$

速度越來越慢，小汽車從距離基準點 2 個單位長出發。

BM2：小汽車從離原點 2 個單位的地方出發，.....，以小於

$\frac{1}{3} \left( \frac{km}{hr} \right)$  的速度開車。

### III. 正截距小結：

綜合 I、II 兩點，三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2，雖能夠理解在非過原點正截距之直線型 x-t 圖形，雖能對應到小汽車是在原點正向兩個單位的地方出發，但無法了解小汽車是以等速度直線前進，其中兩位受試者 GM2、BM1 更是以錯誤的計算方式，求得小汽車的運動速度，導致小汽車並非以等速度前進。受

試者BM2雖能算出小汽車以等速度運動，但也是以錯誤的計算方式求得的。最後一位受試者GM1更是受到圖形正截距的影響而無法對應到小汽車的運動狀態。

故研究者推論四位中數理能力受試者斜率概念的表現受到正截距所影響，無法正確理解直線型x-t圖形對應到的小汽車為等速度運動。而四位中數理能力受試者在圖形與對應到小汽車真實運動狀態有一致性的表現。

## (2) 負截距：

### I. 圖形表現方面：

如圖2-1所示，中數理能力受試者GM1因無法理解圖形的負截距所表示的意義，無法連結物體速度。研究者發現：中數理能力受者BM1在負截距求算速度之表現，雖然求得的速度是正確的，但值得注意的是該受試者是將t軸往下平移，將直線圖形視為原點出發，平移後如同圖2-1過原點的值線圖形，才會將負值的地方取上絕對值計算。因此，研究者推論中數理能力受試者BM1可能是恰巧算對，因為在正截距圖形並未出現此表現。

受試者GM2仍舊是延續兩軸對應的值直接相除的方式，認為物體的速度是越來越慢，直到停下來為止。受試者BM2因直線通過負值的地方，由負值變到正值而認為物體速度是越來越快，誤將位置軸式為速度軸。三位中數理能力受試者GM2、BM1、BM2，在非過原點直線型x-t圖形負截距概念的斜率表現比較，如圖4-14所示。

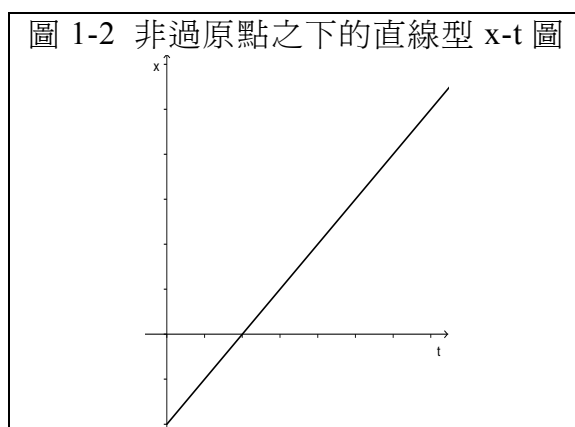
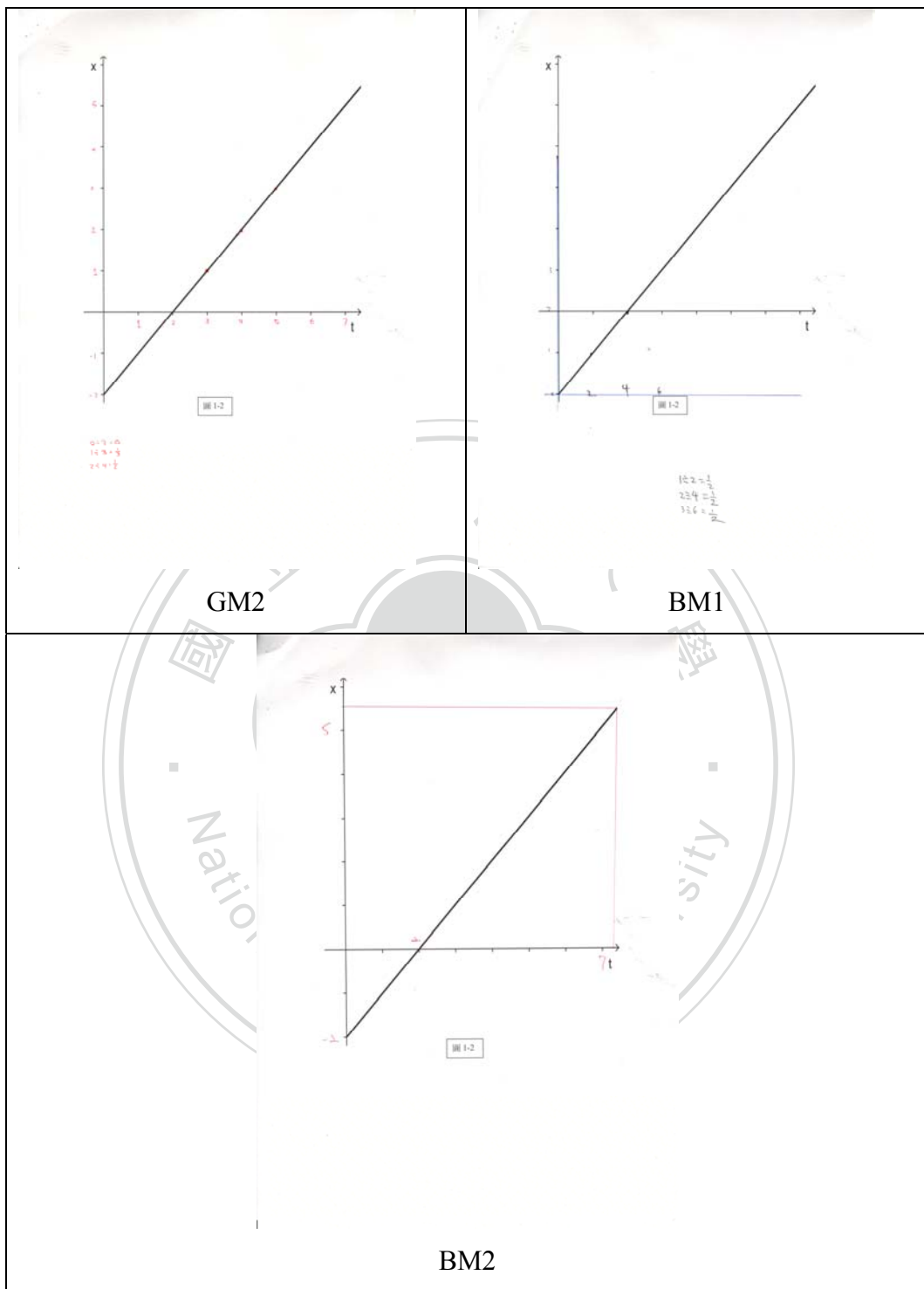


圖4-14 中數理能力受試者GM2、BM1、BM2在圖形的負載距概念之表現



## II. 實際操作方面：

相同的，中數理能力受試者GM1仍受到圖形的影響，無法對應到小汽車的運動狀態；其他三位中數理能力受試者GM2、BM1、BM2，雖能理解非過原點負載距之直線型x-t圖形，但只有

受試者BM1透過t軸往下平移的方式，得到小汽車以等速度方式前進，但研究者推論該受試者並不了解平移t軸的意義，並將負值取絕對值，以下列對話為佐證。另外兩位受試者GM2、BM2亦是受到圖形的影響，得到小汽車是以不相同的速度運動，而非等速度運動前進。如以下對話：

T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1：從頭到尾都是用一樣的速度。求它的速度，要先把 t 軸上的原點往下移到 -2 的地方，讓 -2 變成原點；再來，速度就是和之前的一樣，

$$1 \div |-2| = 2 \div |-4| = 3 \div |-6| = \frac{1}{2} (km/hr)$$

小汽車以每小時 0.5km 的速度前進。

GM2：從基準點下方 2 個單位的地方出發，且速度是等速度前進。等等，速度是有改變的……利用距離除以時間，得到速度：

$$1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$2 \div 4 = \frac{1}{2}$$

∴

所以，小汽車的速度越來越慢，從基準點下方 2 個單位長的地方出發。

BM2：小汽車從離原點下方 2 個單位的地方出發，……，速度越來越快。

(繼續追問受試者 BM2 小汽車越來越快的理由)

T：為什麼？

BM2：因為速度從負的變成正的。

### III. 負載距小結：

綜合 I、II 兩點，兩位中數理能力受試者GM2、BM2，雖能夠理解在非過原點負載距之直線型x-t圖形，對應到小汽車是在原點負向兩個單位的地方出發，但卻無法連結小汽車是以等速度前進。受試者BM1是唯一一位能夠由圖形對應到小汽車以等速度運動前進的，但其並不了解將t軸往下平移的原因，出現負值取絕對值，計算出物體運動速度。而受試者GM1則是無法從圖形對應到小汽車的運動狀態。



受試者GM2在處理過原點圖形的方式，直線對應到兩軸的值相除引用到負載距圖形，照她的計算方式，小汽車的速度應是越來越快，而非她所呈述的越來越慢。受試者BM2，則由圖形對應到小汽車的運動狀態是越來越快的方式前進，主要是因為直線由負值再到正值的位置。

故研究者推論四位中數理能力受試者，斜率概念的表現受到負載距所影響，無法正確理解直線型的x-t圖形對應到的小汽車為等速度運動。

### 3.中數理能力受試者在截距之下的斜率表現總結：

綜合 1、2 兩點發現，四位中數理能力受試者中，唯有 BM2 無法理解過原點圖形對應到小汽車非等速度運動。三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2 在處理非過原點直線型 x-t 圖形時，能夠對應小汽車的起始點位置，但卻無法理解小汽車是作等速度運動；在正截距圖形部份，只有受試者 BM2 從圖形對應到小汽車是作等速度運動，兩位受試者 GM2、BM1 從圖形對應到小汽車的運動速度是越來越慢。在負載距圖形部份，三位中數理能力受試者 GM2、BM1、BM2 仍舊是受到圖形影響，無法對應到小汽車正確的運動狀態。而受試者 GM1 更是受到圖形正、負載距影響，因小汽車的出發點位置影響到操作其運動狀態。

故研究者推論除了受試者 GM1 因不能理解正、負載距外，其他三位受試者在求算物體的運動速度，會受到截距概念的影響，造成截距圖形影響受試者的斜率概念之判讀，也就是說，受試者雖可理解出發點位置，卻無法對應到小汽車是以等速度前進的運動狀態。最後，研究者以表 4-17，作為四位中數理能力受試者由圖形對應到物體運動速度之表現比較其中，○代表該受試者不受截距概念影響，X 代表該受試者受到截距概念影響。由表 4-17 發現：四位中數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形正、負載距的斜率概念，只有百分之二十五的答對率，由此可見，中數理能力受試者的斜率概念深受截距之影響。

表 4-17 中數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念

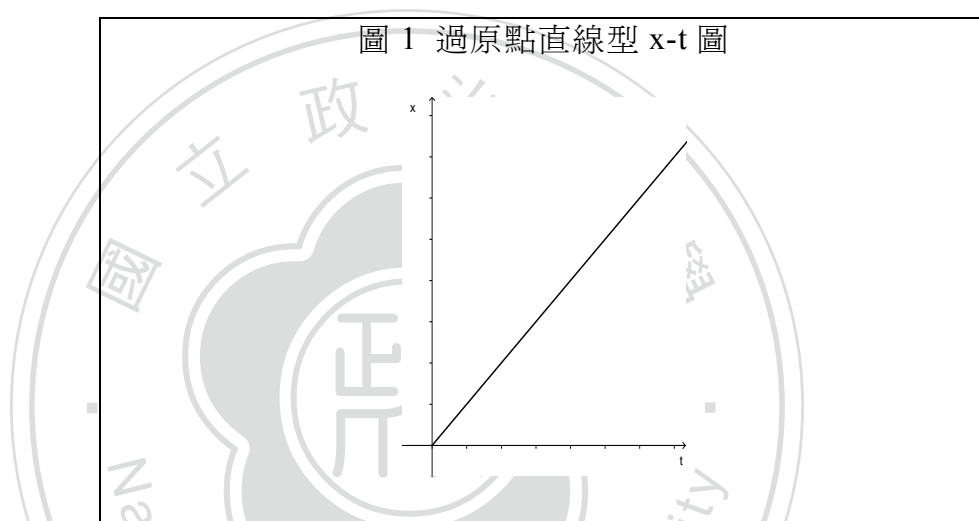
		中數理能力			
		GM1	GM2	BM1	BM2
過原點	零截距	○	○	○	○
	速度	○	○	○	○ 斜率
非過 原點	正截距	X 不了解	○	○	○
	速度	X 受截距影響	X 兩軸相除	X 兩軸相除	X 兩軸相除
	負截距	X 不了解	○	○	○
	速度	X 受截距影響	X 兩軸相除	○ 平移 t 軸	X 受直線影響
○代表該受試者不受截距概念影響。 X 代表該受試者受到截距概念影響。					

### 三、低數理能力受試者

#### 1. 過原點的傾斜直線圖形：

##### (1) 圖形表現方面：

研究者觀察四位低數理能力受試者，在過原點傾斜的直線型x-t圖形，皆能自行標示刻度，故只施測圖1。唯有受試者GL1無法理解直線圖形是為等速度運動，認為物體是以加速度前進；另外其他三位低數理能力受試者則不受圖形零截距之影響，認為物體為等速度運動。如以下對話：



T：速度是多少呢？

GL2：以  $1 \frac{km}{hr}$  的速度。

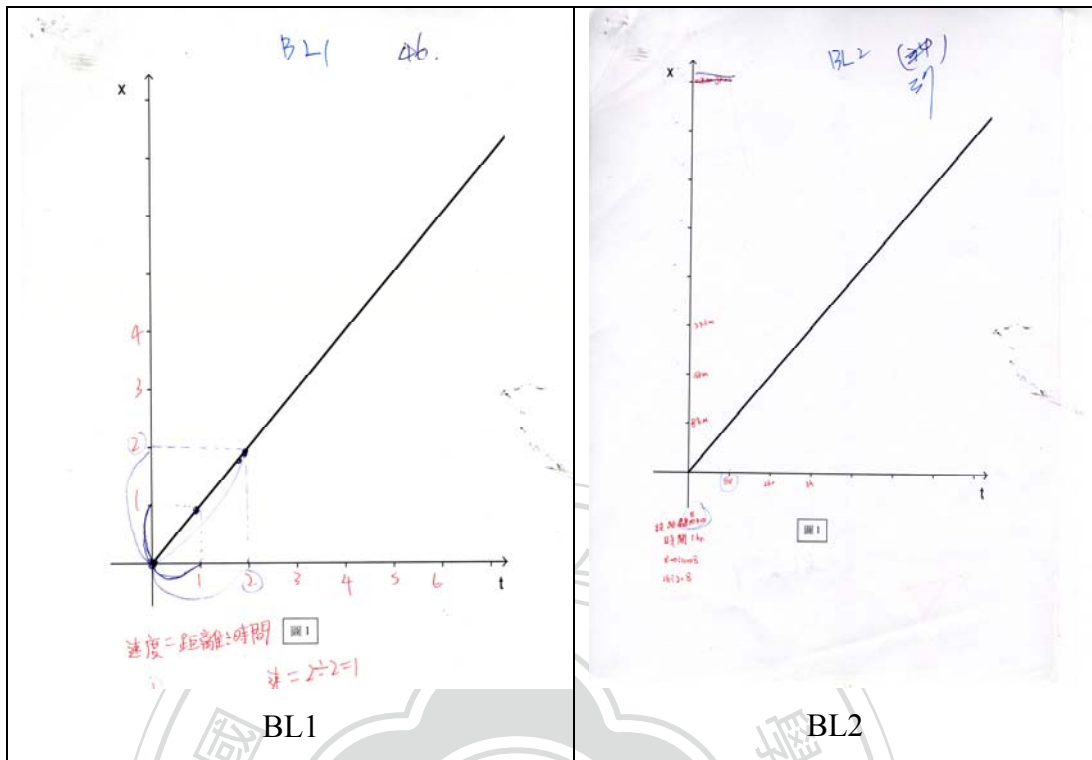
BL1：並以每小時 1 公里的等速度爬坡的方式開車。

BL2：以每小時 8 公里的速度。

GL1：感覺上是加速前進，越來越快，位置軸每增一個單位，速度就加快一個單位。

除了對話之外，研究者以圖4-15（見下頁）表示低數理能力受試者BL1、BL2在處理過原點的直線型x-t圖形之表現。其他兩位則是以口頭回答的方式說明，如上述說明。

圖4-15 低數理能力受試者BL1、BL2在過原點直線型x-t圖形之表現



(2) 實際操作方面：

四位低數理能力受試者，從過原點直線型x-t圖形中，唯有受試者GL1無法理解直線圖形為等速度運動，導致小汽車也是以加速度的方式前進；另外其他三位低數理能力受試者則是不受圖形零截距之影響，認為小汽車是以等速度運動前進。由以下對話顯示四位低數理能力受試者，從圖形對應在小汽車的運動狀態：

BL1：標上刻度後，小汽車在原點出發，……，並以等速度爬坡的方式開車。

BL2：小汽車在原點出發，並以每小時8公里的速度。

GL2：小汽車從原點出發，並以1 km/hr 的速度往右方向走。

GL1：小汽車從紅點開作加速運動，位置每增加一個單位，速度也隨之增加一個單位。

(3) 零截距小結：

四位低數理能力的受試者，在過原點傾斜的直線型x-t圖形，皆能自行標示刻度。唯有受試者GL1無法理解直線圖形是為等速度運動，而對應到的小汽車是以加速度前進；另外其他三位低數理能力

受試者則不受圖形零截距之影響，認為小汽車正在作等速度運動。從(1)、(2)發現，四位低數理能力的受試者，在處理過原點的直線圖形與真實物體的運動狀態上的表現一致。

## 2.非過原點的傾斜直線圖形：

### (1) 正截距：

#### I.圖形表現方面：

研究者發現低數理能力受試者GL2，在非過原點出發的圖形中，如圖1所示，求算物體的速度是直接以兩軸對應的值相除而得，隨x軸越往上，t軸越往右，當兩軸的值漸增，因相除結果認定速度會因兩軸值相除後，發現其值越變越小，認為物體的速度會越來越慢。

而受試者GL1仍舊是認為隨著直線圖形往右增加之外，其對於物體運動狀態的解讀仍視小汽車以加速的方式前進。

受試者BL1也受到圖形影響，認為物體為爬坡的方式運動，所以速度越來越慢，且不會停止。而受試者BL2則是將t軸平移上去，使得直線從原點出發，因此就與過原點的圖形一樣，物體雖以等速度運動，但卻改變物體出發的位置。三位低數理受試者之表現，如圖4-16所示（見下頁），因受試者GL2直接口頭回答，故無圖片。

研究者推論四位受試者受到正截距的影響，導致無法對應物體的運動狀態。如以下對話：

圖 1-1 非過原點之上的直線型 x-t 圖

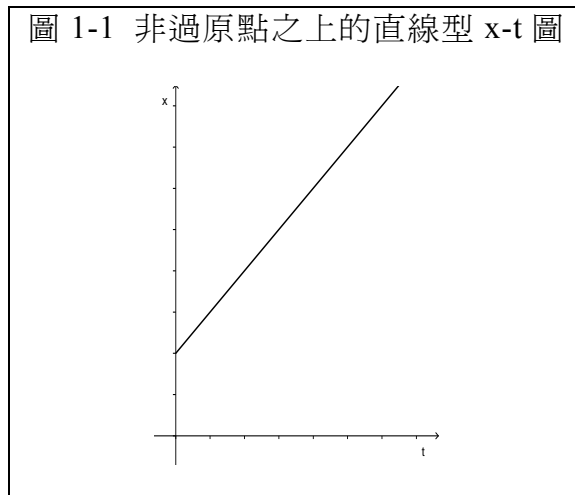
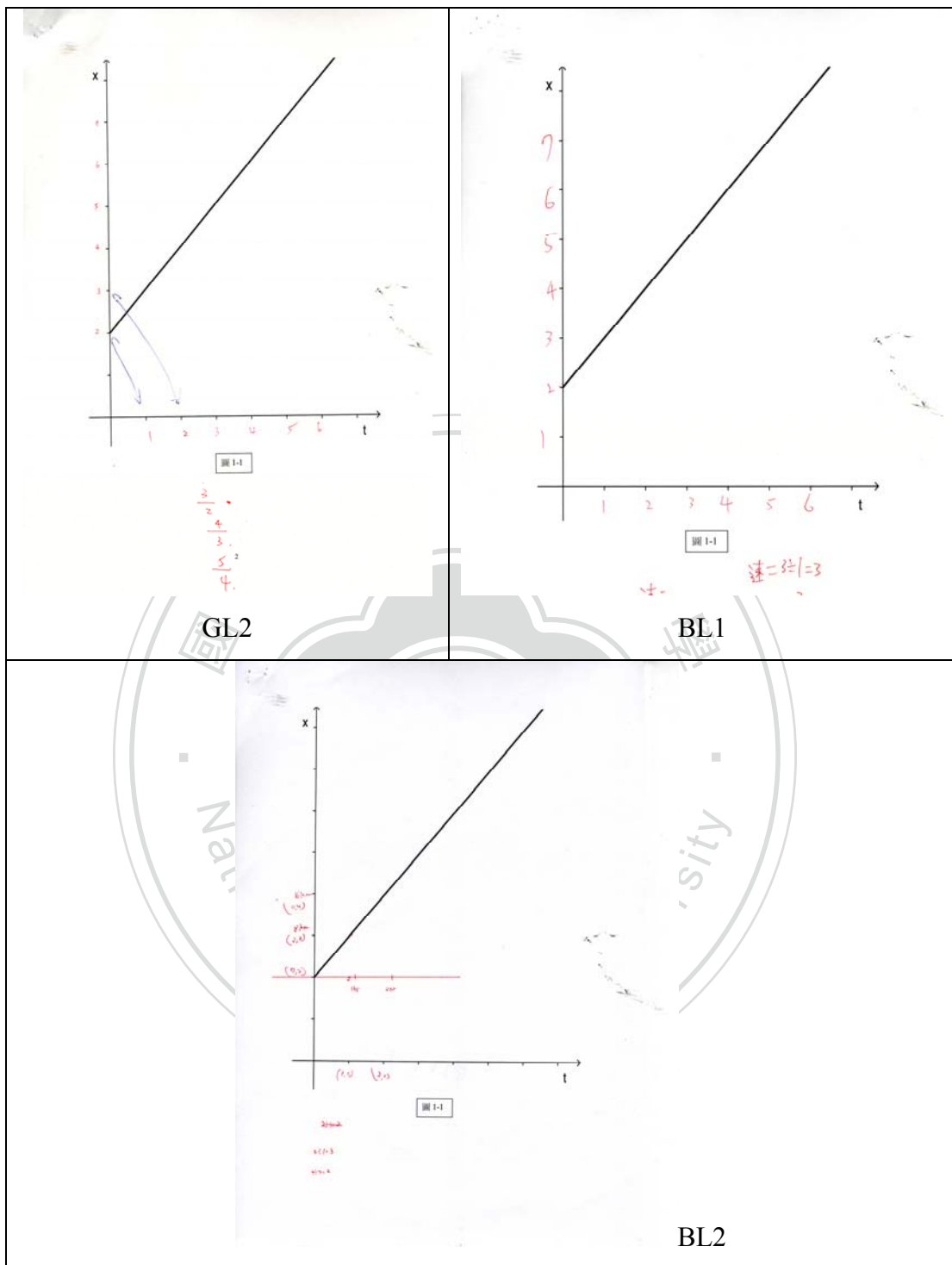


圖4-16 低數理能力GL2、BL1、BL2在非過原點正截距圖形之表現



GL2：速度是  $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{5}{4}$  ……，會越來越慢到速度是 0。

GL1：直線往上走，速度會越來越快。

BL1：速度從一開始

$$3 \div 1 = 3$$

$$7 \div 5 = 1\frac{2}{5}$$

$$8 \div 6 = 1\frac{2}{6}$$

速度變慢，但沒有停止。

BL2：先標刻度，把 t 軸平移上來。然後，小汽車從原點的地方出發，速度是以越來越慢的方式前進。

## II. 實際操作方面：

研究者發現低數理能力受試者GL2，在處理非過原點出發的直線型x-t圖形，對應到小汽車的速度是越來越慢。

受試者GL1仍舊是認為隨著直線圖形往右增加之外，其對應於小汽車的運動狀態是以加速的方式前進。

受試者BL1與GL1相似，同樣受到圖形影響，只是對應到的小汽車是爬坡的方式，其速度越來越慢，但不會停止。最後，受試者BL2則是將t軸平移上去，認為小汽車以原點為出發點，再以等速度運動前進。四位低數理能力受試者，皆受直線圖形方向的影響，以至於無法對應到小汽車的運動狀態。如以下對話：

GL2：小汽車從地圖上距離原點 2 單位長的地方出發，速度是  $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{5}{4}$ ……，會越來越慢到速度是 0。

GL1：小汽車從地圖上距離紅點 2 單位長的地方出發，且直線往上走，速度會越來越快。

BL1：小汽車從離原點任意方向的 2 公里處出發，小汽車的速度從一開始

$$3 \div 1 = 3$$

$$7 \div 5 = 1\frac{2}{5}$$

$$8 \div 6 = 1\frac{2}{6}$$

速度變慢，但沒有停止。

BL2：小汽車從原點的地方出發，速度是以越來越慢的方式前進。

### III. 正截距小結：

綜合 I、II 兩點，四位低數理能力受試者，除了 BL2 受圖形影響，將 t 軸往下平移，使得直線從原點出發，因而對應到小汽車雖然是以等速度前進，但也因此認定出發點為原點之錯誤解釋；其中，兩位受試者 GL2、BL1 雖然能夠理解圖形中的正截距之概念，但卻也受到正截距之影響，導致對應到的小汽車之運動狀態並非是等速度，另外一位受試者 GL1 更是嚴重受到圖形的影響，認定直線為往右遞增，對應到小汽車以加速度前進，且越斜越快，與過原點圖形的表現相吻合。

故研究者推論四位受試者處理圖形與實際操作上是一致性的表現，並且斜率概念的表現會受到正截距所影響，以致無法對應小汽車的運動狀態。

#### (2) 負截距：

##### I. 圖形表現方面：

如圖 1-2 所示，低數理能力的受試者 GL1 延續在處理正截距圖形的方式，圖形往右遞增，表示物體為加速運動。受試者 GL2，在非原點出發的圖形中，特別是直線通過負值的地方，速度的求算是以分段計算的，隨 x 軸越往上，t 軸隨之往右，當兩軸的值漸增，因為距離沒有負值，所以將之取絕對值，故 t 軸下方的速度是等速度，一旦直線通過 x 軸的正值開始，認定物體的速度應當是越來越快，與中數理能力受試者 BM2 有相同的處理方式，都受到圖形的影響，導致物體的運動狀態是越來越快的。

受試者 BL1 雖然具有負截距之概念，對應到的物體也是以等速度前進，但在原點到負截距的地方物體是有運動狀態的，且是以直線為終點目標，物體先往右移動 7 格，再向上 7 格，受到直線影響因而物體也是以此模式運動，無法正確對應到物體作等速度直線運動。

受試者 BL2 仍是與處理正截距圖形的方式解讀，先將 t 軸往下平移，因遇到負值，而對應到物體運動是以往後退的方式，且是



以越來越慢的速度，但不會停止，受試者BL2也被直線經過負值搞混，隨位置軸的值增加，由負值到正值，其所對應物體的運動速度當然是越來越快。如以下對話，並將受試者GL2、BL2處理圖形的部份以圖4-17呈現，受試者GL2、BL1直接口頭回答，故無圖片。

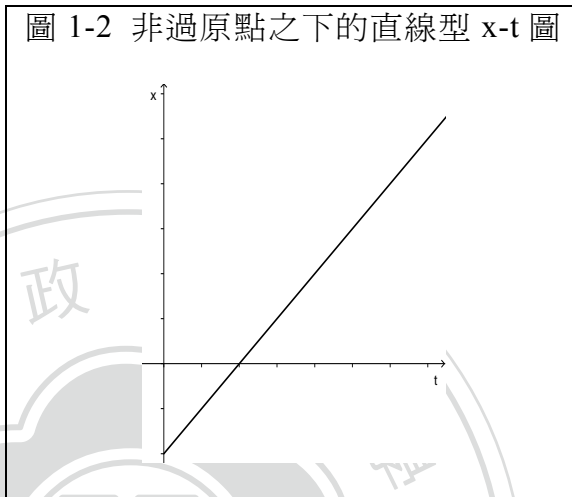
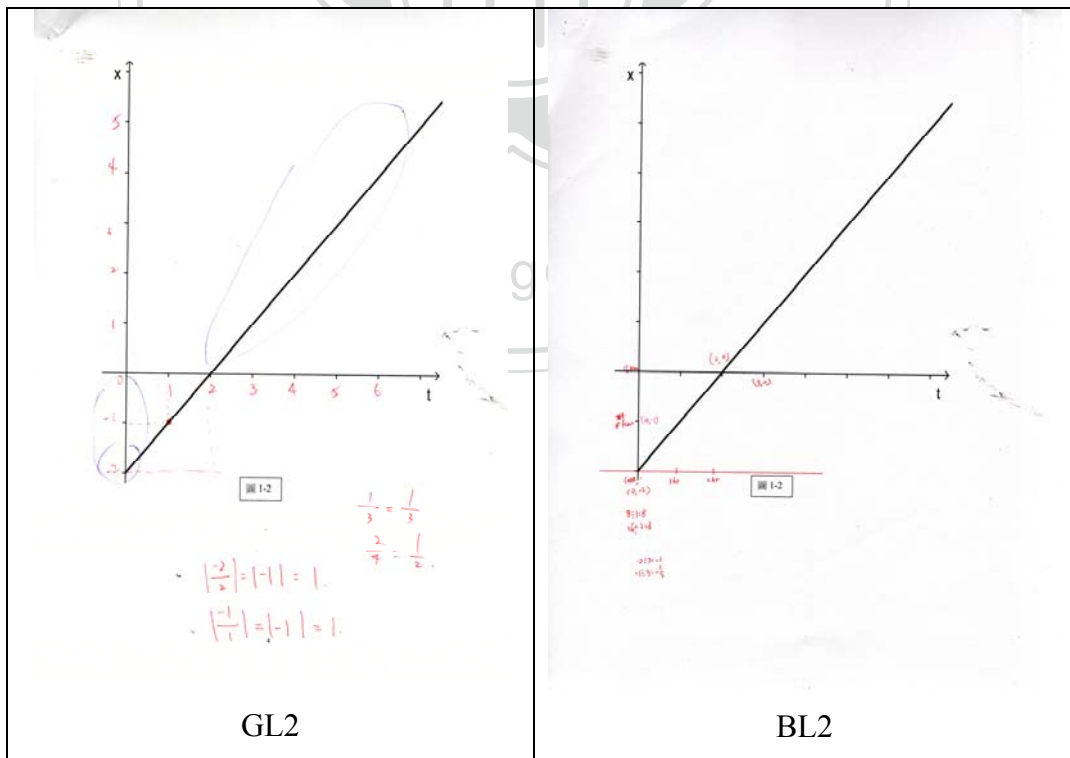


圖4-17 低數理能力GL2、BL2在非過原點負截距圖形之表現



GL1：觀察圖 1-2 後，速度會越來越快。

GL2：觀察圖 1-2 後，因為距離沒有負的，所以，要取絕對值，速

度算出來是正的。在 t 軸下方的速度都固定是 1，但到了 t 軸上方的速度則會改變，而且是越來越快。

BL1：開到原點下方 2km 處，然後以等速度前進，行進的方式是先往右走 7 格，再往上 7 格。

BL2：先標刻度，把 t 軸平移下來。以往後退的方式運動，且速度漸漸變慢行駛。

T：速度是多少？

BL2：速度是

$$-2 \div 2 = -1$$

$$-1 \div 3 = -\frac{1}{3}$$

⋮

一直變慢，但不會停。

## II. 實際操作方面：

低數理能力的受試者GL1受到直線往上遞增的影響，則對應到小汽車為加速運動。受試者GL2以分段計算小汽車的運動狀態，因為距離沒有負值，故t軸下方的速度是等速度，一旦直線通過x軸的正值開始，對應到小汽車的速度是越來越快。受試者BL1從圖形對應到小汽車是以等速度運動，但在原點到負載距的地方物體是有運動狀態的，小汽車以直線為終點目標，先往右移動7格，再向上7格，同樣也是無法正確對應小汽車運動狀態。受試者BL2因直線圖形經過負值，故其對應小汽車的運動是以越來越慢的速度往後退，但不會停止，同時，也搞混自己求出的負速度的大小，例如：-1/3是小於-1，認為速度從-1到-1/3是越來越慢，如以下對話：

T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：在紅點下方 2 公里處出發，然後，小汽車的速度會越來越快。

GL2：將小汽車移到原點下方 2 個單位處出發，然後，因為距離沒有負的，所以，要取絕對值，速度算出來是正的。  
在 t 軸下方的速度都固定是 1，但到了 t 軸上方的速度則會改變，而且是越來越快。

BL1：小汽車開到原點下方 2km 處，然後以等速度前進，行進的方式是先往右走 7 格，再往上 7 格。

BL2：小汽車是以往後退的方式運動，且速度漸漸變慢行駛。

T : 小汽車的速度是多少？

BL2：小汽車的速度是

$$-2 \div 2 = -1$$

$$-1 \div 3 = -\frac{1}{3}$$

⋮

一直變慢，但不會停。

### III. 負載距小結：

綜合 I、II 兩點，除了低數理能力受試者 BL2，沒有正、負載距概念，因而在圖形無法對應到小汽車的運動狀態。另外三位受試者 GL1、GL2、BL2 分別受到正、負載距圖形的影響，以至於小汽車呈現不盡相同的運動方式。受試者 GL1 完全是受到直線影響，才會對應到小汽車以加速的方式前進。至於 GL2 與 BL1 在正載距圖形部份，是以相同的方式計算小汽車的速度，直接將兩軸對應的值相除；負載距圖形的部份，受試者 GL2 以分段計算，對應到小汽車運動的方式也是以不同的速度表現，最後，受試者 BL1 對應小汽車是以等速度前進，但運動的方式也是錯誤的。

故研究者推論四位低數理能力受試者，斜率概念的表現，皆受到負載距所影響。而受試者 BL2 因在負載距圖形求算速度上有誤，使得小汽車無法對應自己所計算出的速度，故圖形表現無法對應到小汽車的運動狀態，其他三位受試者從圖形對應小汽車的運動狀態表現皆一致。

### 3. 低數理能力受試者在截距之下的斜率表現總結：

綜合上述 1、2 兩點，低數理能力受試者 GL1 皆受到直線往右遞增的影響，即使能對應到小汽車的出發點位置，仍然認為小汽車是以加速的運動方式前進。其他三位受試者，在不同的截距下有著不盡相同的解釋，但皆受截距影響以致無法對應小汽車的正確運動狀態。

研究者以表 4-18，作為四位低數理能力受試者由圖形對應到物體運動速度之表現比較。由表 4-18 發現：四位低數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念，有較低的答對率，且受試者 BL2 還是以錯誤的運動方式呈現。由此可見，低數理能力受試者與中數理能力受試者的斜率概念深受截距之影響。

表 4-18 低數理能力受試者對於直線型 x-t 圖形受截距影響的斜率概念

		低數理能力			
		GL1	GL2	BL1	BL2
過原點	零截距	○	○	○	○
	速度	X 受直線影響	○	○	○
非過 原點	正截距	○	○	○	X 往上平移 t 軸
	速度	X 受直線影響	X 兩軸相除	X 兩軸相除	X 算錯
	負截距	○	○	○	X 往下平移 t 軸
	速度	X 受直線影響	X 分段計算	○ 運動方式 錯誤	X 算錯
○：表示該受試者不受截距概念影響。					
X：表示該受試者受截距概念影響，並附上該受試者受影響的原因。					

四、總結：

研究者將三種不同能力受試者受到截距影響的斜率概念之表現比較以表4-19呈現。另外，研究者之所以在此節提到主要是因為從表4-11與表4-19發現到，三種不同數理能力受試者在過原點圖形的表現優於非過原點圖形的表現。

表 4-19 高中低三種不同數理能力探討受截距影響之斜率概念表現

		高數理能力				中數理能力				低數理能力			
		GH1	GH2	BH1	BH2	GM1	GM2	BM1	BM2	GL1	GL2	BL1	BL2
過原點	零截距	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	速度	○	○	○	X 錯誤標示	○	○	○	○	X 直線影響	○	○	○
非過原點	正截距	○	○	○	○	X 不了解	○	○	○	○	○	○	X 往上平移 t軸
	速度	○	○	○	X 兩軸相除	X 受直線影響	X 兩軸相除	X 兩軸相除	X 兩軸相除	X 受直線影響	X 兩軸相除	X 兩軸相除	X 算錯
	負截距	○	○	○	○	X 不了解	○	○	○	○	○	○	X 往下平移 t軸
	速度	○	○	○	X 兩軸相除	X 受直線影響	X 兩軸相除	○ 往上平移 t軸	X 受直線影響	X 受直線影響	X 分段計算	○ 運動方式 錯誤	X 算錯
○：表示該受試者不受截距概念影響。													
X：表示該受試者受截距概念影響，並附上該受試者受影響的原因。													

## 第五章 結論與建議

本研究的目的是針對高、中、低數理能力的學生從  $x-t$  圖對應到的真實物體運動狀態以及其所對應的數學概念之表現進行探討。參考相關文獻後，資料收集的方法為半結構性晤談，蒐集十二位受試者的對於直線型的  $x-t$  圖所對應到的數學概念之歷程及其對應到的真實物體運動狀態，最後以質化的方式分析及統整所蒐集的資料。所得的結果經分析後，本章提出主要結論及若干教學與後續研究上之建議。

### 第一節 結論

對於九年級學生在處理直線型  $x-t$  圖與對應到的斜率與截距概念之關連性及其對應到真實世界的物體運動狀態連結，做一綜合整理，並提出以下結論：

#### 一、在探討截距方面

##### 1. 高數理能力學生之表現

研究發現，高數理能力的學生能夠理解非原點直線型的  $x-t$  圖，當直線與  $x$  軸之交點所代表的物理意義是為物體的出發點位置，就是物體相對於參考點的位置，而對應到真實世界的物體運動狀態則是小汽車的起始點位置，這些都是在  $x-t$  圖上所隱含的數學之截距概念。

##### 2. 中、低數理能力學生之表現

特別是中、低數理能力的學生，初學完  $x-t$  圖課程後，在過原點直線型的  $x-t$  圖求算小汽車的速度恰巧是兩軸的值相除，誤以為  $x$  軸表示的是距離而非位置，這樣的錯誤繼續延續到非原點直線型的  $x-t$  圖。故中、低學生並未清楚的了解  $x-t$  圖的兩軸所代表的意義，以及截距的問題，進而影響其學習表現。部分學生雖然可以指出直線與縱軸之交點所代表意義，但也卻間接的影響到其他的相關概念，例如：小汽車行駛的速度。

綜合上述，高數理能力學生同時也注意到兩軸的刻度對物體運動的速度之影響，他們會謹慎小心的處理，在沒有標示刻度座標軸下，是無法正確清楚的

描述物體運動之速度；相對於中、低數理能力的學生則是在自己標示刻度後，求出物體的運動速度。出發點的問題相當於處理座標平面上直線與縱軸的交點，亦即數學上的截距概念，較兩軸座標刻度大小或比例來得更是重要。

## 二、在探討斜率方面

斜率方面的問題涉及了座標軸的刻度及物體運動的狀態，包含物體運動是快是慢，或是靜止不動的情形，牽涉物體運動方向的問題將下一個主題作討論。在此，從學生對直線的傾斜程度判斷物體運動速度之快慢作為探討：

### 1. 高數理能力學生之表現

能夠由傾斜程度來直接決定物體運動速度快慢之外，也特別注意到刻度比例大小會影響圖形中直線傾斜的程度，甚至亦能掌握水平線的運動狀態就是代表物體靜止不動的狀態，進而正確的操作小汽車。而其中一位高數理能力受試者 BH2，清楚了解改變座標刻度會影響直線傾斜程度的變化，而直線傾斜程度的變化影響物體的運動速度，即使直線的斜度一樣，仍有可能在不同的座標刻度下，表示物體有著不同的速度，除非是在相同的座標軸上，才可以利用直線的傾斜程度去比較快慢。

### 2. 中數理能力學生之表現

對於中數理能力的學生，雖然大多學生會自行量化座標刻度透過數學的計算驗證自己的想法，數學與科學能力即使不差，但似乎在套入生活情境後，欠缺圖形與具體操作連結的能力，像是水平的直線圖形，尤以不與  $t$  軸重合的水平線，更容易受到水平線所在的位置所干擾，只要是非過原點的水平線圖形，物體本身必定具有運動的速度，也彰顯數學座標軸刻度與座標軸所代表意義，對解釋科學現象之重要性。

另外，中數理能力的其中一位學生 BM2，在探討截距概念時，有提及物體運動的速度可以從直線斜率得到，該生具有直線斜率概念，是因為他了解速度之定義之外，也清楚知道直傾斜程度為縱軸相對於橫軸的變化量，也就是在  $x-t$  圖中直線的傾斜程度指的就是物體的位置相對於時間變化量，只是唯一美

中不足的是，雖然算出來的速度是對的，但是表示式是表達錯誤的，研究者再深入追問下去，受訪者很肯定的說沒錯，但到了探討斜率概念時，卻不再出現有關於斜率之概念，這也是在十二位受訪者中，唯一一位有提及到斜率之概念的受訪者。

### 3.低數理能力學生之表現

低數理能力的學生更容易對直線型的圖形產生錯誤的解讀，將直線的傾斜程度視為生活上的體驗，例如：小汽車爬越陡的坡，則行駛速度越慢，或視直線越斜，表示小汽車為加速運動，比較斜的直線代表速度越來越快，無法連結直線型的  $x-t$  圖形就是小汽車作等速度運動，這主要是因為低數理能力的學生受到直線方向的影響，視直線方向為物體實際運動之軌跡。而在水平線的表現上，無法理解斜率為零的直線表示物體為靜止不動的情形，直覺的受到直線往右就是表示小汽車向右運動。

因此，研究者發現直線的傾斜程度，即數學之斜率概念對於直線型的  $x-t$  圖理解，以及對應到真實物體的運動狀態，有理解上的幫助。

#### 三、在探討方向性方面

牽涉物體運動之方向性，就如同小汽車的行駛方向，部分學生容易受到直線方向的影響，認為直線的方向就是物體真實運動方向，傾斜的直線就是小汽車所走的方向，低數理能力學生容易以直線的傾斜度來判定小汽車沿著相同斜度的方向行駛，甚至會視小汽車為加速或減速的運動狀態，或是視小汽車為爬坡或下坡的運動。

而部份中數理能力的學生可以將直線圖形解釋小汽車朝正向作等速度運動，但卻無法理解負向的等速度運動，這是因為他們認為距離沒有負的，更無法接受物體的速度也是負值，甚至將之取絕對值，連結小汽車的反向運動自然產生問題；根據本研究結果發現，主要的問題是在於學生對物體相對於參考點的負向位置之概念不清楚所致，才會將求算出來的負值速度取絕對值，造成小汽車仍舊是以相同速度、延著正向作等速運動之解釋。過原點直線型的  $x-t$  圖



產生錯誤的方向問題，當然也影響學生在非原點直線型的  $x-t$  圖上之解釋。

#### 四、討論

##### (一) 學生數學的斜率、截距能力不足，以致影響位置-時間圖的學習

1. 隨著  $x$  軸的刻度向右漸增， $y$  軸向上刻度漸大，相對於  $x-t$  圖即為時間軸( $t$ )向右，位置軸( $x$ )向上的數值皆漸增，因學生座標平面圖的方向不確定，再加上對兩軸所表示之變量關係不明確，而導致學生無法在座標平面上將所學到二元一次方程式以及一次函數的觀念應用在  $x-t$  圖上，進而無法判讀靜止 ( $y$  軸—即位置的數值不變) 以及反方向的  $x-t$  圖 ( $y$  軸—即位置的數值遞減)。
2.  $x$  軸和  $y$  軸的刻度寬窄並沒有意義，刻度上的數值只能解釋實際狀況，相對於  $x-t$  圖學生沒有注意到圖上所標的數字單位，容易直接以目視運動圖的平緩或陡直，認定速度快慢。換句話說，數學上學習座標平面，最重要的就是數值對應關係，而將表格資料繪製成  $x-t$  圖形的過程中，強調的也是數值對應關係。
3. 學生在學習座標平面上，並不完全了解直線方程式 ( $y = ax + b$ )，只是認為  $y$  為  $x$  的固定比率加常數，故在學習  $x-t$  圖時無法轉換  $b$  即為截距，而直線  $x-t$  圖是位置和時間的固定比率。(例如 2 秒時在 4 公尺，4 秒時便在 8 公尺)，所以速度是固定的等速度運動。

##### (二) 學生圖形表徵的理解薄弱，以致於無法應用數學能力及解釋真實現象

1. 學生在學習座標平面直線圖形時，可以導出  $y = ax + b$  公式，亦可說明  $b$  由何處所求，卻無法在實際操作上了解及做出「非原點」出發運動情形，可見學生在學習直線型的  $x-t$  圖時，不了解座標  $(0, 0)$  即為物體運動出發點。
2. 學生在被要求的情形下可背出速度的定義，卻無法從圖形中直接算出速度及理解直線  $x-t$  圖為等速度運動，其原因可能在圖文表徵上轉換

的困難。

3. 學生在看  $x-t$  圖時，從速度的正負值（斜率）無法操作出物體真實的運動方向是向右還是向左，反而解釋成速度快及慢，即具體運思期尚無法轉為抽象運思。
4. 學生容易受到視覺干擾，大多學生對  $x-t$  圖沒有充分了解。

## 第二節 建議

根據本研究的結果，研究者提出一些建議，以作為數學與科學在教學與未來相關研究之參考。

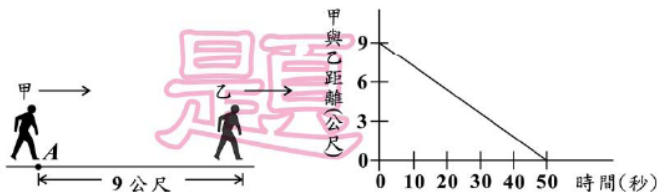
### 一、教學上的建議

#### 1. 數學教學應加強與科學領域之連結

九年一貫開始實施後，強調每個學生都有「帶著走」的能力，研究者在教授國中數學課程中也發現，學生只要接觸生活應用問題，心理上就會出現嚴重的排斥效應，尤其在七年級的數學應用問題中，就出現了速度問題，所以，研究者認為在學習完二元一次方程式的圖形以及一次函數後，其實可以由數學老師先行導入  $x-t$  圖的概念，只需解釋圖形所連結到的等速度概念即可，作為九年級學生學習自然科的一個開端。像九十九年國中基本學力測驗數學科第三十三題就是數學與科學現象的結合，明顯就是理化  $x-t$  圖形的問題出現在數學考題中，所以，在數學教授一次函數單元時，能夠同時提及  $x-t$  圖的概念，將有助於未來處理類似的題目。

33. 如圖(十七)，在同一直線上，甲自  $A$  點開始追趕等速度前進的乙，且圖(十八)表示兩人距離與所經時間的線型關係。若乙的速率為每秒 1.5 公尺，則經過 40 秒，甲自  $A$  點移動多少公尺？

- (A) 60  
(B) 61.8  
(C) 67.2  
(D) 69



圖(十七)

圖(十八)

## 2. 數學教學應著重抽象符號與真實情境之連結

根據數學課程綱要指出：「當學生學習數學時，在生活應用解題與抽象形式能力兩課題間，必須來回往復地相互加強，才能真正順利地發展數學能力，不必過度執著於生活情境，干擾甚至忽略學生抽象形式能力的發展；也不應一味強調抽象程序的學習，妨礙學生將數學應用於日常生活解題的能力」。因此，抽象概念的教學應該配合具體的操作與練習，以協助學生理解。

本研究提供相關教育者一個直線型  $x-t$  圖形抽象概念轉化為具體操作的驗證模式，即以玩具小汽車實際在地圖上運動的方式來追蹤學生  $x-t$  圖形的理解與學習狀況，本研究亦可修改為老師直線型  $x-t$  圖形時的教學法及評量。

## 3. 科學教學應輔導學生建立新舊知識之遷移

從理化老師的角度來看，學生在七年級時已學習過座標平面圖的概念及一次函數，在九年級教授直線型  $x-t$  圖形，並未注意學生在座標兩軸及位置與時間兩變項的對應關係是需進行重新遷移，故影響到直線型  $x-t$  圖形的教學成效。因此，本研究建議理化老師教授直線型  $x-t$  圖形時，應先了解學生的學習背景與先備知識，協助學生做新舊知識之遷移，以提高教學成效。

科學是為解決生活所遇到的問題，尤其學習新概念，甚至舊題材的新表示方式時，學生都須藉由舊有的學習經驗來統合成新的直覺或邏輯經驗，而科學的抽象本質，常會加深學生學習的困難。這時，唯有依靠教師敏銳的觀察與分析，貼心地協助學生，結合其舊有的經驗往前到新的經驗，這正是因材施教的精神。老師的關懷，能讓學生對新的問題抱持著好奇心及擁有努力尋求問題的解答之意志力。

## 4. 數學教學應善用多元教學資源，以協助學生進行多元智慧之學習

### (1) 靜態的知識內容

在內容呈現方面，除了單元文字說明外，可設計與內容相關的圖表

來輔助說明。空間智慧高的學生通常對顏色很敏感，所以教學時可用不同顏色的粉筆書寫或製作彩色的概念圖的呈現教學內容。另外也可利用問問題的口吻，從內省智慧出發，設計日常的生活情境使學習者有思考解決問題的機會。

## (2) 動態的知識內容

錄製日常生活速度情境，使自然觀察智慧的學生能利用外界所觀察到的現象來說明要闡述的速度原理。亦可運用 FLASH 製作動態網頁來呈現重要觀念，並配合相關說明，讓學習者充分融入學習情境。另外動覺智慧傾向的學生可提供機會讓他們透過操作實物或動手製作來學習以幫助學習者利用本身的強勢智慧建構速度知識。

## 二、對未來研究建議

1. 本研究欲探討教學現場的真實現況，但限於人力、物力及客觀的因素，且九年級學生正逢考試衝刺期，無法有大量時間做前測，故不預設工具施測結果，以探索性的心態蒐集原案全貌。僅以台北市立某國中十二位九年級學生為樣本，因此不宜過度推論。因此，未來的相關研究，若能增加研究對象或推展到不同的年級，將能擴大研究的推論效果。
2. 本研究只限於研究  $x-t$  圖，且以單一直線為主，未來可以探討綜合圖形或是兩條直線以上，甚至未來可研究  $v-t$  圖、 $a-t$  圖。

## 附錄 A 直線型 x-t 圖形之研究-專家效度半結構式訪談大綱

訪談者背景資料：

1. 性別： 男  女
2. 服務年資：\_\_\_\_\_
3. 目前任職： 教師兼主任組長  級任導師  
 科任教師（自然領域教師）  科任教師（非自然領域教師）
4. 教學年資：\_\_\_\_\_
5. 最高學歷： 研究所以下（含博士班、四十學分班）  大學（含師範院校）  
 專科（含師專）  其他\_\_\_\_\_

簽名：\_\_\_\_\_

訪談問題如下：

### 一、截距方面

- T：請從下列圖形中觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。
- T：請實際操作小汽車。
- T：為什麼這麼操作小汽車？
- T：請算出小汽車速度是多少？
- T：請再詳細說明小汽車的運動。
- T：請求出直線的一次函數？
- T：請解釋小汽車的運動與一次函數的關係。

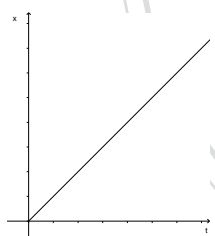


圖 1-1

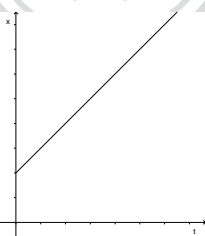


圖 1-2

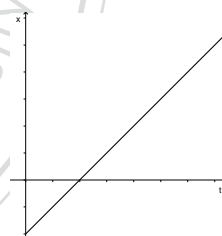


圖 1-3

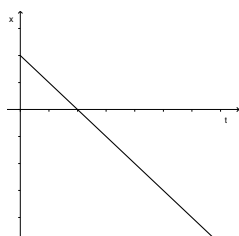


圖 1-4

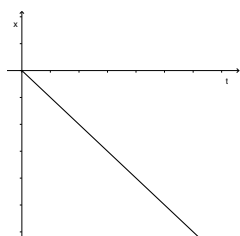


圖 1-5

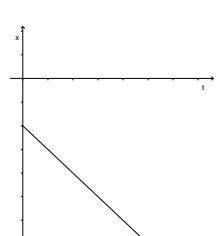


圖 1-6

## 二、斜率方面

T：請從下列圖形中觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

T：小汽車的速度多快？

T：請詳細說明小汽車的運動狀態。

T：請求出直線的一次函數式？

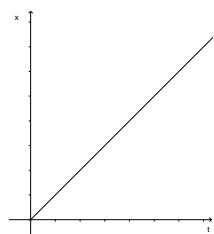


圖 2-1

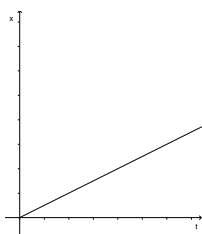


圖 2-2

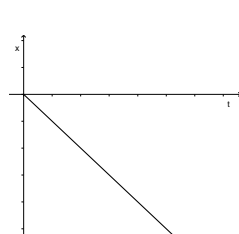


圖 2-3

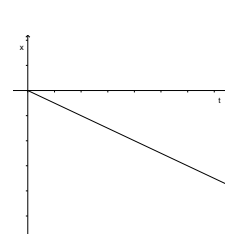


圖 2-4

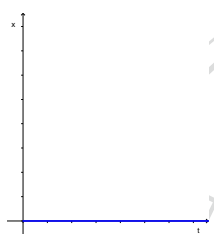


圖 2-5

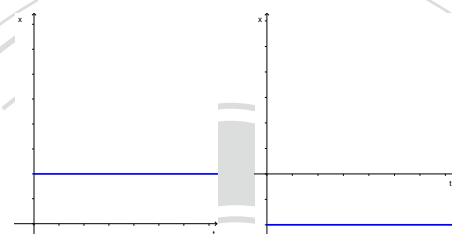


圖 2-6

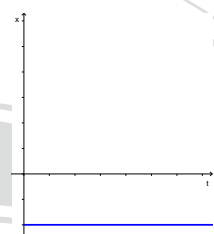


圖 2-7

### 三、方向性方面

T : 請從下列圖形中觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

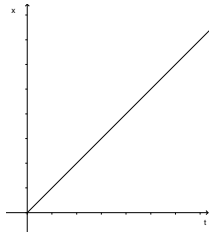


圖 3-1

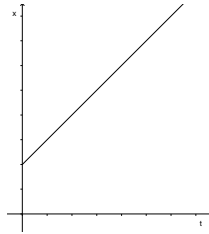


圖 3-2

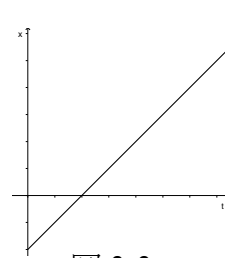


圖 3-3

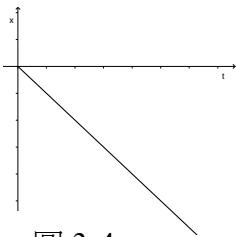


圖 3-4

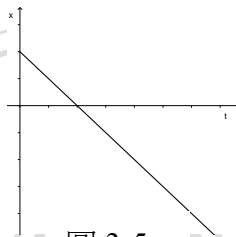


圖 3-5

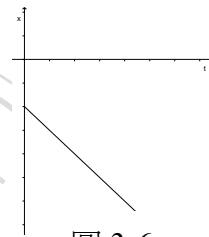


圖 3-6

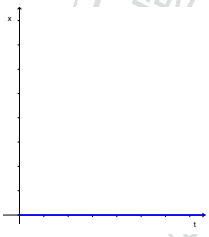


圖 3-7

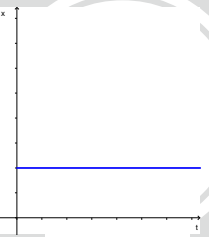


圖 3-8

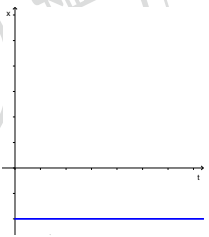


圖 3-9

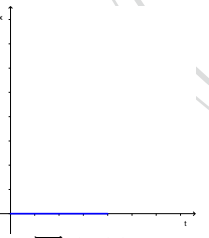


圖 3-10

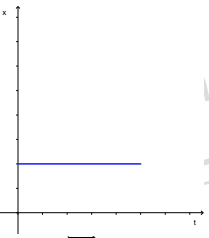


圖 3-11

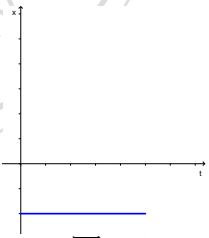
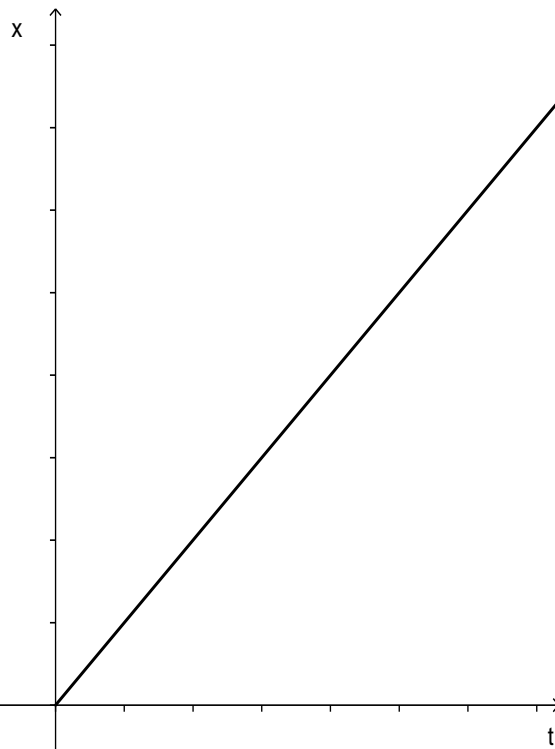


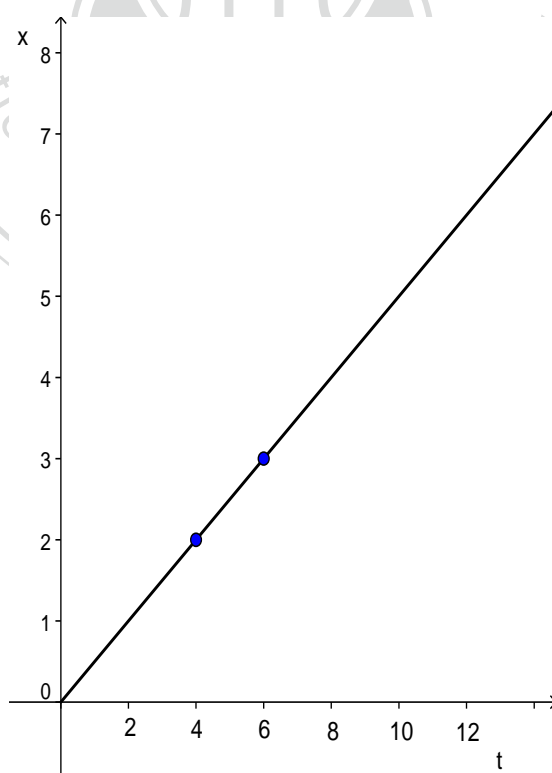
圖 3-12

# 附錄 B 工具

## 附錄B 圖1

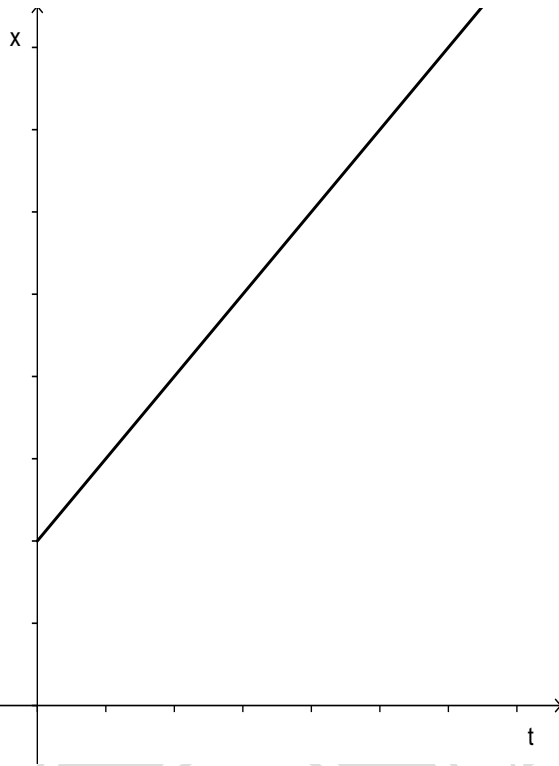


### 附錄B 圖1a

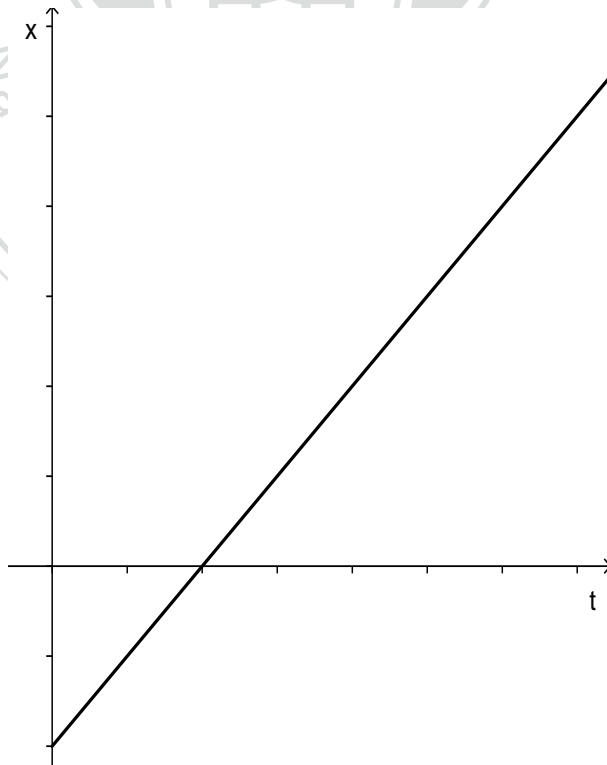




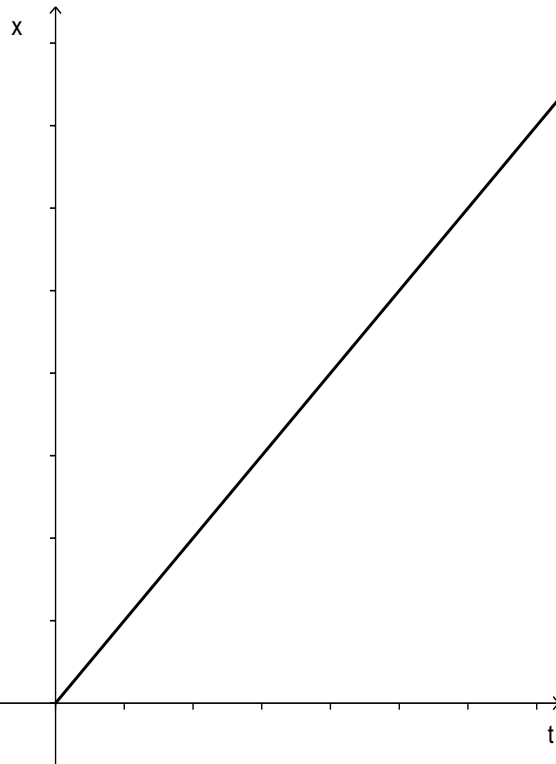
附錄B 圖1-1



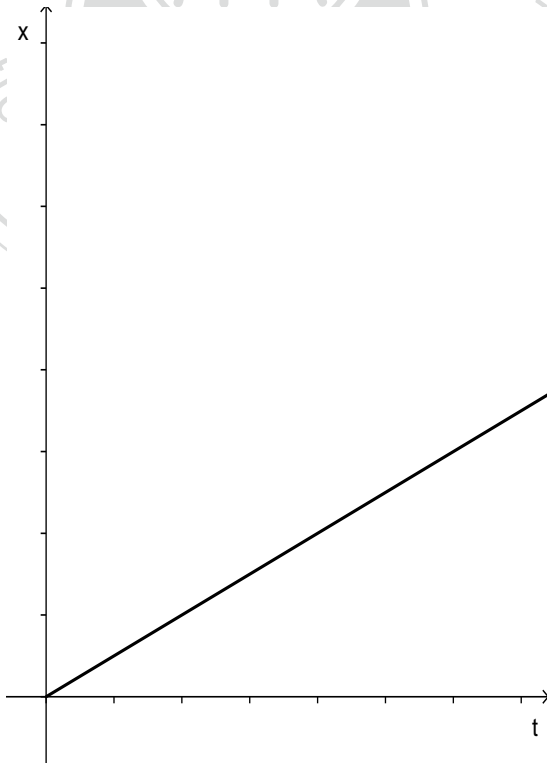
附錄B 圖1-2



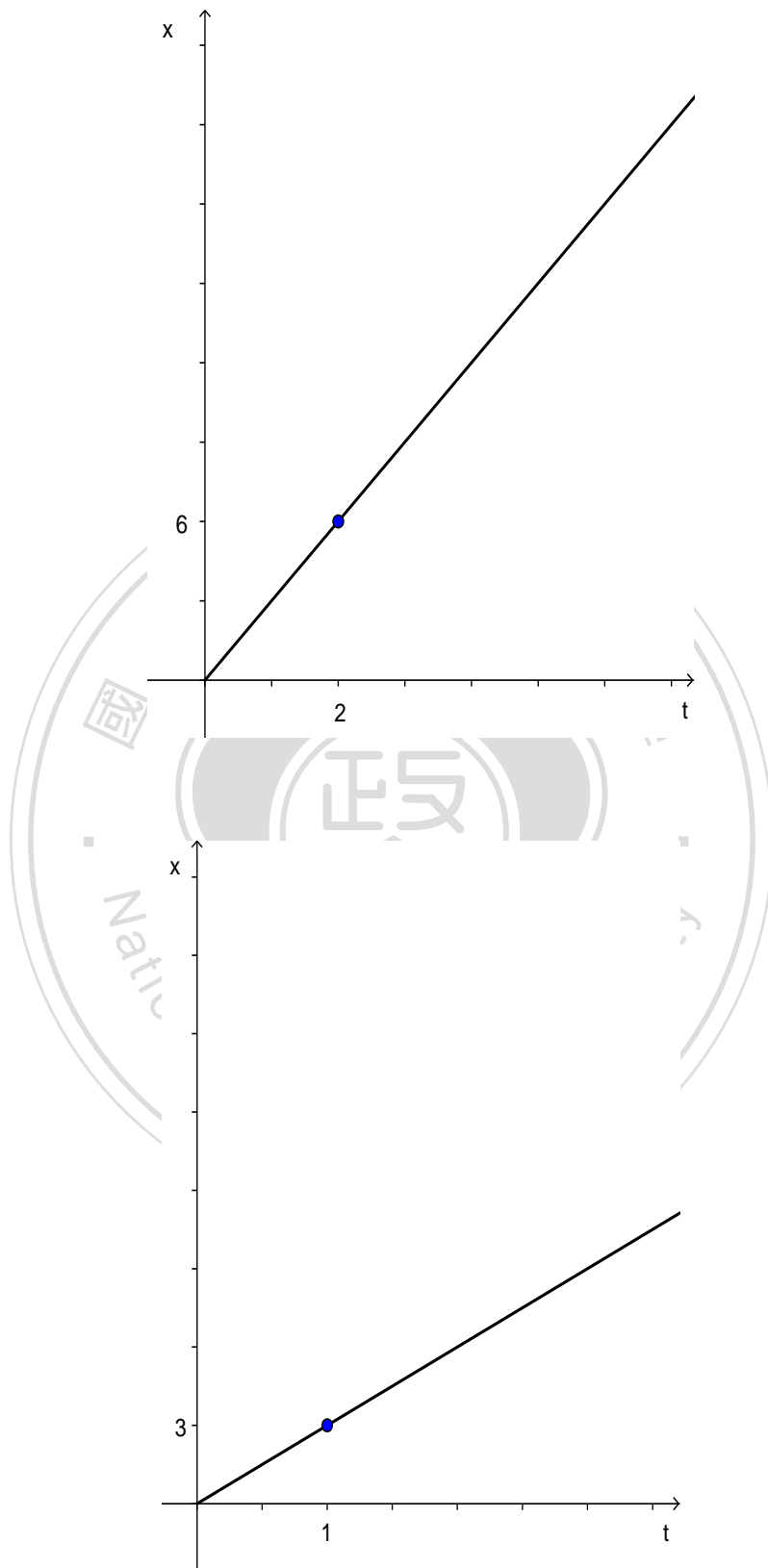
附錄B 圖2-1



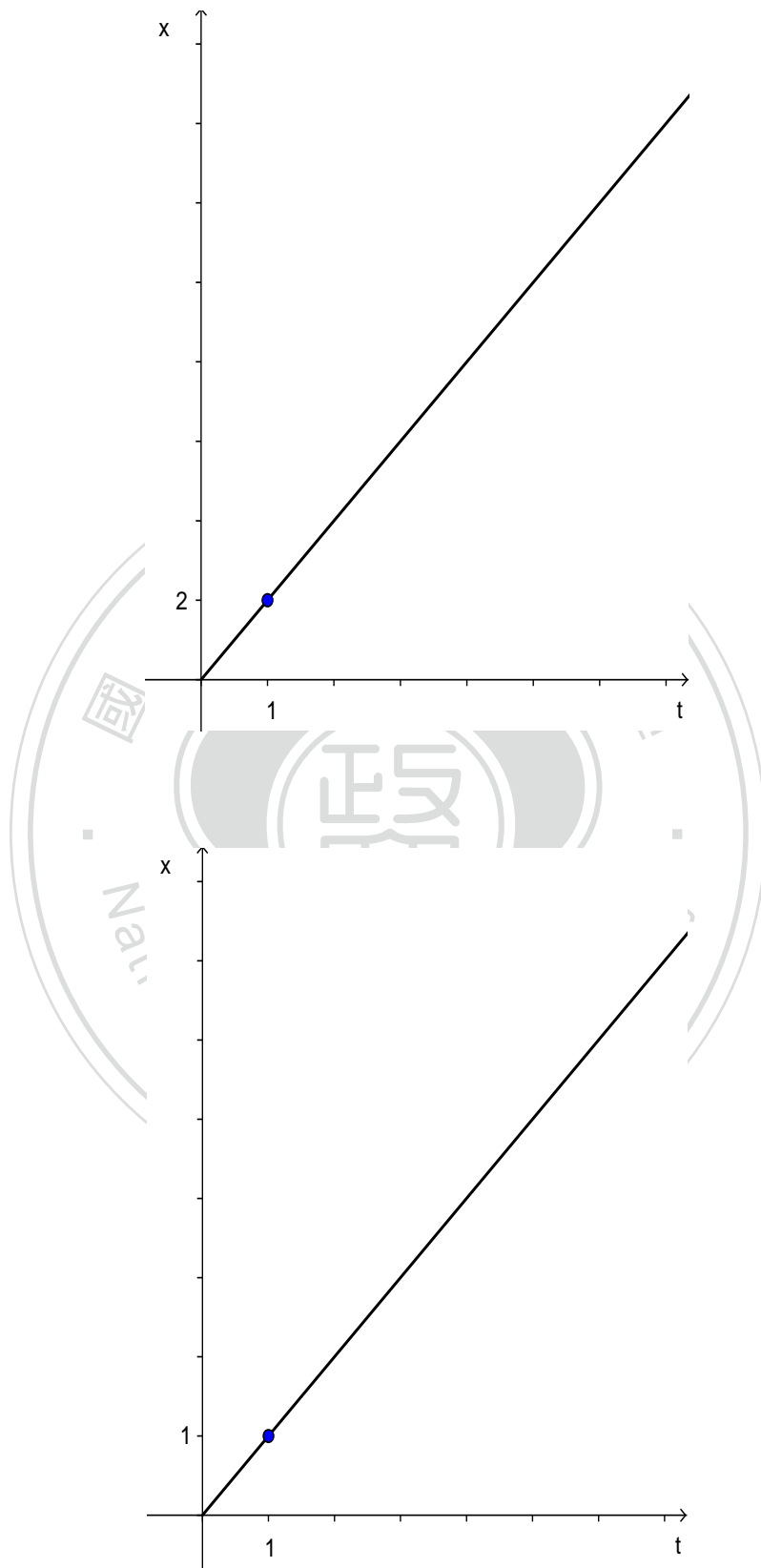
附錄B 圖2-2



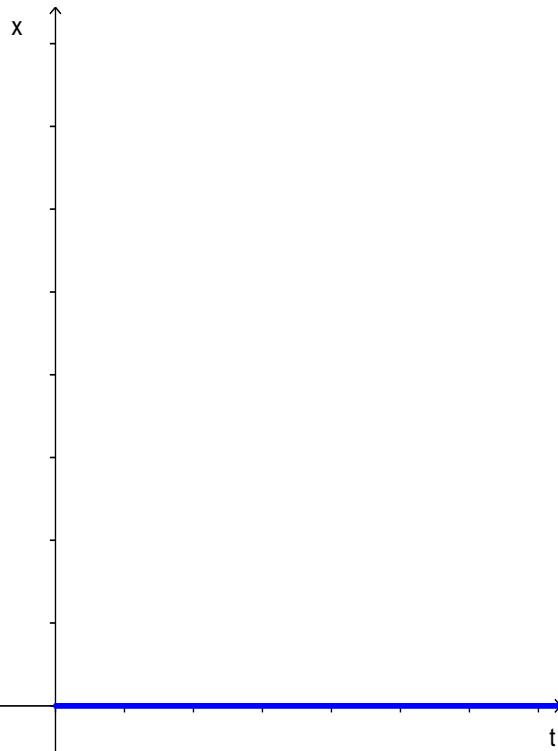
附錄B 圖2-3



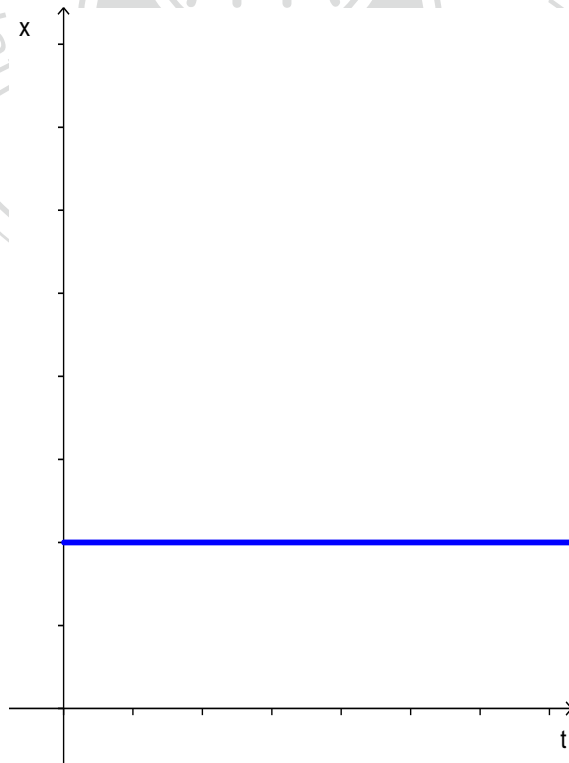
附錄B 圖2-4



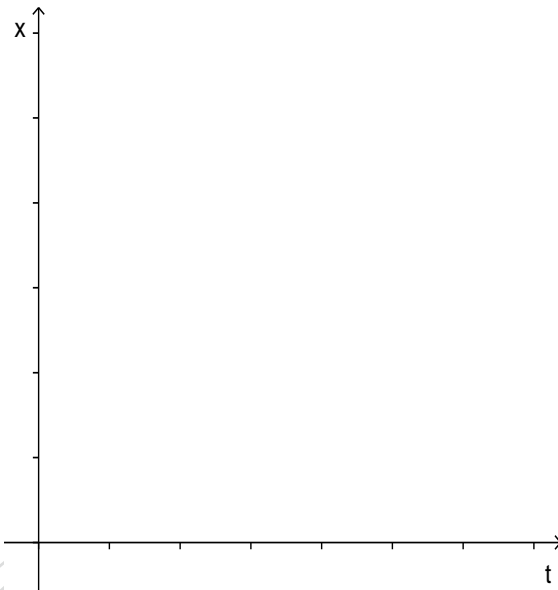
附錄B 圖2-5



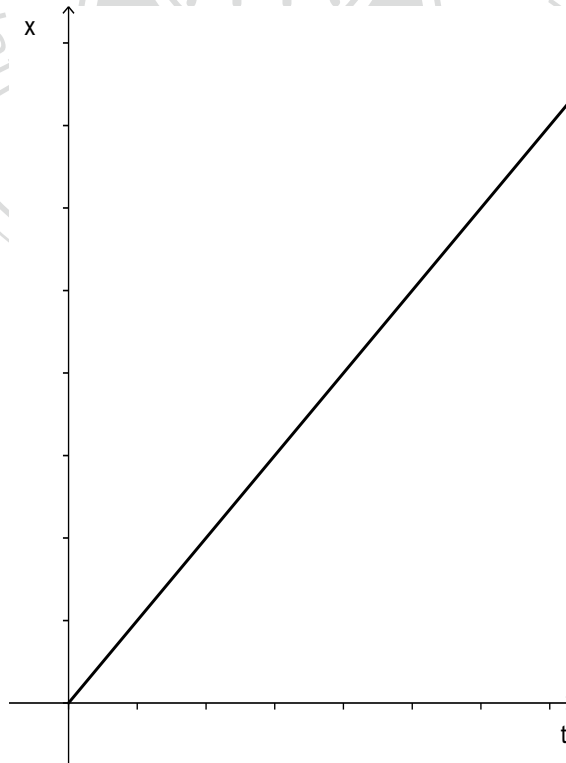
附錄B 圖2-6



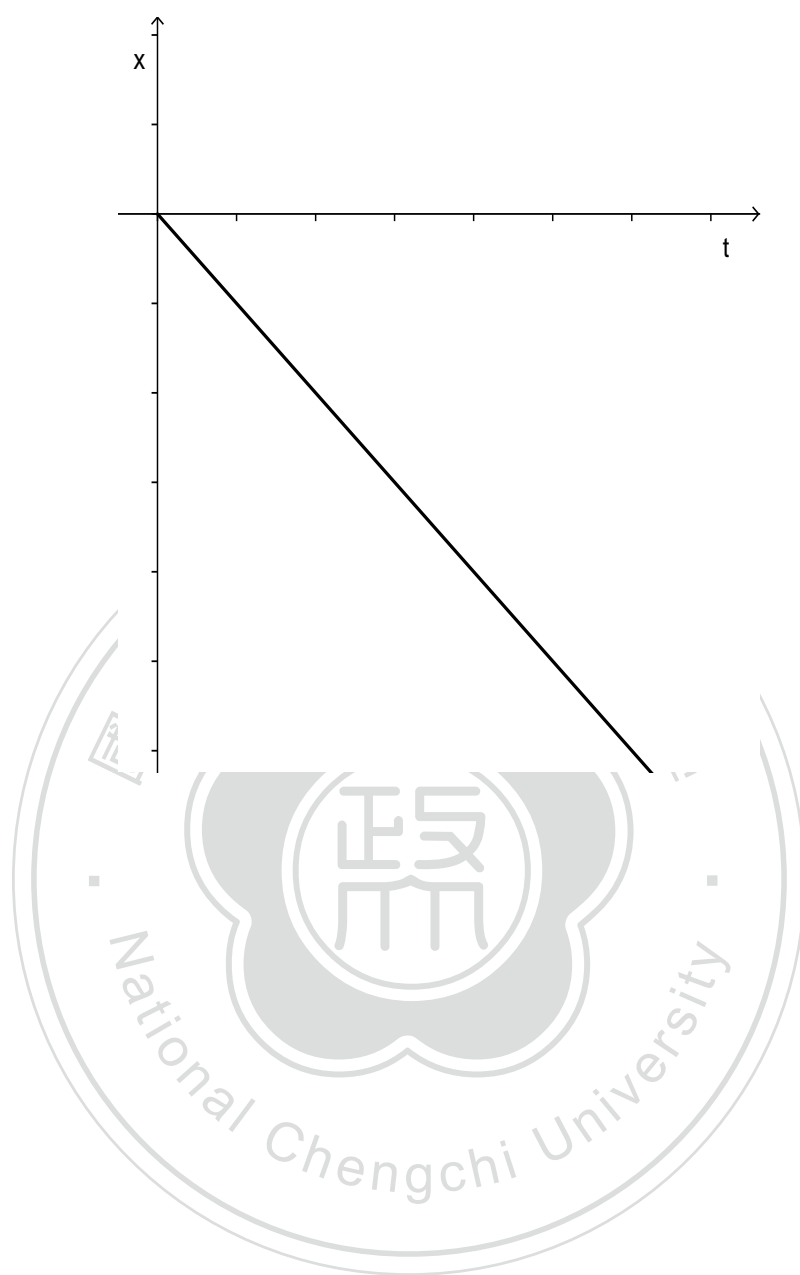
附錄B 圖2-7



附錄B 圖3-1


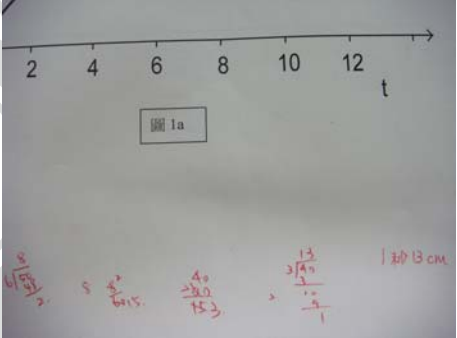
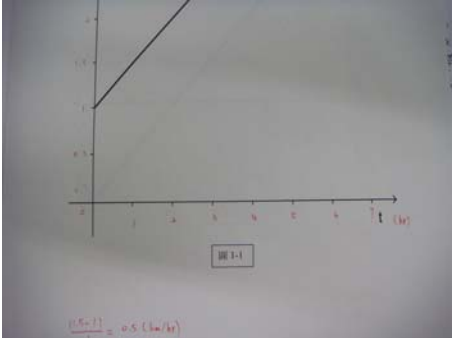


附錄B 圖3-2



附錄 C 訪談文字稿

GH1 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GH1：觀察圖 1。</p> <p>    嗯……！以相同的速度往正方向前進。（同時操作著小汽車）</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GH1：速度沒辦法計算，因為沒有刻度的關係。</p> <p>    （為深入測驗學生是否了解速度概念，以圖 1a 再次確定是否會算速度）</p> <p>GH1：速度是 <math>0.5 \frac{km}{hr}</math>。</p> <p>T：實際上，怎麼做出小汽車速度是 <math>0.5 \frac{km}{hr}</math>？</p> <p>GH1：<math>0.5 \frac{km}{hr} = \frac{2 m}{15 sec} = \frac{200 cm}{15 sec} \doteq \frac{13 cm}{1}</math>，              在地圖上畫出 13 公分的線段，小汽車 1 秒內走完。</p> <p>T：請再詳細說明小汽車的運動。</p> <p>GH1：<u>小汽車從原點出發，並以每秒 13 公分的速度朝正方向前進。</u></p>	<p>操作工具</p>  <p>圖 1a</p> 
<p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GH1：觀察圖 1-1。</p> <p>    小汽車從距離原點 2 個單位的地方出發，以相同的速度往正方向前進。（同時操作著小汽車）</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GH1：速度的話，和圖 1a 一樣，要先標座</p>	<p>圖 1-1</p> 



標的刻度。因為直線的斜率一樣，所以，小汽車以等速度

$$V = \frac{1.5-1}{1} = 0.5 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \text{ 朝正方向前進。}$$

### 圖 1-2

T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：觀察圖 1-2。

小汽車在原點的左邊 2 個單位的地方出發，並以相同的速度朝正方向前進（同時操作著小汽車）。

T：小汽車的速度多快？

$$\text{GH1: } \frac{0 - (-1)}{2} = 0.5 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

（x 軸的單位長為 0.5 公里）

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GH1：小汽車在原點的左邊 1 公里的地方出發，並以每小時 0.5 公里的等速度朝正方向前進。

T：請求出直線的一次函數式？

GH1：嗯...！算出來了，是  $x = 2t + 2$ ；可是，好像不對，等等，（檢查計算過程）。應該是  $x = \frac{1}{2}t + 1$ ，但是起始點

是在原點負向 1 公里處，所以，一

次函數式應該是  $x = \frac{1}{2}t - 1$ 。

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T：請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：觀察圖 2-1、2-2。

因為圖 2-1 的直線比圖 2-2 還斜，所以，圖 2-1 小汽車的速度比圖 2-2 小汽車的速度還快。

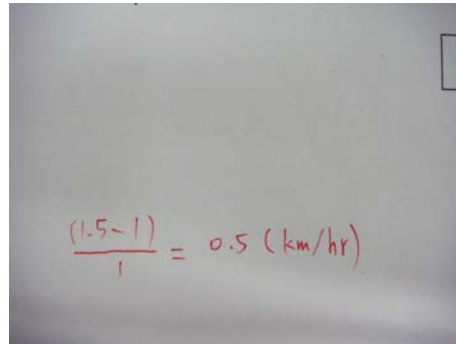


圖 1-2

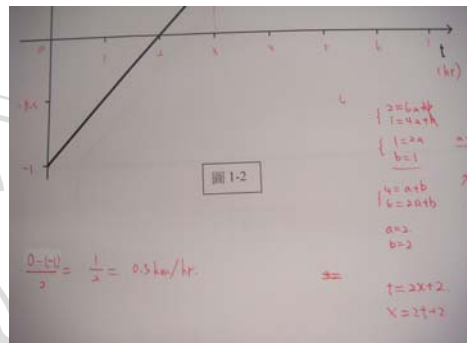
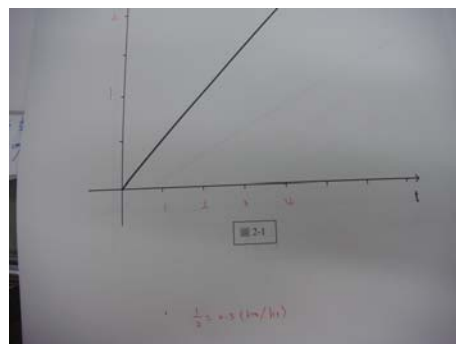


圖 2-1



T：還有別的作法嗎？

GH1：有，用相同時間去比較路程。圖 2-2 得到所走的距離越短，速度當然越慢。可是，刻度也要考慮。若刻度不一樣的兩個圖形，就不能從直線的傾斜程度判斷小汽車運動的快慢。

（為確定，該生是否真的會判斷，故以圖 2-3 測試其速度概念）

圖 2-2

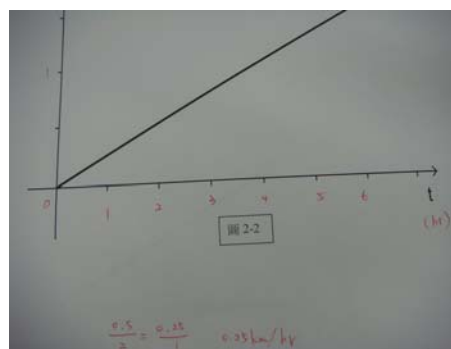


圖 2-3

T：請計算圖 2-3 上、下兩個圖形之速度？

GH1：在圖 2-3 發現，一樣斜度的直線因在不同的座標軸刻度，則速度可能是相同。

圖 2-4（已注意刻度變化，故圖 2-4 省略）

圖 2-5

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T：小汽車的速度、一次函數為何？

GH1：速度的話，因為靜止，所以沒有速度。一次函數是  $x=0$ 。速度為 0，在原點靜止不動，所以，數學式：  
 $x = 0t + 0 \Rightarrow x = 0$

圖 2-6

T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：觀察圖 2-6。小汽車在離原點 1km 處靜止不動。

（x 軸的每個單位長是 0.5km）

T：靜止多久？

GH1：靜止的時間不一定，不清楚多久。

**圖 2-7**

T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：觀察圖 2-7。小汽車離原點負向 1km 處靜止不動。(一個單位長為 0.5km)

T：靜止多久？

GH1：靜止的時間一樣不一定，不清楚有多久。

方向性：


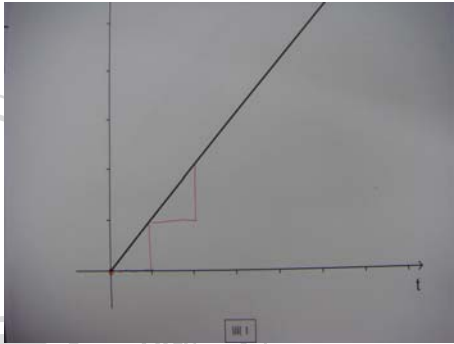
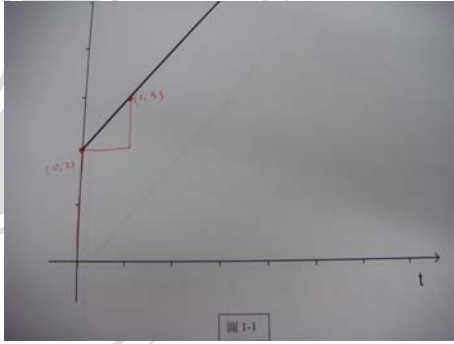
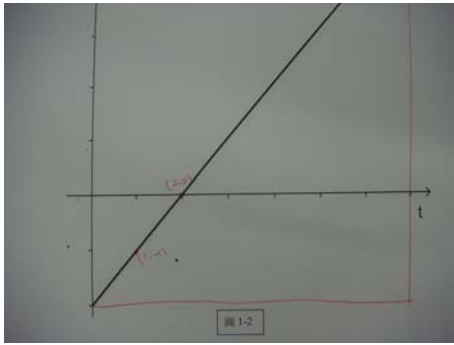
**圖 3-1 & 圖 3-2**

T：請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH1：觀察圖 3-1、3-2。圖 3-1 的小汽車作等速度運動，而圖 3-2 朝負向作等速度運動。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GH1：兩輛小汽車的速度是一樣的，唯有方向相反。也就是說，小汽車以每小時 0.5km 的速度，從原點出發往正方向前進，圖 3-2 則是往負方向前進。

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GH2：觀察圖 1。將小汽車移到原點上，以相同的速度，以 <math>1 \frac{km}{hr}</math> 相同的速度從原點往正方向前進。</p> <p>移動小汽車的方式如下：          往右 1 格，再往上 1 格，依此類推……          （圖 1a 省略，該生是直接爬梯的方式計算）</p>	 <p>圖 1</p> 
<p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GH2：觀察圖 1-1。小汽車從離原點 2 個單位的地方出發，往右 1 格，再往上 1 格……，以相同的速度往正方向前進，走到圖 1-1 直線的終點（操作著小汽車）。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GH2：因為小汽車的移動是往右 1 格，再往上 1 格，所以，速度是 <math>1 \frac{km}{hr}</math>。</p>	<p>圖 1-1</p> 
<p><b>圖 1-2</b></p> <p>T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GH2：觀察圖 1-2。小汽車往右 8 格，再往上走 8 格。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GH2：速度是 <math>1 \frac{km}{hr}</math>。</p> <p>T：請詳細說明小汽車的運動狀態。</p> <p>GH2：小汽車在原點的左邊 2 公里的地方出發，並以每小時 1 公里的等速度朝</p>	<p>圖 1-2</p> 

正方向前進。

T：請求出直線的一次函數式？

GH2： $x = t - 2$

斜率：

**圖 2-1 & 圖 2-2**

T：請從圖 2-1 及圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH2：觀察圖 2-1、2-2。在圖 2-1 的小汽車

往右 7 格，再往上 7 格，以  $1 \frac{km}{hr}$  的

速度朝正方向走。在圖 2-2 的小汽車

往右 7 格，再往上  $3 \frac{2}{3}$  格，以  $\frac{3 \frac{2}{3}}{7} \frac{km}{hr}$

的速度朝正方向前進。

T：還有別的作法嗎？

GH2：以相同時間作比較，圖 2-2 走的距離較短，當然速度比較慢。也就是相同時間的話，以路程的長短判斷速度的快慢。

T：圖 2-2 的速度呢？

GH2：圖 2-2 的速度要改成  $1 \frac{km}{hr}$ 。

（為確定該受試者是否真的會從圖上計算出速度，故以圖 2-3 測試其速度概念）

**圖 2-3**

T：請從圖 2-3 上、下兩圖，觀察小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH2：在圖 2-3 發現，上、下兩圖的小汽車

速度都是  $3 \frac{km}{hr}$ 。

**圖 2-4 (已利用刻度會計算，故圖 2-4 省略)**

**圖 2-5**

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀

圖 2-1

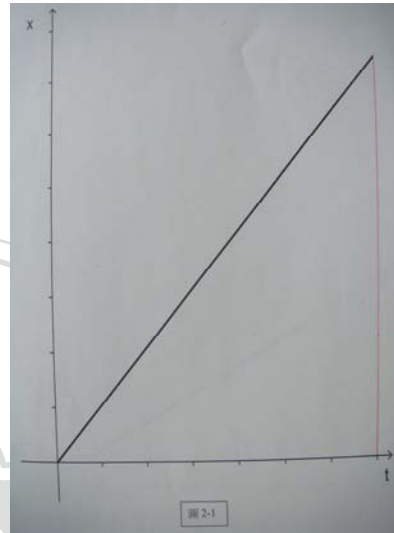
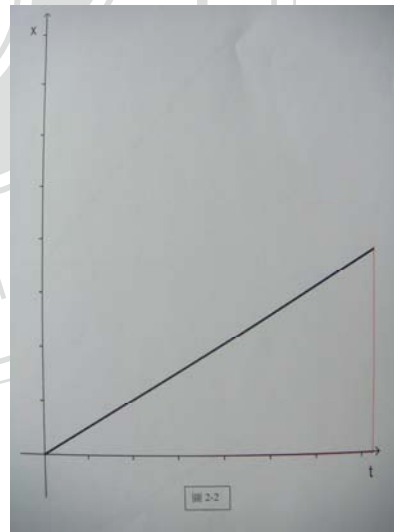


圖 2-2



態，並在地圖上操作。

GH2：觀察圖 2-5。

小汽車在原點不動，速度是 0。

### 圖 2-6

T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH2：觀察圖 2-6。小汽車從離原點 2 格的地方出發，再往右走 7 格，且速度是

$$1 \frac{km}{hr}。$$

### 圖 2-7

T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH2：觀察圖 2-7。小汽車從離原點左邊 2 格的地方出發，再往右走 7 格，且

$$速度是 1 \frac{km}{hr}。$$

方向性：

### 圖 3-1 & 圖 3-2

T：請從圖 3-1 和圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GH2：觀察圖 3-1、3-2（自己先標上刻度）。

圖 3-2 小汽車從原點，往右走 7 格，再往下走 6 格，且兩輛小汽車的速度

$$都一樣是  $\frac{6 km}{7 hr}$ 。$$

T：請再詳細說明小汽車的運動。

GH2：在圖 3-1 的小汽車往右 7 格，再往上

7 格，以  $1 \frac{km}{hr}$  的速度朝正方向走。圖

3-2 小汽車先往右走 7 格，再往下走 6

格，以  $\frac{6 km}{7 hr}$  的速度走。

GM1 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GM1：觀察圖 1。走得越遠，所花的時間越久</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GM1：想一下……，但還是不知道要怎麼算。</p> <p>T：是忘記公式嗎？</p> <p>GM1：是，如果有公式的話，我應該會算。（給該生速度的公式）</p> <p>缺少刻度，自己先標上刻度，所以，小汽車行駛的速度是 <math>1 \frac{km}{hr}</math>。</p> <p>（學生了解速度概念，圖 1a 省略）</p> <p>T：請再詳細說明圖 1 的小汽車之運動。</p> <p>GM1：小汽車從原點出發，並以 <math>1 \frac{km}{hr}</math> 的速度往前走。</p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GM1：觀察圖 1-1。沒有辦法操作小汽車，因為不懂直線與 x(位置)軸交點的意義，可是它似乎影響到小汽車的運動狀態。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GM1：速度的話，因為不懂（手指位置軸的 2）的地方，所以不會算速度。</p> <p><b>圖 1-2</b></p> <p>T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GM1：觀察圖 1-2。</p>	 <p>圖 1-2</p> 

沒有辦法操作小汽車，因為和剛剛一樣。

T：小汽車的速度多快？

GM1：速度的話，因為不懂（手指截距-2）的地方，所以不會算速度，因為距離沒有負的。

T：請求出直線的數學式，也就是線型函數？

GM1：先標上座標的刻度，將 $(0, -2)$ 、 $(2, 0)$ 代入，所以，線型函數是 $x = t - 2$ 。

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T：請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：觀察圖 2-1、2-2。  
速度是一樣的，但是，等到標上刻度後，發現兩速度是不同的，其中，

$$\text{圖 2-1 的速度是 } 2 \div 2 = 1 \left( \frac{\text{km}}{\text{hr}} \right)$$

$$\text{圖 2-2 的速度是 } 2 \div 4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{km}}{\text{hr}} \right)$$

T：剛剛怎麼會認為兩個速度一樣？

GM1：感覺上。

（因為會自行標上刻度，故圖 2-3、2-4 略）

### 圖 2-5

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1：觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T：小汽車的速度、一次函數為何？

GM1：速度的話，因為靜止，所以沒有速度。一次函數是 $x=0$ 。



**圖 2-6**

T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1 : 觀察圖 2-6。小汽車開到離原點 2km 處後，靜止不動。

T : 靜止多久？

GM1 : 不清楚有多久。

**圖 2-7**

T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1 : 觀察圖 2-7。因為距離沒有負的，所以，不知道小汽車怎麼動。

方向性：

**圖 3-1 & 圖 3-2**

T : 請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM1 : 觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車作等速度運動，圖 3-2 因為距離沒有負的，所以不知道如何運動。


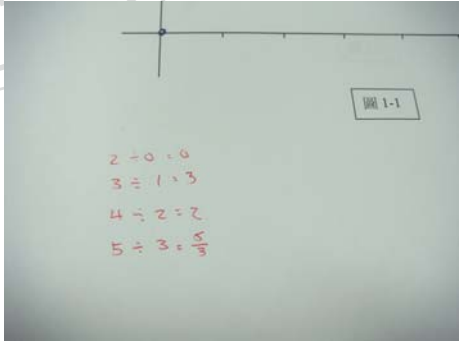
T : 請再詳細說明小汽車的運動。

GM1 : 圖 3-1 的小汽車從原點出發，並以

$1 \frac{km}{hr}$  的速度往前走。

圖 3-2 的小汽車因距離沒有負的，沒辦法知道它的運動情形。

GM2 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GM2：觀察圖 1，小汽車從頭到尾速度都一樣在移動。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GM2：想一下……，不會算。</p> <p>T：怎麼知道從頭到尾的速度都一樣？</p> <p>GM2：利用圖中的訊息，時間每增加一格，距離就會增加 1 格，所以，速度都是 1。</p> <p>（為深入測驗學生是否了解速度概念，以圖 1a 再次確定是否會算速度）</p> <p>GM2：時間往右增加 2，距離增加 1，所以，速度是 <math>1 \div 2 = \frac{1}{2} \frac{km}{hr}</math>。</p> <p>T：請再詳細說明圖 1 的小汽車之運動。</p> <p>GM2：<u>小汽車從基準點出發，並以 <math>1 \frac{km}{hr}</math> 的速度往前開。</u></p>	
<p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GM2：觀察圖 1-1。</p> <p>將截距看成小汽車與基準點的距離，但不是正方向，而是 45 度角的方向。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GM2：速度的話，因為小汽車從距離基準點 2 個單位長出發，要算的話，速度會有改變</p> <p><math>2 \div 0 = 0</math></p> <p><math>3 \div 1 = 3</math></p> <p><math>4 \div 2 = 2</math></p>	<p>圖 1-1</p> 

$$5 \div 3 = \frac{5}{3}$$

速度會越來越慢，所以，小汽車從距離基準點 2 個單位長出發，速度越越來越慢，直到直線的終點為止。

### 圖 1-2

T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM2：觀察圖 1-2。

小汽車從基準點下方 2 個單位的地方出發，且速度是等速度前進。等等，速度是有改變的.....

利用距離除以時間，得到速度：

$$1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$2 \div 4 = \frac{1}{2}$$

：

所以，小汽車的速度越來越慢，從基準點下方 2 個單位長的地方出發，直到直線的終點才停止。

T：請求出直線的數學式，也就是一次函數？

GM2：先標上座標的刻度，將  $(0, -2)$ 、 $(2, 0)$

代入，所以，線型函數是  $x = t - 2$ 。

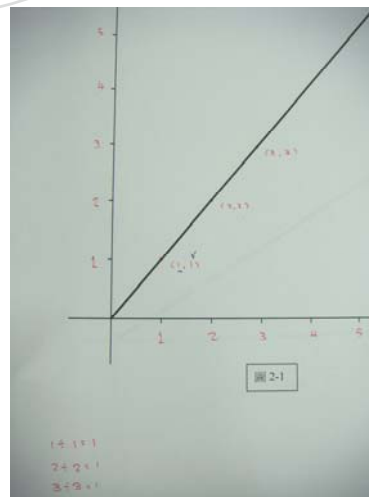
### 斜率：圖 2-1 & 圖 2-2

T：請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM2：觀察圖 2-1、2-2。

各自以相同的等速度前進，但是，等到標上刻度後，發現兩速度是不同的，其中，小汽車在圖 2-1，以速

圖 2-1



度  $2 \div 2 = 1 \left( \frac{km}{hr} \right)$  朝正方向前進；在

圖 2-2 以速度  $2 \div 4 = \frac{1}{2} \left( \frac{km}{hr} \right)$  朝正方向前進，比較起來圖 2-2 的小汽車比較慢。

T：速度是用算的嗎？

GM2：也可以不用算，相同的時間只要比較不同的距離就可以比較快慢。

（自己會標刻度，故圖 2-3、圖 2-4 省略）

### 圖 2-5

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM2：觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T：小汽車的速度、一次函數為何？

GM2：因為靜止，就是沒有動，速度是 0，一次函數是  $x=0$ 。

### 圖 2-6

T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM2：觀察圖 2-6。小汽車開到離原點 2km 處後，每個時間的速度都不一樣。

分別是：

$$2 \div 1 = 2$$

$$2 \div 2 = 1$$

$$2 \div 3 = \frac{2}{3}$$

∴

### 圖 2-7

T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM2：觀察圖 2-7。因為距離沒有負的，所以，不知道小汽車怎麼動。

方向性：

圖 2-2

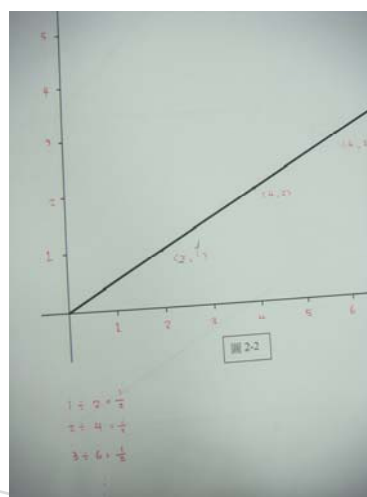
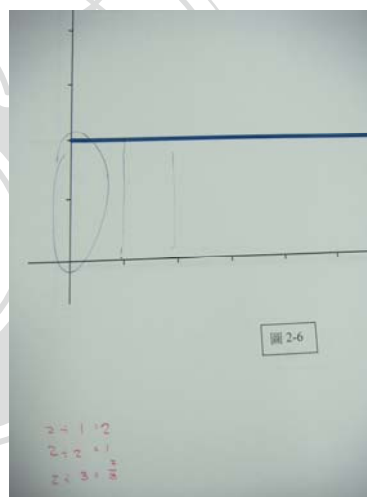


圖 2-6



**圖 3-1 & 圖 3-2**

T : 請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GM2 : 觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車作等速度運動，圖 3-2 因為距離沒有負的，不清楚小汽車要怎麼開。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

GM2 : 圖 3-1 的小汽車是從基準點出發，

並以每秒  $1 \frac{km}{hr}$  的速度往前開。

圖 3-2 的小汽車，因為距離沒有負的，就不清楚小汽車是如何開的。



GL1 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GL1：觀察圖 1。就是小汽車從紅點開始，一直加速朝右方開車。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GL1：感覺上是加速前進，越來越快，位置軸每增一個單位，速度就加快一個單位。</p> <p>T：請再詳細說明圖 1 的小汽車之運動。</p> <p>GL1：<u>小汽車是從紅點開始作加速運動，位置每增加一個單位，速度也隨之增加一個單位。</u></p> <p>（學生直覺上，認為位置增加，則速度也會增加，圖 1a 省略）</p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GL1：<u>觀察圖 1-1 後，在 x 軸上標上起始點 2，小汽車從地圖上距離紅點 2 單位長的地方出發，且直線往上走，速度會越來越快。</u></p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GL1：速度的話，位置軸每增一個單位，速度就加快一個單位。</p> <p><b>圖 1-2</b></p> <p>T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GL1：觀察圖 1-2 後，<u>在紅點下方 2 公里出發</u>，然後，小汽車的速度會越來越快。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>GL1：速度的話，位置軸每增一個單位，速</p>	<p>操作工具</p> 

度就加快一個單位。

T：請求出直線的數學式，也就是一次函數？

GL1：不會算。

斜率：

### **圖 2-1 & 圖 2-2**

T：請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：觀察圖 2-1、2-2。

其中，

$$\text{圖 2-1 的速度是 } 7.5 \div 7 = \frac{7.5}{7} \left( \frac{\text{km}}{\text{hr}} \right)$$

$$\text{圖 2-2 的速度是 } 4 \div 7 = \frac{4}{7} \left( \frac{\text{km}}{\text{hr}} \right)$$

比較起來圖 2-2 加快的速度比較慢。

(為確定，該生是否真的會從圖上計算出速度，故以圖 2-3 測試其速度概念)

### **圖 2-3**

GL1：加快速度都是 3。

T：請解釋什麼是加快速度都是 3？

GL1：就是越來越快，每次加快 3 公里。

(圖 2-4，省略)

### **圖 2-5**

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：觀察圖 2-5。小汽車在地圖上從紅點向右移動。

T：一次函數為何？

GL1：一次函數是  $x=0$ 。

### **圖 2-6**

T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：觀察圖 2-6。小汽車從離紅點 2 個單

位處後，再向右方前進 7 個單位，速度不會算。

**圖 2-7**

T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：觀察圖 2-7。小汽車從離紅點下方 2 個單位處後，再向右方前進 7 個單位，速度不會算。

方向性：

**圖 3-1 & 圖 3-2**

T：請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL1：觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車因直線往上，故在加速前進。圖 3-2 因為直線往下，所以小汽車是做煞車的動作，位置每減少一個單位，速度也隨之減少一個單位。


T：請再詳細說明小汽車的運動。

GL1：圖 3-1 因為直線往上，所以小汽車是從紅點開始作加速運動，位置每增加一個單位，速度也隨之增加一個單位。

圖 3-2 因為直線往下，所以小汽車是從紅點作煞車運動，位置每減少一個單位，速度也隨之減少一個單位。



GL2 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GL2：觀察圖 1 後，不會開小汽車。</p> <p>T：不會開是因為？</p> <p>GL2：感覺上是相同速度前進，不知道速度多少？</p> <p>T：是忘記公式嗎？</p> <p>GL2：是，如果有公式的話，我應該會算。 (給該生速度的公式) 可以算出過原點的圖形的速度。</p> <p>T：請再詳細說明圖 1 的小汽車之運動。</p> <p>GL2：<u>小汽車從原點出發，並以 <math>1 \frac{km}{hr}</math> 的速度往右方向走。</u> (因受試者 GL2 會自行標刻度，圖 1a 略)</p>	
<p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GL2：觀察圖 1-1 後，小汽車從地圖上距離紅點 2 單位長的地方出發，速度是 <math>\frac{3}{2}</math>、<math>\frac{4}{3}</math>、<math>\frac{5}{4}</math>.....，會越來越慢到速度是 0。</p> <p>T：小汽車的速度怎麼算？</p> <p>GL2：用座標軸的刻度相除得到的，比如說，當 <math>x=2</math>，對到的是 <math>t=1</math>，所以，距離除以時間就是速度了。</p>	<p>圖 1-1</p> 
<p><b>圖 1-2</b></p> <p>T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>GL2：觀察圖 1-2 後，將小汽車移到原點下</p>	

方 2 個單位處出發，然後，因為距離沒有負的，所以，要取絕對值，速度算出來是正的。

在 t 軸下方的速度都固定是 1，但到了 t 軸上方的速度則會改變，而且是越來越快。

T : 請求出直線的數學式，也就是線型函數？

GL2 : 忘記，不會算。

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T : 請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL2 : 觀察圖 2-1、2-2。

其中，

圖 2-1 的速度是  $1 \left( \frac{km}{hr} \right)$

圖 2-2 的速度是  $\frac{1}{2} \left( \frac{km}{hr} \right)$

圖 2-2 的小汽車比圖 2-1 的小汽車還慢，從算的算出速度，就可以比較。所以，在圖 2-1 小汽車從原點出發，速度是每小時 1 公里；另外，在圖 2-2 小汽車從原點出發，速度是每小時 0.5 公里。

(該生不受到直線傾斜度影響，故圖 2-3&2-4 省略)

### 圖 2-5

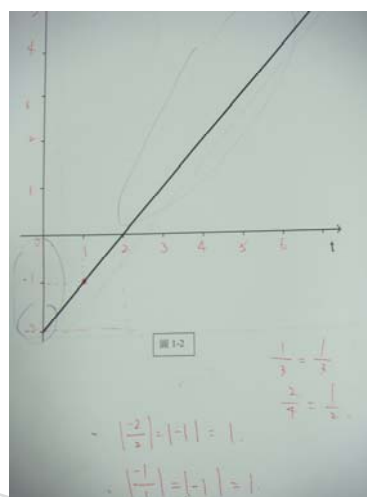
T : 請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL2 : 觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點上沒有移動。

T : 一次函數為何？

GL2 : 這比較簡單，一次函數是  $x=0$ 。

圖 1-2



**圖 2-6**

T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL2 : 觀察圖 2-6。小汽車有移動，且速度是 2 的往右前進。

**圖 2-7**

T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

GL2 : 觀察圖 2-7。小汽車有移動，且速度是  $|-2| = 2$  往右前進。

方向性：

**圖 3-1 & 圖 3-2**

T : 請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。


GL2 : 觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車作等速度運動，速度是  $1 \left( \frac{km}{hr} \right)$  前進。  
圖 3-2 因為距離沒有負的，所以取絕對值，故以  $1 \left( \frac{km}{hr} \right)$  的速度往前開。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

GL2 : 圖 3-1 小汽車從原點出發，並以  $1 \frac{km}{hr}$  的速度往右方向走。

圖 3-2 小汽車從原點出發，以  $1 \left( \frac{km}{hr} \right)$  的速度往前開。

BH1 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BH1：觀察圖 1。 小汽車以相同的速度向東前進。（同時操作著小汽車）</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BH1：速度沒辦法計算，因為沒有刻度的關係。</p> <p>（為深入測驗學生是否了解速度概念，以圖 1a 再次確定是否會算速度）</p> <p>BH1：速度是 <math>1 \frac{km}{hr}</math>。</p> <p>T：請再詳細說明小汽車的運動。</p> <p>BH1：<u>小汽車從原點出發，並以每小時 1 公里的速度向東前進。</u></p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BH1：觀察圖 1-1。 <u>小汽車從離原點 2 個單位長的地方移動，以相同的速度往東前進。</u> （同時操作著小汽車）</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BH1：先標座標的刻度。時間每增加 1 個單位，小汽車就向東移動 1 個單位長。小汽車的速度是每小時 1 公里。</p> <p><b>圖 1-2</b></p> <p>T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BH1：觀察圖 1-2。 小汽車在原點的負向 2 個單位的地方出發，並以相同的速度向東前進（同</p>	<p>操作工具</p> 

時操作著小汽車)。

T : 小汽車的速度多快?

BH1: 時間每增加 1 個單位, 小汽車就向東移動 1 個單位長。小汽車的速度是每小時 1 公里。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

BH1: 小汽車在原點的負向 2 公里的地方出發, 並以每小時 1 公里的等速度向東前進。

T : 請求出直線的一次函數式?

BH1: 算出來了, 是  $x = t - 2$  。

斜率:

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T : 請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態, 並在地圖上操作。

BH1: 觀察圖 2-1、2-2。

因為圖 2-1 的直線比圖 2-2 還斜, 所以, 圖 2-1 小汽車的速度比圖 2-2 小汽車的速度還快。

或是用相同時間去比較所走的距離。

圖 2-2 發現移動距離越少, 速度越小。

但要考慮刻度, 若刻度不一樣的兩個圖形, 就不能從直線的傾斜程度判斷小汽車運動的快慢。

(為確定, 該生是否真的會判斷, 故以圖 2-3 測試其速度概念)

### 圖 2-3

T : 請計算圖 2-3 上、下兩個圖形之速度?

BH1: 圖 2-3 得到, 一樣斜度的直線受到不同的座標軸刻度可能速度會是相同的。

圖 2-4 (已注意刻度變化, 故圖 2-4 省略)

### 圖 2-5

T : 請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH1 : 觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T : 小汽車的速度、一次函數為何？

BH1 : 因為靜止，速度為 0。一次函數式  $x=0$ 。

### 圖 2-6

T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH1 : 觀察圖 2-6。小汽車在離原點 2km 處靜止不動。

T : 靜止多久？

BH1 : 視 t 軸決定。

### 圖 2-7

T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH1 : 觀察圖 2-7。小汽車離原點負向 2km 處靜止不動。

T : 靜止多久？

BH1 : 視 t 軸決定。

方向性：

### 圖 3-1 & 圖 3-2


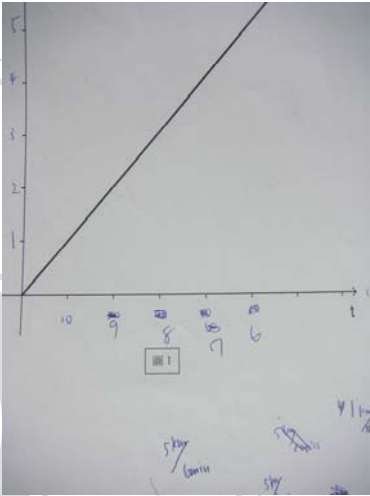
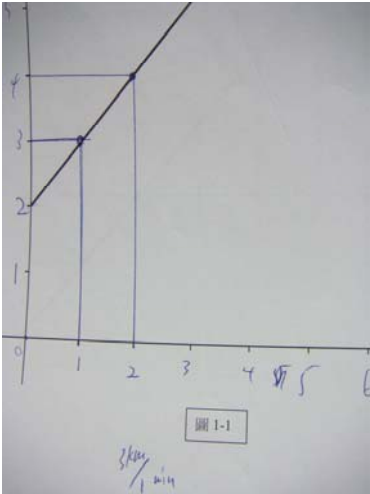
T : 請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH1 : 觀察圖 3-1、3-2。圖 3-1 的小汽車作等速度運動，而圖 3-2 向西作等速度運動。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

BH1 : 兩台小汽車的速度一樣，也都是從原點出發，方向相反。

BH2 原案

口語資料	操作工具
<p>截距：</p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BH2：觀察圖 1。將小汽車放到原點上，以<u>越來越快的速度往北方前進</u>。</p> <p>T：速度是多少呢？</p> <p>BH2：<math>\frac{1 \text{ km}}{10 \text{ min}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}</math>（自己標座標刻度）            每分鐘 100 公尺的速度            等一下，速度應該是 <math>\frac{5 \text{ km}}{6 \text{ min}}</math>            所以，速度是越來越快</p> <p>T：速度為什麼從 <math>\frac{1 \text{ km}}{10 \text{ min}}</math> 變成 <math>\frac{5 \text{ km}}{6 \text{ min}}</math></p> <p>BH2：我是看最後一個刻度的。            （刻度標錯，以圖 1a 檢驗是否會計算速度）</p> <p><b>圖 1a</b></p> <p>BH2：t 軸單位是 min、x 軸單位是 km            小汽車速度是  <math>\frac{2 \text{ km}}{4 \text{ min}} = \frac{3 \text{ km}}{6 \text{ min}} = \frac{500 \text{ m}}{1 \text{ min}}</math>，            以 1 分鐘 500 公尺等速度前進。</p> <p>T：回到圖 1，所以小汽車在圖 1 的運動情形請再詳細說明。</p> <p>BH2：小汽車從原點以每分鐘 1 公里的速度開車，往北方走。</p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BH2：觀察圖 1-1。小汽車從離原點 2km 的</p>	<p>操作工具</p>  <p>圖 1</p>  <p>圖 1-1</p> 

地方出發，它的速度是每分鐘 3km，感覺怪怪的，……，好像算不出來。然後，又變成每分鐘走 2km，應該是越來越慢。

### 圖 1-2

T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH2：觀察圖 1-2。小汽車一樣的從原點出發，速度從  $\frac{2 \text{ km}}{4 \text{ min}} = 500 \frac{\text{m}}{\text{min}}$  變成

$\frac{3 \text{ km}}{5 \text{ min}} = 600 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ，速度越來越快

T：請問前 20 分鐘的速度呢？

BH2：距離沒有負的，取絕對值就可以了。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BH2：小汽車從離原點南方 2km 出發，速度

從  $\frac{2 \text{ km}}{4 \text{ min}} = 500 \frac{\text{m}}{\text{min}}$  變成

$\frac{3 \text{ km}}{5 \text{ min}} = 600 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ，越來越快的向北開。

T：請求出直線的一次函數式？

BH2：把點代入求，可以求出  $x = t - 2$

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T：請從圖 2-1 及圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

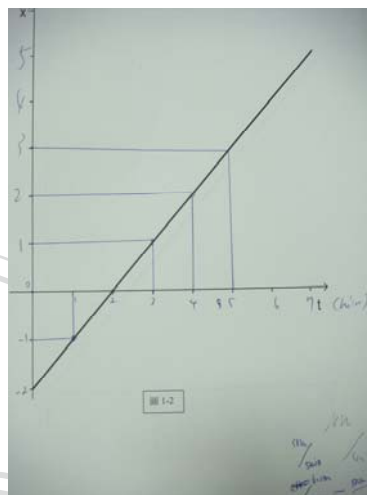
BH2：觀察圖 2-1、2-2。在圖 2-1 的小汽車以等速度朝北方向前進。在圖 2-2 的小汽車以等速度朝北方前進，且速度比圖 2-1 的慢。

T：為什麼比較慢？

BH2：因為相同距離，圖 2-2 所花的時間變長。

（沒有注意刻度對圖形之影響，速度隨之會

圖 1-2





有所改變，故測驗圖 2-3)

### 圖 2-3

T : 圖 2-3 的上、下兩圖，何者較快？

BH2 : 和剛剛的圖形一樣，所以上圖會比較快，以相同時間走較少的路，那速度就越慢。

未注意刻度改變，再測驗圖 2-4

### 圖 2-4

BH2 : 這張的話，連同直線與 t 軸的夾角都一樣，但速度是不一樣的。所以，刻度的改變會造成速度的影響，也就是直線的傾斜程度，即使斜度一樣，仍有可能速度不同，除非是在相同的座標軸上，才可以利用直線的傾斜程度比較快慢。

### 圖 2-5

T : 請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH2 : 觀察圖 2-5。小汽車在原點靜止不動。

### 圖 2-6

T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH2 : 觀察圖 2-6。小汽車在原點北方 2 個單位的地方，就像是待在新家不動。

### 圖 2-7

T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BH2 : 觀察圖 2-7。小汽車在原點下方 2 個單位的地方，換到另一個新家不動。

方向性：

### 圖 3-1 & 圖 3-2

T : 請從圖 3-1 和圖 3-2 觀察出小汽車實際

的運動狀態，並在地圖上操作。


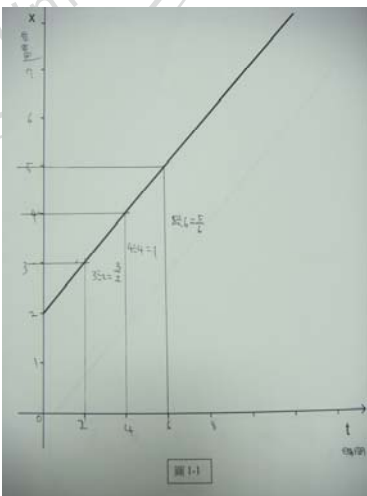
BH2：觀察圖 3-1、3-2。圖 3-2 的小汽車是  
從原點開始向南邊倒車。

T：請再詳細說明小汽車的運動。

BH2：在圖 3-1 的小汽車以  $1 \frac{km}{min}$  的速度朝北  
方前進。圖 3-2 小汽車從原點以每分鐘  
100 公尺的速度倒退。（單位換算）



BM1 原案

口語資料	操作工具
<p>截距：</p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BM1：<u>觀察圖 1。從原點出發，隨意的擺放小汽車後，開始朝右方移動。</u></p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BM1：(計算中.....，並在 t 軸旁邊寫時間，x 軸旁邊寫位置) 沒有刻度，不知道要怎麼算。</p> <p>(為深入了解學生是否了解速度概念，圖 1a 再次確定是否會計算速度)</p> <p>BM1：速度是 <math>3 \div 6 = 2 \div 4 = \frac{1}{2} \left( \frac{km}{hr} \right)</math>。</p> <p>T：請再詳細說明圖 1 的小汽車之運動。</p> <p>BM1：<u>小汽車從原點出發，並以每秒 <math>\frac{1}{2} \frac{km}{hr}</math> 的速度往前開。</u></p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BM1：觀察圖 1-1。 (未先操作小汽車，而是先計算速度)</p> <p>T：請再詳細說明圖 1-1 小汽車之狀態</p> <p>BM1：<u>小汽車從是離原點 2 個單位的地方出發，因為是直線的 x-t 圖，所以是等速度的前進。可是，算出來的速度卻是 <math>\frac{3}{2} \rightarrow \frac{4}{4} \rightarrow \frac{5}{6} \rightarrow \dots</math></u> <u>好像速度越來越慢，慢到小汽車自己停下來，不是等速度運動。</u> (操作小汽車)</p>	<p>操作工具</p>  <p>圖 1-1</p> 

### 圖 1-2

T : 請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 觀察圖 1-2。

我想一下.....，(先標刻度)

小汽車從原點後面 2 公里的地方出發。

T : 小汽車的速度多快？並請詳細說明小汽車的運動。

BM1 : 從頭到尾都是用一樣的速度。 求它的速度，要先把 t 軸上的原點往下移到 -2 的地方，讓 -2 變成原點；再來，速度就是和之前的一樣，

$$1 \div |-2| = 2 \div |-4| = 3 \div |-6| = \frac{1}{2} \left( \frac{km}{hr} \right)$$

小汽車以每小時 2km 的速度前進。

T : 請求出直線的一次函數式？

BM1 : 先標上座標的刻度，將 (0, -2)、(2, 0)

代入，所以，線型函數是  $x = t - 2$ 。

T : 請解釋小汽車與一次函數式

BM1 : 不太了解

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T : 請從圖 2-1&圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 觀察圖 2-1、2-2。

速度是一樣的，但是，等到標上刻度後，發現兩速度是不同的，其中，

$$\text{圖 2-1 的速度是 } 2 \div 2 = 1 \left( \frac{km}{hr} \right)$$

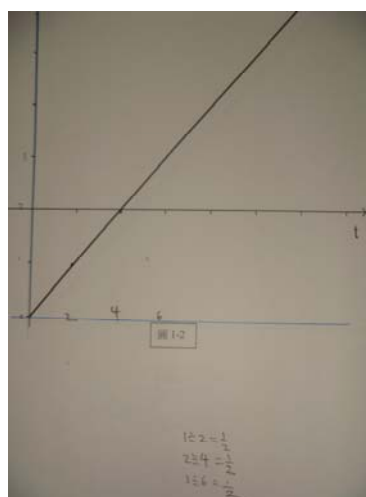
$$\text{圖 2-2 的速度是 } 1 \div 4 = \frac{1}{4} \left( \frac{km}{hr} \right)$$

T : 剛剛怎麼會認為兩個速度一樣？

BM1 : 改變刻度的話，有可能讓兩個速度一樣。

故圖 2-3、圖 2-4 省略

### 圖 1-2



**圖 2-5**

T : 請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T : 小汽車的速度、一次函數為何？

BM1 : 因為是靜止，所以沒有速度。  
一次函數是  $x=0$ 。

**圖 2-6**

T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 觀察圖 2-6。小汽車在離原點上方 2km 處不動。

T : 多久？

BM1 : 應該是很久。

**圖 2-7**

T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 觀察圖 2-7。小汽車在離原點下方 2km 處不動。

方向性：

**圖 3-1 & 圖 3-2**

T : 請從圖 3-1、圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM1 : 觀察圖 3-1、3-2。圖 3-1 的小汽車作等速度運動，圖 3-2 因為距離沒有負的，所以取絕對值。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

BM1 : 小汽車在圖 3-1 從原點出發，並以

$$\frac{1}{2} \frac{km}{hr} \text{ 的速度往前開。}$$

小汽車在圖 3-2 是從原點出發，以

$$\frac{1}{2} \frac{km}{hr} \text{ 的速度往前開。}$$

T : 這兩輛小汽車都是往前開，而且根據你

標示的刻度，所計算出兩輛小汽車的速度也都一樣，那爲什麼圖形會長得不一樣？


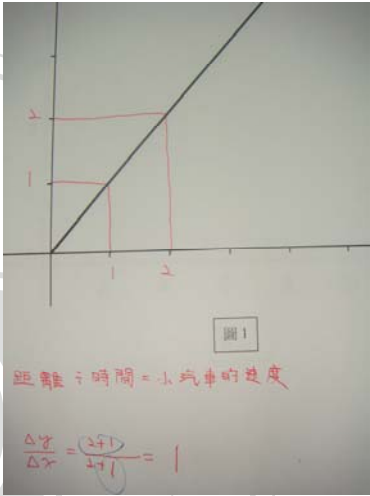
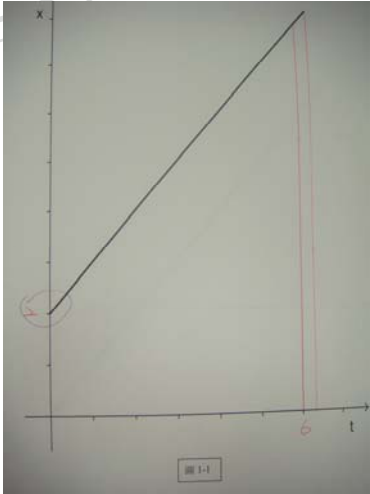
BM1：我覺得一個是車頭往前開，另一個是車尾往前開。

T：也就是，你認爲圖 3-2 的小汽車倒著前進嗎？

BM1：是阿。



BM2 原案

口語資料	計算過程
<p>截距：</p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BM2：觀察圖 1，不懂問題，請再說一次。</p> <p>T：從圖 1，將小汽車實際在地圖的操作一次。</p> <p>BM2：想一下……，並先標上刻度。然後，小汽車在原點出發，以固定的速度，車頭朝斜上方前進。</p> <p>T：斜上方是指什麼意思？</p> <p>BM2：就是車頭轉到直線的方向。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BM2：利用斜率，找到 <math>\frac{7}{7}=1</math>，且每一個時刻算出來都是 1，所以，速度是 1。</p> <p>T：怎麼知道斜率就是速度？</p> <p>BM2：因為直線的斜率為 x 軸的改變量除以 t 軸的改變量，和速度的概念一樣，速度是位置的改變量除以時間的改變量。所以，直線的斜率就是小汽車的速度。</p> <p>所以小汽車的速度 <math>\frac{2+1}{2+1}=1</math></p> <p>T：請再詳細說明小汽車的運動。</p> <p>BM2：小汽車自原點出發，以固定的速度，車頭延直線方向前進，以每小時 1 公里的速度前進。</p> <p>(學生了解斜率、速度概念，省略圖 1a)</p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BM2：觀察圖 1-1。</p>	<p>計算過程</p>  <p>圖 1</p>  <p>圖 1-1</p> 

先在直線起點，即  $x$  軸上標出 2， $t$  軸接近直線終點的處標上 6。

小汽車從離原點 2 個單位的地方出發，然後再向右轉 45 度角，以小於  $\frac{1}{3} \left( \frac{km}{hr} \right)$  的速度開車。

T : 小汽車的速度為什麼小於  $\frac{1}{3} \left( \frac{km}{hr} \right)$  ?

BM2 : 因為時間比 6 還多一點點。

### 圖 1-2

T : 請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM2 : 觀察圖 1-2。(先標刻度)

現在  $t$  軸上標 2、7； $x$  軸上標 -2、5；所以，距離是 7....、時間是 7....，速度就是 1....，比 1 還大

T : 請實際操作小汽車

BM2 : 小汽車從離原點下方 2 個單位的地方出發，轉成和直線一樣的方向，開到  $t$  軸為 2 的地方後，速讀越來越快。

T : 為什麼？

BM2 : 因為速度從負的變成正的。

T : 請求出直線的一次函數？

BM2 : 先標上座標的刻度，將  $(0, -2)$ 、 $(2, 0)$

代入，所以，線型函數是  $x = t - 2$ 。

T : 請解釋小汽車的運動與一次函數的關係。

BM2 : 不知道，好像沒學過。

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T : 請從圖 2-1 和圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM2 : 觀察圖 2-1、2-2。

看圖可知，小汽車從原點出發，且圖 2-2 的速度比圖 2-1 的慢，朝正方向

圖 1-2

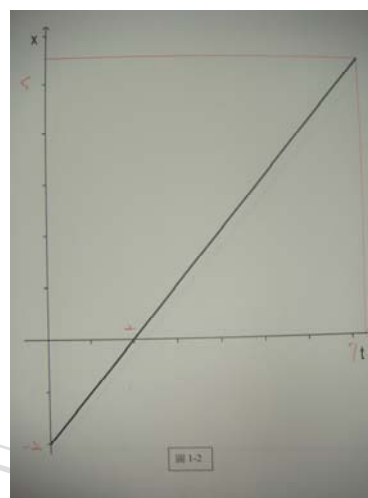
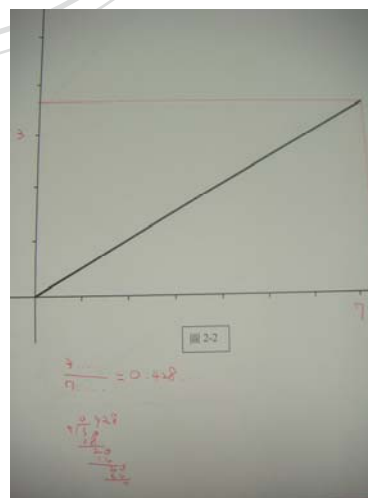


圖 2-2





前進。

T : 圖 2-1 和圖 2-2 中的小汽車之速度？

BM2 : 在圖 2-1, 小汽車的速度是  $\frac{7}{7}=1$  ;

在圖 2-2, 小汽車的速度是

$$\frac{3. \dots}{7. \dots} = 0.428$$

T : 有其他的方法算嗎？

BM2 : 像上次一樣, 比直線斜度, 越斜越快。

(速度概念是以直線終點來計算, 雖然是比較慢, 但算出每點的速度是錯的, 故圖 2-3、4 省略)

### 圖 2-5

T : 請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態, 並在地圖上操作。

BM2 : 觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T : 小汽車的速度、一次函數為何？

BM2 : 因為算出速度是  $\frac{0}{7}=0$ , 所以小汽車不動。一次函數是  $x=0$ 。

### 圖 2-6

T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態, 並在地圖上操作。

BM2 : 小汽車從原點出發到 2 公里處, 以  $\frac{2}{7. \dots}$  的速度抵達, 再向右轉 90 度後, 靜止不動。

### 圖 2-7

T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態, 並在地圖上操作。

BM2 : 觀察圖 2-7。小汽車從原點往後退 2 公里, 以  $\left| \frac{-2}{7. \dots} \right|$  的速度抵達, 再向右轉 90 度後, 靜止不動。

圖 2-5

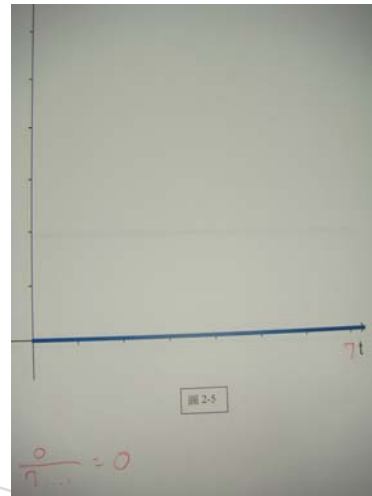


圖 2-6

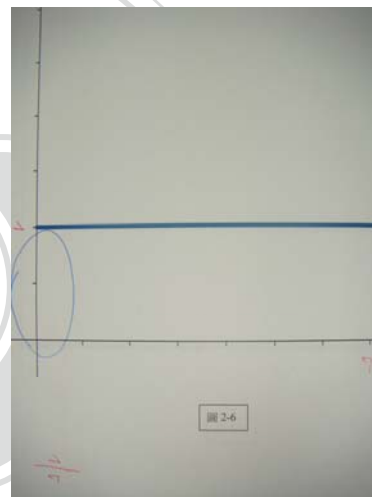
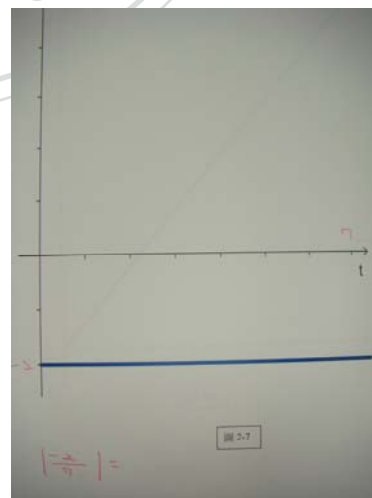


圖 2-7



方向性：

**圖 3-1 & 圖 3-2**

T：請從圖 3-1 和圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BM2：觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車就是先前的圖 1-1。圖 3-2 因為距離沒有負的，所以取絕對值，然後小汽車從原點出發，以大約每小時 1 公里的速度，朝直線的方向前進。

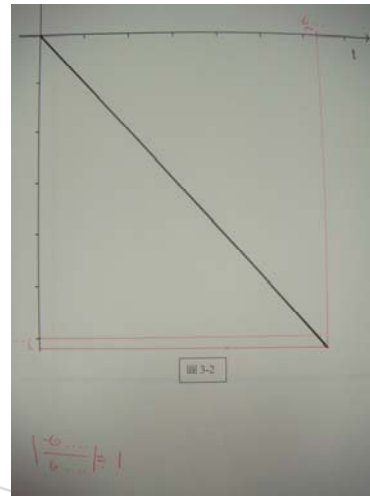
T：請再詳細說明小汽車的運動。

BM2：圖 3-1 小汽車自原點出發，以固定的速度，車頭延直線方向前進。


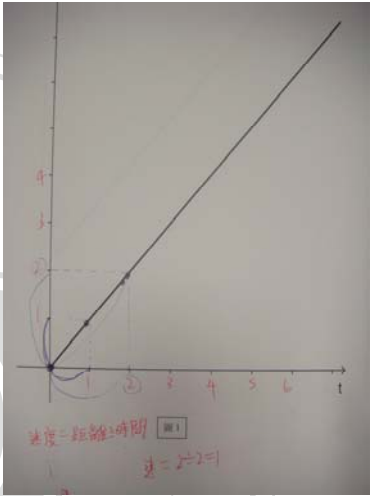
圖 3-2 小汽車從原點出發，以大約每小時 1 公里的速度，朝直線的方向前進。

速度是  $\left| \frac{-6}{6} \right| \doteq 1 \left( \frac{km}{hr} \right)$ ，因為 t 軸比 x 軸多一些，所以速度是未滿 1。

圖 3-2



BL1 原案

口語資料	操作工具
<p>截距：</p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BL1：觀察圖 1，不太清楚老師說的，可以再說一次嗎？</p> <p>T：從圖 1，將小汽車實際在地圖的操作一次。</p> <p>BL1：標上刻度後，小汽車在原點出發，直的、斜的、橫的開車都可以，並以<u>等速度爬坡的方式開車</u>。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BL1：速度是 <math>2 \div 2 = 1 \left( \frac{km}{hr} \right)</math>。</p> <p>T：請再詳細說明小汽車的運動。</p> <p>BL1：小汽車在原點出發，直的、斜的、橫的開車都可以，並以每小時 1 公里的等速度爬坡的方式開車。</p> <p>（學生了解速度概念且會標座標刻度，故省略圖 1a）</p>	 <p>圖 1</p> 
<p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BL1：觀察圖 1-1。</p> <p>小汽車從離原點任意方向的 2 公里處出發，以爬坡的方式前進，所以速度會越來越慢。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BL1：從一開始 <math>3 \div 1 = 3</math></p> $7 \div 5 = 1 \frac{2}{5}$ <p>到 <math>8 \div 6 = 1 \frac{2}{6}</math>，速度變慢，但沒有停止</p> <p>⋮</p>	

### 圖 1-2

T : 請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1 : 觀察圖 1-2。(先標刻度)

T : 請實際操作小汽車

BL1 : 小汽車開到原點下方 2km 處，然後以等速度前進，行進的方式是先往右走 7 格，再往上 7 格。

T : 小汽車的速度多快？

BL1 :  $\frac{7}{7} = 1 \left( \frac{km}{hr} \right)$

T : 請求出直線的一次函數？

BL1 : 一次函數式  $x = t - 2$ 。

斜率：

### 圖 2-1 & 圖 2-2

T : 請從圖 2-1 和圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1 : 觀察圖 2-1、2-2。

小汽車從原點出發，做出兩個爬坡動作，皆朝正方向爬坡前進。

T : 圖 2-1 和圖 2-2 中的小汽車之速度？

BL1 : 很簡單，不用算也知道。

T : 不用算，也可以得到嗎？

BL1 : 當然可以，爬的坡越陡速度就越慢。

### 圖 2-3

T : 請比較圖 2-3 的上、下兩個圖的小汽車之快慢。

BL1 : 一樣阿，小汽車在上圖的速度比下圖的速度慢。

(未確定學生受到直線傾斜度的影響固再以圖 2-4 中兩條一樣高的直線檢測)

### 圖 2-4

T : 請比較圖 2-4 的上、下兩個圖的小汽車之快慢。

BL1：高度一樣，所以速度是一樣快的。

(學生受到視覺的影響，認為直線越陡速度越快)

### 圖 2-5

T：請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1：觀察圖 2-5。小汽車在地圖上的原點靜止不動。

T：小汽車的速度、一次函數為何？

BL1：因為算出速度是 0，所以小汽車不動。  
一次函數是  $x=0$ 。

### 圖 2-6

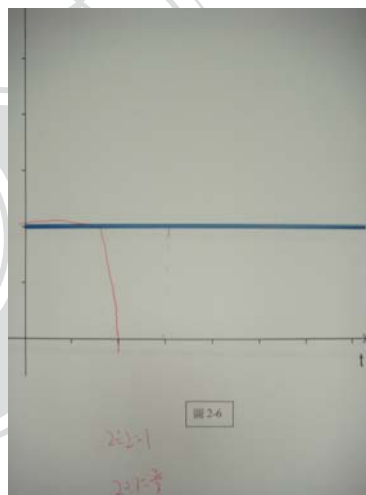
T：請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL1：小汽車從離原點 2 公里向右出發，且速度越來越慢。

T：那是多少呢？

BL1：速度從  $2 \div 2 = 1$  到  $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ ，往後越慢，但不會停止。

圖 2-6



### 圖 2-7

T：請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

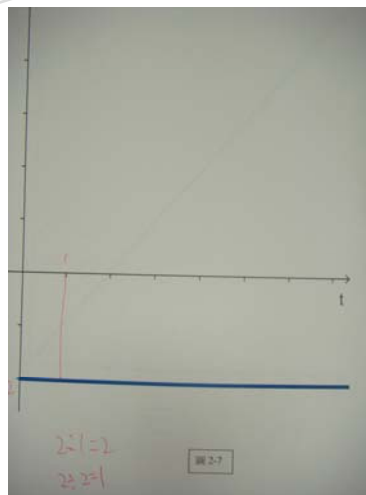
BL1：觀察圖 2-7。小汽車從離原點下方 2 公里向右出發，速度越來越慢的方式前進。

方向性：

### 圖 3-1 & 圖 3-2

T：請從圖 3-1 和圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

圖 2-7



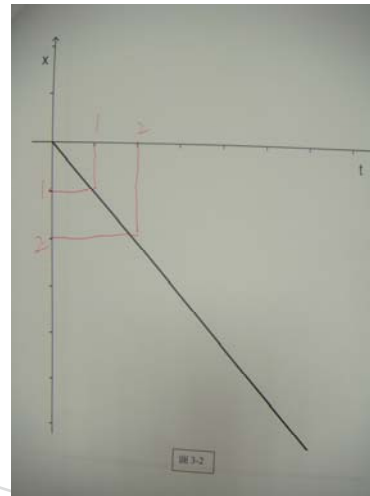
BL1：觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-1 的小汽車就是先前的圖 1-1。圖 3-2 小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的速度，任意方向的下坡前進。

T：請再詳細說明小汽車的運動。


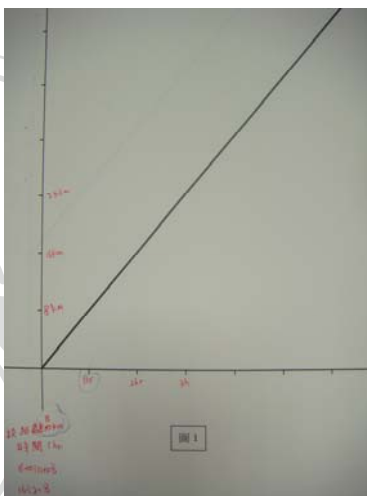
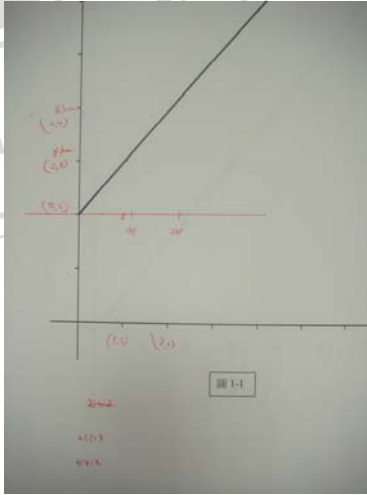
BL1：圖 3-1 的小汽車在原點出發，直的、斜的、橫的、或縱的開車都可以，並以每小時 1 公里的等速度前進。

圖 3-2 的小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的速度，任意方向的下坡前進。

圖 3-2



BL2 原案

口語資料	操作工具
<p><b>截距：</b></p> <p><b>圖 1</b></p> <p>T：請從圖 1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BL2：觀察圖 1，標上刻度。(x 軸是以 8 公里為 1 單位、t 軸是以 1 小時為單位) 小汽車在原點出發，直直的朝正向開車。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BL2：速度是每小時 8 公里。</p> <p>T：請再詳細說明小汽車的運動。</p> <p>BL2：小汽車在原點出發，並以每小時 8 公里的速度，直直的朝正向開車。 (底下省略一次函數的題目) (學生了解速度概念，省略圖 1a)</p> <p><b>圖 1-1</b></p> <p>T：請從圖 1-1 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BL2：觀察圖 1-1。 先標刻度，把 t 軸平移上來。然後，小汽車從原點的地方出發，速度是以越來越慢的方式前進。</p> <p>T：小汽車的速度多快？</p> <p>BL2：小汽車的速度是</p> $3 \div 1 = 3$ $4 \div 2 = 2$ <p>⋮</p> <p>一直變慢，但不會停。</p> <p><b>圖 1-2</b></p> <p>T：請從圖 1-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。</p> <p>BL2：觀察圖 1-2。</p>	<p>操作工具</p>  <p>圖 1</p>  <p>圖 1</p>  <p>圖 1-1</p>

先標刻度，把  $t$  軸平移下來。然後，小汽車是以往後退的方式運動，且速度漸漸變慢行駛。

T : 小汽車的速度是多少？

BL2 : 小汽車的速度是

$$-2 \div 2 = -1$$

$$-1 \div 3 = -\frac{1}{3}$$

⋮

一直變慢，但不會停。

斜率：

**圖 2-1 & 圖 2-2**

T : 請從圖 2-1 和圖 2-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL2 : 觀察圖 2-1、2-2。

小汽車從原點出發，圖 2-2 的速度和圖 2-1 的速度一樣，朝正方向前進。

T : 圖 2-1 和圖 2-2 的小汽車之速度為多少？

BL2 : 在圖 2-1，圖 2-2 的小汽車的速度都是每小時 8 公里。

T : 不用算的也可以得到嗎？

BL2 : 我都要用算的，因為刻度可以改變。

(因學生不受直線傾斜程度所影響，故 2-3&2-4 省略)

**圖 2-5**

T : 請從圖 2-5 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL2 : 觀察圖 2-5。小汽車在地圖上從原點往右開車。

T : 小汽車的速度、一次函數為何？

BL2 : 因為算出速度是 0，但不會算一次函數，應該是  $x=vt$ ， $t=0$  代入，這樣算吧。

圖 1-2

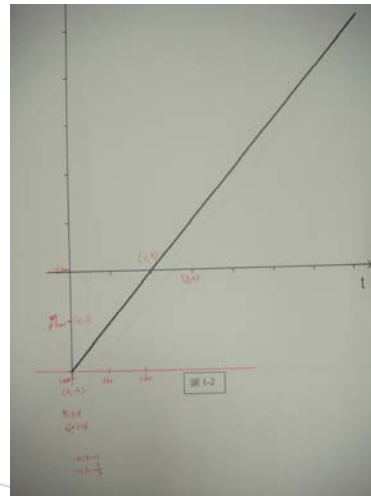
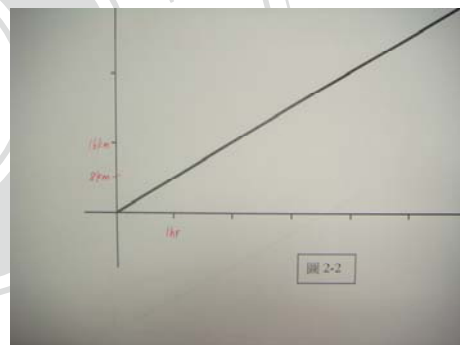


圖 2-2





**圖 2-6**

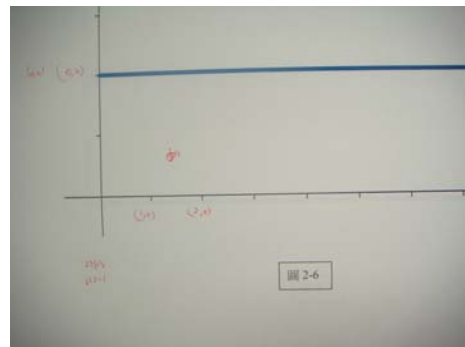
T : 請從圖 2-6 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL2 : 小汽車從離原點 2 公里向右出發，且速度越來越慢。

T : 那是多少呢？

BL2 : 速度從  $2 \div 1 = 2$  到  $2 \div 2 = 1$ ，往後越慢，但不會停止。

**圖 2-6**



**圖 2-7**

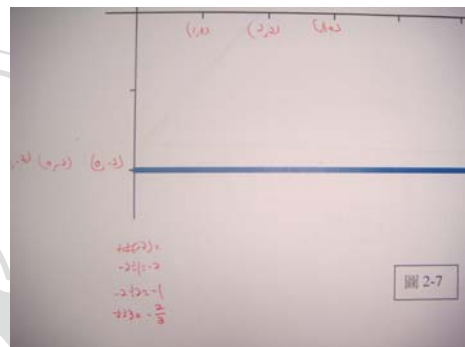
T : 請從圖 2-7 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

BL2 : 觀察圖 2-7。小汽車從離原點下方 2 公里向右出發，速度越來越慢的方式往後開。

T : 那是多少呢？

BL2 : 速度從  $-2 \div 1 = -2$  到  $-2 \div 2 = -1$ ，再變成  $-2 \div 3 = -\frac{2}{3}$ ，往後越慢，但也是不會停止。

**圖 2-7**



方向性：

**圖 3-1 & 圖 3-2**

T : 請從圖 3-1 和圖 3-2 觀察出小汽車實際的運動狀態，並在地圖上操作。

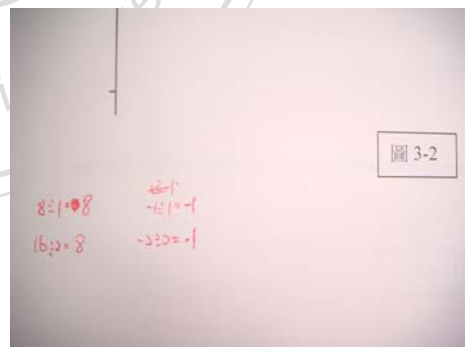
BL2 : 觀察圖 3-1、圖 3-2。圖 3-2 小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的等速度往後退。

T : 請再詳細說明小汽車的運動。

BL2 : 圖 3-1 小汽車在原點出發，直直的朝正向開車，並以等速度每小時 8 公里前進。

圖 3-2 小汽車從原點出發，以每小時 1 公里的等速度往後退。

**圖 3-2**



## 參考文獻

### 中文文獻

- 王淵智(2005)。多元表徵課程對國小四年級學童分數學習成效之實驗研究。國立高雄師範大學科學教育研究所碩士論文。全國博碩士論文，093NKNU0332091。
- 余文卿、謝暉光譯(1997)。牛頓數學辭典。台北：牛頓出版社。
- 物理大辭典(1974)。人文出版社編輯委員會。臺中市：人文。
- 李如斌(2002)。國中學生「速度概念」之學習狀況分析研究。國立高雄師範大學物理系碩士論文。全國博碩士論文，091NKNU0198051。
- 李素卿譯(2003)。認知心理學(M.W.Eysenck & M.T.Keane)。台北：五南。
- 李伯黍等譯(2003)。Arthur S. Reber(1940)原著。心理學辭典(Psychology Dictionaries)。台北：五南。
- 吳昭容(1992)。圖形結構特性與數量化歷程。國立台灣大學心理學研究所碩士論文。全國博碩士論文，074NTU02071013。
- 吳連鴻(2003)。國小學童速度概念的試題編製與分析之研究。臺中師範學院數學教育學系在職進修教學碩士論文。全國博碩士論文，092NTCT1480001。
- 洪木利(1983)。兒童重力概念之研究。高雄師範學院學報，183-199。
- 洪健寶(2005)。小學四、五年級學生以斜率瞭解二元一次方程式代數與圖形表徵之可行性。國立彰化師範大學數學系所碩士論文。全國博碩士論文，093NCUE5479011。
- 徐文鈺(1992)。圖示策略訓練課程對國小五年級學生的數學應用題解題能力與錯誤類型之影響。國立臺灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。全國博碩士論文，080NTNU2328004。
- 郭生玉(1990)。心理與教育測驗。台北：精華書局。
- 許良榮(1996)。圖形與科學課文學習關係的探討，教育研究資訊，4(4)，121-131。
- 陳秋萍(2004)。以 TUG-K 測驗探討國三學生讀運動學圖形的表現。國立臺灣師範大學科學教育研究所在職進修碩士論文。全國博碩士論文，093NTNU5231014。
- 陳勇全(2000)。三至八年級學生對牛頓第二運動定律相關概念改變之研究。國

- 立高雄師範大學/物理學系碩士論文。全國博碩士論文，088NKNU0198002。
- 陳美月（2002）。台北市國民小學中年級兒童對物體運動快慢與力之間的概念分析研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，090NTPTC476009。
- 常雲惠譯（2008）。休伊特(Paul G. Hewitt), 蔡坤憲著。觀念物理 I 牛頓運動定律·動量。台北：天下。
- 教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程綱要。台北市：教育部。
- 教育部（2004）。國民教育階段九年一貫課程。取自  
<http://teach.eje.edu.tw/9CC/index.php>。
- 張惠博（1986）。國中學生應用基礎的函數概念於物理實驗數據處理能力之研究。教育學院學報，11，493-523。
- 張春興（1994）。教育心理學。台北：東華。
- 張欣怡（1997）。地球科學不同課文表徵教材對學習表現之研究。國立臺灣師範大學科學教育所碩士論文。
- 彭聃齡、張必隱（2000）。認知心理學。台北：東華。
- 廖鴻禧（2003）。中小學生等速度運動概念學習研究—變速度運動之自我協調法。國立臺灣師範大學物理研究所碩士論文。全國博碩士論文，091NTNU0198034。
- 楊振寧（1995）。讀書教學再十年。台北：時報文化出版企業有限公司。
- 楊宗達（2001）。國小學童對「密度」相關概念理解之研究：數學與科學的對話。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。全國博碩士論文，089NTPTC476035。
- 劉秋木（1996）。國小數學科教學研究。台北：五南。
- 蔡枚芳(1999)。兒童牛頓第二運動定律相關次概念之研究。國立高雄師範大學物理研究所碩士論文。087NKNU0198010。
- 蔣治邦（1994）。由表徵的觀點探討新教材數與計算活動的設計。載於台灣省國民學校教師研習會主編，國民小學數學科新課程概說（低年級），60-76頁。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 鄭如芬（2002）。國中學生在力學課程後對力與運動概念認知之現況調查研究。國立台灣師範大學物理研究所碩士論文。未出版。

- 蔡淑君、段曉林和邱守榕（2006）：數理教師對科學、數學與數理統整的態度與信念。*科學教育學刊*，**14**（5），545-570。
- 蔡淑君（2010）。國中理化老師的數理課程統整觀—信念、認知和實務。國立彰化師範大學科學教育研究所博士論文。未出版。
- 賴燕慶（2006）。科學與數學統整融入國小六年級自然與生活科技學習成效之研究：以「簡單機械」。臺北市立教育大學科學教育研究所碩士論文。全國博碩士論文，095TMTC5231012。
- 錢正之（2003）。方程式定性分析在運動學的教學與研究。*科學教育學刊*，**11**（3），331-350。
- 錢啓華（2004）。國中生對相對運動現象概念認知的探討。國立臺灣師範大學物理研究所碩士論文。全國博碩士論文，092NTNU0198020。
- 鍾瑞珍（2002）。國中生物教師教學表徵與學生學習之關係。國立高雄師範大學科學教育研究所碩士論文。全國博碩士論文，089NKNUN6231009。
- 韓承靜（1998）。創造思考的心智表徵之研究。國立高雄師範大學科學教育研究所碩士論文。全國博碩士論文，086NKNUN3231004。
- 簡順永（2000）。高二學生力概念的運用調查分析。國立台灣師範大學物理學系研究所碩士論文。全國博碩士論文，088NTNU0198011。

#### 英文文獻

- Beicher, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Association of Physics Teachers*, 62(8), 750-756.
- Brasell, H. M. & Rowe, M. B. (1993). Graphing skills among high school physics students. *School Science and Mathematics*, 93(2), 63-69.
- Cross, R. T., & Pitekethly, A. (1988). Speed, education and children as pedestrians : a cognitive change approach to a potentially dangerous naïve concept. *International Journal of Science Education* ,10(5), 531-540.
- Cross, R. T., & Pitekethly, A. (1989). A curriculum model to improve young children's concept to reduce their pedestrian accident vulnerability. *School Science and Mathematics*, 89(4), 285-292.
- Czerniak, C. M., Weber, W. B., Sandmann, A., & Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics integration. *School Science and*

- Mathematics*, 99(8), 421-430.
- Goldberg, Fred M. & Anderson, John H. (1989). Student difficulties with Graphical Representations of Negative Values of Velocity. *The Physics Teacher*, 27(4), 254-260.
- Halloun, I. ,& Hestenes, D. (1985). Common sense concepts about motion. *American Journal of Physics*, 53(11), 1056~1065.
- Hestenes, D., Wells, W. , & Swackhamer, G. (1992). Force concept inventory. *The Physics Teacher*, 30, 141~158.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P.(1992). Learning and teaching with understanding. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, ( pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 189-190). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In Janvier,C.(Ed.), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics*. (pp. 159-195)
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.
- Lillian C. McDermott, Mark L. Rosenquist, and Emily H. van Zee ( 1986 ) . Student difficulties in connecting graphs and physics:Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503~513.
- Matsuda, F. (1994). Concepts about interrelations among duration, distance, and speed in young children. *International Journal of Behavioral Development*, 17(3), 553-576.
- Trowbridge, D. E. & McDermott L. C. (1980). Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension. *American Journal of Physics*, 48(12), 1021-1028.
- William, Z., Tamara, B. & Judit, M.( 2008 ). Reasoning about a graph and a story of everyday motion: How multiple resources mediate shiftion interpretations of line segment. *American Eductional Research Assciation*, 53(11), 24~1065.