On the Extended Tropical Semiring and Tropical Matrix Algebra

擴展型熱帶半環及熱帶矩陣之研究

徐昌祺

June 28, 2010

Abstract

Tropical geometry is the geometry defined on the tropical semiring. Like the classic geometry, we must understand the properties of linear algebra in tropical geometry. In this thesis, we discuss problems of matrix defined on tropical semiring. Though we find that many properties of classic linear algebra can not be applied in tropical matrix, we do can find some similiar properties in the tropical matrix defined on the extended tropical semiring. We introduce the extended tropical semiring constructed by Izhakian, define extended tropical matrix, and discuss the difference between extended tropical matrix, traditional matrix, and standard tropical matrix.

中文摘要

熱帶幾何簡單的說是以熱帶半環爲代數結構所定義出的幾何學。如古典幾何學一樣, 許多情況我們必需熟悉熱帶幾何中線性代數的性質。本篇論文是討論依熱帶半環上矩陣相關的問題。我們發現許多傳統矩陣有的性質在熱帶矩陣並沒有相通的性質, 但如果運用 Izhakian 定義的擴展型熱帶半環, 許多定理就可以有類似傳統矩陣的結果。我們將介紹 Izhakian 的擴展型熱帶半環, 定義擴展型熱帶矩陣, 討論其和傳統矩陣、標準熱帶矩陣之差異, 並探討其基本性質。

目錄

第一章 序論

熱帶幾何是近年來新興的數學分枝，最初討論熱帶半環是發展於計算機科學之理論，但並未成爲計算機科學的主流 [2]。熱帶幾何 [7] 視爲是建立在$\mathbb{T}_0 = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$上，由“$\oplus$”, “$\odot$”這兩個二元運算運算所形成的代數結構。對任何$x, y \in \mathbb{T}_0$，我們定義$x \oplus y = \max\{x, y\}$，$x \odot y = x + y$爲一般實數上的加法。我們可以知道$\oplus, \odot$同時具有結合性與交換性，$-\infty$爲$\oplus$的單位元素，而0爲對應於$\odot$的單位元素， 且$\odot$對$\oplus$有分配律；因此，$(\mathbb{T}_0, \oplus, \odot)$形成一個交換半環。其中，任何$\mathbb{T}_0$中的元素$x, x \neq -\infty$，$-x \odot x = x \odot -x = 0$，$-x$爲其乘法反元素；但是，$\mathbb{T}_0$中之元素，加法反元素往往是不存在的。而除了以$(\mathbb{T}_0, \max, +)$的方式來定義熱帶幾何，也有一派的人使用$(\mathbb{T}_0, \min, +)$ 來定義熱帶幾何。

經過了二十多年的發展，熱帶幾何逐漸地建立了理論的基礎，也解決了一些重要的問題。理論上，我們在代數幾何所發展的性質與結果，在熱帶幾何中應有其相對應的性質與結構，我們可以在熱帶幾何的環境中以不同的觀點來解決問題，再反向推知原本代數幾何中的結果。這也是熱帶幾何慢慢在數學領域中受到重視的原因。例如Mikhalkin [6] 以熱帶幾何的方法計算出在CP^2上，次數爲d，虧格(genus)爲g，通過$3d + g - 1$個點的曲線數目，便是一個重要的貢獻。

以代數的角度來看，熱帶幾何定義在一個可交換的冪等半環 (idempotent semiring)，因此具備了交換代數的性質。仿效傳統的幾何學, 我們自然希望能在熱帶半環上發展完整線性代數的理論。因而近年來，部分的研究焦點亦放在如何仿照傳統線性代數的模式在熱帶幾何這個上建構出相似的理論 [1]。

我們要做線性代數相關問題的探討, 第一步自然是依熱帶半環定義矩陣。我們將會發現直接以熱帶半環定義出的矩陣, 很多地方並不能滿足原有矩陣的一些特性。比如說在定義奇異矩陣時, 就會發生直觀的定義並沒有原本傳統矩陣的特性。

爲了解決這樣的困難, Izhakkian [4] 定義了所謂擴展型熱帶半環 (extend tropical semiring)。我們將會發現, 在這個新定義出來的代數結構中, 一些傳統矩陣的性質將有某種程度的保留。我們會將傳統矩陣、熱帶矩陣和擴展型熱帶矩陣做一些比較, 並且探討擴展型熱帶矩陣的基本性質。

本篇論文的架構如下: 第二章我們先複習一些熱帶幾何的背景知識。第三章我們定義擴展型熱帶半環, 並且討論其代數上的基本性質。第四章我們介紹擴展型熱帶矩陣, 並討論其與古典矩陣、熱帶矩陣之異同。

第二章　背景知識

2.1　基本定義

傳統的熱帶幾何所考慮的對象$\mathbb{T}_0$，是將實數$\mathbb{R}$再加上$\{-\infty\}$，並在$\mathbb{T}_0$上定義兩個二元運算如下:

定義 2.1.1 而對於$x, y \in \mathbb{T}_0$，我們定義$x \oplus y = \max\{x，y\}$。$x \odot y = x + y$爲實數上的加法 *[2, 8, 9]*。

根據以上的定義，我們可以很快的發現，$-\infty$爲其加法單位元素，而0爲其乘法單位元素。

在一般代數幾何之中，我們定義多項式f的根爲使多項式的值爲0之元素所形成的集合；而在$(\mathbb{T}_0, \oplus, \odot)$之中我們也可以定義熱帶多項式。但是若仿照傳統多項式根的方式，來定義熱帶多項式之根爲使f之多項式值爲$-\infty$之元素所成的集合，我們會發現一些問題。考慮下面的範例。

範例 2.1.2 考慮$f(x, y) = x^{\odot 2} \oplus y \oplus 0$ 爲一熱帶多項式

我們可以很快的發現，由於$f(x, y) = \max\{(x + x), y, 0\}$，因此對任何$x, y \in T_0$，$f(x, y) \neq -\infty$。在上面的範例中，我們很清楚的説明了無法將傳統多項式根的概念直接套用在$(T_0, \oplus, \odot)$之上，因此我們以下列的另一種方式來定義多項式的根 [9]。

定義 2.1.3 考慮f爲一個佈於$(\mathbb{T}_0, \oplus, \odot)$的多項式，我們定義其零根爲至少可使其中兩項同時達到多項式值之元素所成之集合。

我們先觀察以下的範例來説明熱帶多項式的根之圖形。

範例 2.1.4 考慮多項式$f(x, y) = x^{\odot 2} \oplus y \oplus 0$

由於$f(x,y)=x^{\odot 2}\oplus y\oplus 0=\max\{2x,y,0\}$，若$(x,y)$可使其中兩項達到多項式值，我們可以分爲三種情形來討論。

(1) 若$2x=y\geq 0$，則圖形爲$y=2x$在第一象限的部分。

(2) 若$y=0\geq 2x$，則圖形爲x軸的左半部份。

(3) 若$0=x\geq y$，則圖形爲y軸的下半部分。

我們可以由以上的討論得到$f(x,y)$之根的圖形如下圖2.1所示：

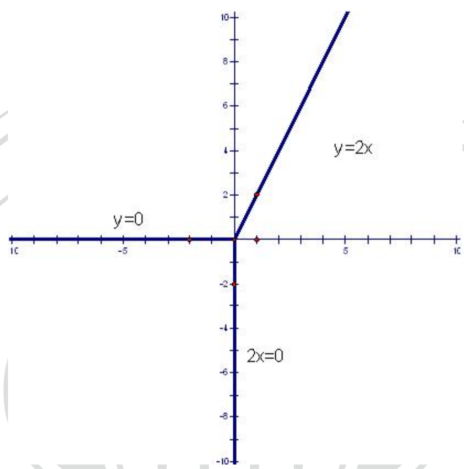

圖 2.1: $f(x,y)=x^{\odot 2}\oplus y\oplus 0$

在介紹完熱帶多項式的定義之後，我們接下來要討論的重點則是傳統多項式與熱帶多項式之間的關係。所謂的熱帶化(tropicalization)指的是將傳統多項式中的加法"+"和乘法"×"改爲"⊕"和"⊙"；例如：考慮$f(x,y)=x^2+y+3$，則其熱帶化之後的多項式$\mathrm{trop}(f(x,y))=x^{\odot 2}\oplus y\oplus 0$。只是，熱帶化有何理論基礎？還有爲何要將trop(3)當作0 ？ 以下我們將略爲解釋其發展。

2.2 變形體與其極限

有時我們會採用代數的方法來處理幾何的問題，也會用幾何的方法來處理代數的問題；因此，對於無法用明確的圖形來表示一個佈於複數平面的曲線$C: f(z_1,z_2)=0$的零根時，數學家們是很困擾的。爲了使其代數曲體較爲具象，我們以變形體(Amoebas)的觀點來讓其零根的圖形更爲具體 [5]。

定義 2.2.1 考慮f爲一佈於$\mathbb{C}^2$的多項式， 曲線$C = \{z = (z_1, z_2) | f(z_1, z_2) = 0\}$。若定義Log : $C \cap (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{R}^2$，其中 $z = (z_1, z_2) \longmapsto (\log|z_1|, \log|z_2|)$， 我們稱Log在$\mathbb{R}^2$所形成之值域爲曲線$C$的變形體。

要特別提醒的是，由於$\log 0$是不存在的，所以我們考慮的對象是$C \cap (\mathbb{C}^*)^2$。以下，我們利用兩個範例來說明變形體的定義。

範例 2.2.2 考慮定義在$\mathbb{C}^2$上的曲線$C = \{z | z_1 + z_2 = 1\}$

對於C上的任一點$z = (z_1, z_2)$，由於$z_1 = 1 - z_2$，可知當z_2趨近於0時，z_1趨近於1；因此，我們可以得到當$y = \log|z_2|$趨近於 $-\infty$時，$x = \log|z_1|$趨近於0。同樣地，我們知道當x 趨近於 $-\infty$時，y 趨近於 0。另外，由於z_1 趨近於 ∞時，z_2會趨近於 ∞可知x趨近於 ∞時y 趨近於 $-\infty$，而且$x = \log|z_1| = \log|1 - z_2| \approx \log|z_2| = y$，因此當$x$以及$y$趨近於無限大時，圖形會趨近直線$y = x$。由以上的討論，我們知道$C$的變形體如下圖2.2所示。

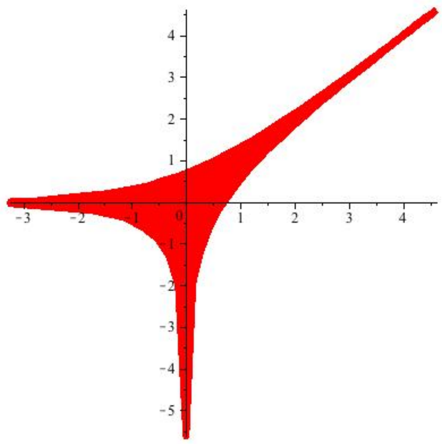

圖 2.2: $z_1 + z_2 = 1$

範例 2.2.3 考慮定義在$\mathbb{C}^2$上的曲線$C = \{z | e^{-2} z_1 + e^{-1} z_2 = 1\}$

若 (z_1, z_2) 爲C上之點，我們知道當z_2趨近於e^1時，z_1趨近於0，且z_1趨近於e^2時，z_2趨近於0；因此，當$y = \log|z_2|$趨近於1時，$x = \log|z_1|$趨近於$-\infty$，而$x = \log|z_1|$趨近於2時，$y = \log|z_2|$趨近於$-\infty$。另外，由於$z_2 = e - e^{-1} z_1$，我們知道當z_1趨近

於∞時，z_2也會趨近於$-\infty$且$y = \log|z_2| = \log|e - e^{-1}z_1| \approx \log|e^{-1}z_1| = -1 + x$。所以我們也得到當$x, y$趨近於$\infty$時，圖形會趨近於直線$y = -1 + x$。由以上討論可得到圖形有三個漸近線：$x = 2$，$y = 1$，及$y = x - 1$，而$C$的變形體如圖2.3所示。

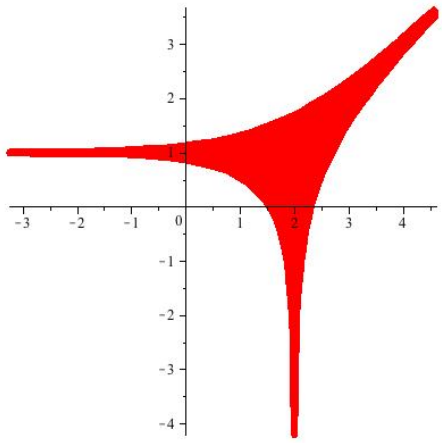

圖 2.3: $e^{-2}z_1 + e^{-1}z_2 = 1$

在前兩個例子中，我們以映射Log將佈於$\mathbb{C}^2$的代數曲體映至$\mathbb{R}^2$的一個具象的變形體；但是我們要如何將這個圖形轉變成熱帶多項式的零根圖形呢？

我們可以考慮另一個映射$\mathrm{Log}_t : C \cap (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{R}^2$，其中$t$爲正數，

$$\mathrm{Log}_t(z) = \mathrm{Log}_t(z_1, z_2) = (-\log_t|z_1|, -\log_t|z_2|) = (-\frac{\log|z_1|}{\log t}, -\frac{\log|z_2|}{\log t})$$

對於正實數a，我們知道$\log_t(a) = \dfrac{\log a}{\log t}$，因此當$t$趨近於零時，上述的變形體寬度將會被縮減爲零而成爲熱帶幾何的圖形。例如先前所討論的例子 $C = \{z|z_1 + z_2 = 1\}$，將會變成如下圖2.4所示。

同樣地，我們考慮曲面 $C = \{z|e^{-2}z_1 + e^{-1}z_2 = 1\}$ 在映射Log_t且t趨近於零時的映象。考慮$z = (z_1, z_2)$爲C上一點，當z_1趨近於0時，z_2趨近於e，但是當t趨近於0時，$\log_t|z_2| = \dfrac{\log|z_2|}{\log t}$趨近於 0。我們發現當$t$趨近於0時，映射$\mathrm{Log}_t$不但將原本變形體的寬度縮減至零，也將該圖形之頂點平移至原點。

爲了要避免這樣的情形，我們考慮另一類曲面族 $C_t = \{z|t^2z_1 + tz_2 = 1\}$。對任何實數$t$，我們知道$C_t$恆過$(t^{-2}, 0)$，$(0, t^{-1})$兩點，因此$\mathrm{Log}_t(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$有兩條漸近線：$x = 2$以及$y = 1$；而當$t$趨近於0時，圖形的寬度趨近於0而其頂點仍維持在$(2, 1)$。

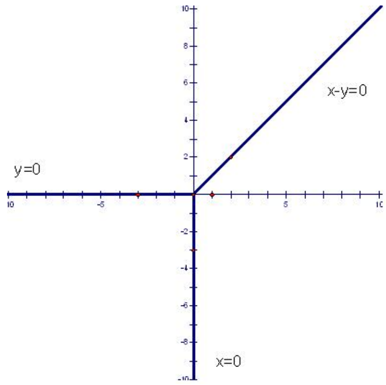

圖 2.4:

結果如下圖二所示。另外，我們也會在下一節以賦值(valuation)的觀點來討論這個例子。

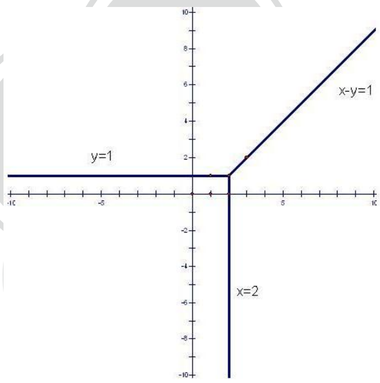

圖 2.5:

2.3 以皮瑟級數的觀點來定義熱帶幾何

在上一個小節，我們利用將複數曲線的變形體取極限的方式來導出熱帶曲線，而這樣的方式有時顯得有些冗長；而在這一個小節，我們將以另一個角度建構出熱帶幾何的圖形。

首先，我們先定義皮瑟級數(Puiseux Series)如下：

定義 2.3.1 考慮$\mathbb{Q}' = \{q | q \in \mathbb{Q}$其中$q$有下界且有一共同分母$\}$爲一有理數的子集。則由

數列$a = \sum_{q \in \mathbb{Q}'} a_q t^q$所形成的集合$K$即爲皮瑟級數。

我們知道皮瑟級數是一個代數封閉體，而對於K中的元素$a = \sum_{q \in \mathbb{Q}'} a_q t^q$，我們可以定義一個賦值如下:

引理 2.3.2 考慮$\mathrm{val} : K \mapsto \mathbb{R}$，其中$\mathrm{val}(a) = q_0, q_0 = \min\{q | a_q \neq 0\}$，則val是一個賦值。

***proof*.**

(1) 對任何$a \in K$，$\mathrm{val}(a) = \infty$若且唯若$a = 0$

(2) 對任何$a, b \in K$，令$\mathrm{val}(a) = q_1$，$\mathrm{val}(b) = q_2$；我們知道ab的最小非零次數爲$q_1 + q_2$，意即$\mathrm{val}(ab) = \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b)$

(3) 對任何$a, b \in K$，令$\mathrm{val}(a) = q_1$，$\mathrm{val}(b) = q_2$，且在不失一般性下，我們可以假設$q_1 \leq q_2$。則$a + b$的最低非零次數必大於或等於q_2，意即 $\mathrm{val}(a + b) \geq \min\{\mathrm{val}(a), \mathrm{val}(b)\}$

❑

由於當t趨近於0時，$\log_t |a| \approx \log_t |a_{\mathrm{val}(a)} t^{\mathrm{val}(a)}| = \log_t |a_{\mathrm{val}(a)}| + \mathrm{val}(a) \approx \mathrm{val}(a)$，我們發現 val和上一節所談到的$\log_t$在$t$趨近於0時的作用有著相似的結果，因此我們定義以下的$\mathrm{Val} : (K^*)^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$，

$$\mathrm{Val}(z_1, z_2) = (-\mathrm{val}(z_1), -\mathrm{val}(z_2)) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

再一次地，我們以Val的觀點來討論上述例子

範例 2.3.3 考慮定義在$(K^*)^2$上的曲線$C_t = \{z | t^2 z_1 + t^1 z_2 = 1\}$

當$\mathrm{val}(z_1) > -2$，也就是$x = -\mathrm{val}(z_1) < 2$時，我們可以將$z_2$寫作$t^{-1}(1 - t^2 z_1) = t^{-1} - t z_1$，因此$y = -\mathrm{val}(z_2) = 1$。

而當$\mathrm{val}(z_2) > -1$，也就是$y = -\mathrm{val}(z_2) < 1$時，我們可以用相同的方式得到$x = 2$。

若$\mathrm{val}(z_1) \leq -2$且$\mathrm{val}(z_2) \leq -1$；由於 $t^2 z_1 + t^1 z_2 = 1$，我們知道$t^2 z_1$及$t^1 z_2$中的t項必須要相消去，因此其最低次數$\mathrm{val}(t^2 z_1)$會等於$\mathrm{val}(t^1 z_2)$。因此，$-\mathrm{val}(z_1) - 2 = -\mathrm{val}(z_2) - 1$，即$x - y = 1$。

由以上三種情形的討論，我們也同樣的得到上節圖二之熱帶圖形。

藉由這種新的觀點，我們可以有下列的

定義 2.3.4 考慮C爲一個佈於K^2的代數曲線，我們定義其熱帶曲線爲$\mathrm{Val}(C \cap (K^*)^2)$之閉包*(closure)*。

由於$\mathrm{Val}(C \cap (K^*)^2)$爲$\mathbb{Q}^2$之子集，因此我們在上述定義中取其值域的閉包以使圖形具有完備性。而皮瑟數列K是一個代數封閉體，因此我們在K上可以做的運算等同於複數，也因爲Val的關係，在將多項式熱帶化時常數會變成0。

第三章　擴展型熱帶半環

大致上來說，本文的主要內容便是希望由傳統的$(\mathbb{T}_0,\oplus,\odot)$來建構出一個新的結構 [4]。我們將其敘述如下:

定義 3.0.5 考慮$\mathbb{R}^v$爲實數R的複製，我們定義$\mathbb{T}$爲$\mathbb{R}\sqcup\{-\infty\}\sqcup\mathbb{R}^v$，其中$\mathbb{R}$，$\{-\infty\}$，$\mathbb{R}^v$爲互斥。另外，將$\mathbb{R}^v\sqcup\{-\infty\}$記爲$\overline{\mathbb{R}^v}$，$\mathbb{T}\setminus\{-\infty\}$記爲$\mathbb{T}^*$。

另外，爲了方便區別，我們採用a,b等代號表示$\mathbb{R}$中之元素，a^v,b^v表示$\mathbb{R}^v$中之元素，x,y表示$\mathbb{T}$中之元素。

3.1　基本定義與運算

首先，我們由以下的定義來說明在$\mathbb{T}$中的順序“$\prec$”

定義 3.1.1 基於$\mathbb{T}_0$中原本的順序“$<$”，我們可以將它一般化爲$\mathbb{T}$中的順序“$\prec$”

(1) 對任何$\mathbb{T}^*$中的元素x，$-\infty\prec x$

(2) 對任何$\mathbb{R}$中的元素a,b，且$a<b$；我們定義$a^v\prec b$，$a\prec b^v$，$a^v\prec b^v$

(3) 對任何$\mathbb{R}$中的元素a，$a\prec a^v$

(4) $x\preceq y$意即 $x\prec y$或$x=y$

由以上定義我們可以知道:

註記 3.1.2

(1) “$\preceq$”滿足偏序*(partial order)*的三個特質：反身性*(reflexivity)*，反對稱性*(antisymmetry)*以及遞移性*(transivity)*。

(2) 對任何$\mathbb{R}$中的元素$a < b$，我們知道$a \prec a^v \prec b \prec b^v$

(3) 只有當x和y同時在$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}^v$中時，等式$x = y$會成立。

接下來，我們由以下的定義來說明$\mathbb{T}$中的二元運算"$\oplus$"及"$\odot$"：

定義 3.1.3 基於$\mathbb{T}_0$中原本的二元運算$\oplus$及$\odot$，我們利用它們來定義$\mathbb{T}$中的運算"$\oplus$"及"$\odot$"

(1) 對於$\mathbb{T}$中的元素x, y，$x \neq y$，定義$x \oplus y = \max\limits_{\prec}\{x, y\}$

(2) 對任何$\mathbb{T}$中的元素x，我們知道$-\infty \oplus x = x \oplus -\infty = x$

(3) 對於$\mathbb{R}$中的元素a，定義$a \oplus a = a^v \oplus a^v = a^v$

(4) 對於$\mathbb{T}$中的x，定義$x \odot -\infty = -\infty \odot x = -\infty$

(5) 對於$\mathbb{R}$中的元素a, b，定義$a \odot b = a + b$

(6) 對於$\mathbb{R}$中的元素a, b，定義$a^v \odot b = a \odot b^v = a^v \odot b^v = (a \odot b)^v = (a + b)^v$

在定義完$\mathbb{T}$中的順序與二元運算之後，以下我們將說明$\mathbb{T}$的一些性質。

性質 3.1.4 $\mathbb{T}$對加法$\oplus$而言，有交換律以及結合律。另外$-\infty$是其加法單位元素。

proof. 由定義3.1.3我們可以知道，$-\infty$為其加法單位元素；另外，對任何$x, y \in \mathbb{T}$，我們知道$x \oplus y = y \oplus x$。最後，我們驗證其結合律如下：

(1) 若$x \neq y \neq z$為$\mathbb{T}$中之元素；則$(x \oplus y) \oplus z = \max\limits_{\prec}\{\max\limits_{\prec}\{x, y\}, z\} = \max\limits_{\prec}\{x, y, z\} = \max\limits_{\prec}\{x, \max\limits_{\prec}\{y, z\}\} = x \oplus (y \oplus z)$。

(2) 若a, b為$\mathbb{R}$中兩相異元素，則$(a \oplus a) \oplus b = a \oplus (a \oplus b)$?

我們分別以三種不同的情形討論：

$$\text{左式} = a^v \oplus b = \begin{cases} a^v, & b \prec a \\ a^v, & b = a \\ b, & b \succ a \end{cases}, \quad \text{而右式} = \begin{cases} a \oplus a = a^v, & b \prec a \\ a \oplus a^v = a^v, & b = a \\ a \oplus b = b, & b \succ a \end{cases}$$

因此我們知道此式成立

而其他情形我們也可以用相似的方法去處理。

$\square$

性質 3.1.5 $\mathbb{T}$對乘法$\odot$而言，有交換律以及結合律。另外0是其乘法單位元素。

proof.

對於$x, y \in \mathbb{T}$，我們利用定義3.1.3在不同的情況來驗證交換律$x \odot y = y \odot x$

(1) 考慮a, b同爲$\mathbb{R}$中之元素；$a \odot b = a + b = b + a = b \odot a$

(2) 考慮$a \in \mathbb{R}$，$b^v \in \mathbb{R}^v$；$a \odot b^v = (a+b)^v = (b+a)^v = b^v \odot a$

(3) 考慮a^v, b^v同爲$\mathbb{R}^v$中之元素；$a^v \odot b^v = (a+b)^v = (b+a)^v = b^v \odot a^v$

另外，對任何$\mathbb{T}$中的元素x, y，我們知道 $x \odot (y \odot z) = x \odot (y \odot z)$ 以及 $0 \odot x = x \odot 0 = x$ ，因此結合性成立，而0爲其乘法單位元。

$\square$

性質 3.1.6 在$\mathbb{T}$之中，乘法$\odot$對加法$\oplus$具有分配律。

proof.

對於$x, y, z \in \mathbb{T}$，欲說明$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$，我們先討論$x, y, z$同時爲$R$中之元素時之情形。

我們可以將左式寫作$a \odot (b \oplus c) = \begin{cases} a \odot b, & b \succ c \\ a \odot b^v, & b = c \\ a \odot c, & b \prec c \end{cases}$,

而右式可寫作 $(a \odot b) \oplus (a \odot c) = \begin{cases} a \odot b, & b \succ c \\ (a \odot b)^v, & b = c \\ a \odot c, & b \prec c \end{cases}$

因此我們知道，在x, y, z同時爲實數時，“$\odot$”對“$\oplus$”具有分配性。而在其他有牽涉到$\mathbb{R}^v$中元素運算的情形，我們可以利用剛才所驗證實數間運算的分配律以及定義3.1.3來說明。

例如：$a^v \odot (b \oplus c) = (a \odot (b \oplus c))^v = ((a \odot b) \oplus (a \odot c))^v = (a \odot b)^v \oplus (a \odot c)^v = (a^v \odot b) \oplus (a^v \odot c)$

❑

上述的性質說明了$\mathbb{T}$與其二元運算的基本規則，值得注意的是$\mathbb{T}$的乘法單位元素是0而不是0^v。我們用以下的範例來說明。

範例 3.1.7 在$\mathbb{T}$之中，0^v並不是乘法單位元。

考慮$a^v \in \mathbb{R}^v$，我們知道$a^v \odot 0^v = (a+0)^v = a^v$。但對於$a \in \mathbb{R}$，我們知道$a \odot 0^v = (a+0)^v \neq a$。因此，$0^v$並不是$\mathbb{T}$的乘法單位元。

註記 3.1.8

(1) 在$\mathbb{T}$之中，$\oplus$，$\odot$都是不可逆的運算。我們找不到x, y滿足$3^v \oplus x = -\infty$，$3^v \odot x = 0$。不過對$\odot$而言，它在實數部分是可逆的。

(2) 考慮$x \in \mathbb{T}$，$a^v \in \overline{\mathbb{R}^v}$，我們知道$x \odot a^v \in \overline{\mathbb{R}^v}$。以"$\odot$"的觀點，$\overline{R^v}$會將$T$中之元素吸收到$\overline{\mathbb{R}^v}$之中。

(3) 由於在$\mathbb{T}$之中，$a \oplus a = a^v$，我們知道$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$不是冪等*(idempotent)*。另外，$\overline{\mathbb{R}^v}$中的元素$a^v$可被視作爲加法重數*(additive multiplicities)*大於1之元素。

(4) $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$的構造是由$\mathbb{R}$的複製與其本身所形成的；而同樣的程序也可以用在其他的冪等半環之上來建構出新的非冪等半環，例如是$(\mathbb{Z}, \max, +)$或$(\mathbb{R}, \min, +)$。

3.2 一些性質

接下來我們由上一節所定義的T及其運算，來提出幾個性質 [4]。爲了便於敘述，我們使用記號x^n來表示n個$x \odot x \odot \cdots \odot x$的乘積，並定義$\mathbb{T}$中元素$x$的$v$值如下:

定義 3.2.1 若$a \in \mathbb{R}$，定義a的v值$v(a) = a^v$；若$a^v \in \mathbb{R}^v$，定義$v(a^v) = a^v$； 而$v(-\infty) = -\infty$

值得提出的是，v可視爲由$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$至$\overline{\mathbb{R}^v}$的一個映射。對於$x, y \in \mathbb{T}$，我們知道$v(x \oplus y) = v(x) \oplus v(y)$，$v(x \odot y) = v(x) \odot v(y)$。

我們知道在傳統的熱帶幾何$\mathbb{T}_0$之中，對任意$x, y \in \mathbb{T}_0$，n爲正整數，等式$(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$成立。那麼在$\mathbb{T}$之中是否也有一樣的性質呢？我們用以下的性質來說明:

性質 3.2.2 對任意$x, y \in \mathbb{T}$，n爲正整數，$(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$

proof. 我們將利用數學歸納法來證明這個不等式

(1) 當$n = 1$時，本式顯然成立。

(2) 對於$n > 1$， 左式$=(x \oplus y)^n = (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n-1} = (x \oplus y) \odot (x^{n-1} \oplus y^{n-1}) = x^n \oplus x^{n-1} \odot y \oplus x \odot y^{n-1} \oplus y^n \cdots (*)$

若 $x \succ y$，則$x^n \succ x^{n-1} \odot y \succ x \odot y^{n-1} \succ y^n$，而$(*) = x^n = x^n \oplus y^n$.

若$x \prec y$，則$(*) = y^n = x^n \oplus y^n$

若$x = y$，則$(*) = x^n \oplus x^{n-1} \odot y \oplus x \odot y^{n-1} \oplus y^n = x^n \oplus x^n \oplus x^n \oplus x^n = (v(x))^n = x^n \oplus x^n = x^n \oplus y^n$

(3) 由上述討論及數學歸納法我們知道本式對任意正整數n皆成立。

❑

推論 3.2.3 對於正整數n，$x_i \in \mathbb{T}, i = 1, 2, \cdots, s$，我們知道 $(\oplus_{i=1}^{s} x_i)^n = \oplus_{i=1}^{s} (x_i)^n$。

性質 3.2.4 給定正整數n，$x_i \in \mathbb{T}$，$x_1 \odot x_2 \odot x_3 \odot \cdots \odot x_n \preceq x_1^n \oplus x_2^n \oplus x_3^n \oplus \cdots \oplus x_n^n$。另外，當$v(x_1) = v(x_2) = \cdots = v(x_n)$，且至少存在一個$x_i \in \overline{R^v}$時，原式之等號成立。

proof.

令$x_s = \max\limits_{\prec}\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$，根據性質3.2.2我們可將右式寫作

$x_1^n \oplus x_2^n \oplus x_3^n \oplus \cdots \oplus x_n^n = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n)^n$

$\succeq x_s^n = x_s \odot x_s \odot \cdots \odot x_s \succeq x_1 \odot x_2 \odot x_3 \odot \cdots \odot x_n$

而等式僅當 $v(x_1) = v(x_2) = \cdots = v(x_n)$且至少一個$x_i \in \overline{\mathbb{R}}^v$。

因爲若對所有的x_i 皆在實數$\mathbb{R}$之中， 左式爲$x_1 \odot x_2 \odot x_3 \odot \cdots \odot x_n \in \mathbb{R}$,

而右式爲 $x_1^n \oplus x_2^n \oplus x_3^n \oplus \cdots \oplus x_n^n \in \overline{\mathbb{R}}^v$，本式顯然不成立。

❑

第四章　擴展型熱帶矩陣

接下來的部分，我們將以上一章所發展出的$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$爲基礎，來介紹佈於其上的矩陣性質。相較於傳統的線性代數理論之中，矩陣是佈於體的一個代數結構；我們在$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$上所定義出的矩陣及其運算會比較偏向組合數學層面。 基於之前所建構出廣義的熱帶半環，我們將定義熱帶矩陣及其相關理論。

4.1　基本運算與定義

仿照傳統線性代數的矩陣及其基本運算，我們可以由$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ 來定義$n \times n$階的矩陣$M_n(\mathbb{T})$及其運算 [4]如下:

定義 4.1.1 我們定義由n^2個$\mathbb{T}$中元素所形成的n階方陣爲一熱帶方陣。考慮兩熱帶方陣$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$以及$x \in \mathbb{T}$，我們定義其基本運算如下:

(1) 對於熱帶方陣的加法，我們定義$A \oplus B = C = (c_{ij})_{n\times n}$，其中$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$。

(2) 對於熱帶方陣的乘法，我們定義 $A \odot B = D = (d_{ij})_{n\times n}$，其中$d_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \odot b_{kj}$

(3) 對於熱帶方陣的係數積，我們定義$x \odot A = (x \odot a_{ij})_{n\times n}$。

(4) 對於熱帶方陣的轉置，我們定義$A^t = (a_{ji})_{n\times n}$。

(5) 定義行列式值$|A| = \bigoplus_{\sigma \in S_n} \left(a_{1\sigma(1)} \odot a_{2\sigma(2)} \odot ... \odot a_{n\sigma(n)}\right)$，其中$S_n$爲由$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$對應到$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$的所有置換所形成之集合。

(6) 定義A的子矩陣*(minor)*A_{ij}爲消去第i列及第j行元素後所成之$(n-1)$階方陣。

(7) 定義A之伴隨矩陣$Adj(A) = (a'_{ij})^t_{n\times n}$，其中$a'_{ij} = |A_{ij}|$

根據以上的定義，我們可以知道$M_n(\mathbb{T})$的乘法單位元是$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & & -\infty \\ & \ddots & \\ -\infty & & 0 \end{pmatrix}$，而其加法單位元是$(-\infty \odot \mathcal{I})$ 接下來，我們來觀察兩個範例。

範例 4.1.2 考慮矩陣$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\infty \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -\infty & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

我們知道

$$\begin{aligned}
A \odot B &= \begin{pmatrix} 4 \oplus -\infty \oplus -\infty & 1 \oplus 1 \oplus -\infty & 2 \oplus -1 \oplus -\infty \\ 5 \oplus -\infty \oplus 2 & 2 \oplus 3 \oplus 1 & 3 \oplus 1 \oplus 4 \\ 5 \oplus -\infty \oplus 0 & 2 \oplus 2 \oplus -1 & 3 \oplus 0 \oplus 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1^v & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5 & 2^v & 3 \end{pmatrix} \\
(A \odot B)^t &== \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 1^v & 3 & 2^v \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
B^t \odot A^t &= \begin{pmatrix} 3 & -\infty & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\infty & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \oplus -\infty \oplus -\infty & 5 \oplus -\infty \oplus 2 & 5 \oplus -\infty \oplus 0 \\ 1 \oplus 1 \oplus -\infty & 2 \oplus 3 \oplus 1 & 2 \oplus 2 \oplus -1 \\ 2 \oplus -1 \oplus -\infty & 3 \oplus 1 \oplus 4 & 3 \oplus 0 \oplus 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 1^v & 3 & 2^v \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

範例 4.1.3 考慮$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$

矩陣A的行列式值$|A|$

$= a\odot y\odot w\oplus a\odot z\odot v\oplus b\odot x\odot w\oplus b\odot z\odot u\oplus c\odot x\odot v\oplus c\odot y\odot u$

$= a\odot(y\odot w\oplus z\odot v)\oplus b\odot(x\odot w\oplus z\odot u)\oplus c\odot(x\odot v\oplus y\odot u)$

$= a\odot|A_{11}|\oplus b\odot|A_{12}|\oplus c\odot|A_{13}|$。

藉由以上的定義及範例，我們知道熱帶矩陣有以下的性質。

性質 4.1.4

(1) $(A\odot B)^t = B^t\odot A^t$。

(2) A的行列式值$|A| = \bigoplus_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\odot|A_{i_0 j}|$，其中$i_0$爲一定數。

proof.

(1) 爲了敘述上的方便，我們令$AB = C = (c_{ij})_{n\times n}$，而$C^t$中第$i$列第$j$行的元素，我們用$c'_{ij}$表示，$A^t$中第$i$列第$j$行的元素，我們用$a'_{ij}$表示，$B^t$中第$i$列第$j$行的元素，我們用$b'_{ij}$表示。則$(A\odot B)^t$中第$i$列第$j$行的元素 $= c'_{ij} = c_{ji} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{jk}\odot b_{ki} = \bigoplus_{k=1}^{n} a'_{kj}\odot b'_{ik} = \bigoplus_{k=1}^{n} b'_{ik}\odot a'_{kj}$ 爲B^tA^t中第i列第j行的元素，因此$(A\odot B)^t = B^t\odot A^t$

(2) 首先，對於正整數$1\le i_0, k\le n$我們定義集合$S_{n(k)}^{(i_0)}$爲從 $\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i_o\}$ 映至 $\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{k\}$ 之所有置換所成之集合。對於已知正整數$1\le i_o\le n$，

$$|A| = \bigoplus_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\odot a_{2\sigma(2)}\odot\cdots\odot a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{i_0 1}\odot\left(\bigoplus_{\sigma\in S_{n(1)}^{(i_0)}}\left(\bigodot_{j\ne i_0} a_{j\sigma(j)}\right)\right)\oplus a_{i_0 2}\odot\left(\bigoplus_{\sigma\in S_{n(2)}^{(i_0)}}\left(\bigodot_{j\ne i_0} a_{j\sigma(j)}\right)\right)\oplus\cdots$$

$$\oplus\, a_{i_0 n}\odot\left(\bigoplus_{\sigma\in S_{n(n)}^{(i_0)}}\left(\bigodot_{j\ne i_0} a_{j\sigma(j)}\right)\right)$$

$$= a_{i_0 1}\odot|A_{i_0 1}|\oplus\cdots\oplus a_{i_0 n}\odot|A_{i_0 n}|。$$

❑

除了上述的兩個性質之外，我們也可以發現以下和傳統線性代數相似的性質。

性質 4.1.5

(1) 矩陣A的轉置；或者將其兩列，或兩行對調，矩陣的行列式值仍不會改變。

(2) 對矩陣的某一行*(*列*)*，矩陣的行列式對係數積而言是線性的。

proof.

(1) 對於矩陣$A=(a_{ij})_{n\times n}$我們沿用性質4.1.4的記號，將A^t記爲$(a'_{ij})_{n\times n}=(a_{ji})_{n\times n}$。則$|A^t|=\bigoplus_{\sigma\in S_n}(\bigodot_{i=1}^{n} a'_{i\sigma(i)})=\bigoplus_{\sigma\in S_n}(\bigodot_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i})$ 由於σ爲一置換，我們知道σ^{-1}亦爲一置換，且可令$j=\sigma(i)$而原式$=\bigoplus_{\sigma\in S_n}(\bigodot_{j=1}^{n} a_{j\sigma^{-1}(j)})=|A|$

(2) 考慮矩陣$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}\oplus k\odot b_{i1} & a_{i2}\oplus k\odot b_{i2} & \cdots & a_{in}\oplus k\odot b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

我們可以用降階的方式將$|A|$展開爲

$$\bigoplus_{j=1}^{n}(a_{ij}\oplus k\odot b_{ij})\odot|A_{ij}|=\bigoplus_{j=1}^{n}[(a_{ij}\odot|A_{ij}|)\oplus((k\odot b_{ij})\odot|A_{ij}|)]$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|\oplus k\odot\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

❑

定義 4.1.6 考慮$A\in M_n(\mathbb{T})$爲一熱帶方陣。若$|A|\in\mathbb{R}$，稱A爲正則*(regular)*矩陣；否則，則稱A爲奇異*(Singular)*矩陣。

註記 4.1.7

(1) 正則矩陣相乘的結果並不一定是正則矩陣。

(2) 等式$|A \odot B| = |A| \odot |B|$並不是對所有的情形都成立。

我們用下面的例子簡單的説明A, B皆爲正則矩陣，但$A \odot B$爲奇異矩陣，且$|A \odot B| \neq |A| \odot |B|$

範例 4.1.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

我們知道$A \odot B = \begin{pmatrix} 3 \oplus 2 & 4 \oplus 2 \\ 4 \oplus 4 & 5 \oplus 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4^v & 5 \end{pmatrix}$。
但$|A| = 4 \oplus 3 = 4$， $|B| = 3 \oplus 4 = 4$， $|A \odot B| = 8 \oplus 8^v = 8^v$，$|A| \odot |B| = 4 \odot 4 = 8$。

4.2 一些性質

我們知道在前一節所定義的矩陣行列式值之下，等式$|A \odot B| = |A| \odot |B|$並不總是成立的。而在這一個小節，我們將以兩個簡單的性質來提供一個判別的方法 [4]。

定理 4.2.1 考慮一熱帶方陣A，若存在兩行*(*列*)*元素相同，則A爲一奇異方陣。

proof.

我們將以數學歸納法對正整數$n \geq 2$證明。

若 $n = 2$，顯然滿足條件的矩陣A爲一奇異矩陣。考慮矩陣$A \in M_n(\mathbb{T})$，$n \geq 3$，且該矩陣的前兩行元素相同。我們可以將其行列式值$|A|$展開如爲 $\bigoplus_{i=1}^{n} a_{1i}|A_{1i}|$。

(1) 我們知道$a_{11} = a_{12}$且$|A_{11}| = |A_{12}|$，因此 $a_{11} \odot |A_{11}| \oplus a_{12} \odot |A_{12}| \in \overline{\mathbb{R}^v}$。

(2) 若 $i \geq 3$，矩陣$A_{1i} \in M_{n-1}(\mathbb{T})$，且其前兩行元素相同。由歸納法假設可知$|A_{1i}| \in \overline{\mathbb{R}^v}$。

(3) 由以上兩點，我們知道對任何正整數$n \geq 2$， $|A| = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{1i} \odot |A_{1i}| \in \overline{\mathbb{R}^v}$。

❑

定理 4.2.2 若A，B皆爲正則矩陣，且其乘積$A\odot B$亦爲正則矩陣，則$|A\odot B| = |A|\odot|B|$。又若A或B有一爲奇異矩陣，則$A\odot B$亦爲奇異矩陣。

proof. 考慮A，$B\in M_n(\mathbb{T})$，且A，B，$A\odot B$均爲正則矩陣。令$N=\{1,2,3,\cdots,n\}$而S_n爲所有由N映至N之置換，F_n爲所有由N映至N的映射所成之集合。其中，$|S_n|=n!$，而$F_n=n^n$，$S_n\subset F_n$。令$AB=C=(c_{ij})_{n\times n}$，則

$$|A\odot B| = \bigoplus_{\sigma\in S_n}\bigodot_{i=1}^{n}(c_{i\sigma(i)}) = \bigoplus_{\sigma\in S_n}\bigodot_{i=1}^{n}\left(\bigoplus_{k=1}^{n}(a_{ik}\odot b_{k\sigma(i)})\right)$$

$$=\bigoplus_{\sigma\in S_n}\left(a_{11}\odot b_{1\sigma(1)}\oplus\cdots\oplus a_{1n}\odot b_{n\sigma(1)}\right)\odot\cdots\odot\left(a_{n1}\odot b_{1\sigma(n)}\oplus\cdots\oplus a_{nn}\odot b_{n\sigma(n)}\right)$$

$$=\bigoplus_{\sigma\in S_n}\bigoplus_{\mu\in F_n}\left(\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu(i)}\odot b_{\mu(i)\sigma(i)}\right)=\bigoplus_{\sigma\in S_n}\bigoplus_{\mu\in F_n}\left(\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu(i)}\bigodot_{i=1}^{n}b_{\mu(i)\sigma(i)}\right)\cdots(*)。$$

而根據$(*)$，我們將說明同時存在一組$\mu_0\in F_n$，$\sigma_0\in S_n$使得$\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu(i)}$以及$\bigodot_{i=1}^{n}b_{\mu(i)\sigma(i)}$同時達到最大值。以下將由$\mu_0$的情況來分類討論。

(1) 若$\mu_0\in S_n$使得$\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu(i)}$有最大值。我們將說明存在$\sigma_0\in S_n$使得$\bigodot_{i=1}^{n}b_{\mu_0(i)\sigma_0(i)}$有最大值。

因爲$|B|\in R$，所以存在$\sigma'\in S_n$使得$\bigoplus_{\sigma\in S_n}\left(\bigodot_{j=1}^{n}b_{j\sigma(j)}\right)=\bigodot_{j=1}^{n}b_{j\sigma'(j)}=|B|$。

令$\mu=\mu_0$，則$(*)=\left(\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu_o(i)}\right)\bigoplus_{\sigma\in S_n}\left(\bigodot_{i=1}^{n}b_{\mu_0(i)\sigma(i)}\right)=|A|\bigoplus_{\sigma\in S_n}\left(\bigodot_{j=1}^{n}b_{j\sigma(\mu_0^{-1}(j))}\right)$，其中$\mu_0(i)=j$。考慮$\sigma_0\in S_n$，其中$\sigma_0=\sigma'\circ\mu_0$，則上式可寫作$|A|\bigodot b_{j\sigma'(j)}$等於$|A|\odot|B|$。

當A爲奇異矩陣，則存在相異置換μ_1,μ_2使$\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu_1(i)}=\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu_2(i)}=a$，$|A|=a^v$；或者是存在$\mu\in S_n$會涉及到非實數元素。

在後面的情形，由於$(*)$會有一個非實數的元素，因此$|A\odot B|\in\overline{\mathbb{R}^v}$；若是前者情形，我們可以找到$\sigma_1,\sigma_2\in S_n$使得$\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu_1(i)}\odot b_{\mu_1(i)\sigma_1(i)}=\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu_2(i)}\odot b_{\mu_2(i)\sigma_2(i)}$因此$|A\odot B|\in\overline{\mathbb{R}^v}$。

(2) 若$\mu_o\in F_n\setminus S_n$，而$\sigma_0\in S_n$爲其相對應可使

$(**)\ \bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu(i)}\odot b_{\mu(i)\sigma(i)}=\left(\bigodot_{i=1}^{n}a_{i\mu(i)}\right)\left(\bigodot_{i=1}^{n}b_{\mu(i)\sigma(i)}\right)$爲最大之置換。

因爲$\mu_0 \in F_n \setminus S_n$，所以存在$i_1 \neq i_2$使得 $\mu_0(i_1) = \mu_0(i_2) = k$，

同時$\sigma_0(i_1) = h_1$，$\sigma_0(i_2) = h_2$，$h_1 \neq h_2$。我們知道$(**)$

可寫爲 $\left(\bigodot_{i=1}^{n} a_{i\mu_0(i)}\right)\left(b_{\mu_0(i_1)\sigma_0(i_1)} \odot b_{\mu_0(i_2)\sigma_0(i_2)} \bigodot_{i\neq i_1,i_2} b_{\mu_0(i)\sigma_0(i)}\right)$

$= \left(\bigodot_{i=1}^{n} a_{i\mu_0(i)}\right)\left(b_{kh_1} \odot b_{kh_2} \bigodot_{i\neq i_1,i_2} b_{\mu_0(i)\sigma_0(i)}\right)$

考慮另一置換$\hat{\sigma_0} \in S_n$，其中 $\hat{\sigma_0}(i_1) = h_2, \hat{\sigma_0}(i_2) = h_1$； 而對於$i \neq i_1, i_2$，$\hat{\sigma_0}(i) = \sigma_0(i)$。 在$\mu_0$，$\hat{\sigma_0}$的作用之下，

$(**)$可以寫作 $\left(\bigodot_{i=1}^{n} a_{i\mu_0(i)}\right)\left(b_{\mu_0(i_1)\hat{\sigma_0}(i_1)} \odot b_{\mu_0(i_2)\hat{\sigma_0}(i_2)} \bigodot_{i\neq i_1,i_2} b_{\mu_0(i)\hat{\sigma_0}(i)}\right)$

$= \left(\bigodot_{i=1}^{n} a_{i\mu_0(i)}\right)\left(b_{kh_2} \odot b_{kh_1} \bigodot_{i\neq i_1,i_2} b_{\mu_0(i)\sigma_0(i)}\right)$

意謂著存在$\hat{\sigma_0} \neq \sigma_0$可同時達到$|A \odot B|$ 的$v-$值，因此$|A \odot B| \in \overline{\mathbb{R}^v}$。此結果與假設矛盾，因此$\mu_0 \in S_n$，証畢。

❑

我們已經知道了關於擴展型熱帶矩陣的乘法以及行列式運算的一些性質，接下來我們將舉三個例子來説明定理4.2.1以及定理4.2.2。並且以傳統熱帶半環的觀點來去觀察是否有相似的結論。

範例 4.2.3 考慮兩正則矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

我們知道$|A| = 5 \oplus 3 = 5$，$|B| = 5 \oplus 1 = 5$，而

$A \odot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$，

$|A \odot B| = 10 \oplus 9 = 10$，$|A \odot B| = |A| \odot |B|$。

因此我們知道若兩正則矩陣相乘之後仍爲一正則矩陣，則$|AB| = |A||B|$ 滿足定理4.2.2的結果。

另外，由於在這個範例中我們並未涉及$\overline{\mathbb{R}^v}$的元素，因此即使在傳統的熱帶半環中，依循本文矩陣行列式的定義， $|A \odot B| = \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right| = 10 \oplus 9 = 10 = |A| \odot |B|$。

範例 4.2.4 考慮兩正則矩陣 $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}$

我們知道$|A|=4$，$|B|=6$；而$A\odot B=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\7&6\end{pmatrix}$，$|A\odot B|=11\oplus 11=11^v$，$|A\odot B|\neq|A|\odot|B|$。因此我們知道，兩個正則矩陣相乘後的結果有可能是奇異矩陣，而$|A\odot B|\neq|A|\odot|B|$。

若以傳統的熱帶半環來考慮這個範例，我們知道
$|A\odot B|=\left|\begin{pmatrix}5&4\\7&6\end{pmatrix}\right|=11\oplus 11=11\neq 4\oplus 6=|A|\odot|B|$。

範例 4.2.5 考慮一奇異矩陣 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$ 以及一正則矩陣 $B=\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$

我們知道$|A|=2\oplus 2=2^v$，$|B|=5\oplus 1=5$，
而$A\odot B=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&4\end{pmatrix}$，$|A\odot B|=7\oplus 7=7^v=2^v\odot 5$，
而$|A\odot B|=|A||B|$。
由定理4.2.2得知，奇異矩陣與正則矩陣相乘之後必爲奇異矩陣，但在這個例子中我們發現$|A\odot B|=|A|\odot|B|$仍有可能成立。定理4.2.2的逆敘述不成立。

若以傳統的熱帶半環來考慮這個範例，我們知道 $|A\odot B|=\left|\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\right|=7\oplus 7=7=2\oplus 5=|A||B|$。

從以上三個範例中，我們不但可以知道定理4.2.2的逆敘述不成立之外，也不難發現，定義$\mathbb{R}^v$的目的主要在讓我們可以辨別運算後元素的加法重數，而這個因素在等式$|A\odot B|=|A|\odot|B|$是否能夠成立，佔了關鍵性的地位。

4.3 乘法反方陣之探索

在定義了擴展型熱帶矩陣的基本運算之後，我們是否也可以定義出熱帶反方陣呢？由於熱帶矩陣的乘法單位元素是$\mathcal{I}=\begin{pmatrix}0&&-\infty\\&\ddots&\\-\infty&&0\end{pmatrix}$，而無論是加法或乘法，除

非涉及到$-\infty$，否則運算的結果不會成爲$-\infty$。因此對於矩陣A，我們要找到另一個矩陣B使得$A \odot B = B \odot A = \mathcal{I}$是很不容易的。以下，我們仿照傳統線性代數的觀點，試著去討論熱帶反方陣的可能性 [4]。

定義 4.3.1 考慮一正則矩陣A，我們定義$A^{\triangledown} = \dfrac{Adj(A)}{|A|} = Adj(A) \odot (-|A|)$。

上述的定義是仿照傳統線性代數中反方陣模式來建構的，而這樣的矩陣$A^{\triangledown}$具有哪些性質呢？我們先觀察以下的範例。

範例 4.3.2 考慮正則矩陣$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

我們知道$|A| = 2 \oplus 7 \oplus -1 \oplus 9 \oplus 1 \oplus 6 = 9$，

而其伴隨矩陣$Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$。

$A^{\triangledown} = \dfrac{Adj(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 0 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$。

則$A \odot A^{\triangledown} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 0 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-4)^v & (-5)^v \\ 1^v & 0 & (-4)^v \\ 3^v & (-1)^v & 0 \end{pmatrix}$

上述的的範例很快的使我們的期望落空了，要仿照傳統線性代數的方式來定義擴展型熱帶反方陣是有困難的。但是對於上述定義中的$A^{\triangledown}$，是否有怎樣的性質呢？我們將敘述如下:

性質 4.3.3 考慮$A \in M_n(\mathbb{T})$爲一正則方陣，$A^{\triangledown} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$，$A \odot A^{\triangledown} = B = (b_{ij})_{n\times n}$。則

(1) 對於正整數i，$1 \le i \le n$；$b_{ii} = 0$。

(2) 對於正整數i, j，$1 \le i \ne j \le n$；$b_{ij} \in \overline{\mathbb{R}^v}$。

proof.

(1) 對於方陣B之對角元素b_{ii}，我們可以將b_{ii}展開爲$\bigoplus_k a_{ik} \odot a^{\triangledown}_{ki}$

$$= \bigoplus_k a_{ik} \odot \left(\frac{|A_{ik}|}{|A|}\right) = \left(\bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{ik}|\right) \odot (-|A|) = (|A|) \odot (-|A|) = 0$$

(2) 對於方陣B之非對角元素$b_{ij}, i \neq j$，我們知道$b_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} \odot a^{\triangledown}_{kj}$

$$= \bigoplus_k a_{ik} \odot \left(\frac{|A_{jk}|}{|A|}\right) = \left(\bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{jk}|\right) \odot (-|A|)。$$

由於$\bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{jk}|$可視爲將$A$中第$j$列元素換爲其第$i$列元素之矩陣之行列式值。

根據定理4.2.1我們知道$\bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{jk}| \in \overline{R^v}$，

而$b_{ij} = \left(\bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{jk}|\right) \odot (-|A|) \in \overline{R^v}$。

❑

除了上述的性質之外，我們由下面的性質可以知道，雖然$A \odot A^{\triangledown}$的結果並不等於乘法單位元素$I$，但是卻有和$\mathcal{I}$相似的冪等性質。

性質 4.3.4 考慮$A \in M_n(T)$爲一正則矩陣，則$AA^{\triangledown}$是冪等*(idempotent)*的。

proof. 首先，我們令$AA^{\triangledown} = B = (b_{ij})_{n\times n}$。由於$a^{\triangledown}_{ij} = \frac{|A_{ji}|}{|A|}$，因此

$b_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} \odot a^{\triangledown}_{kj} = \bigoplus_k a_{ik} \odot \frac{|A_{jk}|}{|A|} = a_{ik_1} \odot \frac{|A_{jk_1}|}{|A|}$，其中$k_1$爲某一固定整數。

若令$B \odot B = C = (c_{ij})_{n\times n}$，我們可以藉由說明$c_{ij} = b_{ij}$來證明$C = B \odot B = B$，

意即$B = A \odot A^{\triangledown}$是冪等的。

展開$c_{ij} = \bigoplus_h b_{ih} \odot b_{hj} = \bigoplus_h \left(\bigoplus_k a_{ik} \odot \frac{|A_{hk}|}{|A|}\right)\left(\bigoplus_l a_{hl} \odot \frac{|A_{jl}|}{|A|}\right)$

$= \bigoplus_h \bigoplus_k \bigoplus_l a_{ik} \odot \frac{|A_{hk}|}{|A|} \odot a_{hl} \odot \frac{|A_{jl}|}{|A|}$

因此，若$c_{ij} = b_{ij}$，即

$\bigoplus_h \bigoplus_k \bigoplus_l a_{ik} \odot |A_{hk}| \odot a_{hl} \odot |A_{jl}| = |A| \bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{jk}| \cdots (\dagger)$

若我們令$(\dagger)$左式中$h = j$我們知道左式$= \bigoplus_h \bigoplus_k \bigoplus_l a_{ik} \odot |A_{hk}| \odot a_{hl} \odot |A_{jl}| \succeq$

$\bigoplus_k \bigoplus_l a_{ik} \odot |A_{jk}| \odot a_{jl} \odot |A_{jl}| = \left(\bigoplus_k a_{ik} \odot |A_{jk}|\right)\left(\bigoplus_l a_{jl} \odot |A_{jl}|\right)$=右式。

要說明(†)中左式等於右式，我們利用反證法，假設左式$\succ$右式，且令h_0, k_0, l_0爲使左式達到其值之足碼；則原敘述(†)可寫爲

$a_{ik_0} \odot |A_{h_0k_0}| \odot a_{h_0l_0} \odot |A_{jl_0}| \succ a_{ik_1} \odot |A_{jk_1}| \odot |A|$

根據k_1之定義，我們知道$a_{ik_1} \odot |A_{jk_1}| \succeq a_{ik_0} \odot |A_{jk_0}|$；

因此 $a_{ik_0} \odot |A_{h_0k_0}| \odot a_{h_0l_0} \odot |A_{jl_0}| \succ a_{ik_1} \odot |A_{jk_1}| \odot |A| \succ a_{ik_0} \odot |A_{jk_0}| \odot |A| \Rightarrow$
$|A_{h_0k_0}| \odot a_{h_0l_0} \odot |A_{jl_0}| \succ |A_{jk_0}| \odot |A|$。

另外，我們知道 $|A| = a_{h_0k_0} \odot |A_{h_0k_0}|$，因此

$|A_{h_0k_0}| \odot a_{h_0l_0} \odot |A_{jl_0}| \succ |A_{jk_0}| \odot a_{h_0k_0} \odot |A_{h_0k_0}| \Rightarrow a_{h_0l_0} \odot |A_{jl_0}| \succ a_{h_0k_0} \odot |A_{jk_0}|$，

而這樣的結果與h_0, k_0, l_0之假設矛盾。因此左式$\succ$右式不成立，左式=右式。 ❑

最後，我們以下面的範例來說明上述的兩個性質。

範例 4.3.5 考慮$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$爲一正則矩陣，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$爲一奇異矩陣。

我們知道$|A| = 2$，而$A^{\triangledown} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \odot (-2) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$。

$A \odot A^{\triangledown} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-3)^v \\ 1^v & 0 \end{pmatrix}$。

則$A \odot A^{\triangledown} \odot A \odot A^{\triangledown} = \begin{pmatrix} 0 & (-3)^v \\ 1^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (-3)^v \\ 1^v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-3)^v \\ 1^v & 0 \end{pmatrix}$

另外，$|B| = 4^v$。而$B^{\triangledown} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \odot ((-4)^v) = \begin{pmatrix} (-1)^v & (-4)^v \\ 0^v & (-3)^v \end{pmatrix}$

而$B \odot B^{\triangledown} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^v & (-4)^v \\ 0^v & (-3)^v \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0^v & (-3)^v \\ 3^v & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0^v & (-3)^v \\ 3^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^v & (-3)^v \\ 3^v & 0 \end{pmatrix}$ 並不滿足上述性質。

第五章　結論

本篇論文我們討論了擴展型熱帶半環的代數結構, 及定義擴展型熱帶矩陣。我們可以發現, 使用擴展型熱帶矩陣, 和原本熱帶矩陣的運算十分接近, 但是許多地方可以反映在古典矩陣理論有的性質。例如矩陣的奇異性就是一個例子。

我們除了討論擴展型熱帶矩陣的運算, 更進一步探討其基本性質。而這些性質是否能具備幾何上的意義? 如果依擴展型熱帶半環, 仿熱帶幾何的作法, 再定義出相對應的擴展型熱帶幾何, 和熱帶幾何的關係爲何? 是否能像熱帶幾何一樣, 反映傳統幾何的一些性質? 這些都是值得進一步研究的地方。

參考文獻

[1] Mike Develin, Francisco Santos, and Bernd Sturmfels. On the rank of a tropical matrix. In *Combinatorial and computational geometry*, volume 52 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 213–242. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[2] Andreas Gathmann. Tropical algebraic geometry. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 108(1):3–32, 2006.

[3] Zur Izhakian. Tropical algebraic sets, ideals and an algebraic Nullstellensatz. *Internat. J. Algebra Comput.*, 18(6):1067–1098, 2008.

[4] Zur Izhakian. Tropical arithmetic and matrix algebra. *Comm. Algebra*, 37(4):1445–1468, 2009.

[5] Grigory Mikhalkin. Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry. In *Different faces of geometry*, volume 3 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 257–300. Kluwer/Plenum, New York, 2004.

[6] Grigory Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2):313–377 (electronic), 2005.

[7] Grigory Mikhalkin. Tropical geometry and its applications. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 827–852. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[8] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*,

volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[9] David Speyer and Bernd Sturmfels. Tropical mathematics. *Math. Mag.*, 82(3):163–173, 2009.