國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩 士 學 位 論 文

國高中教材及其它六種常見四分位數公式之比較研究

Comparisons of the Quartile Formulae Given in High School Text Books and Six Others

碩專班學生：黃瑜瑜撰

指導教授：江振東博士

中華民國九十九年十二月二十二日

謝　　辭

終於完成人生中另一個階段的學習，回想這兩年半以來，以在職身份修習研究所課程的這段期間，歷經初次接手行政工作及母親中風，對筆者而言需要花更多的時間與心力去做好，常常是忙得疲憊不堪，可以說是蠟燭兩頭燒，以致論文進度總是斷斷續續、停滯不前，但時間的壓力及寫作思考的茫然，曾經懷疑過自己是否能熬得過來。但一路走來最感謝的就是江振東老師，老師的敬業態度讓學生打從內心敬佩，在他的細心、耐心指導下才能順利生出論文，也感謝口試委員李隆安老師、姜志銘主任給予研究上的建議與問題的解析，使筆者獲益良多。

接下來要感謝的是家人的支持成為精神上的支柱，每每看到父親對母親無微不至的照顧，內心就有一種無名的感動；看到母親認真的做復健，彷彿有一股支撐筆者寫下去的動力，因為他們，筆者才能朝著自己的目標前進。

最後更感謝學校同事劉清琦主任及董璨組長，在筆者暑假進修期間代理繁雜的行政工作，讓筆者無後顧之憂專心進修，及張雅秋老師熱心協助完成摘要的翻譯；還有每當遇到電腦上的問題，背後總是有學生顧問團葉典、靜琪做後盾，及同事們不時的關心與加油打氣，今日才能順利完成學業，真的打從內心感謝所有曾經幫助過筆者的人，充滿了感激與感恩！

黃瑜瑜

Huang, Yu-Yu

2010 年 12 月 22 日

摘　要

本研究的主要目的是探究四分位數定義在國中、高中教材不同情形下，所可能衍生出來的差異情況，並統整有關四分位數之八組公式，以第一、第三四分位數及四分位距觀點來探討不同公式適用於何種資料型態。

本研究發現如下：

一、國中、高中在四分位數之計算結果的確有差異，尤其當原始資料之個數為 $N = 4k + 1$ (k 為正整數) 時，藉由高中版本的計算公式所算出來的 Q_1 與 Q_3，與藉由國中版本所計算出來的 25 及 75 百分位數可能有所不同。其餘資料個數情況，似乎並不會發生不一致的現象。

二、假設原始資料分別來自五種右偏程度不一的分配，包括卡方分配 $\left(\chi^2_{(1)},\ \chi^2_{(5)},\ \chi^2_{(10)}\right)$、指數分配 $\left(\mathrm{Exp}(\lambda = 10),\ \mathrm{Exp}(\lambda = 15)\right)$ 以及平均數為 100，標準差為 10 的常態分配這一種對稱的型式。在不同樣本數 (N＝$4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$) 及不同資料分配的情況下，透過模擬實驗的方式，並依據四項評估指標（偏誤、標準差、均方根誤差、平均相對誤差百分比）來探討這八組公式的適用性。雖然各家公式的版本不盡相同，但大體上而言，在大樣本時的表現差不多，僅在小樣本時 (N=40、41、42、43) 呈現出明顯差異。卻因為在不同資料分配下，八組公式的表現不一，所以無法歸納出較具體的結論。相對而言，國中、高中公式的表現儘管稱不上是最好，不過就學生的學習而言，卻是清晰易懂。

關鍵詞：四分位數公式、模擬比較

Comparisons of the Quartile Formulae Given in High School Text Books and Six Others

Abstract

The main purpose of this study is to explore the possible implications for different definitions of quartiles taught in high schools. In addition, the two formulae are also compared with six others that are found popular in literature according to their performances under different distributions.

The main findings of the study are summarized as follows:

1. Differences are found in the calculation of quartile based on the definition used in junior and senior high schools. Specifically, when the data size is $N=4k+1$ (k is a positive integer), Q_1 and Q_3 calculated using the formula taught in senior high schools may not be same as the 25th and 75th percentiles, the way junior high students are taught to calculate Q_1 and Q_3.
2. Assuming that data come from five right-skewed distributions ($\chi^2_{(1)}, \chi^2_{(5)}, \chi^2_{(10)}$), chi-squared distributions with degrees of freedom 1, 5, and 10, and Exp($\lambda=10$), Exp($\lambda=15$), exponential distributions with means 10 and 15, and a symmetrical distribution (normal distribution with mean 100 and standard deviation 10), simulation studies are carried out to assess the performances of the eight formulae in terms of bias, standard deviation, root mean square error and average relative error. Generally speaking, no differences are found when the sample sizes are large. Noticeable differences, on the other hand, are found under the situations of small sample sizes, particularly when N=40, 41, 42, and 43. However, since the performances varied dramatically, there appears no clear winner among the eight formulae. Although the performances of the two formulae taught in junior high and senior high schools scarcely perform as the “best”, they are easily understood, and clearly appropriate for use in teaching high school students the concept of quartiles.

Key words: Quartiles, Simulation studies

目　錄

圖 目 錄

表 目 錄

第一章　緒　論

第一節　研究背景與動機

在教授國中四分位數時，康軒版教科書中提出了另一種與課本定義不同的做法：即在計算一組有序資料的 3 個四分位數時，「先找到整組資料的中位數當作第 2 四分位數，其次找前面一半資料的中位數當作第 1 四分位數，再找後面一半資料的中位數當作第 3 四分位數」，問學生是否同意這樣的做法？經查閱之後發現此為高中的定義，因國中四分位數定義是以百分位數的方式去計算，所以學生們在計算完兩者不同方法之後，發現模擬兩可。研究者當下覺得有必要重新思考四分位數的計算方式，因此把它列為一個重要課題，想要進一步了解國高中四分位數計算方式之差異。

九年一貫課程在統計的主題中，較過去增加了百分位數、百分等級(暫行綱要)與四分位數(正式綱要)的內容，由於是全新的課程內容，一方面多數的數學老師們在大學時期未必有學到相關的知識，另一方面當時四家民間版本定義略有出入，又沒有統一版本可以參照，且與高中版本有所差異，因此老師教學起來多少會有點心虛，更有點惶恐，因為不知道哪一家所言才是「最合適」？因國中四分位數定義目前是以百分位數的觀念出發去計算，這個觀念在九年一貫能力指標也沒有講得很清楚，而課本的定義是經過請教統計學者才得以了解為何如此定義，後來發現每一個版本都是如此定義，與高中直接將已排序的資料等分成四段來定義四分位數是有所不同的，所以衍生出教學困擾。現在就九年一貫課程暫行綱要與正式綱要之能力指標來看百分位數相關訊息。

一、從暫行綱要能力指標看

暫行綱要數學領域的能力指標自 89 年頒布起到正綱公佈，其間有做部分修正，其中有關百分位數、百分等級的指標如下：

1.修正前：

D-4-1 [註1] 能利用統計量，例如：百分位數，來瞭解資料散佈的情形。

D-4-7 [註1] 從真實資料的現成折線圖、圖形百分圖及與百分位數有關的圖表中，直接抽取有意義的資訊並加以解讀。

2.修正後：

D-4-1 能報讀百分等級與百分位數，並瞭解個體在全體資料中相對地位的情形。

註 1：D-4-1、D-4-7 符號，代表九年一貫能力指標

數學領域將九年國民教育區分為四個階段：階段一為一至三年級，階段二為四、 五年級，階段三為六、七年級，階段四為八、九年級。另將數學內容分為數與量、幾何、代數、統計與機率、連結等五大主題。

能力指標以三碼編排：

- 第一碼表示主題，分別以字母 N、S、A、D 表示「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題。
- 第二碼表示階段，分別以 1,2,3,4 表示第一、二、三和四階段。
- 第三碼則是能力指標的流水號，表示該細項下指標的序號。

二、從正式綱要能力指標看

由上面敘述知道，在暫行綱要中並未對百分等級與百分位數作出明確的定義和做法，因此造成民間各版本在編寫上的困擾，也造成老師在教學、評量過程無所適從。不過到了正式綱要則對百分位數作出略為明確的說法，但是捨去了百分等級：

(1) 百分位數：各筆或各組資料的相對位置，表示有百分之多少的資料比該筆或

該組資料的數要小。

(2) 相關能力指標：

分年細目	內　　　　容	能力指標
9-d-2 [註2]	能理解百分位數的概念，認識第 10、25、50、75、90 百分位數，並製作盒狀圖。	D-4-1
9-d-3 [註2]	能利用較理想化的資料說明常見的百分位數，來認識一筆或一組資料在所有資料中的位置。	D-4-1

註 2：本綱要的能力指標係依主題及階段學習能力而訂定，然因多數指標須採分年進階式教學方能達成其教學目標。因此，由階段能力指標演繹出更細緻的分年細目及詮釋，以利分年進階式教學進度目標的明確掌握。分年細目亦以三碼編排：

- 第一碼表示年級，分別以 1，…，9 表示一至九年級。
- 第二碼表示主題，分別以小寫字母 n、s、a、d 表示「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題。
- 第三碼則是分年細目的流水號，表示該細項下分年細目的序號。

根據九年一貫能力指標內容發現，正式綱要從兩個方向來計算或找出百分位數。

1. 從統計學的觀點，可以其百分位數前後最接近的相鄰兩組資料平均值來代表該位數。康軒版本原先根據此一說明，找到計算公式編寫課程的內容，但康軒版在送審時，審查委員當時（89 年）認為實施的是暫行綱要，擔心公式過於複雜，教學時易流於背誦公式，不宜以此的結構呈現，因此退回重編。
2. 由累計百分率圖縱軸上百分位數的位置作一條水平線使其與累計百分率曲線相交，再由此交點作一條鉛直線與橫軸相交，這個交點即為其所對應的資料位置。這樣的做法是根據「百分位數表示有百分之多少的資料比該筆或該組資料的數要小」的意義，利用累積相對(或相對累積)次數分配折線圖找到百分位數，康軒版於退回後，改以這樣的角度重編成目前通審的版本，翰林版、南一版也是如此。

目前國中教學現況是以圖來找百分位數當作四分位數，則在教學或應用上仍有困擾的地方，如何計算它們，也是很多老師和學生所希望知道的知識。

但事實上卻有許多不同的計算公式或模式，因此數值也會有所出入。例如：在高中的教科書中談到四分位數，過去的國編版是一種方法，現在各種版本也有不同的方式；除此之外，數學(或統計)軟體 SPSS、Minitab 所使用的公式，又和常用的試算軟體 Excel 所使用的公式也不同，然而這些公式的適用性正是本研究所想要分析、探討的重點。

第二節　研究問題

一、因國中是由百分位數來定義四分位數，所以第 25 百分位數視為第一四分位數，第 75 百分位數視為第三四分位數。而高中直接分成四等分定義四分位數。本研究目的之一在於探討在國中、高中四分位數計算方式的差異。以下舉例說明：

<例>：N＝13 個數：40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71。

（1）＜國中康軒版公式＞：$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_N$

令 $i(r) = N \times \frac{25r}{100}$，$(r=1,2,3)$，$i(r)$：第 r 四分位數位置，Q_r：第 r 四分位數

則 $Q_r = \begin{cases} x_{[i(r)]+1} & ;\ i_4(r) \notin \mathbb{Z}^+ \\ \frac{x_{i(r)}+x_{i(r)+1}}{2} & ;\ i_4(r) \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$ （[　]：高斯函數，$\mathbb{Z}^+$：正整數）

因為 $i_4(1) = \frac{1 \times 13}{4} = 3\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}^+$，　$i_4(3) = \frac{3 \times 13}{4} = 9\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}^+$

則 $\begin{cases} Q_1 = P_{25} = x_{[\ i_4(1)]+1} = x_{\left[3\frac{1}{4}\right]+1} = x_4 = 56 \\ Q_3 = P_{75} = x_{[\ i_4(3)]+1} = x_{\left[9\frac{3}{4}\right]+1} = x_{10} = 67 \end{cases}$

（2）＜高中龍騰版公式＞：

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_k \le x_{k+1} \cdots \le x_{N-k} \le x_{N-k+1} \le \ \cdots \le x_N$

$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \quad , \quad Q_3 = \frac{x_{N-k}+x_{N-k+1}}{2} & ;當N=4k, 4k+1 \\ Q_1 = x_{k+1} \quad , \quad Q_3 = x_{N-k} & ;當N=4k+2, 4k+3 \end{cases}$

因為 $N = 13 = 4 \times 3 + 1, (k=3)$

則 $\begin{cases} Q_1 = \frac{x_k+x_{k+1}}{2} = \frac{x_3+x_4}{2} = \frac{55+56}{2} = 55.5 \ \neq \ 56 \\ Q_3 = \frac{x_{N-k}+x_{N-k+1}}{2} = \frac{x_{10}+x_{11}}{2} = \frac{67+68}{2} = 67.5 \neq 67 \end{cases}$

由上述例子可知利用國中、高中的不同公式在求算四分位數時，結果不盡相同。更具體的內容將在後續介紹。

二、由於國中到高中乃至於大學統計學教科書等有關四分位數計算方式之不盡相同；想了解這些公式在不同資料結構分配下的適用性。

本文在第二章就四分位數的定義作說明，並針對各種不同版本（含國、高中教科書）的四分位數計算公式作統整。第三章探討有關四分位數之八組公式的數學特性，第四章為探討國高中課程差異，第五章為模擬研究結果與討論，第六章則為結論與建議。

第二章　四分位數定義說明

本章旨在說明四分位數的定義於國中、高中版本之差異，及大學統計學教科書、電腦統計軟體等許多不同的計算公式。

第一節　四分位數相關定義及計算公式說明

從統計學的觀點而言，在定義各種位數（如中位數、四分位數、百分位數等）時，基本上是架構在連續型的隨機變數，來進行理論上的探討。由於是連續型的隨機變數，因此這些統計量基本上是唯一確定的。不過實務上我們所取得的資料基本上都是離散型的，因此如何取得這些統計數值，便衍生出許多不同的操作定義。以下依學習階段（國中—高中—大學）介紹各家版本定義及計算方法。

一、國中版本

因國中版本架構是將中位數、四分位數視為某一個百分位數，因此先討論百分位數，再介紹四分位數。

(一）百分位數定義及計算方法

1. 百分位數的理論定義：

在統計學上當機率密度函數是連續函數時，則其基本的定義是：

$$\mathrm{P}(\mathbf{X} \le x) = \frac{k}{100}$$

滿足這個式子的x，稱為這個資料的第 k 百分位數。顯然，當 k＝50、25、75 時，此時x就是這份資料的中位數、第一四分位數、第三四分位數。

不過，當一般的機率密度函數不見得是連續函數，滿足上述定義的x不見得會存在，因此 Galton（1885）用的是一個比較弱的定義，以保證x的存在性：

（1） 至少有 k % 之觀察值(樣本)小於或等於x，

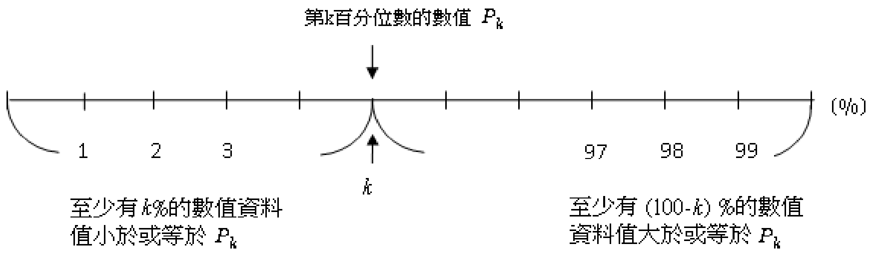
（2） 至少有 (100－k) % 之觀察值(樣本)大於或等於x。

亦　　即
$$\begin{cases} \mathrm{P}(\mathbf{X} \le x) \ge \frac{k}{100} \\ \mathrm{P}(\mathbf{X} \ge x) \ge 1 - \frac{k}{100} \end{cases}$$
。

2.操作定義：

國中版本：（A）康軒、南一、翰林（B）部編

（A）

版本說明	康軒、南一、翰林
定　　義[註3]	（1）　利用累積相對次數[註4]1%、2%、3%、…、99%，將資料均分成 100 等分，中間 99 個分割點所得到對應的數值，這些數值就稱為第 1、2、……、98、99 百分位數。 （2）　如果一群資料中至少有 k%的資料值小於或等於某個數值P_k，也至少有（$100-k$）%的資料大於或等於該數值P_k，那麼這個數值P_k就稱為這群資料的第 k 百分位數，其中 k 是正整數，且 $1≦k≦99$。 
計算方法	未分組資料： 假設有 N 個數的一群資料，將資料由小到大排列後，再求 $N\times\frac{k}{100}$ 的值，令此值為 i。 ● 如果 $i\notin\mathbb{Z}^+$（正整數），而 m 是大於 i 的最小整數，那麼排列在第 m 位的資料值就是這群資料的第 k 百分位數。 ● 如果 $i\in\mathbb{Z}^+$（正整數），那麼排列第 i 位與第 i+1 位的資料值的算數平均數，就是這群資料的第 k 百分位數。

註 3：康軒、南一、翰林等定義及計算方法相同，故做同一討論。

註 4：「累積相對次數」是先求其相對次數，再求累積相對次數，即依序累加至各筆或各組的相對次數。

示例與說明

未分組資料：

（一）百分位數的求法（$N \times \frac{k}{100}$ 為正整數）

【例】：一組資料有 30 個連續奇數：1、3、5、7、9、11、13…57、59；求該組資料的第 30 百分位數。

數值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數值	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
排序	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

解：設第 30 百分位數為P_{30}，

1. 30 × 30%＝9，表示這組資料中至少要有 9 個數小於或等於P_{30}，參考上表：資料由小排到大的第 9 的筆數值是 17。

   （1） 若P_{30}＝17，則小於或等於 17 的數共有 9 個。

   （2） 若P_{30}＝17.1，則小於或等於 17.1 的數共有 9 個。

   （3） 其它：如P_{30}＝17. 2、17.3、17.4…等也都符合條件。

   亦即所有大於或等於 17 的數都可能是P_{30}：$P_{30} \geqq 17$……①

2. 30 ×（1－30%）＝21，表示這組資料中至少要有 21 個數大於或等於P_{30}，參考上表：資料由大排到小的第 21 的筆數值是 19。

   （1）若P_{30}＝19，則大於或等於 19 的數共有 21 個。

   （2）若P_{30}＝18.9，則大於或等於 18.9 的數共有 21 個。

   （3）其它：如P_{30}＝18.8、18.7、18.6…等也都符合條件。

   亦即所有小於或等於 19 的數都可能是P_{30}：$P_{30} \leqq 19$……②

   由①和②知：$17 \leqq P_{30} \leqq 19$，也就是說介於第 12 筆與第 13 筆之間的所有數值都可以是這組資料的第 30 百分位數。通常以 17 和 19 的平均來表示，亦即 18 來表示第 30 百分位數。

（二）百分位數的求法（$N\times\frac{k}{100}$ 不為正整數）

【例】：一組資料有 30 個連續奇數：1、3、5、7、9、11、13…57、59；求該組資料的第 69 百分位數。

數值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數值	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
排序	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

解：設第 69 百分位數為 P_{69}，

1. 30 × 69%＝20.7，表示這組資料中至少要有 20.7 個數（取整數 21 個）小於或等於 P_{69}，參考上表：資料由小排到大的第 21 筆數值是 41。

（1）若 P_{69}＝41，則小於或等於 41 的數共有 21 個。

（2）若 P_{69}＝41.1，則小於或等於 41.1 的數共有 21 個。

（3）其它：如 P_{69}＝41.2、41.3、41.4…等也都符合條件。

亦即所有大於或等於 41 的數都可能是 P_{69}：$P_{69}\geqq 41$……①

2. 30 ×（1－69%）＝9.3，表示這組資料中至少要有 9.3 個數（取整數 10 個）大於或等於 P_{69}，參考上表：資料由大排到小的第 10 的筆數值是 41。

（1）若 P_{69}＝41，則大於或等於 41 的數共有 10 個。

（2）若 P_{69}＝40.9，則大於或等於 40.9 的數共有 10 個。

（3）其它：如 P_{69}＝40.8、40.7、40.6…等也都符合條件。

亦即所有小於或等於 41 的數都可能是 P_{69}：$P_{69}\leqq 41$……②

由①和②知：這組資料的第 69 百分位數是 41。

（B）

<table>
<tr><th>版本說明</th><th>部編[註 5]</th></tr>
<tr><td>定　　義</td><td>將整份資料由小排到大，畫一個全長為 1 並做 100 等分的參考尺。則刻度$\frac{k}{100}$所指的資料就是P_k，除非$\frac{k}{100}$正好指在兩個資料的中間(這時 N 是 100 的倍數)，此時P_k是這兩筆資料的平均。
$$\begin{cases} \frac{\#\{x \mid x \le a_i\}}{N} \ge \frac{k}{100} \\ \frac{\#\{x \mid x \ge a_i\}}{N} \ge 1-\frac{k}{100} \end{cases}$$
其中 N 是資料總筆數，$\#\{x \mid x \le a_i\}$ 表示小於或等於 a_i 的資料數目。</td></tr>
<tr><td>計算方法</td><td>百分位數可以利用相對累積次數分配表來求得。為了敘述方便，將用符號來表示。
i：資料次序，　a_i：第 i 個資料值，n_i：資料值 a_i 出現的次數，l_i：從 a_1 到 a_i 的累積次數，q_i：相對累積次數（$q_i=\frac{l_i}{N}$），N：資料總筆數，如下表：
<table>
<tr><th>i</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>…</th><th>m</th></tr>
<tr><td>資料值</td><td>a_1</td><td>a_2</td><td>a_3</td><td>…</td><td>a_m</td></tr>
<tr><td>次　數</td><td>n_1</td><td>n_2</td><td>n_3</td><td>…</td><td>n_m</td></tr>
<tr><td>累積次數</td><td>l_1</td><td>l_2</td><td>l_3</td><td>…</td><td>l_m</td></tr>
<tr><td>相對累積次數[註6]</td><td>q_1</td><td>q_2</td><td>q_3</td><td>…</td><td>q_m</td></tr>
</table>
求第 k 百分位數的規則[註 7]（其中 k ＝1、2、……、99）：
(1)如果有 q_i 正好等於 $\frac{k}{100}$，則第 k 百分位數$P_k=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ 。
(2)如果$q_{i-1}<\frac{k}{100}<q_i$（或$\frac{k}{100}<q_1$），則第 k 分位數$P_k=a_i$（或a_1）。</td></tr>
</table>

註 5：部編版之計算方法與其他三家版本不同，但計算結果相同。

註 6：「相對累積次數」是先找出累積次數，再求其相對累積次數。即將累加至各筆或各組資料的次數除以總次數所得的比值。

註 7：部編版百分位數的的規則證明，在部編版教師手冊中有更詳細的說明，提供參考。

示例與說明

未分組資料：

（一）百分位數的求法（q_i 等於$\frac{k}{100}$）

【例】：一組資料有 30 個連續奇數：1、3、5、7、9、11、13…57、59；求該組資料的第 30 百分位數。

數值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數值	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
排序	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
資料值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
次 數	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
累積次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
相對累積次數	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{20}{30}$	$\frac{21}{30}$	$\frac{22}{30}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{24}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{26}{30}$	$\frac{27}{30}$	$\frac{28}{30}$	$\frac{29}{30}$	1

解：設第 30 百分位數為P_{30}，

資料值：$a_9=17$， $a_{10}=19$，次數：$n_9=1$， $n_{10}=1$，

累積次數：$l_9=9$， $l_{10}=10$，相對累積次數：$q_9=\frac{9}{30}$，$q_{10}=\frac{10}{30}$，

由於 $q_9=\frac{9}{30}=\frac{30}{100}$ 所以 $P_{30}=\frac{a_9+a_{10}}{2}=\frac{17+19}{2}=18$ 。

（二）百分位數的求法（q_i 不等於$\frac{k}{100}$）

【例】：同上，求該組資料的第 69 百分位數。

解：設第 69 百分位數為P_{69}，

資料值：$a_{20}=39$，$a_{21}=41$，次數：$n_{20}=1$， $n_{21}=1$，

累積次數：$l_{20}=20$，$l_{21}=21$，相對累積次數：$q_{20}=\frac{20}{30}$，$q_{21}=\frac{21}{30}$，

由於 $q_{20}=\frac{20}{30}<\frac{69}{100}<q_{21}=\frac{21}{30}=\frac{70}{100}$ 所以 $P_{69}=a_{21}=41$ 。

綜合上述討論，可歸納如下：

（1）康軒版、南一版、翰林版之百分位數定義與計算方法是相同的。

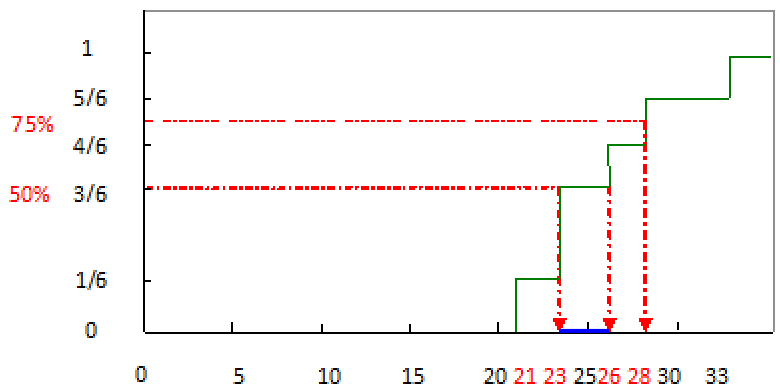
（2）部編版之百分位數計算方法與其它三個版本不同且複雜，但都可以了解個別資料在一群資料中的相對位置。例如：全國國三同學的身高資料、體重資料或者基測的分數資料，在這些情況中，資料的相對次數，或累積相對次數一般都用「百分率」來表示，因此很自然的會考慮以相對應的百分位數，來分析資料的分佈狀況。

（3）康軒（南一、翰林）、部編「未分組資料」百分位數之求法：

除了利用上述兩種百分位數公式計算以外，還可利用「累積百分率圖」反求之，即：由縱軸之百分率 P 的位置作一水平線與圖中之階梯狀線相交，由交集做鉛直線取得之橫軸之區間，若求之值為唯一解，則為其百分位數。若反求之值不唯一，則取其中點。（95 正式綱要）

【例】：原始資料為 21，23，23，26，28，33 之累積相對次數分配圖次數表。

資　料	21	23	26	28	33
次 數	1	2	1	1	1
相對次數	1/6	2/6	1/6	1/6	1/6
累積相對次數	1/6	3/6	4/6	5/6	6/6



累積相對次數分配圖（又稱經驗分配圖）

（1）75 百分位數為 28。

（2）50 百分位數可為〔23, 26〕中之任何值，其取法不唯一；但為能配合九年一貫能力指標 **9-d-07** 中中位數之慣用求法，則取中點 24.5 為 50 百分位數。

【說明】:

75 百分位數＝28	5/6＞0.83≧0.75	2/6＞0.33≧0.25
50 百分位數＝23	3/6＝0.5 ≧0.5	5/6＞0.83≧0.5
50 百分位數＝24.5	3/6＝0.5 ≧0.5	3/6＝0.5 ≧0.5
50 百分位數＝26	4/6＞0.66≧0.5	3/6＝0.5≧0.5

（二）四分位數定義及計算方法

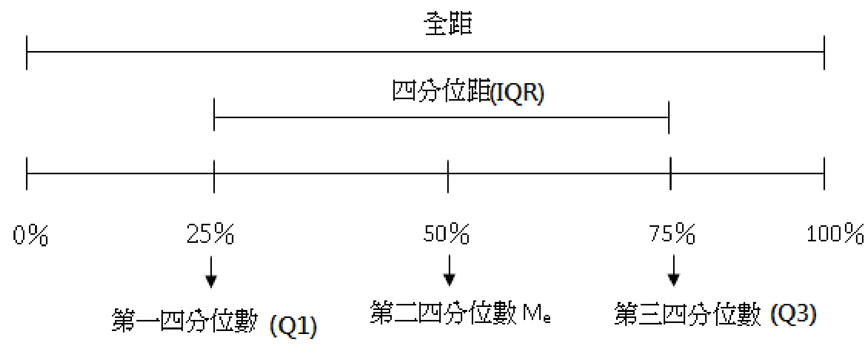
國中版本：（A）康軒、南一、翰林（B）部編

（A）

版本說明	康軒、南一、翰林[註 8]
定　義[註 9]	將資料由小到大排列後，可以找到 3 個數值將整群資料分成四個部分，這四個部分的資料個數「大致」一樣多。這 3 個等分的點分別稱為第一四分位數（Q_1）、第二四分位數（Q_2）、第三四分位數（Q_3）四分位數。亦即 (1)至少有四分之一的資料小於或等於 Q_1，也至少有四分之三的資料大於或等於 Q_1，Q_1 也稱為這群資料的第 25 百分位數。 (2)Q_2 就是中位數，也稱為第 50 百分位數。 (3)至少有四分之三的資料小於或等於 Q_3，也至少有四分之一的資料大於或等於 Q_3，Q_3 也稱為這群資料的第 75 百分位數。 Q_1、Q_2、Q_3 在整體資料位置的分布情形如下圖，第三四分位數與第一四分位數的差(Q_3-Q_1)稱為四分位距(簡稱 IQR)。

註 8：康軒、南一、翰林之定義及計算方法相同，故做同一討論。

註 9：此處四分位數定義是以南一版為代表，即將資料等分成四段來定義，但計算採百分位數方法即 Q_1 以 25 百分位數、M_e 以 50 百分位數、Q_3 以 75 百分位數來定義，所以 Q_1 、M_e、Q_3 是百分位數的特例。

	
計算方法	假設一群未分組的資料共有 N 個數值，先將資料按照由小到大的順序排列：令 $i(r) = N \times \frac{25r}{100}$ ，$(r=1,2,3)$，$i(r)$：第 r 四分位數位置 (1)如果 $i(r) \notin \mathbb{Z}^+$（正整數），而 m 是大於 $i(r)$的最小整數，那麼排在第 m 位的資料值就是這群資料的第 r 四分位數。 (2)如果$i(r) \in \mathbb{Z}^+$（正整數），那麼排列在第$i(r)$ 位與第$i(r)+1$ 位的資料值的算數平均數就是這群資料的第 r 四分位數。
示例與說明	【例 1】： $N=9$：2、2、3、3、3、4、5、6、7 令 $i(1)=9\times\frac{25\times1}{100}=2\frac{1}{4}$ ， $i(3)=9\times\frac{25\times3}{100}=6\frac{3}{4}$ 則 $Q_1=x_3=3$ ， $Q_3=x_7=5$ 【例 2】：$N=12$：0、0、0、0、0、1、1、1、1、2、4、10 令 $i(1)=12\times\frac{25\times1}{100}=3$， $i(3)=12\times\frac{25\times3}{100}=9$ 則 $Q_1=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{0+0}{2}=0$ ， $Q_3=\frac{x_9+x_{10}}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

（B）

版本說明	部編[註 10]
定　　義	將資料依序由小到大排列，然後模仿取中位數的想法，標出資料由左往右 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的位置。其中標 $\frac{1}{4}$ 的位置把資料切成兩部分，

註 10：部編版之計算方法與其他三家版本不同，但計算結果相同。

<table>
<tr><td></td><td>
左右的比例是 1：3。而標 $\frac{3}{4}$ 的位置則把資料切成兩部分，左右的比例是 3：1。運用中位數的類似想法，把切在 $\frac{1}{4}$ 的這個數定成第一四分位數（記為 Q_1），切在 $\frac{3}{4}$ 的這個數定成第三四分位數（記為 Q_3），而第二四分位數 Q_2 就是中位數。

舉例說明：

【例 1】：當資料數是 4 的倍數時（$N=12=4k$），

0、0、0、0、0、1、1、1、1、2、4、10
▲ ▲ ▲
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$
第一四分位數 中位數 第三四分位數

【例 2】：當資料數是 4 的倍數加 1 時（$N=9=4k+1$），

2、2、3、3、3、4、5、6、7
▲ ▲ ▲
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$
Q_1 Q_2 Q_3

圖上標 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的位置，可以將資料分割成 1：3 和 3：1 的比例
</td></tr>
<tr><td>計算方法</td><td>
利用相對累積次數 q_i，則 Q_1 和 Q_3 的取法如下[註 11]：

（1）第一四分位數的取法：

● 如果 q_i 等於 $\frac{1}{4}$（此時 N 是 4 的倍數），約定 $Q_1=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$

● 如果 $q_{i-1}<\frac{1}{4}<q_i$（或 $\frac{1}{4}<q_1$），則 $Q_1=a_i$(或 $Q_1=a_1$)
</td></tr>
</table>

註 11：部編版四分位數的計算方法，在部編版教師手冊中有更詳細的說明和證明，提供參考。

同理：

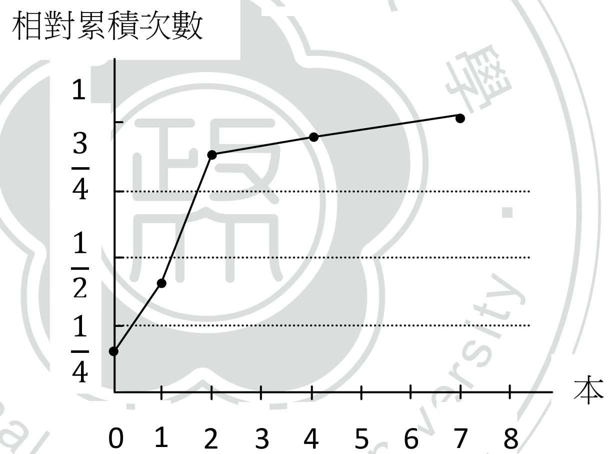
（2）第三四分位數取法：

- 如果 q_i等於 $\frac{3}{4}$，約定 $Q_3=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$
- 如果 $q_{i-1}<\frac{3}{4}<q_i$ (或 $\frac{3}{4}<q_1$)，則 $Q_3=a_i$(或 $Q_3=a_1$)

示例與說明

【例】:

資 料 值（a_i）	0	1	2	4	7
次　　數（n_i）	3	4	6	1	1
累積次數（l_i）	3	7	13	14	15
相對累積次數（q_i）	$\frac{3}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	1



$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=4$，$a_5=7$

$n_1=3$，$n_2=4$，$n_3=6$，$n_4=1$，$n_5=1$

$l_1=3$，$l_2=7$，$l_3=13$，$l_4=14$，$l_5=15$

$q_1=\frac{3}{15}$，$q_2=\frac{7}{15}$，$q_3=\frac{13}{15}$，$q_4=\frac{14}{15}$，$q_5=1$，

由於　$q_1=\frac{3}{15}<\frac{1}{4}<q_2=\frac{7}{15}$　所以　$Q_1=a_2=1$

由於　$q_2=\frac{7}{15}<\frac{3}{4}<q_3=\frac{13}{15}$　所以　$Q_3=a_3=2$

綜合上述討論，可歸納如下：

（1）康軒版、南一版、翰林版之四分位數定義與計算方法是相同的。

（2）部編版定義四分位數和四分位距的想法，原則上合理又清楚。但是在資料筆數為 4 的倍數加 2 或 4 的倍數加 3 時，會發現找不出適當的點，可以將資料分割成 1：3 或 3：1 的比例，這就是部編版為什麼會利用相對累積次數分配表的方法來討論並解決問題。

【例 1】：當資料數是 4 的倍數加 2 時（$N=10=4k+2$），

1 、 1 、 2 、 2 、 3 、 4 、 5 、 5 、 6 、 6

▲	▲	▲
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
第一四分位數	中位數	第三四分位數

圖上標 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的位置，是將資料分割成 2：7 和 7：2 的比例，而不是分割成 1：3 或 3：1 的比例。

【例 2】：當資料數是 4 的倍數加 3 時（$N=11=4k+3$），

2、3、4、4、5、6、7、7、8、9、10

▲	▲	▲
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
Q_1	Q_2	Q_3

圖上標 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的位置，是將資料分割成 2：8 和 8：2 的比例，而不是分割成 1：3 或 3：1 的比例。

（3）根據部編版之四分位數計算方法中，如果將計算 Q_1 的規則中的 $\frac{1}{4}$ 換成 $\frac{1}{2}$，發現這就是取中位數的規則。【說明如下】：

- 若 $q_i=\frac{1}{2}$ 時（此時 N 是偶數），$Q_2=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$，符合偶數資料筆數取兩項平均的規則。

- 若 $q_{i-1} < \frac{1}{2} < q_i$（此時 N 是奇數），則 $Q_2 = a_i$，表示資料依序的中點在 a_i 資料中，所以和中位數的取法也一樣。

（4）國中版本所採用的定義，有一個特色，它不但是一個一致的方法，可以套用到二分位數（即中位數）、四分位數、百分位數等 N 分位數，而且它所取得的值都是一致的，譬如說二分位數等於第二四分位數，也等於第 50 百分位數。又例如第一四分位數就是第 25 百分位數，第三四分位數就是第 75 百分位數。

二、高中版本

高中總計有龍騰、康熙、全華、翰林、南一、三民等版本，不過四分位數的計算方法可以歸納成兩種：其一為南一、三民仍採用國中公式（百分位數）。其他一律採用龍騰（康熙、全華、翰林）版本為代表的高中四分位數公式。

（A）

版本說明	龍騰、康熙、全華、翰林
定　義	龍騰：（1）所謂四分位數，就是將資料從小到大排列後，分成四等分的分界點。 （2）當資料為連續數值時，四分位數的定義方式與中位數定義在第 50 百分位所在的位置類似，即第一四分位數 Q_1 是第 25 百分位數所在的位置，第三四分位數 Q_3 是第 75 百分位數所在的位置。 康熙：假設一筆數量資料 X 共有 N 項，經重排大小次序得： $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots\cdots \leqq x_N$ 將已排序的資料等分成四段，其中有三個分界點，最小的一個稱為第一四分位數，以 Q_1 表示；其次一個即為中位數 Me；最大的一個稱為第三四分位數，以 Q_3 表示。

	全華：當一組資料由小到大依序排列後， ● 位於四分之一處的值稱為第一四分位數（Q_1）。 ● 位於四分位二處的值稱為中位數，簡記為 Me；（亦稱第二四分位數）。 ● 位於四分位三處的值稱為第三四分位數（Q_3）。 翰林：對於筆數較少的數據，依由小到大的次序先找到中位數，去除中位數後將數據分成兩組，這兩組的中位數即分別是第一四分位數與第三四分位數。
計算方法	未分組資料： ● 先求出中位數（Me）。 ● 第一四分位數是中位數左邊（不含中位數）所有數字的中位數。 ● 第三四分位數是中位數右邊（不含中位數）所有數字的中位數。 注意：計算四分位數時與中位數一樣，即四分位數的位置也與數值個數為奇數或偶數有關。 ● 當 N 為奇數時，令 $k=\frac{N+1}{2}$，中位數 $Me=x_k$，則 前段資料x_1，x_2，…，x_{k-1}的中位數為 Q_1， 後段資料x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_N的中位數為 Q_3。 ● 當 N 為偶數時，令 $k=\frac{N}{2}$，中位數 $Me=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})$，則 前段資料$x_1$，$x_2$，…，$x_k$的中位數為 Q_1， 後段資料x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_N的中位數為 Q_3。
示例與說明	未分組資料：

	【例 1】：N＝8 3，5，6，6，9，11，12，14 的中位數為 7.5 前一半 3，5，6，6 的中位數為 5.5 後一半 9，11，12，14 的中位數為 11.5 故 Q_1 ＝ 5.5，Q_3 ＝11.5。 【例 2】：N＝9 3，5，6，6，9，11，12，14，16 的中位數為 9 前一半 3，5，6，6 的中位數為 5.5 後一半 11，12，14，16 的中位數為 13 故 Q_1 ＝ 5.5，Q_3 ＝ 13 。

（B）

版本說明	南一、三民
定　　義	南一：第一四分位數是資料由小到大排在前 $\frac{1}{4}$ 位置的數，第三四分位數是資料是由小到大排在前 $\frac{3}{4}$ 位置的數。 三民[註 12]：在一群資料中，中位數亦稱為第 2 四分位數，以符號 Me 或 Q_2 表之。在中位數之前的資料的中位數稱為第一四分位數，以符號 Q_1 表之。在中位數之後的資料的中位數稱作第三四分位數，以符號 Q_3 表之。
計算方法	未分組資料： 先將 N 個資料數值依小到大排序，再計算四分位數位置： 令 $i(r)=N\times\frac{r}{4}$ ，(r=1，2，3)

註 12：三民版之四分位數定義與龍騰相同，但計算方法採百分位數公式。所謂高中版本不同，純粹是以計算方法不同來區分。

	● 若$i(r) \notin \mathbb{Z}^+$（正整數），則進位到下一個比 $i(r)$大的整數，而 Q_r 為比$i(r)$大的下一個整數位置所對應之資料。 ● 若$i(r) \in \mathbb{Z}^+$（正整數），則 Q_r 為第$i(r)$個位置所對應資料與第$i(r)+1$ 個位置所對應資料的平均。 即 $Q_r=\frac{x_{i(r)}+x_{i(r)+1}}{2}$ 由四分位數的求法可以得到下列四分位數的性質： 一組資料的第 r 四分位數 Q_r ($r=1，2，3$)至少有$\frac{r}{4}$的資料小於或等於 Q_r，也至少有$(1-\frac{r}{4})$的資料大於或等於 Q_r。
示例與說明	與國中南一版計算方法相同。

綜合上述討論，可歸納如下：

（1）高中有關四分位數的定義，目前只有南一與國中的定義相同，龍騰與翰林等

都還是沿用過去的定義。

（2）高中有關四分位數計算方法（未分組）有兩種版本；除了南一、三民採用與國中相同公式（百分位數）以外，其它版本的作法如下：

- 先將數據資料值排序由小排到大找出中位數（亦稱第 2 四分位數）。
- 找出中位數左邊（不含中位數）所有數值的中位數稱為第 1 四分位數以 Q_1 表示。
- 找出中位數右邊（不含中位數）所有數值的中位數稱為第 3 四分位數以 Q_3 表示。

（3）高中版本（南一、三民）計算「未分組資料」四分位數位置時，採用 $i(r)=\frac{rN}{4}$，此與大學統計學教科書、電腦軟體等求「未分組資料」四分位數位置時有多家公式不同之處。

三、其他作法（大學統計學教科書、統計電腦軟體）

學　　者	四　分　位　數　計　算　方　法（未分組資料）
Bowley [註 13] （1972）	$i(r)=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}$ ，$\left(r=1,2,3\right)$， $i(r)$：第 r 四分位數位置
Minitab、 SPSS、 胡坤德[註 14] （1972）	設 N 項數列按大小次序排列，可得 $N+1$ 個間隔，分成四等份，每等份有 $\frac{N+1}{4}$ 間隔，因此： ● 先找出 Q_r 的位置：$i(r)=\frac{r(N+1)}{4}$，$(r=1，2，3)$ ● 如果$i(r)\in\mathbb{Z}^{+}$（正整數），則位置所對應的數值即為 Q_r。 ● 如果$i(r)\notin\mathbb{Z}^{+}$（正整數），則在$i(r)$與$i(r)+1$ 兩個位置所對應的數值之間，用線性插植插法來估計出 Q_r。
Excel 2000	$i(r)=\frac{r(N-1)}{4}+1$，$(r=1,2,3)$，$i(r)$：第 r 四分位數位置 第一四分位數在 $\frac{N+3}{4}$ 位置 第二四分位數在 $\frac{2N+2}{4}$ 位置 第三四分位數在 $\frac{3N+1}{4}$ 位置 ● 如果$i(r)\in\mathbb{Z}^{+}$（正整數），則位置所對應的數值即為 Q_r。 ● 如果$i(r)\notin\mathbb{Z}^{+}$（正整數），則在$i(r)$與$i(r)+1$ 兩個位置所對應的數值之間，用線性插植插法來估計出 Q_r。
Mendenhall & Sincich (1995)	$i(r)=\left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$，[　]：高斯函數，$i(r)\in\mathbb{Z}^{+}$（正整數） $i(r)$：第 r 四分位數位置$(r=1，2，3)$

註 13：A.L.Bowley(1901)，Elements of　Statistics，6th，P.107

註 14：胡坤德(1972)，中國統計學報第十卷第三期

鄭堯拌 (1940)、Moore & McCabe (2002)	$i(r)=\begin{cases}\frac{r(N+1)}{4} & ，N：奇數 \\ \frac{rN}{4}+\frac{1}{2} & ，N：偶數\end{cases}$ $i(r)$：第 r 四分位數位置(r＝1，2，3)
Tukey、Hoaglin (1983)	$i(r)=\begin{cases}\frac{r(N-1)}{4}+1 & ，N：奇數 \\ \frac{rN}{4}+\frac{1}{2} & ，N：偶數\end{cases}$ $i(r)$：第 r 四分位數位置(r＝1，2，3)
Moore (2002) (鄭惟厚譯）	在「統計學的世界」這本書曾提到計算四分位數的步驟如下： ● 將數據資料值排序由小排到大找出中位數(亦稱第 2 四分位數) ● 找出中位數左邊所有數值的中位數稱為第 1 四分位數(Q_1) ● 找出中位數右邊所有數值的中位數稱為第 3 四分位數(Q_3)

綜合上述討論，可將前述大學統計學教科書、統計電腦軟體之四分位數求法歸納如下：

（1）大學統計學教科書、統計電腦軟體之「未分組資料」求四分位數時的作法：

- 如果$i(r)\in\mathbb{Z}^{+}$（正整數），則位置所對應的數值即為 Q_r。
- 如果$i(r)\notin\mathbb{Z}^{+}$（正整數），則在$i(r)$與$i(r)+1$ 兩個位置所對應的數值之間，用線性插植插法來估計出 Q_r。

【說明】：$x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_p\le x_{p+1}\le\cdots\le x_N$

若 $i(r)=p+s$，($p\in\mathbb{Z}^{+}$，$\mathbb{Z}^{+}$：正整數，$0<s<1$，$r=1,2,3$)

$$則\ Q_r=\begin{cases}x_p & ；i(r)\in\mathbb{Z}^{+} \\ x_p+s\left(x_{p+1}-x_p\right) & ；i(r)\notin\mathbb{Z}^{+}\end{cases}$$

（2）大學統計學教科書中，鄭堯拌、Moore & McCabe(2002)及 Tukey & Hoaglin 等人(1983)之四分位數計算方法，採用 A.L.Bowley、Excel、 Minitab 與 SPSS 之奇、偶數混合型式。

四、將國中、高中與大學統計學教科書及電腦軟體中相關之四分位數公式歸納整理如下，總共有八組公式但實際上只有六類公式，因為公式七與公式八是由公式一、公式二、公式三所衍生出來的混合型式。

【說明】:

公式七：奇數部分同公式一，偶數部分同公式二。

公式八：奇數部分同公式三，偶數部分同公式二。

<table>
<tr><td colspan="2">四分位數方法</td><td colspan="2">Q_r（第 r 四分位數）(r＝1，2，3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">樣本 / 公式</td><td>N(奇數)</td><td>N(偶數)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">公式一</td><td rowspan="2">Minitab、SPSS、胡坤德（1972）</td><td>$i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}$</td><td>$i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}$</td></tr>
<tr><td>Q_r(線性插值法)</td><td>Q_r(線性插值法)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">公式二</td><td rowspan="2">Bowley（1901）</td><td>$i_2(r)=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}$</td><td>$i_2(r)=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>Q_r(線性插值法)</td><td>Q_r(線性插值法)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">公式三</td><td rowspan="2">Excel 2000</td><td>$i_3(r)=\frac{r(N-1)}{4}+1$</td><td>$i_3(r)=\frac{r(N-1)}{4}+1$</td></tr>
<tr><td>Q_r(線性插值法)</td><td>Q_r(線性插值法)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">公式四</td><td rowspan="2">國 中[註 15]</td><td>$i_4(r)=\frac{rN}{4}$</td><td>$i_4(r)=\frac{rN}{4}$</td></tr>
<tr><td>$Q_r=x_{[i_4(r)]+1}$ ， $i_4(r)\notin\mathbb{Z}^+$
[ ]：高斯函數</td><td>$Q_r=\begin{cases} x_{[i_4(r)]+1}, & i_4(r)\notin\mathbb{Z}^+ \\ \frac{x_{i_4(r)}+x_{i_4(r)+1}}{2}, & i_4(r)\in\mathbb{Z}^+ \end{cases}$</td></tr>
</table>

註 15：國中版本有兩種不同的計算方法，其一為康軒（南一、翰林）版，另一為部編版，但兩者計算結果都相同。因康軒版（南一、翰林）之計算較部編版簡單，故一律採用康軒（南一、翰林）版本代表公式四。

四分位數方法		Q_r（第 r 四分位數）(r ＝1,2,3)	
樣本 公式		**N (奇數)**	**N (偶數)**
公式五	高中[註16]設資料由小到大排列：$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_N$	$N = 4k+1$ ；$\begin{cases} Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \\ Q_3 = \frac{x_{N-k} + x_{N-k+1}}{2} \end{cases}$ $N = 4k+3$；$\begin{cases} Q_1 = x_{k+1} \\ Q_3 = x_{N-k} \end{cases}$	$N = 4k$ ；$\begin{cases} Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \\ Q_3 = \frac{x_{N-k} + x_{N-k+1}}{2} \end{cases}$ $N = 4k+2$；$\begin{cases} Q_1 = x_{k+1} \\ Q_3 = x_{N-k} \end{cases}$
公式六	Mendenhal & Sincich (1995)	$i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$，[ ]：高斯函數	$i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$，[ ]：高斯函數
		$Q_r = x_{i_6(r)}$	$Q_r = x_{i_6(r)}$
公式七	鄭堯拌 (1940)、Moore & McCabe (2002)	$i_7(r) = i_1(r) = \frac{r(N+1)}{4}$	$i_7(r) = i_2(r) = \frac{rN}{4} + \frac{1}{2}$
		Q_r (線性插值法)	Q_r(線性插值法)
公式八	Tukey、Hoaglin (1983)	$i_8(r) = i_3(r) = \frac{r(N-1)}{4} + 1$	$i_8(r) = i_2(r) = \frac{rN}{4} + \frac{1}{2}$
		Q_r (線性插值法)	Q_r (線性插值法)

註 16：由於高中版本的南一、三民採用與國中相同的公式（百分位數），因此，此處高中版本指的是龍騰（康熙、全華、翰林）版本代表公式五。

第三章　八組公式之數學特性

根據前一章歸納整理出有關四分位數之八組公式，由於八組公式的表示法不一，所以各有不同的數學特性，因此會有不同的結果，在此將結果分為相同及相異兩部分進行探討。

一、由於有些公式在不同樣本數之下，會得到相同的估計結果，針對這些類型的公式，可以藉由數學證明來說明它們實際上是相同的，現在我們將透過數學方式加以論證。

定理一：在 $N=4k$、$4k+2$ 時，公式二、公式四、公式五、公式七、公式八的 Q_1、Q_3 之估計值是相同的。（公式七、公式八之偶數部分同公式二）

- 公式二：

令 $i_2(\mathrm{r})=\frac{\mathrm{rN}}{4}+\frac{1}{2}=p+\mathrm{s},(p\in \mathrm{Z}^{+},0<s<1；\mathrm{r}=1,2,3)$

則 $Q_{\mathrm{r}}=\begin{cases}\mathrm{x_p} & ；\mathrm{i_2(r)}\in \mathrm{Z}^{+}\\ \mathrm{x_p}+\mathrm{s}\times(\mathrm{x_{p+1}}-\mathrm{x_p}) & ；\mathrm{i_2(r)}\notin \mathrm{Z}^{+}\end{cases}$

- 公式四（國中）：$x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_N$

令 $i_4(r)=\frac{rN}{4}$，$(r=1,2,3)$ 則 $Q_r=\begin{cases}x_{[i_4(r)]+1}，([\ \ ]:\text{高斯函數}) & ；i_4(r)\notin\mathbb{Z}^{+}\\ \frac{x_{i_4(r)}+x_{i_4(r)+1}}{2} & ；\quad i_4(r)\in\mathbb{Z}^{+}\end{cases}$

- 公式五（高中）：

$x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_k\le x_{k+1}\cdots\le x_{N-k}\le x_{N-k+1}\le\ \cdots\le x_N$

則 $\begin{cases}Q_1=\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\ ,\ Q_3=\dfrac{x_{N-k}+x_{N-k+1}}{2} & ；\text{當}N=4k\ ,4k+1\\ Q_1=x_{k+1}\ ,\ Q_3=x_{N-k} & ；\text{當}N=4k+2,4k+3\end{cases}$

<pf>

（一）若 $N=4k$

且 $\begin{cases}i_2(\mathrm{r})=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}=\frac{r(4k)}{4}+\frac{1}{2}=rk+\frac{1}{2}=p+s\notin\mathbb{Z}^{+}；(r,k\in\mathbb{Z}^{+},0<s<1)\\ i_4(\mathrm{r})=\frac{rN}{4}=\frac{r(4k)}{4}=rk\in\mathbb{Z}^{+}\end{cases}$

又 $\begin{cases} i_2(1)=k+\frac{1}{2}, & i_4(1)=k \\ i_2(3)=3k+\frac{1}{2}, & i_4(3)=3k \end{cases}$

則 $\begin{cases} Q_1 \overset{(2)}{=} x_k+\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k) \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}(x_k+x_{k+1}) \overset{(4)}{=} \frac{x_{i_4(1)}+x_{i_4(1)+1}}{2} & (因 i_4(1)\in\mathbb{Z}^+) \\ Q_3 \overset{(2)}{=} x_{3k}+\frac{1}{2}(x_{3k+1}-x_{3k}) \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}(x_{3k}+x_{3k+1}) \overset{(4)}{=} \frac{x_{i_4(3)}+x_{i_4(3)+1}}{2} & (因 i_4(3)\in\mathbb{Z}^+) \end{cases}$

得　證

（二）若 $N=4k+2$

且 $\begin{cases} i_2(r)=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}=\frac{r(4k+2)}{4}+\frac{1}{2}=rk+\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=p+s, (r,k\in\mathbb{Z}^+ ; 0<s<1) \\ i_4(r)=\frac{rN}{4}=\frac{r(4k+2)}{4}=rk+\frac{r}{2}, \ (i_4(2)\in\mathbb{Z}^+) \end{cases}$

又 $\begin{cases} i_2(1)=k+1=p\in\mathbb{Z}^+, & i_4(1)=k+\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}^+ \\ i_2(3)=3k+2=p\in\mathbb{Z}^+, & i_4(3)=3k+\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}^+ \end{cases}$

則 $\begin{cases} Q_1 \overset{(2)}{=} x_p \overset{(4)}{=} x_{\left[k+\frac{1}{2}\right]+1} \overset{(5)}{=} x_{k+1} (因 i_4(1)\notin\mathbb{Z}^+) \\ Q_3 \overset{(2)}{=} x_p \overset{(4)}{=} x_{\left[3k+\frac{3}{2}\right]+1} \overset{(5)}{=} x_{3k+2} (因 i_4(3)\notin\mathbb{Z}^+) \end{cases}$　　得　證

【結論】：由（一）、（二）證明得到，當 $N=4k$、$N=4k+2$ 時，公式二、公式四、公式七、公式八之結果與公式五相同。

定理二：在 $N=4k+3$ 時，公式一、公式四、公式五、公式六、公式七的 Q_1、Q_3 之值是相同的。（公式七之奇數部分同公式一）

- 公式一（Minitab）：$x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_p\le x_{p+1}\le\cdots\le x_N$

  令 $i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}=p+s$；$(\mathrm{p}\in\mathbb{Z}^+, 0<s<1)$

  則 $Q_r=\begin{cases} x_p & ; i_1(r)\in\mathbb{Z}^+ \\ x_p+s(x_{p+1}-x_p) & ; i_1(r)\notin\mathbb{Z}^+ \end{cases}$

註：等號上面 (2)、(4)、(5)分別代表公式二、公式四、公式五。

- 公式四（國中）：$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_N$

令$i_4(r) = \dfrac{rN}{4}, (r=1,2,3)$ 則 $Q_r = \begin{cases} x_{[i_4(r)]+1}\ ,\ ([\ \ ]:\text{高斯函數})\ ; & i_4(r) \notin \mathbb{Z}^+ \\ \dfrac{x_{i_4(r)} + x_{i_4(r)+1}}{2}\ ; & i_4(r) \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

- 公式五（高中）

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_k \le x_{k+1} \le \cdots \le x_{N-k} \le x_{N-k+1} \le \cdots \le x_N$

$$\begin{cases} Q_1 = x_{k+1}\ , \quad Q_3 = x_{N-k} & ;\text{當}N=4k+2, 4k+3, (k \in \mathbb{Z}^+) \\ Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\ , \quad Q_3 = \frac{x_{N-k}+x_{N-k+1}}{2} & ;\text{當}N=4k, 4k+1, (k \in \mathbb{Z}^+) \end{cases}$$

- 公式六

令 $i_6(r) = \left[\dfrac{r(N+1)}{4}\right]$，$(r=1,2,3)$ 則 $Q_r = x_{i_6(r)}$；$i_6(r) \in \mathbb{Z}^+$ $([\ \ ]:\text{高斯函數})$

<pf>

若 $N=4k+3$

且$\begin{cases} i_1(r) = i_6(r) = \left[\frac{r(4k+3+1)}{4}\right] = [rk+r] = rk+r = p \in \mathbb{Z}^+，(r,\ k \in \mathbb{Z}^+) \\ i_4(r) = \frac{r(4k+3)}{4} = rk + \frac{3}{4}r \notin \mathbb{Z}^+，(r,\ k \in \mathbb{Z}^+) \end{cases}$

又$\begin{cases} i_1(1) = i_6(1) = k+1\ ,\ i_4(1) = k + \frac{3}{4} \\ i_1(3) = i_6(3) = 3k+3\ ,\ i_4(3) = 3k + \frac{9}{4} \end{cases}$

則$\begin{cases} Q_1 \overset{(1)}{=} x_p \overset{(5)}{=} x_{k+1} \overset{(4)}{=} x_{\left[k+\frac{3}{4}\right]+1} \overset{(6)}{=} x_{[k+1]} (\text{因}i_4(1) \notin \mathbb{Z}^+) \\ Q_3 \overset{(1)}{=} x_p \overset{(5)}{=} x_{3k+3} \overset{(4)}{=} x_{\left[3k+\frac{9}{4}\right]+1} \overset{(6)}{=} x_{[3k+3]} (\text{因}i_4(3) \notin \mathbb{Z}^+) \end{cases}$ 　　得 證

【結論】：由以上證明得到當 $N=4k+3$ 時，公式一、公式四、公式六、公式七之結果與公式五相同。

註：等號上面 (1)、(4)、(5)、(6)分別代表公式一、公式四、公式五、公式六。

定理三：在 $N=4k+1$ 時，有以下兩種主要結果，其 Q_1、Q_3 之值是相同的。

(一)公式一（或公式七）、公式五之結果相同。（公式七之奇數部分同公式一）

(二)公式三（或公式八）、公式四之結果相同。（公式八之奇數部分同公式三）

(一)

- 公式一（Minitab）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_p \le x_{p+1} \le \cdots \le x_N$

令 $i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}=p+s$；$(p \in \mathbb{Z}^+, 0<s<1)$

則 $Q_r=\begin{cases} x_p & ;\ i_1(r) \in \mathbb{Z}^+ \\ x_p+s\left(x_{p+1}-x_p\right) & ;\ i_1(r) \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

- 公式五（高中）：

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_k \le x_{k+1} \cdots \le x_{N-k} \le x_{N-k+1} \le \cdots \le x_N$

$\begin{cases} Q_1=x_{k+1} \quad ,\ Q_3=x_{N-k} & ;\ \text{當 } N=4k+2, 4k+3, (k \in Z^+) \\ Q_1=\frac{x_k+x_{k+1}}{2} \quad ,\ Q_3=\frac{x_{N-k}+x_{N-k+1}}{2} & ;\ \text{當 } N=4k, 4k+1, (k \in Z^+) \end{cases}$

<pf>

若 $N=4k+1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$， r=1,2,3)

令 $i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}=\frac{r(4k+2)}{4}=rk+\frac{1}{2}r=p+s, (p=rk \in \mathbb{Z}^+, 0<s<1)$

且 $i_1(1)=k+\frac{1}{2}=p+s \notin \mathbb{Z}^+$，$i_1(3)=3k+\frac{3}{2}=(3k+1)+\frac{1}{2}=p+s \notin \mathbb{Z}^+$

則 $\begin{cases} Q_1 \overset{(1)}{=} x_k+\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k) \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}(x_k+x_{k+1}) \\ Q_3 \overset{(1)}{=} x_{3k+1}+\frac{1}{2}(x_{3k+2}-x_{3k+1}) \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}(x_{3k+2}+x_{3k+1}) \end{cases}$ 得 證

註：等號上面 (1)、(5)分別代表公式一、公式五。

(二)

- 公式三（Excel）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_p \le x_{p+1} \le \cdots \le x_N$

令 $i_3(r) = \frac{r(N-1)}{4} + 1 = p + s$ ，（$p \in \mathbb{Z}^+, 0 < s < 1$；$r$=1,2,3)

$$\text{則 } Q_r = \begin{cases} x_p & ;\ i_3(r) \in \mathbb{Z}^+ \\ x_p + s \times (x_{p+1} - x_p) & ;\ i_3(r) \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

- 公式四（國中）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_N$

$$\text{令 } i_4(r) = \frac{rN}{4} \text{ 則 } Q_r = \begin{cases} x_{[i_4(r)]+1} \text{ ，([ ]: 高斯函數)} & ;\ i_4(r) \notin Z^+ \\ \frac{x_{i_4(r)} + x_{i_4(r)+1}}{2} & ;\ i_4(r) \in Z^+ \end{cases}$$

<pf>

若 $N = 4k + 1(k \in \mathbb{Z}^+,\ r=1,2,3)$

$$\text{且} \begin{cases} i_3(r) = \frac{r(4k+1-1)}{4} + 1 = rk + 1 = p \in \mathbb{Z}^+ \\ i_4(r) = \frac{rN}{4} = \frac{r(4k+1)}{4} = rk + \frac{r}{4} \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$$\text{又} \begin{cases} i_3(1) = k + 1,\ i_4(1) = k + \frac{1}{4} \\ i_3(3) = 3k + 1,\ i_4(3) = 3k + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{則} \begin{cases} Q_1 \overset{(3)}{=} x_{k+1} \overset{(4)}{=} x_{\left[k+\frac{1}{4}\right]+1} \ (\text{因} i_4(1) \notin \mathbb{Z}^+) \\ Q_3 \overset{(3)}{=} x_{3k+1} \overset{(4)}{=} x_{\left[3k+\frac{3}{4}\right]+1} \ (\text{因} i_4(3) \notin \mathbb{Z}^+) \end{cases}$$

得 證

【結論】: 由以上證明可知當 N＝4k＋1 時，有兩種不同的結果：

(一) 公式一、公式五、公式七之結果相同。

(二) 公式三、公式四、公式八之結果相同。

定理四：根據定理一～定理三可觀察出公式五、公式七在 N＝4k 、4k＋1、4k＋2、4k＋3 之結果是相同的。

註： 等號上面(3)、(4)分別代表公式三、公式四。

二、根據上述定理一～定理三之證明可知，在不同樣本數之下，某些公式會有相同的結果。現在我們將僅針對結果不同的幾類公式中，分別就 Q_1、Q_3在不同樣本數 ($N=4k$、 $4k+1$、$4k+2$、$4k+3$) 的情況下，相互比較後按大小順序排列之，並透過數學方式加以證明。

定理五：在 Q_1 情況下，可歸納出四類不同公式及兩種不同結果：

(一) $N=4k$、$4k+1$、$4k+2$ 時：Q_1(公式三)＞Q_1(公式二)＞Q_1(公式一)＞Q_1(公式六)。

(二) $N=4k+3$時：Q_1(公式三)＞Q_1(公式二)＞Q_1(公式一)或 Q_1 (公式六)。

- 公式一（Minitab）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_p \le x_{p+1} \le \cdots \le x_N$

令 $i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}=p+s$；$(p \in \mathbb{Z}^+, 0 < s < 1)$

則 $Q_r=\begin{cases} x_p & ;\ i_1(r) \in \mathbb{Z}^+ \\ x_p+s(x_{p+1}-x_p) & ;\ i_1(r) \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

- 公式二：

令 $i_2(r)=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}=p+s, (p \in Z^+, 0 < s < 1；r=1,2,3)$

則 $Q_r=\begin{cases} x_p & ;\ i_2(r) \in Z^+ \\ x_p+s\times(x_{p+1}-x_p) & ;\ i_2(r) \notin Z^+ \end{cases}$

- 公式三（Excel）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_p \le x_{p+1} \le \cdots \le x_N$

令 $i_3(r)=\frac{r(N-1)}{4}+1=p+s$ ， $(p \in \mathbb{Z}^+, 0 < s < 1；r=1,2,3)$

則 $Q_r=\begin{cases} x_p & ;\ i_3(r) \in \mathbb{Z}^+ \\ x_p+s\times(x_{p+1}-x_p) & ;\ i_3(r) \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

- 公式六：

令 $i_6(r)=\left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$，$(r=1,2,3)$ 則 $Q_r=x_{i_6(r)}$；$i_6(r) \in \mathbb{Z}^+$ ([ ]: 高斯函數)

<pf>

（一）$N=4k$、$4k+1$、$4k+2$

A. 當 $N=4k$時，($k\in\mathbb{Z}^+,\ r=1,2,3$)，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(1)=\frac{1(4k+1)}{4}=k+\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+\frac{1}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots\cdots(1)$

$i_2(1)=\frac{1(4k)}{4}+\frac{1}{2}=k+\frac{2}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+\frac{2}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots(2)$

$i_3(1)=\frac{1(4k-1)}{4}+1=k+\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+\frac{3}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots(3)$

$i_6(1)=[\frac{1(4k+1)}{4}]=k\in\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k\cdots\cdots(6)$

比較之後得 Q_1(公式三)$>Q_1$(公式二)$>Q_1$(公式一)$>Q_1$(公式六) 。

B. 當 $N=4k+1$ 時，($k\in\mathbb{Z}^+,\ r=1,2,3$)，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(1)=\frac{1(4k+1+1)}{4}=k+\frac{2}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+\frac{2}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots(1)$

$i_2(1)=\frac{1(4k+1)}{4}+\frac{1}{2}=k+\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+\frac{3}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots(2)$

$i_3(1)=\frac{1(4k+1-1)}{4}+1=k+1\in\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_{k+1}\cdots\cdots(3)$

$i_6(1)=[\frac{1(4k+1+1)}{4}]=k\in\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

比較之後得 Q_1(公式三)$>Q_1$(公式二)$>Q_1$(公式一)$>Q_1$(公式六) 。

C. 當 $N=4k+2$ 時，($k\in\mathbb{Z}^+,\ r=1,2,3$)，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(1)=\frac{1(4k+2+1)}{4}=k+\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+\frac{3}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots(1)$

$i_2(1)=\frac{1(4k+2)}{4}+\frac{1}{2}=k+1\in\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_{k+1}\cdots\cdots(2)$

$i_3(1)=\frac{1(4k+2-1)}{4}+1=k+1\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k+1\frac{1}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots\cdots(3)$

$i_6(1)=[\frac{1(4k+2+1)}{4}]=k\in\mathbb{Z}^+$ 則 $Q_1=x_k\cdots\cdots(6)$

比較之後得 Q_1(公式三)$>Q_1$(公式二)$>Q_1$(公式一)$>Q_1$(公式六) 。

註：(1)、(2)、(3)、(6)分別代表公式一、公式二、公式三、公式六。

(二）$N=4k+3$

當 $N=4k+3$ 時，($k \in \mathbb{Z}^{+}$, r=1,2,3) ，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(1)=\frac{1(4k+3+1)}{4}=k+1 \in \mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_1=x_{k+1}\cdots$ (1)

$i_2(1)=\frac{1(4k+3)}{4}+\frac{1}{2}=k+1\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_1=x_k+1\frac{1}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots$(2)

$i_3(1)=\frac{1(4k+3-1)}{4}+1=k+1\frac{2}{4} \notin \mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_1=x_k+1\frac{2}{4}(x_{k+1}-x_k)\cdots$(3)

$i_6(1)=[\frac{1(4k+3+1)}{4}]=k+1 \in \mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_1=x_{k+1}\cdots$ (6)

比較之後得 Q_1(公式三)＞Q_1(公式二)＞Q_1(公式一)或Q_1 (公式六)。

定理六：在 Q_3 情況下，可歸納出四類不同公式及四種不同結果：
(一) $N=4k$ 時：Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)＞Q_3(公式六)。
(二) $N=4k+1$時：Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)或Q_3(公式六)。
(三) $N=4k+2$時：Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)或Q_3(公式六）＞Q_3(公式三)。
(四) $N=4k+3$時：Q_3(公式一)或Q_3(公式六）＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)。

- 公式一（Minitab）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_p \le x_{p+1} \le \cdots \le x_N$

  令 $i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}=p+s$；(p $\in \mathbb{Z}^{+}, 0<s<1$)

  則 $Q_r=\begin{cases} x_p & ; i_1(r) \in \mathbb{Z}^{+} \\ x_p+s(x_{p+1}-x_p) & ; i_1(r) \notin \mathbb{Z}^{+} \end{cases}$

- 公式二：

  令 $i_2(\mathrm{r})=\frac{\mathrm{rN}}{4}+\frac{1}{2}=p+\mathrm{s}, (p \in \mathrm{Z}^{+}, 0<s<1$；$\mathrm{r}=1,2,3)$

  則 $Q_\mathrm{r}=\begin{cases} \mathrm{x_p} & ;\ \mathrm{i_2(r)} \in \mathrm{Z}^{+} \\ \mathrm{x_p}+\mathrm{s}\times(\mathrm{x_{p+1}}-\mathrm{x_p}) & ;\ \mathrm{i_2(r)} \notin \mathrm{Z}^{+} \end{cases}$

註：(1)、(2)、(3)、(6)分別代表公式一、公式二、公式三、公式六。

- 公式三（Excel）: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_p \le x_{p+1} \le \cdots \le x_N$

令 $i_3(r) = \frac{r(N-1)}{4} + 1 = p + s$ ，$(p \in \mathbb{Z}^+, 0 < s < 1；r=1,2,3)$

則 $Q_r = \begin{cases} x_p & ；i_3(r) \in \mathbb{Z}^+ \\ x_p + s \times (x_{p+1} - x_p) & ；i_3(r) \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

- 公式六：

令 $i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$，$(r = 1,2,3)$ 則 $Q_r = x_{i_6(r)}$；$i_6(r) \in \mathbb{Z}^+$ ([ ]: 高斯函數)

<pf>

(一) 當 $N = 4k$ 時，$(k \in \mathbb{Z}^+, r = 1,2,3)$ ，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(3) = \frac{3(4k+1)}{4} = 3k + \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k} + \frac{3}{4}(x_{3k+1} - x_{3k}) \cdots\cdots(1)$

$i_2(3) = \frac{3(4k)}{4} + \frac{1}{2} = 3k + \frac{2}{4} \notin \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k} + \frac{2}{4}(x_{3k+1} - x_{3k}) \cdots(2)$

$i_3(3) = \frac{3(4k-1)}{4} + 1 = 3k + \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k} + \frac{1}{4}(x_{3k+1} - x_{3k}) \cdots(3)$

$i_6(3) = [\frac{3(4k+1)}{4}] = 3k \in \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k} \cdots\cdots(6)$

比較之後得 Q_3(公式一) > Q_3(公式二) > Q_3(公式三) > Q_3(公式六)。

(二) 當 $N = 4k+1$ 時，$(k \in \mathbb{Z}^+, r=1,2,3)$ ，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(3) = \frac{3(4k+1+1)}{4} = 3k + 1\frac{2}{4} \notin \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k} + 1\frac{2}{4}(x_{3k+1} - x_{3k}) \cdots\cdots(1)$

$i_2(3) = \frac{3(4k+1)}{4} + \frac{1}{2} = 3k + 1\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k} + 1\frac{1}{4}(x_{3k+1} - x_{3k}) \cdots\cdots(2)$

$i_3(3) = \frac{3(4k+1-1)}{4} + 1 = 3k + 1 \in \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k+1} \cdots\cdots(3)$

$i_6(3) = [\frac{3(4k+1+1)}{4}] = 3k + 1 \in \mathbb{Z}^+$ 則 $Q_3 = x_{3k+1} \cdots (6)$

比較之後得 Q_3(公式一) > Q_3(公式二) > Q_3(公式三)或 Q_3(公式六)。

註：(1)、(2)、(3)、(6)分別代表公式一、公式二、公式三、公式六。

(三) 當$N=4k+2$時，($k\in\mathbb{Z}^{+},\ r=1,2,3$) ，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(3)=\frac{3(4k+3)}{4}=(3k+2)+\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+2}+\frac{1}{4}\left(x_{3k+2}-x_{3k+1}\right)\cdots\cdot(1)$

$i_2(3)=\frac{3(4k+2)}{4}+\frac{1}{2}=3k+2\ \in\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+2}\cdots\cdot(2)$

$i_3(3)=\frac{3(4k+2-1)}{4}+1=(3k+1)+\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+1}+\frac{3}{4}\left(x_{3k+2}-x_{3k+1}\right)\cdots\cdot(3)$

$i_6(3)=[\frac{3(4k+2+1)}{4}]=3k+2\in\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+2}\cdots\cdot(6)$

比較之後得 Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)或Q_3(公式六）＞Q_3(公式三)。

(四) 當 $N=4k+3$ 時，($k\in\mathbb{Z}^{+},\ r=1,2,3$) ，依據公式一、二、三、六，可得

$i_1(3)=\frac{3(4k+3+1)}{4}=3k+3\in\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+3}\cdots\cdots\cdot(1)$

$i_2(3)=\frac{3(4k+3)}{4}+\frac{1}{2}=3k+2\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+2}+\frac{3}{4}\left(x_{3k+3}-x_{3k+2}\right)\cdots\cdots\cdot(2)$

$i_3(3)=\frac{3(4k+3-1)}{4}+1=3k+2\frac{2}{4}\notin\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+2}+\frac{2}{4}\left(x_{3k+3}-x_{3k+2}\right)\cdots\cdot(3)$

$i_6(3)=[\frac{3(4k+3+1)}{4}]=3k+3\in\mathbb{Z}^{+}$ 則 $Q_3=x_{3k+3}\cdots\cdots\cdot(6)$

比較之後得 Q_3(公式一)或Q_3(公式六）＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)。

註：(1)、(2)、(3)、(6)分別代表公式一、公式二、公式三、公式六。

第四章　探討國高中課程之差異

本章將探討透過國高中版本的四分位數計算公式來求算四分位數時所可能衍生的差異。

一、國（高）中課程－四分位數與百分位數之差異

我們先以下面例子作說明，這四筆資料分別代表出資料筆數為 $4k$ 、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 的情況。

$N=13$：40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71。

$N=14$：40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71、73。

$N=15$：40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71、73、74。

$N=16$：40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71、73、74、75。

在此一提，高中求第一四分位數 Q_1 是以中位數(50%)資料前半再求其中位數(估算兩次)，與國中直接算 25%的求法不同。

(一) 高中版本四分位數求法：

N=13	數據	40 43 55 56 59 60 62 64 65 67 68 70 71
	求值	Q1=55.5　Me=62　Q3=67.5
N=14	數據	40 43 55 56 59 60 62 64 65 67 68 70 71 73
	求值	Q1=56　Me=63　Q3=68
N=15	數據	40 43 55 56 59 60 62 64 65 67 68 70 71 73 74
	求值	Q1=56　Me=64　Q3=70
N=16	數據	40 43 55 56 59 60 62 64 65 67 68 70 71 73 74 75
	求值	Q1=57.5　Me=64.5　Q3=70.5

（二）國中版本四分位數求法：

由於國中版本是以百分位數的情況下來定義四分位數，因此我們要分別求算第 25、50、75 百分位數。

（1）N＝13

40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71。

令 $i_4(r)=\frac{rN}{4}$

且 $\begin{cases} i_4(1)=\frac{1\times 13}{4}=3\frac{1}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \\ i_4(2)=\frac{2\times 13}{4}=6\frac{2}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \\ i_4(3)=\frac{3\times 13}{4}=9\frac{3}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$，

則 $\begin{cases} Q_1=x_{[\,i_4(1)]+1}=x_{\left[3\frac{1}{4}\right]+1}=x_4=56 \\ Q_2=x_{[\,i_4(2)]+1}=x_{\left[6\frac{2}{4}\right]+1}=x_7=62 \\ Q_3=x_{[\,i_4(3)]+1}=x_{\left[9\frac{3}{4}\right]+1}=x_{10}=67 \end{cases}$。

（2）N＝14

40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71、73。

令 $i_4(r)=\frac{rN}{4}$

且 $\begin{cases} i_4(1)=\frac{1\times 14}{4}=3\frac{2}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \\ i_4(2)=\frac{2\times 14}{4}=7\in \mathbb{Z}^+ \\ i_4(3)=\frac{3\times 14}{4}=10\frac{2}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$，

則 $\begin{cases} Q_1=x_{[\,i_4(1)]+1}=x_{\left[3\frac{2}{4}\right]+1}=x_4=56 \\ Q_2=\frac{x_{\,i_4(2)}+x_{\,i_4(2)+1}}{2}=\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{62+64}{2}=63 \\ Q_3=x_{[\,i_4(3)]+1}=x_{\left[10\frac{2}{4}\right]+1}=x_{11}=68 \end{cases}$。

（3）$N=15$

40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71、73、74。

令 $i_4(r)=\frac{rN}{4}$

且 $\begin{cases} i_4(1)=\frac{1\times 15}{4}=3\frac{3}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \\ i_4(2)=\frac{2\times 15}{4}=7\frac{2}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \\ i_4(3)=\frac{3\times 15}{4}=11\frac{1}{4}\notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$，

則 $\begin{cases} Q_1=x_{[i_4(1)]+1}=x_{\left[3\frac{3}{4}\right]+1}=x_4=56 \\ Q_2=x_{[i_4(2)]+1}=x_{\left[7\frac{2}{4}\right]+1}=x_8=64 \\ Q_3=x_{[i_4(3)]+1}=x_{\left[11\frac{1}{4}\right]+1}=x_{12}=70 \end{cases}$。

（4）$N=16$

40、43、55、56、59、60、62、64、65、67、68、70、71、73、74、75。

令 $i_4(r)=\frac{rN}{4}$

且 $\begin{cases} i_4(1)=\frac{1\times 16}{4}=4\in \mathbb{Z}^+ \\ i_4(2)=\frac{2\times 16}{4}=8\in \mathbb{Z}^+ \\ i_4(3)=\frac{3\times 16}{4}=12\in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$，

則 $\begin{cases} Q_1=\frac{x_{i_4(1)}+x_{i_4(1)+1}}{2}=\frac{x_4+x_5}{2}=\frac{56+59}{2}=57.5 \\ Q_2=\frac{x_{i_4(2)}+x_{i_4(2)+1}}{2}=\frac{x_8+x_9}{2}=\frac{64+65}{2}=64.5 \\ Q_3=\frac{x_{i_4(3)}+x_{i_4(3)+1}}{2}=\frac{x_{12}+x_{13}}{2}=\frac{70+71}{2}=70.5 \end{cases}$。

(三）二者比較

表 4－1－1 國中、高中公式在樣本數 N＝13 ～ 16 之比較

N	求法	Q_1	Me	Q_3
13（4k+1）	四分（高中）	55.5	62	67.5
	百分（國中）	56	62	67
14（4 k +2）	四分（高中）	56	63	68
	百分（國中）	56	63	68
15（4 k +3）	四分（高中）	56	64	70
	百分（國中）	56	64	70
16（4 k +0）	四分（高中）	57.5	64.5	70.5
	百分（國中）	57.5	64.5	70.5

由上表 4－1－1 發現在 N＝13（4k+1）時，國高中計算四分位數的結果有所不同，其差異由下表可看出來：

(1) 高中版本的第 1 四分位數並不符合國中版本第 25 百分位數定義，即至少有 75%(≧75%)的資料大於或等於 Q_1，且至少有 25%(≧25%)的資料小於或等於 Q_1；但表 4－1－2 中之 3/13 並不大於 25%，必須要 4/13 才會大於 25%。同理：

表 4－1－2 第 1 四分位數與第 25 百分位數差異

第1四分位數Q_1（55.5）	3/13≒0.23＜0.25	10/13≒0.77＞0.75
第25百分位數（ 56 ）	4/13≒0.31＞0.25	10/13≒0.77＞0.75

(2) 高中版本的第 3 四分位數並也不符合國中第 75 百分位數定義，即至少有 25 %(≧25%)的資料大於或等於 Q_3，且至少有 75%(≧75%)的資料小於或等於 Q_3；但表 4－1－3 中之 3/13 並不大於 25%，必須要 4/13 才會大於 25%。

表 4－1－3 第 3 四分位數與第 75 百分位數差異

第3四分位數Q_3 (67.5)	10/13≒0.77＞0.75	3/13≒0.23＜0.25
第75百分位數 (67)	10/13≒0.77＞0.75	4/13≒0.31＞0.25

由上述例子可以發現當原始資料之個數為 $4k+1$（當 k 為正整數）時，藉由高中版本的計算公式所算出來的 Q_1 與 Q_3，與藉由國中版本所計算出來的 25 及 75 百分位數可能有所不同。其餘資料個數情況，似乎並不會發生不一致的現象。事實上，我們的確可以透過數學方式證明在 $N = 4k$、$4k+2$、$4k+3$ 時，使用公式四（國中）、公式五（高中）之結果是相同的，但 $N = 4k+1$ 時是不成立的。

- 公式四（國中）：$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_N$

令 $i_4(r)=\frac{rN}{4}$ ；（r＝1,2,3） 則 $Q_r=\begin{cases} x_{[\ i_4(r)]+1} & ;\ i_4(\mathrm{r}) \notin \mathbb{Z}^+ \\ \frac{x_{\ i_4(r)}+x_{\ i_4(r)+1}}{2} & ;\ i_4(\mathrm{r}) \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

- 公式五（高中）：

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_k \le x_{k+1} \cdots \le x_{N-k} \le x_{N-k+1} \le \ \cdots \le x_N$

$$\begin{cases} Q_1=\mathrm{x_{k+1}}, & Q_3=\mathrm{x_{N-k}} & ;\text{當 } \mathrm{N}=4\mathrm{k}+2, 4\mathrm{k}+3, (\mathrm{k} \in \mathrm{Z}^+) \\ Q_1=\frac{\mathrm{x_k+x_{k+1}}}{2}, & Q_3=\frac{\mathrm{x_{N-k}+x_{N-k+1}}}{2} & ;\text{當 } \mathrm{N}=4\mathrm{k}, 4\mathrm{k}+1, (\mathrm{k} \in \mathrm{Z}^+) \end{cases}$$

<pf>

（A）若 $N=4k$,（$k \in \mathbb{Z}^+$）, $i_4(r)=\frac{rN}{4}=\frac{r\times 4k}{4}=rk \in \mathbb{Z}^+$(因$r, k \in \mathbb{Z}^+$)

則 $\begin{cases} Q_1=\frac{\mathrm{x}_{\mathrm{i_4(1)}}+\mathrm{x}_{\mathrm{i_4(1)+1}}}{2}=\frac{\mathrm{x_k+x_{k+1}}}{2} \\ Q_3=\frac{\mathrm{x}_{\mathrm{i_4(3)}}+\mathrm{x}_{\mathrm{i_4(3)+1}}}{2}=\frac{\mathrm{x_{3k}+x_{3k+1}}}{2}=\frac{\mathrm{x_{N-k}+x_{N-k+1}}}{2} \end{cases}$ 得証

（B）若 $N=4k+2$,（$k \in \mathbb{Z}^+$）, $i_4(r)=\frac{rN}{4}=\frac{r\times(4k+2)}{4}=rk+\frac{1}{2}r$，且 $i_4(1)$，

$i_4(3) \notin \mathbb{Z}^+$，

則 $\begin{cases} Q_1=x_{[\ i_4(1)]+1}=x_{\left[k+\frac{1}{2}\right]+1}=x_{k+1} \\ Q_3=x_{\left[\ i_{4(3)}\right]+1}=x_{\left[3k+\frac{3}{2}\right]+1}=x_{3k+1+1}=x_{4k+2-k}=x_{N-k} \end{cases}$ 得証

（C）若 $N=4k+3$, $i_4(r)=\frac{rN}{4}=\frac{r\times(4k+3)}{4}=rk+\frac{3}{4}r \notin \mathbb{Z}^+$

則 $\begin{cases} Q_1=x_{[\ i_4(1)]+1}=x_{\left[k+\frac{3}{4}\right]+1}=x_{k+1} \\ Q_3=x_{\left[\ i_{4(3)}\right]+1}=x_{\left[3k+\frac{9}{4}\right]+1}=x_{3k+2+1}=x_{4k+3-k}=x_{N-k} \end{cases}$ 得証

（D）若 $N=4k+1$, $i_4(r)=\frac{rN}{4}=\frac{r\times(4k+1)}{4}=rk+\frac{1}{4}r \notin \mathbb{Z}^+$ ，

$$
\text{則}\begin{cases} Q_1 = x_{[\,i_4(1)]+1} = x_{\left[k+\frac{1}{4}\right]+1} = x_{k+1} \neq \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\ (\text{因}\,x_k \neq x_{k+1}) \\ Q_3 = x_{\left[\,i_{4(3)}\right]+1} = x_{\left[3k+\frac{3}{4}\right]+1} = x_{\left[3k+\frac{3}{4}\right]+1} = x_{3k+1} = x_{N-k} \neq \frac{x_{N-k} + x_{N-k+1}}{2} \end{cases}
$$

$(\text{因}\,x_{N-k} \neq x_{N-k+1})$

【結論】：由（A）～（D）之證明得到公式四（國中）、公式五（高中）在 $N=4k$、$4k+2$、$4k+3$ 時，其結果是相同的，但在 $N=4k+1$ 時是不成立的。

二、 國中教學之因應

1. 排序之量度法有許多種：4 分率(4 分位數)、10 分率(10 分位數)、百分率(百分位數)等，這些量度法之基本觀念均相同，而其中被正式定義過的只有百分率(百分位數)，合乎定義之百分位數可能是一點(唯一解)，亦可能是一個閉區間(多解)，**國中教材**為配合四分位數之一般求法，規定在多解時以閉區間之**中點**為其百分位數。（正式課程綱要，95）
2. 考試時若題目未宣告，合理求法都可接受。
3. 避開未分組資料個數 $N=4k+1$ 筆（當 k 為正整數）之命題。

三、高中課本四分位數銜接（未分組資料）

將 N 個資料按大小順序排列為 $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots\cdots \le x_k \le x_{k+1} \ \cdots\cdots \le x_{N-k} \le x_{N-k+1} \le \cdots\cdots \le x_N$，則不論 N 為 $2m$ 或 $2m+1$，其<u>中位數（Me）以上與以下的個數</u>必然等於 m 個，且 m 在奇數、偶數不同情況下，所得Q_1、Q_3之結果如下：

1. 當 $m=2k+1$ 時，$(k \in \mathbb{Z}^+)$，分別討論 $N=2m$，$2m+1$ 的情形如下：

Case1：$N=2m=4k+2$，

$$Q_1 = x_{\frac{1+(2k+1)}{2}} = x_{k+1}$$

$$Q_3 = x_{\frac{(2k+2)+(4k+2)}{2}} = x_{\frac{6k+4}{2}} = x_{3k+2} = x_{(4k+2)-k} = x_{N-k}$$

Case2：$N=2m+1=4k+3$，

$$Q_1 = x_{\frac{1+(2k+1)}{2}} = x_{k+1}$$

$$Q_3 = x_{\frac{(2k+3)+(4k+3)}{2}} = x_{\frac{6k+6}{2}} = x_{3k+3} = x_{(4k+3)-k} = x_{N-k}$$

由 Case1、Case2 的討論，我們可以得到當 $m=2k+1$ 時，資料筆數為 $N=4k+2$ 與 $N=4k+3$，則$Q_1 = x_{k+1}$，$Q_3 = x_{N-k}$ 。

2. 當 $m=2k$ 時，$(k \in \mathbb{Z}^+)$ ，分別討論 $N=2m$，$2m+1$ 的情形如下：

Case1：$N=2m=4k$，

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{2k}{2}} + x_{\frac{2k}{2}+1}}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

$$Q_3 = \frac{x_{3k} + x_{3k+1}}{2} = \frac{x_{4k-k} + x_{4k-k+1}}{2} = \frac{x_{N-k} + x_{N-k+1}}{2}$$

Case2：$N=2m+1=4k+1$，

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{2k}{2}} + x_{\frac{2k}{2}+1}}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

$$Q_3 = \frac{x_{3k+1} + x_{3k+2}}{2} = \frac{x_{(4k+1)-k} + x_{(4k+1)-k+1}}{2} = \frac{x_{N-k} + x_{N-k+1}}{2}$$

由 Case1、Case2 的討論，我們可以得到當 $m=2k$ 時，資料筆數為 $N=4k$ 與 $N=4k+1$，則 $Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ ， $Q_3 = \frac{x_{N-k} + x_{N-k+1}}{2}$ 。

第五章　模擬研究結果與討論

根據第二章歸納整理出有關四分位數之八組公式，將藉由模擬實驗的方式來進一步了解這八組公式在不同資料結構分配下的適用性。第一節為模擬方法說明，第二節八組公式之模擬結果比較。

第一節　模擬方法

在第三章已透過數學證明的方式推論八組公式之結果相同及相異的情況。若欲探討此八組公式的適用性，我們將藉由模擬實驗的方式來進行評比。在假設原始資料分別來自不同形式分配的情況下，我們將分別就各種公式所得出四分位數估計值的好壞作探討。我們所考慮的資料原始分配包含五種右偏程度不一的分配，包括卡方分配自由度 1，5，10$\left(\chi^2_{(1)},\ \chi^2_{(5)},\ \chi^2_{(10)}\right)$（圖 5- 1- 1）、指數分配$\left(\mathrm{Exp}(\lambda=10),\ \mathrm{Exp}(\lambda=15)\right)$的型式（圖 5- 1- 2）以及平均數為 100，標準差為 10 的常態分配這一種對稱的型式（圖 5- 1- 3）。評估指標為偏誤（Bias）、標準差（SD）與均方根誤差（RMSE）及平均相對誤差百分比（AvRE）。

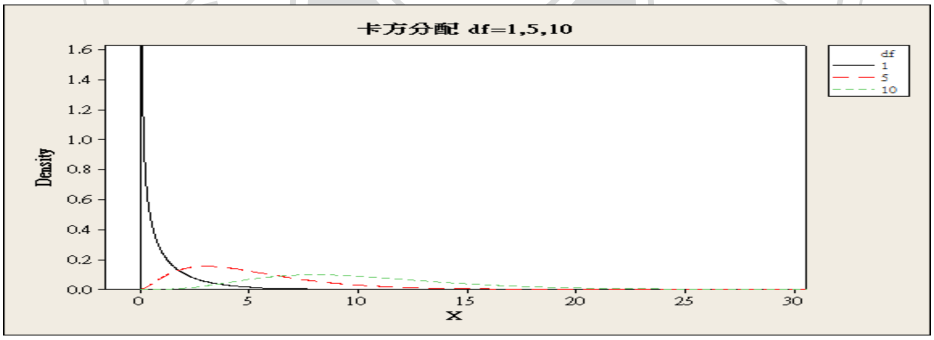
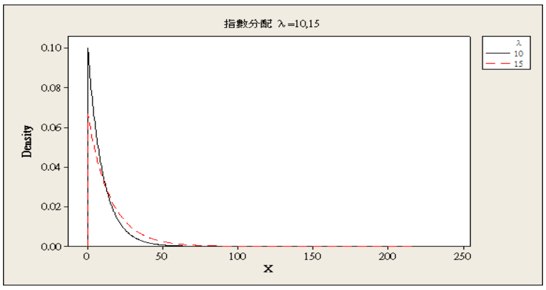


圖 5-1-1 卡方分配：$\chi^2_{(1)}$，$\chi^2_{(5)}$，$\chi^2_{(10)}$



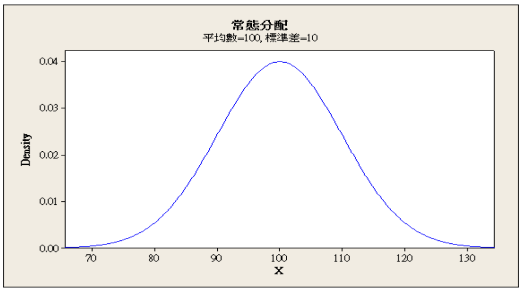


圖 5-1-2 指數分配：Exp（λ=10,15）　圖 5-1-3 常態分配:平均數 100,標準差 10

一、【模擬方法】

在前述六種連續資料型態分配下，每個分配都隨機抽取出 N 筆數據，其中 N 分別是 40～43、100～103、400～403、1000～1003。將八組不同公式分別代入求出四分位數的估計值。每種情形都各進行 1000 次的模擬，並與分配本身真正的第一四分位數、第三四分位數作比較。

二、【評估指標】

在每一種原始分配與樣本數的組合下，我們各分別產生 1000 組數據，分別代入前述八組公式後，每組公式我們都可以得到 1000 個四分位數的估計值，我們將藉由這些數值來評比八組公式的表現，並以偏誤（Bias）、標準差（SD）、均方根誤差（RMSE）及平均相對誤差百分比 (AvRE)等四個評估指標來評估何者較好。

（一）偏誤（Bias）：是指重複測量的平均估計值和目標值（真實值）之間的差，可視為<u>準確度</u>。

所謂的準確度(Validity)：是指測量值（估計值）和所欲測量之目標（真實值）間接近的程度，兩者差異愈小，代表準確度愈高。簡單說就是重複實驗的結果與真實值越相近，準確度越高。在此重複性的測量可喻為箭，所以準確度是敘述測量值（估計值）之間對於靶心（真實值）的密集度，越接近靶心的箭被認為是較準確的。（參考圖 5-1-4）

$$Bias: \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\hat{\theta}_j - \theta)$$

n： 模擬次數

θ ：真實值(真實四分位數值)

$\hat{\theta}_j$:第 j 次模擬所得到的估計值

（二）標準差（SD）：標準差可以當作不確定性的一種測量。例如：在做重複性測量時，測量數值（估計值）集合的標準差代表這些測量的<u>精確度</u>。

所謂的精確度(Precision)：是指測量值（估計值）本身精確的程度。即：在重複測量同一標的的過程中，測量結果是否相差不多。在統計上常以「標準差」或「變異數」衡量。（參考圖 5-1-5）

$$SD:\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\hat{\theta}_j-\bar{\hat{\theta}})^2}$$

n：模擬次數

$\hat{\theta}_j$:第 j 次模擬所得到的估計值

$\bar{\hat{\theta}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_j$ 模擬 n 次所得到的平均估計值

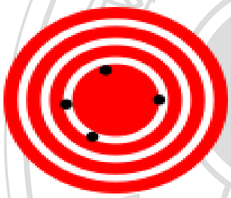


圖 5-1-4 高準確度，低精確度　　圖 5-1-5 高精確度，低準確度

（三）均方根誤差（RMSE）：包含了 SD（標準差）以及 Bias（偏誤）的一個綜合性指標。由於單單要求偏誤小或者標準差小，諸如（圖 4-1-4）、（圖 4-1-5）所表示的情況，未必是一個好的評估指標。

$$RMSE:\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\hat{\theta}_j-\theta)^2}$$

n：模擬次數

$\hat{\theta}_j$:第 j 次模擬所得到的估計值

θ：真實值(真實四分位數值)

以上三種評估指標中，無論哪一種指標所得到的數值愈小且愈接近0的話，代表這個公式是越適用的。

（四）平均相對誤差百分比（AvRE）：

$$AvRE = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|\hat{\theta}_j - \theta\right|}{\left|\theta\right|} \times 100\%$$

n：模擬次數

$\hat{\theta}_j$：第 j 次模擬所得到的估計值

θ：真實值(真實四分位數值)

由前述可知評估指標（一）~（三）為絕對誤差，

絕對誤差=估計值－真實值

而

$$相對誤差 = \frac{估計值-真實值}{真實值}$$

由於以相對誤差來判定估計值的誤差量較為客觀，所以在接下來的討論中也會以平均相對誤差百分比進行評估。

第二節　八組公式之模擬結果比較

在第三章已證明過八組公式之數學特性，現在透過模擬方式驗證確實如此。但真正在估計的表現取決於分配型式，亦即不同的統計量在不同的分配情況下會有不同的結果，此無法用數學方式證明，所以必須透過模擬方式加以驗證。

模擬結果與分析：

由於模擬結果顯示出八組公式在大樣本時[註 17]的表現差異不大，僅在小樣本時(N＝40、41、42、43)呈現出明顯差異，且實務上常接觸小樣本，故在此僅就八組公式在小樣本時偏誤、標準差、均方根誤差的表現情形作討論。

模擬結果將分為下列兩種情況來進行說明：

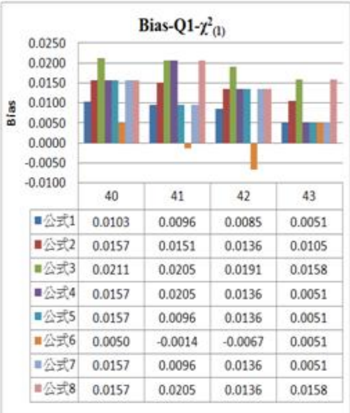
一、將依 Bias（Q_1）、Bias（Q_3）、Bias（IQR）、SD（Q_1）、SD（Q_3）、SD（IQR）、RMSE（Q_1）、RMSE（Q_3）、RMSE（IQR)、AvRE(Q_1)、AvRE(Q_3)、AvRE(IQR) 之順序，在樣本數(N＝40、41、42、43)及六種不同資料分配下分別呈現出四項評估指標的結果，並就其指標結果來分析八組公式之特性。

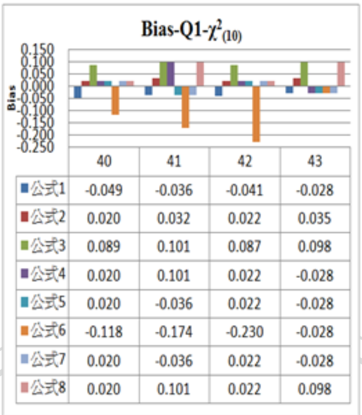
二、針對不同樣本數及不同資料分配的情況下，依據四項評估指標評比出表現最好的公式。

註 17：大樣本的模擬結果放在附錄 1 中。

(一) 八組公式在樣本數(N＝40、41、42、43)及六種不同資料分配下，分別就四項評估指標結果來進行分析。

1、Bias（Q_1）





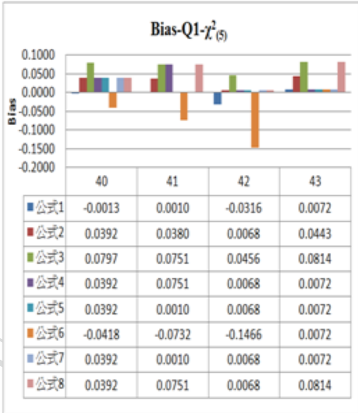
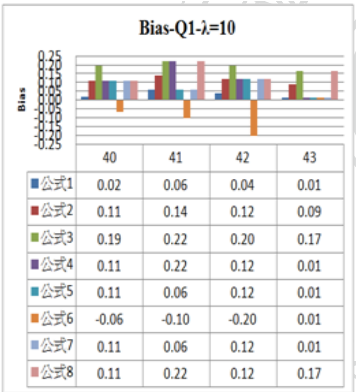
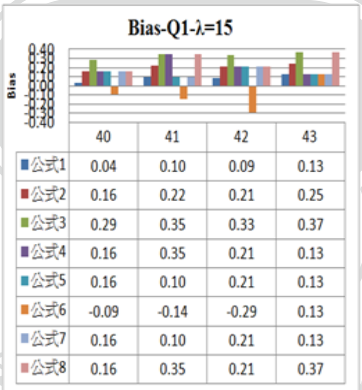


圖 5-2-1 偏誤－Q_1－卡方分配(自由度 1)

圖 5-2-2 偏誤－Q_1－卡方分配(自由度 5)

圖 5-2-3 偏誤－Q_1－卡方分配(自由度 10)





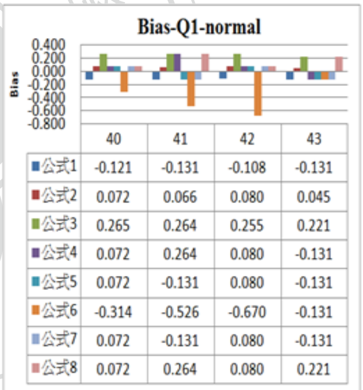


圖 5-2-4 偏誤－Q_1－指數分配(λ係數 10)

圖 5-2-5 偏誤－Q_1－指數分配(λ係數 15)

圖 5-2-6 偏誤－Q_1－常態分配(平均數 100，標準差 10)

由圖 5-2-1～5-2-6 觀察整理如下：

八組公式在 Q_1 情況下，僅針對結果不相同部分，總計可歸納出四類不同公式及兩種不同結果：

- N＝40、41、42 時：Q_1(公式三)＞Q_1(公式二)＞Q_1(公式一)＞Q_1(公式六)。
- N＝43 時：Q_1(公式三)＞Q_1(公式二)＞Q_1(公式一)或 Q_1 (公式六)。

隨著分配不同加上公式本身特性，同一公式有可能呈現出高估或低估的結果。

(1) 卡方分配

① $\chi^2_{(1)}$：由前述可知公式三在四類不同公式中表現為最大，故以此為基準與其他公式相比較。所以公式二($i_2(r)=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}$)、公式一($i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}$)比公式三($i_3(r)=\frac{r(N-1)}{4}+1$)少$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$的估計量，且由圖 5-2-1 可觀察出公式三與公式二、公式一之差異差不多以 1：2 的比例減少高估量，因而呈現出高估逐漸下降的情形。接著，由於公式六($i_6(r)=\left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$) 在計算四分位數時，遇到小數則無條件捨去，與公式一($i_1(r)=\frac{r(N+1)}{4}$)相較之下，因少了小數部分之計算，且隨著不同樣本數(N ＝40、41、42)情況下，公式六比公式一少了$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$的估計量，因此比較容易產生較小的估計值，甚至可能導致「低估」的現象。雖然如此，公式六的值與 0 非常接近，所以在八組公式中的表現反而較佳，因此在卡方分配(自由度 1)的情況下，公式六捨去小數反而是一件好事。(詳細說明參考附錄 2－1～2－3）

② $\chi^2_{(5)}$：隨著資料結構偏移關係，八組公式的偏誤量明顯較 $\chi^2_{(1)}$ 增加，及在不同的樣本數之下，公式之間不同的差異比例，導致公式一在 N＝40、42 的偏誤量由高估($\chi^2_{(1)}$)變成低估($\chi^2_{(5)}$)的情形。雖然如此，由圖 5-2-2 可知公式一比公式六更精確接近真實第一四分位數且非常接近 0，所以兩者比較起來，公式一在 Bias(Q_1)的表現比公式六好，在八組公式中的表現最佳。(詳細說明參考附錄 2－4～2－7）

③ $\chi^2_{(10)}$：隨資料結構偏移關係，八組公式的偏誤量明顯較 $\chi^2_{(1)}$、$\chi^2_{(5)}$增加許多(可能更高(低)估或由高(低)估變低(高)估），並在不同的樣本數之下、公式之間不同的差異比例，及因為某些公式的計算結果相同，導致低估的公式隨之增加。例：當樣本數 N＝43 時，公式一的偏誤量由高估變成低估，且公式一、四、五、六、七的結果相同。因公式七在樣本數為奇數時採用公式一，而公式五與公式七

的結果相同，所以公式五、七也產生低估的情形。(詳細說明參考附錄 2－8～2－11）

(2) 指數分配

在 λ＝10、λ＝15 的高、低估結構相同，但可能隨資料結構偏移關係，八組公式的偏誤量跟著增加，及在不同的樣本數之下，公式之間不同的差異比例，導致公式六低估的情形越來越嚴重。(詳細說明參考附錄 2－12～2－15）

(3) 常態分配

① 由於某些公式在相同樣本數之下的計算結果相同，導致八組公式之低估現象較普遍。例：N＝43 時，公式一、四、五、六、七皆為「低估」的情形。由圖 5-2-6 可觀察出公式三與公式二、公式一之差異差不多以 1：2 的比例減少高估量，因而呈現出高估逐漸下降的現象，甚至可能產生「低估」的情形。(詳細說明參考附錄 2－16～2－19）

② N＝40、41、42 時，公式三與公式二、公式一、公式六之差異，固定差不多以$\frac{1}{4}:\frac{2}{4}:\frac{3}{4}$、$\frac{1}{4}:\frac{2}{4}:1$ 及 $\frac{1}{4}:\frac{2}{4}:1\frac{1}{4}$的比例減少高估量，導致公式一、公式六低估的情形越來越嚴重。(詳細說明參考附錄 2－16～2－19）

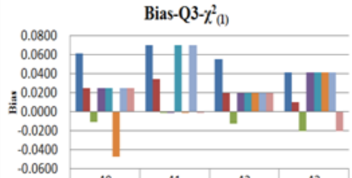
(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-1～圖 5-2-6 觀察出在不同樣本數 N＝40、41、42、43 的情況下，公式三與公式二、公式一、公式六之差異，差不多以 1：2：3、1：2：4 、1：2：5 及 1：2：2 的比例減少高估量，甚至可能產生低估的情形。

【註】：公式三與公式二、公式一、公式六之差異比例與定理五的證明結果相同。

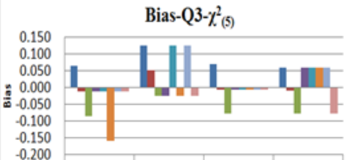
② 由圖 5-2-1～圖 5-2-6 觀察出偏誤在六種分配之第一四分位數情況下，當樣本數 N＝40、42 時，公式二、四、五、七、八結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同；公式三、八結果相同。

1-1、Bias(Q_3)



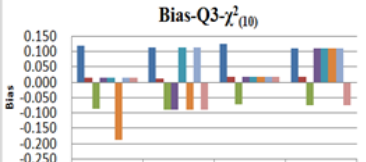
	40	41	42	43
公式1	0.0611	0.0702	0.0553	0.0413
公式2	0.0250	0.0349	0.0193	0.0103
公式3	-0.0111	-0.0003	-0.0126	-0.0206
公式4	0.0250	-0.0003	0.0193	0.0413
公式5	0.0250	0.0702	0.0193	0.0413
公式6	-0.0473	-0.0003	0.0193	0.0413
公式7	0.0250	0.0702	0.0193	0.0413
公式8	0.0250	-0.0003	0.0193	-0.0206

圖 5-2-7 偏誤－Q_3－卡方分配(自由度 1)



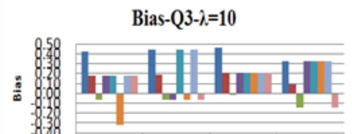
	40	41	42	43
公式1	0.065	0.127	0.069	0.061
公式2	-0.010	0.051	-0.006	-0.008
公式3	-0.085	-0.024	-0.078	-0.076
公式4	-0.010	-0.024	-0.006	0.061
公式5	-0.010	0.127	-0.006	0.061
公式6	-0.159	-0.024	-0.006	0.061
公式7	-0.010	0.127	-0.006	0.061
公式8	-0.010	-0.024	-0.006	-0.076

圖 5-2-8 偏誤－Q_3－卡方分配(自由度 5)



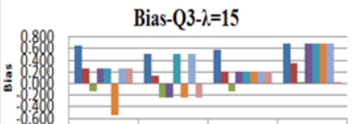
	40	41	42	43
公式1	0.118	0.113	0.124	0.111
公式2	0.015	0.012	0.018	0.017
公式3	-0.087	-0.089	-0.073	-0.076
公式4	0.015	-0.089	0.018	0.111
公式5	0.015	0.113	0.018	0.111
公式6	-0.190	-0.089	0.018	0.111
公式7	0.015	0.113	0.018	0.111
公式8	0.015	-0.089	0.018	-0.076

圖 5-2-9 偏誤－Q_3－卡方分配(自由度 10)



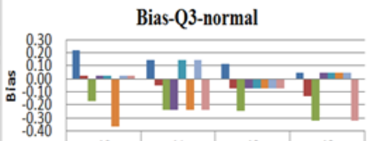
	40	41	42	43
公式1	0.43	0.44	0.46	0.32
公式2	0.18	0.19	0.21	0.09
公式3	-0.07	-0.06	-0.02	-0.14
公式4	0.18	-0.06	0.21	0.32
公式5	0.18	0.44	0.21	0.32
公式6	-0.32	-0.06	0.21	0.32
公式7	0.18	0.44	0.21	0.32
公式8	0.18	-0.06	0.21	-0.14

圖 5-2-10 偏誤－Q_3－指數分配(λ 係數 10)



	40	41	42	43
公式1	0.652	0.501	0.582	0.687
公式2	0.256	0.130	0.213	0.345
公式3	-0.141	-0.240	-0.136	0.004
公式4	0.256	-0.240	0.213	0.687
公式5	0.256	0.501	0.213	0.687
公式6	-0.537	-0.240	0.213	0.687
公式7	0.256	0.501	0.213	0.687
公式8	0.256	-0.240	0.213	0.004

圖 5-2-11 偏誤－Q_3－指數分配(λ 係數 15)



	40	41	42	43
公式1	0.22	0.15	0.12	0.05
公式2	0.02	-0.05	-0.07	-0.14
公式3	-0.17	-0.24	-0.25	-0.32
公式4	0.02	-0.24	-0.07	0.05
公式5	0.02	0.15	-0.07	0.05
公式6	-0.37	-0.24	-0.07	0.05
公式7	0.02	0.15	-0.07	0.05
公式8	0.02	-0.24	-0.07	-0.32

圖 5-2-12 偏誤－Q_3－常態分配(平均 100，標準差 10)

由圖 5-2-7～5-2-12 觀察整理如下：

八組公式在 Q_3 情況下，僅針對結果不相同部分，總計可歸納出四類不同公式及四種不同結果：

- N＝40 時：Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)＞Q_3(公式六)。
- N＝41 時：Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)或Q_3(公式六)。
- N＝42 時：Q_3(公式一)＞Q_3(公式二)或Q_3(公式六）＞Q_3(公式三)。
- N＝43 時：Q_3(公式一)或Q_3(公式六）＞Q_3(公式二)＞Q_3(公式三)。

隨著分配不同加上公式本身特性，同一公式有可能呈現出高估或低估的結果。

(1) 卡方分配

① $\chi^2_{(1)}$：由前述可知公式一在四類不同公式中表現為最大，故以公式一為基準與其他公式相比較。所以公式二($i_2(r) = \frac{rN}{4} + \frac{1}{2}$)、公式三($i_3(\mathrm{r}) = \frac{r(N-1)}{4} + 1$)比公式一($i_1(r) = \frac{r(N+1)}{4}$)少$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$的估計量，且由圖 5-2-7 可觀察出公式一與公式二、公式三之差異差不多以 1：2 的比例減少高估量，因而呈現出由高估變成低估的情形，甚至低估的情形更嚴重。接著，由於公式六($i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$) 在計算四分位數時，遇到小數則無條件捨去，與公式一($i_1(\mathrm{r}) = \frac{r(N+1)}{4}$)相較之下，因少了小數部分之計算，且隨著不同樣本數(N＝40、41、42)情況下，所以公式六比公式一少$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{1}{4}$的估計量，因此比較容易產生較小的估計值，甚至可能導致「低估」的現象。但由圖 5-2-7 看出公式三最接近真實第三四分位數且非常接近 0。另外，因某些公式的計算結果相同，所以產生低估的公式亦隨之增加。(例：N＝41，公式三、四、六、八的結果相同)。(詳細說明參考附錄 2－20～2－23)

② $\chi^2_{(5)}$：隨自由度的增加，八組公式的偏誤量大部分都增加(可能更高(低)估或由高(低)估變低(高)估)，且八組公式本來在 $\chi^2_{(1)}$的低估現象較少，但可能因為隨著資料結構偏移關係，在不同的樣本數之下、公式之間不同的差異比例，及因為某些公式的計算結果相同，導致低估的公式也隨之增加。例：N＝40，公式二、四、五、七、八，其偏誤量由高估($\chi^2_{(1)}$)變成低估($\chi^2_{(5)}$)。所以 $\chi^2_{(5)}$時低估現象較普遍。同理，N＝42 也是相同情形。(詳細說明參考附錄 2－24～2－27)

③ $\chi^2_{(10)}$：八組公式的偏誤量明顯較 $\chi^2_{(1)}$、$\chi^2_{(5)}$增加許多。另外，可能隨著資料結構偏移關係，及在不同的樣本數之下，公式之間不同的差異比例，導致公式二、四、五、六、七、八在 N＝42 的偏誤量由低估($\chi^2_{(5)}$)變成高估($\chi^2_{(10)}$)；並由圖 5-2-9 看出公式二、四、五、六、七、八的值很接近 0，所以在八組公式中的表現較佳。(詳細說明參考附錄 2－28～2－31)

(2) 指數分配

① λ＝10：由於 λ＝10 與 $\chi^2_{(1)}$的資料結構類似，及在不同的樣本數之下，某些公式之間有相同的差異比例，導致八組公式中產生低估的結構相同，只不過 λ＝10 的偏誤量較 $\chi^2_{(1)}$高。(詳細說明參考附錄 2－32～2－35)

② λ＝15：隨自由度增加到了 λ＝15 時，其偏誤量明顯增加(可能更高估或更低估)。不過，可能隨著資料結構偏移關係，及在不同的樣本數之下，公式之間的差異比例，導致公式三、八在 N＝43 的偏誤量由低估(λ＝10)變成高估(λ＝15)的情形。並由圖 5-2-11 看出公式三、八的值非常接近 0，所以在八組公式中的表現較佳。(詳細說明參考附錄 2－36～2－39)

(3) 常態分配

由於某些公式在相同樣本數之下，有相同的差異比例，導致計算結果相同，所以八組公式之低估現象較普遍。例：N＝41 時，公式三、四、六、八的結果相同皆為低估。(詳細說明參考附錄 2－40～2－43)

① 在 N＝41 時，公式二($i_2(\mathrm{r}) = \frac{rN}{4} + \frac{1}{2}$)比公式六($i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$)多$\frac{1}{4}$的估計量，所以有可能減少低估量但仍產生低估，並由圖 5-2-12 看出公式二比公式六更接近 0，所以表現較佳。

② 在 N＝42 時，公式二($i_2(r) = \frac{rN}{4} + \frac{1}{2}$)比公式一($i_1(r) = \frac{r(N+1)}{4}$)少$\frac{1}{4}$的估計量，如此有可能增加低估量，而產生「低估」現象。同理，公式三($i_3(\mathrm{r}) = \frac{r(N-1)}{4} + 1$)又比公式一少$\frac{2}{4}$估計量，導致公式三低估的情形更嚴重。

③ 在 N＝43 時，由圖 5-2-12 看出，雖然公式六為高估但很接近 0，而公式二($i_2(\mathrm{r}) = \frac{rN}{4} + \frac{1}{2}$)比公式六($i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$)少$\frac{1}{4}$估計量，如此有可能增加低估量，而產生「低估」現象。同理，公式三($i_3(\mathrm{r}) = \frac{r(N-1)}{4} + 1$)又比公式六($i_6(r) = \left[\frac{r(N+1)}{4}\right]$)少$\frac{2}{4}$估計量，更容易產生低估且低估的情形更嚴重。並由圖 5-2-12 看出公式三、八在八

組公式中的表現較差。

(4) 綜合表現

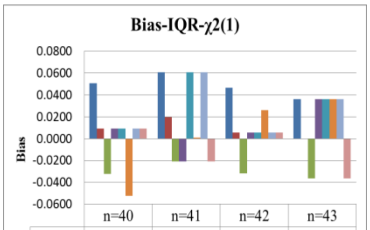
① 由圖 5-2-7～5-2-12 觀察出在不同樣本數 $N=40$、41、42 時，公式一與公式二、公式三、公式六之差異，差不多以 1：2：3、1：2：2 及 1：2：1 的比例，減少高估量，甚至可能產生低估的情形，同理，$N=43$ 時，公式一(或公式六)與公式二、公式三之差異也差不多以 1：2 的比例減少高估量，而產生低估的情形。

【註】：公式一與公式二、公式三、公式六之差異比例與定理六的證明結果相同。

② 由圖 5-2-7～圖 5-2-12 中發現公式三、六在 $N=40$ 之六種分配下產生低估，及公式三、四、六、八在 $N=41$ 之六種分配下亦呈現低估現象。

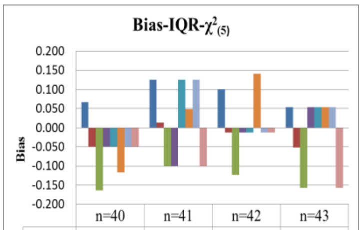
③ 由圖 5-2-7～圖 5-2-12 觀察到偏誤在六種分配之第三四分位數情況下，當樣本數 $N=40$ 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 $N=42$ 時，公式二、四、五、六、七、八的結果相同；樣本數 $N=41$ 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、六、八的結果相同；最後，在樣本數 $N=43$ 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

1-2、Bias (IQR)



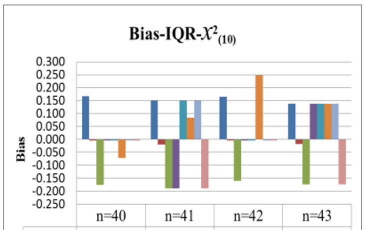
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.0508	0.0606	0.0468	0.0361
公式2	0.0093	0.0198	0.0057	-0.0001
公式3	-0.0323	-0.0209	-0.0317	-0.0364
公式4	0.0093	-0.0209	0.0057	0.0361
公式5	0.0093	0.0606	0.0057	0.0361
公式6	-0.0522	0.0010	0.0261	0.0361
公式7	0.0093	0.0606	0.0057	0.0361
公式8	0.0093	-0.0209	0.0057	-0.0364

圖 5-2-13 偏誤-IQR-卡方分配(自由度 1)



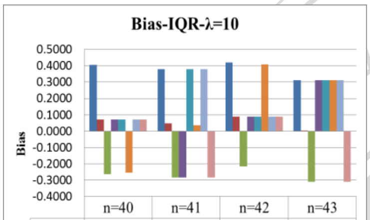
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.066	0.126	0.101	0.054
公式2	-0.049	0.013	-0.013	-0.052
公式3	-0.164	-0.099	-0.123	-0.157
公式4	-0.049	-0.099	-0.013	0.054
公式5	-0.049	0.126	-0.013	0.054
公式6	-0.117	0.049	0.141	0.054
公式7	-0.049	0.126	-0.013	0.054
公式8	-0.049	-0.099	-0.013	-0.157

圖 5-2-14 偏誤-IQR-卡方分配(自由度 5)



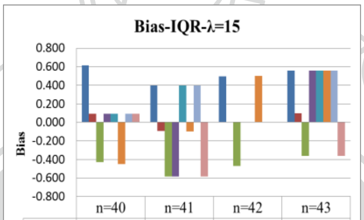
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.167	0.149	0.165	0.139
公式2	-0.005	-0.020	-0.004	-0.018
公式3	-0.176	-0.190	-0.160	-0.174
公式4	-0.005	-0.190	-0.004	0.139
公式5	-0.005	0.149	-0.004	0.139
公式6	-0.071	0.085	0.248	0.139
公式7	-0.005	0.149	-0.004	0.139
公式8	-0.005	-0.190	-0.004	-0.174

圖 5-2-15 偏誤-IQR-卡方分配(自由度 10)



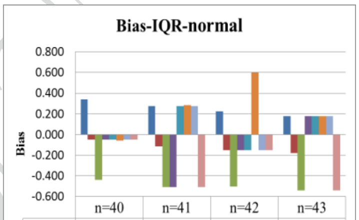
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.4052	0.3785	0.4206	0.3114
公式2	0.0710	0.0479	0.0884	0.0004
公式3	-0.2632	-0.2827	-0.2149	-0.3105
公式4	0.0710	-0.2827	0.0884	0.3114
公式5	0.0710	0.3785	0.0884	0.3114
公式6	-0.2534	0.0359	0.4096	0.3114
公式7	0.0710	0.3785	0.0884	0.3114
公式8	0.0710	-0.2827	0.0884	-0.3105

圖 5-2-16 偏誤-IQR-指數分配(λ 係數 10)



	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.615	0.399	0.495	0.558
公式2	0.094	-0.093	0.001	0.098
公式3	-0.427	-0.585	-0.470	-0.363
公式4	0.094	-0.585	0.001	0.558
公式5	0.094	0.399	0.001	0.558
公式6	-0.449	-0.097	0.503	0.558
公式7	0.094	0.399	0.001	0.558
公式8	0.094	-0.585	0.001	-0.363

圖 5-2-17 偏誤-IQR-指數分配(λ 係數 15)



	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.341	0.277	0.224	0.180
公式2	-0.048	-0.115	-0.152	-0.181
公式3	-0.438	-0.507	-0.504	-0.542
公式4	-0.048	-0.507	-0.152	0.180
公式5	-0.048	0.277	-0.152	0.180
公式6	-0.056	0.283	0.598	0.180
公式7	-0.048	0.277	-0.152	0.180
公式8	-0.048	-0.507	-0.152	-0.542

圖 5-2-18 偏誤-IQR-常態分配(平均數 100，標準差 10)

因為八組公式在 Q_1、Q_3的偏誤量有高估、低估的情形，甚至高、低估的量有的很大或很小，因此進一步以四分位距(IQR)來看偏誤程度。八組公式在 IQR 情況下，僅針對結果不相同部分來探討，總計可歸納出四類不同公式。由圖 5-2-13~圖 5-2-18 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① 公式一在Q_3的表現皆為高估情形，而在 Q_1 的表現有高、低估的情形，但在四分位距的表現皆為高估的情形，且隨著資料結構偏移，高估量越來越大。由圖 5-2-1~圖 5-2-3 及圖 5-2-7~圖 5-2-9 之觀察，舉例說明如下：

- ➢ $\chi^2_{(1)}$：公式一在Q_3的高估量皆大於Q_1的高估量，以致於Q_3與的Q_1差異皆為高

估。

- $\chi^2_{(5)}$ 、$\chi^2_{(10)}$：公式一在Q_3的高估量皆大於Q_1的低估量，以致於Q_3與的Q_1差異皆為高估。

② 公式二在Q_3的表現有高、低估的情形，而在 Q_1 的表現皆為高估情形，以致於在四分位距的表現有高、低估的情形。由圖 5-2-1~圖 5-2-3 及圖 5-2-7~圖 5-2-9 之觀察，舉例說明如下：

- $\chi^2_{(1)}$：N＝40、41、42 時，公式二在Q_3的高估量大於Q_1的高估量，以致於Q_3與的Q_1差異為高估。
- $\chi^2_{(5)}$：N＝40、42、43 時，公式二在Q_3為低估情形，而在Q_1為高估情形，以致於Q_3與的Q_1差異為低估，且低估的情形更嚴重。
- $\chi^2_{(10)}$：公式二在Q_3的高估量皆小於Q_1的高估量，以致於Q_3與的Q_1差異為低估。
- 由圖 5-2-13~圖 5-2-15 看出公式二在八組公式中的偏誤程度最小且較穩定。

③ 公式三在Q_3的表現皆為低估情形，而在 Q_1 的表現皆為高估情形，以致於在四分位距的表現皆為低估的情形，且隨著資料結構偏移，低估的情形越來越嚴重。

④ 公式六在Q_3、Q_1 的表現皆有高、低估的情形，以致於在四分位距的表現皆為高、低估的情形，且隨著資料結構偏移，高、低估的情形越來越嚴重。由圖 5-2-1~圖 5-2-3 及圖 5-2-7~圖 5-2-9 之觀察，舉例說明如下：

- $\chi^2_{(1)}$、$\chi^2_{(5)}$：N＝40 時，公式六在 $\chi^2_{(1)}$之Q_3的低估量大於Q_1的高估量，以致於Q_3與Q_1的差異為低估。隨著資料結構偏移，就 $\chi^2_{(5)}$而言，公式六在Q_3的低估量大於Q_1的低估量，以致於Q_3與Q_1的低估差異更嚴重。
- $\chi^2_{(5)}$、$\chi^2_{(10)}$：N＝42 時，公式六在 $\chi^2_{(5)}$之Q_3的低估量小於Q_1的低估量，以致於Q_3與Q_1的差異為高估。隨著資料結構偏移，就 $\chi^2_{(10)}$而言，公式六在Q_3的高估量大於Q_1的低估量，以致於Q_3與Q_1的高估差異更大。

(2) 指數分配

① 公式一在Q_3、Q_1的表現皆為高估情形，且Q_3的高估量大於Q_1的高估量，以致於Q_3與Q_1的差異為高估。隨著資料結構偏移，高估量隨之增加。

②公式二在Q_3、Q_1的表現皆為高估情形，且Q_3的高估量幾乎大於Q_1的高估量，以致於Q_3與Q_1的差異為高估，僅 N＝41 除外，即Q_3與Q_1的差異為低估。並由圖 5-2-16~圖 5-2-17 看出公式二在八組公式中的偏誤程度最小且較穩定。

③ 公式三在Q_3的表現幾乎為低估情形，而在 Q_1 的表現皆為高估情形，僅在 λ＝15(N＝43)除外，即Q_3的高估量小於Q_1的高估量，但在四分位距的表現皆為低估的情形，且隨著資料結構偏移，低估的情形越來越嚴重。

④ 公式六在 λ＝10、λ＝15 之Q_3、Q_1 的表現皆有高、低估的情形，以致於在四分位距的表現皆為高、低估的情形，且隨著資料結構偏移，高、低估的情形越來越嚴重。由圖 5-2-1~圖 5-2-3 及圖 5-2-7~圖 5-2-9 之觀察，舉例說明如下：

- N＝40 時：公式六在 λ＝10 之Q_3的低估量大於Q_1的低估量，以致於Q_3與Q_1的差異為低估。隨著資料結構偏移，就 λ＝15 而言，公式六在Q_3的低估量大於Q_1的低估量，以致於Q_3與Q_1的低估差異更嚴重。
- N＝42 時：公式六在 λ＝10 之Q_3為高估情形，而Q_1為低估情形，以致於Q_3與的Q_1差異為高估，且更增加了高估量。隨著資料結構偏移，就 λ＝15 而言，公式六在Q_3與Q_1的高估差異更大。

(3) 常態分配

① 公式一在Q_3的表現皆為高估情形，而在 Q_1 的表現皆為低估情形，以致於在四分位距的表現皆為高估的情形，且高估量更大。

② 公式二在Q_3的表現幾乎為低估的情形，而在 Q_1 的表現皆為高估情形，僅 N＝40 除外，即Q_3的高估量小於Q_1的高估量，但在四分位距的表現皆為低估的情形，且隨著資料結構偏移，低估的情形越來越嚴重。

③ 公式三在Q_3的表現皆為低估情形，而在 Q_1 的表現皆為高估情形，以致於在

四分位距的表現皆為低估的情形，且隨著資料結構偏移，低估的情形越來越嚴重。並由圖 5-2-13~圖 5-2-15 看出公式二在八組公式中的偏誤程度最小且較穩定。

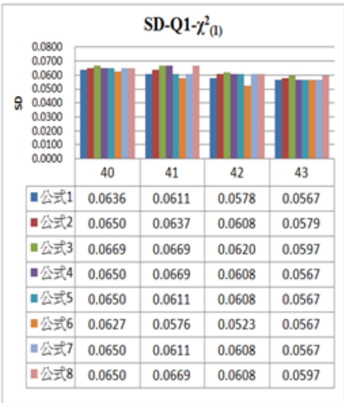
④ 公式六在Q_3的表現幾乎為低估的情形(僅 N＝43 除外)，而在 Q_1 的表現皆為低估情形，但因為在Q_3的低估量大於或小於Q_1的低估量，以致於在四分位距的表現有低估或高估的情形(例：N＝40、41、42)，並由圖 5-2-18 看出公式二在八組公式中的偏誤程度最小且較穩定。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-19～圖 5-2-24 觀察出在不同樣本數 N＝40、41、42、43 的情況下，公式一與公式二、公式三之差異，皆差不多以 1：2 的比例減少高估量，甚至可能產生低估的情形。

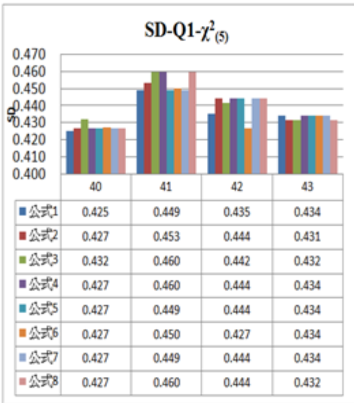
② 由圖 5-2-19～圖 5-2-24 觀察出偏誤在六種分配之四分位距情況下，當樣本數 N＝40、42 時，公式二、四、五、七、八結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同；公式三、八結果相同。

2、SD（Q_1）



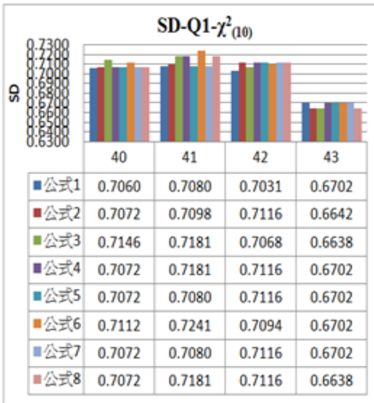
	40	41	42	43
公式1	0.0636	0.0611	0.0578	0.0567
公式2	0.0650	0.0637	0.0608	0.0579
公式3	0.0669	0.0669	0.0620	0.0597
公式4	0.0650	0.0669	0.0608	0.0567
公式5	0.0650	0.0611	0.0608	0.0567
公式6	0.0627	0.0576	0.0523	0.0567
公式7	0.0650	0.0611	0.0608	0.0567
公式8	0.0650	0.0669	0.0608	0.0597

圖 5-2-19 標準差－Q_1－卡方分配(自由度 1)



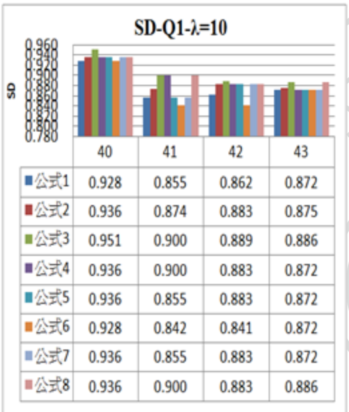
	40	41	42	43
公式1	0.425	0.449	0.435	0.434
公式2	0.427	0.453	0.444	0.431
公式3	0.432	0.460	0.442	0.432
公式4	0.427	0.460	0.444	0.434
公式5	0.427	0.449	0.444	0.434
公式6	0.427	0.450	0.427	0.434
公式7	0.427	0.449	0.444	0.434
公式8	0.427	0.460	0.444	0.432

圖 5-2-20 標準差－Q_1－卡方分配(自由度 5)



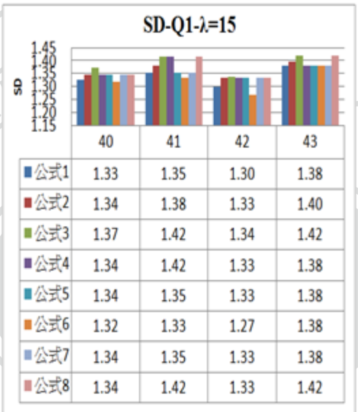
	40	41	42	43
公式1	0.7060	0.7080	0.7031	0.6702
公式2	0.7072	0.7098	0.7116	0.6642
公式3	0.7146	0.7181	0.7068	0.6638
公式4	0.7072	0.7181	0.7116	0.6702
公式5	0.7072	0.7080	0.7116	0.6702
公式6	0.7112	0.7241	0.7094	0.6702
公式7	0.7072	0.7080	0.7116	0.6702
公式8	0.7072	0.7181	0.7116	0.6638

圖 5-2-21 標準差－Q_1－卡方分配(自由度 10)



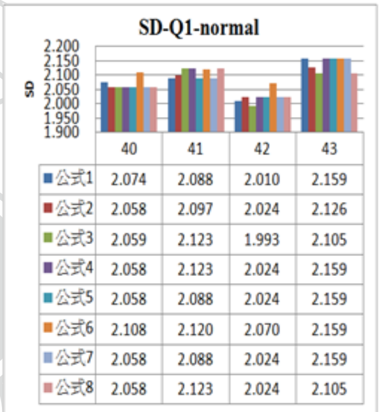
	40	41	42	43
公式1	0.928	0.855	0.862	0.872
公式2	0.936	0.874	0.883	0.875
公式3	0.951	0.900	0.889	0.886
公式4	0.936	0.900	0.883	0.872
公式5	0.936	0.855	0.883	0.872
公式6	0.928	0.842	0.841	0.872
公式7	0.936	0.855	0.883	0.872
公式8	0.936	0.900	0.883	0.886

圖 5-2-22 標準差－Q_1－指數分配(λ 係數 10)



	40	41	42	43
公式1	1.33	1.35	1.30	1.38
公式2	1.34	1.38	1.33	1.40
公式3	1.37	1.42	1.34	1.42
公式4	1.34	1.42	1.33	1.38
公式5	1.34	1.35	1.33	1.38
公式6	1.32	1.33	1.27	1.38
公式7	1.34	1.35	1.33	1.38
公式8	1.34	1.42	1.33	1.42

圖 5-2-23 標準差－Q_1－指數分配(λ 係數 15)



	40	41	42	43
公式1	2.074	2.088	2.010	2.159
公式2	2.058	2.097	2.024	2.126
公式3	2.059	2.123	1.993	2.105
公式4	2.058	2.123	2.024	2.159
公式5	2.058	2.088	2.024	2.159
公式6	2.108	2.120	2.070	2.159
公式7	2.058	2.088	2.024	2.159
公式8	2.058	2.123	2.024	2.105

圖 5-2-24 標準差－Q_1常態分配(平均數 100，標準差 10)

由圖 5-2-19～5-2-24 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① $\chi^2_{(1)}$:由圖 5-2-19 看出八組公式在樣本數 N＝40～43 中的變異程度都差不多，不過公式六的變異程度最小。

② $\chi^2_{(5)}$：由圖 5-2-20 看出八組公式在樣本數 N＝41 時，其變異程度較其他樣本數的情況來得大一點。

③ $\chi^2_{(10)}$：隨著自由度增加，八組公式的變異量明顯較 $\chi^2_{(1)}$ 、$\chi^2_{(5)}$增加許多。但發現在樣本數 N＝43 時，其變異程度比其他樣本數的情況來得小一點。

(2)指數分配

λ＝10、λ＝15：由圖 5-2-22、5-2-23 看出，大體上而言，公式三的變異程度最大，而公式六的變異程度最小。

(3) 常態分配

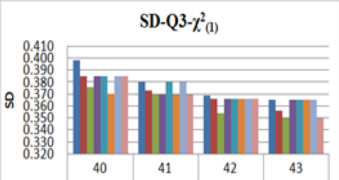
八組公式的變異程度表現不一。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-19～圖 5-2-24 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其變異值都相同，此與定理四的證明結果相同。

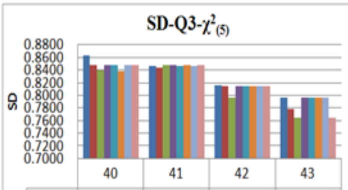
② 由圖 5-2-19～圖 5-2-24 觀察出標準差在六種分配之第一四分位數情況下，當樣本數 N＝40、42 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八的結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

2-1、SD（Q_3）



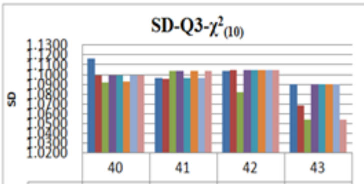
	40	41	42	43
公式1	0.398	0.380	0.368	0.365
公式2	0.385	0.373	0.366	0.356
公式3	0.375	0.370	0.354	0.349
公式4	0.385	0.370	0.366	0.365
公式5	0.385	0.380	0.366	0.365
公式6	0.370	0.370	0.366	0.365
公式7	0.385	0.380	0.366	0.365
公式8	0.385	0.370	0.366	0.349

圖 5-2-25 標準差－Q_3–卡方分配(自由度 1)



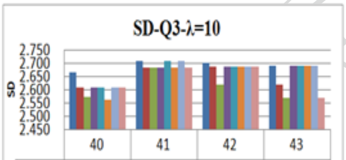
	40	41	42	43
公式1	0.8633	0.8458	0.8163	0.7963
公式2	0.8484	0.8434	0.8141	0.7778
公式3	0.8397	0.8481	0.7959	0.7647
公式4	0.8484	0.8481	0.8141	0.7963
公式5	0.8484	0.8458	0.8141	0.7963
公式6	0.8375	0.8481	0.8141	0.7963
公式7	0.8484	0.8458	0.8141	0.7963
公式8	0.8484	0.8481	0.8141	0.7647

圖 5-2-26 標準差－Q_3－卡方分配(自由度 5)



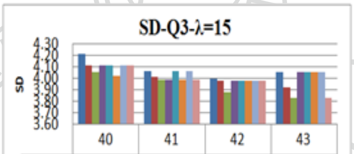
	40	41	42	43
公式1	1.1162	1.0962	1.1038	1.0902
公式2	1.0993	1.0955	1.1043	1.0684
公式3	1.0915	1.1039	1.0821	1.0537
公式4	1.0993	1.1039	1.1043	1.0902
公式5	1.0993	1.0962	1.1043	1.0902
公式6	1.0930	1.1039	1.1043	1.0902
公式7	1.0993	1.0962	1.1043	1.0902
公式8	1.0993	1.1039	1.1043	1.0537

圖 5-2-27 標準差－Q_3－卡方分配(自由度 10)



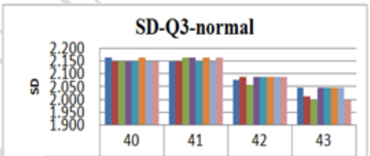
	40	41	42	43
公式1	2.667	2.710	2.701	2.693
公式2	2.608	2.685	2.689	2.621
公式3	2.573	2.683	2.619	2.568
公式4	2.608	2.683	2.689	2.693
公式5	2.608	2.710	2.689	2.693
公式6	2.562	2.683	2.689	2.693
公式7	2.608	2.710	2.689	2.693
公式8	2.608	2.683	2.689	2.568

圖 5-2-28 標準差－Q_3－指數分配(λ係數 10)



	40	41	42	43
公式1	4.22	4.07	4.00	4.05
公式2	4.12	4.01	3.98	3.92
公式3	4.05	3.99	3.88	3.83
公式4	4.12	3.99	3.98	4.05
公式5	4.12	4.07	3.98	4.05
公式6	4.02	3.99	3.98	4.05
公式7	4.12	4.07	3.98	4.05
公式8	4.12	3.99	3.98	3.83

圖 5-2-29 標準差－Q_3－指數分配(λ係數 15)



	40	41	42	43
公式1	2.164	2.147	2.075	2.044
公式2	2.149	2.147	2.087	2.013
公式3	2.149	2.163	2.059	1.997
公式4	2.149	2.163	2.087	2.044
公式5	2.149	2.147	2.087	2.044
公式6	2.165	2.163	2.087	2.044
公式7	2.149	2.147	2.087	2.044
公式8	2.149	2.163	2.087	1.997

圖 5-2-30 標準差－Q_3－常態(平均數 100，標準差 10)

由圖 5-2-25～5-2-30 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① 由圖 5-12-25～圖 5-2-27 看出，大體上而言，公式一在 Q_3 之變異程度明顯高於其他公式，而公式三在 Q_3 之表現則較其他公式呈現出較小的變異。此外，公式六在樣本數 N＝41 時，其變異程度與公式三、四、八並無明顯差異。在樣本數 N＝42 時，公式六與公式二、四、五、七、八也並無明顯差異。

② 隨著自由度的增加，Q_3 的變異量在八組公式中也都呈現遞增的現象，

③ 與 Q_1 的情況相比， Q_3 的變異量較 Q_1 來得大。

(2) 指數分配

與卡方分配有相同的結果，即大體上而言，公式三在樣本數 N=40～43 中變異程度較小，公式一在 N=40～43 中變異程度較大。

(3) 常態分配

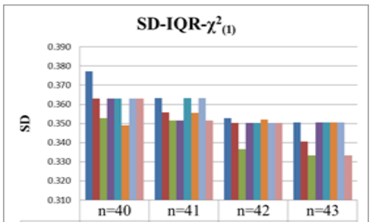
與 Q_1 圖形 5-2-24 比較，發現兩者變異量差不多。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-25～圖 5-2-30 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其變異值都相同，此與定理四的證明結果相同。

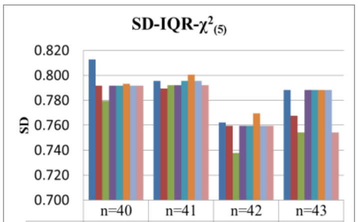
② 由圖 5-2-25～圖 5-2-30 觀察出標準差在六種分配之第三四分位數情況下，當樣本數 N=40 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N=42 時，公式二、四、五、六、七、八的結果相同；樣本數 N=41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、六、八的結果相同；最後，在樣本數 N=43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

2-2、SD (IQR)



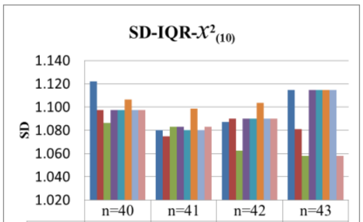
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.377	0.363	0.353	0.351
公式2	0.363	0.356	0.350	0.341
公式3	0.353	0.352	0.337	0.333
公式4	0.363	0.352	0.350	0.351
公式5	0.363	0.363	0.350	0.351
公式6	0.349	0.355	0.352	0.351
公式7	0.363	0.363	0.350	0.351
公式8	0.363	0.352	0.350	0.333

圖 5-2-31 標準差-IQR-卡方分配(自由度 1)



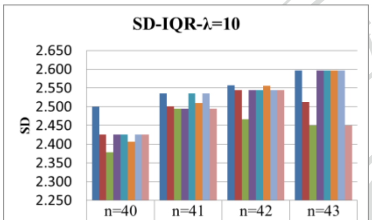
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.813	0.796	0.762	0.788
公式2	0.792	0.789	0.759	0.768
公式3	0.779	0.792	0.738	0.754
公式4	0.792	0.792	0.759	0.788
公式5	0.792	0.796	0.759	0.788
公式6	0.793	0.800	0.770	0.788
公式7	0.792	0.796	0.759	0.788
公式8	0.792	0.792	0.759	0.754

圖 5-2-32 標準差-IQR-卡方分配(自由度 5)



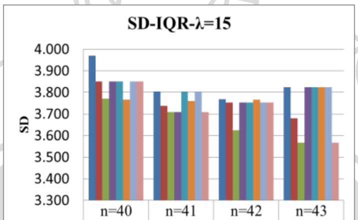
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	1.122	1.080	1.087	1.115
公式2	1.098	1.075	1.090	1.081
公式3	1.086	1.083	1.063	1.058
公式4	1.098	1.083	1.090	1.115
公式5	1.098	1.080	1.090	1.115
公式6	1.107	1.099	1.103	1.115
公式7	1.098	1.080	1.090	1.115
公式8	1.098	1.083	1.090	1.058

圖 5-2-33 標準差-IQR-卡方分配(自由度 10)



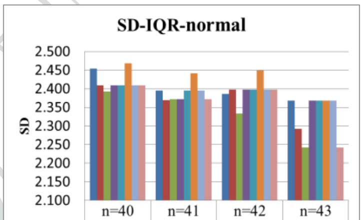
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	2.500	2.535	2.557	2.597
公式2	2.426	2.502	2.545	2.513
公式3	2.379	2.495	2.467	2.450
公式4	2.426	2.495	2.545	2.597
公式5	2.426	2.535	2.545	2.597
公式6	2.407	2.510	2.555	2.597
公式7	2.426	2.535	2.545	2.597
公式8	2.426	2.495	2.545	2.450

圖 5-2-34 標準差-IQR-指數分配(λ 係數 10)



	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	3.970	3.805	3.769	3.824
公式2	3.850	3.737	3.753	3.680
公式3	3.771	3.709	3.625	3.567
公式4	3.850	3.709	3.753	3.824
公式5	3.850	3.805	3.753	3.824
公式6	3.766	3.760	3.766	3.824
公式7	3.850	3.805	3.753	3.824
公式8	3.850	3.709	3.753	3.567

圖 5-2-35 標準差-IQR-指數分配(λ 係數 15)



	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	2.454	2.395	2.386	2.368
公式2	2.409	2.370	2.398	2.292
公式3	2.393	2.372	2.334	2.242
公式4	2.409	2.372	2.398	2.368
公式5	2.409	2.395	2.398	2.368
公式6	2.469	2.441	2.449	2.368
公式7	2.409	2.395	2.398	2.368
公式8	2.409	2.372	2.398	2.242

圖 5-2-36 標準差-IQR-常態分配(平均數 100，標準 10)

由圖 5-2-31～5-2-36 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① $\chi^2_{(1)}$：由圖 5-2-31 看出八組公式在樣本數 N＝40～43 中的變異程度都差不多。

② $\chi^2_{(5)}$：由圖 5-2-32 看出八組公式在樣本數 N＝42 時，其變異程度較其他樣本數的情況來得小一點。

③ $\chi^2_{(10)}$：隨著自由度增加，IQR 的變異量在八組公式中呈現遞增現象。

④ 由圖 5-2-31～5-2-33 看出，大體上而言，公式一在 IQR 之變異程度明顯高於其他公式，而公式三在 IQR 之表現，則較其他公式呈現出較小的變異。

(2) 指數分配

① λ＝10：由圖 5-2-34 看出八組公式在樣本數 N＝40 時，其變異程度較其他樣本數的情況來得小一點。

② λ＝15：由圖 5-2-35 看出八組公式在樣本數 N＝40～43 中的變異程度，幾乎呈現遞減情形。但隨著自由度增加， IQR 的變異量在八組公式中呈現遞增現象。

③ 由圖 5-12-34、圖 5-2-35 看出，大體上而言，公式一的變異程度最大，而公式三的變異程度最小。

(3) 常態分配

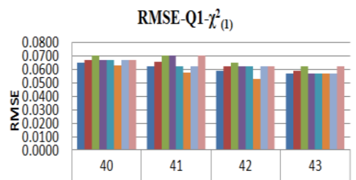
由圖 5-2-36 看出，IQR 的變異量在八組公式中呈現遞減現象。大體上而言，公式六的變異程度最大，而公式三的變異程度最小。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-31～圖 5-2-36 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其變異值都相同，此與定理四的證明結果相同。

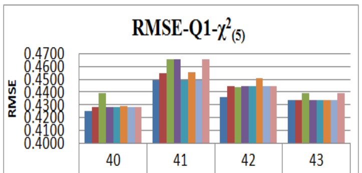
② 由圖 5-2-31～圖 5-2-36 觀察出標準差在六種分配之四分位距情況下，當樣本數 N＝40 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝42 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八的結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

3、RMSE (Q_1)



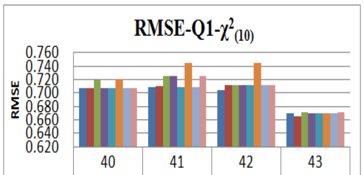
	40	41	42	43
公式1	0.0644	0.0618	0.0584	0.0569
公式2	0.0669	0.0654	0.0623	0.0589
公式3	0.0701	0.0699	0.0649	0.0618
公式4	0.0669	0.0699	0.0623	0.0569
公式5	0.0669	0.0618	0.0623	0.0569
公式6	0.0628	0.0576	0.0527	0.0569
公式7	0.0669	0.0618	0.0623	0.0569
公式8	0.0669	0.0699	0.0623	0.0618

圖 5-2-37 均方根誤差－ Q_1－卡方分配(自由度 1)



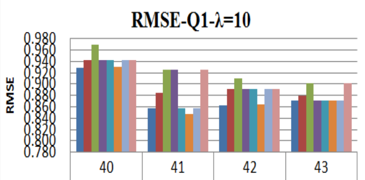
	40	41	42	43
公式1	0.4250	0.4489	0.4359	0.4341
公式2	0.4283	0.4544	0.4442	0.4335
公式3	0.4389	0.4656	0.4437	0.4390
公式4	0.4283	0.4656	0.4442	0.4341
公式5	0.4283	0.4489	0.4442	0.4341
公式6	0.4291	0.4555	0.4510	0.4341
公式7	0.4283	0.4489	0.4442	0.4341
公式8	0.4283	0.4656	0.4442	0.4390

圖 5-2-38 均方根誤差－ Q_1－卡方分配(自由度 5)



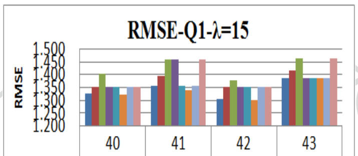
	40	41	42	43
公式1	0.707	0.709	0.704	0.670
公式2	0.707	0.710	0.712	0.665
公式3	0.720	0.725	0.712	0.671
公式4	0.707	0.725	0.712	0.670
公式5	0.707	0.709	0.712	0.670
公式6	0.721	0.744	0.745	0.670
公式7	0.707	0.709	0.712	0.670
公式8	0.707	0.725	0.712	0.671

圖 5-2-39 均方根誤差－ Q_1-卡方分配(自由度 10)



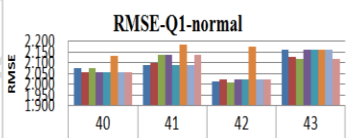
	40	41	42	43
公式1	0.928	0.857	0.863	0.872
公式2	0.941	0.885	0.891	0.879
公式3	0.970	0.926	0.910	0.901
公式4	0.941	0.926	0.891	0.872
公式5	0.941	0.857	0.891	0.872
公式6	0.930	0.847	0.865	0.872
公式7	0.941	0.857	0.891	0.872
公式8	0.941	0.926	0.891	0.901

圖 5-2-40 均方根誤差－ Q_1－指數分配(λ係數 10)



	40	41	42	43
公式1	1.326	1.356	1.303	1.388
公式2	1.354	1.397	1.351	1.417
公式3	1.403	1.457	1.379	1.465
公式4	1.354	1.457	1.351	1.388
公式5	1.354	1.356	1.351	1.388
公式6	1.322	1.340	1.301	1.388
公式7	1.354	1.356	1.351	1.388
公式8	1.354	1.457	1.351	1.465

圖 5-2-41 均方根誤差－ Q_1–指數分配(λ係數 15)



	40	41	42	43
公式1	2.077	2.091	2.012	2.161
公式2	2.058	2.097	2.025	2.125
公式3	2.075	2.138	2.009	2.116
公式4	2.058	2.138	2.025	2.161
公式5	2.058	2.091	2.025	2.161
公式6	2.130	2.183	2.175	2.161
公式7	2.058	2.091	2.025	2.161
公式8	2.058	2.138	2.025	2.116

圖 5-2-42 均方根誤差- Q_1-常態(平均數 100,標準差 10)

由圖 5-2-37～5-2-42 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① $\chi^2_{(1)}$：由圖 5-2-37 觀察出公式六在樣本數 N＝40～43 時均方根誤差量最少。不過，八組公式在 N＝40～43 時的均方根誤差量差不多。

② $\chi^2_{(5)}$：由圖 5-2-38 看出，大體上而言，公式一在 Q_1 之表現較其他公式呈現出較小的均方根誤差，而公式三則呈現較大的均方根誤差。

③ $\chi^2_{(10)}$：由圖 54-2-39 看出八組公式在 N＝43 時，其均方根誤差值比其他樣本數的情況來得小一點。

(2) 指數分配

由於 λ＝15 與 $\chi^2_{(1)}$的資料結構類似，所以可看出八組公式，大體上而言，公式六的表現較其他公式呈現出較小的均方根誤差，而公式三則呈現較大的均方根誤差。

(3) 常態分配

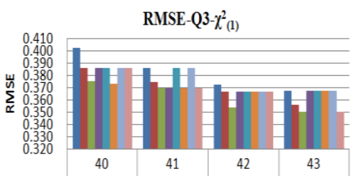
八組公式的均方根誤差程度表現不一。

(4)綜合表現

① 由圖 5-2-37～圖 5-2-42 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其均方根誤差值都相同，此與定理四的證明結果相同。

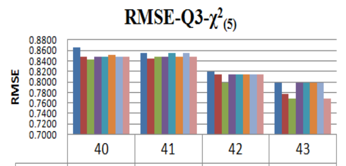
② 由圖 5-2-37～圖 5-2-42 觀察出均方根誤差在六種分配之第一四分位數情況下，當樣本數 N＝40、42 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八的結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

3-1、RMSE (Q_3)



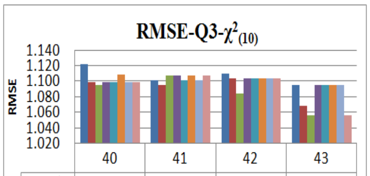
	40	41	42	43
公式1	0.402	0.386	0.372	0.367
公式2	0.386	0.375	0.366	0.356
公式3	0.375	0.370	0.354	0.350
公式4	0.386	0.370	0.366	0.367
公式5	0.386	0.386	0.366	0.367
公式6	0.373	0.370	0.366	0.367
公式7	0.386	0.386	0.366	0.367
公式8	0.386	0.370	0.366	0.350

圖 5-2-43 均方根誤差－ Q_3-卡方分配(自由度 1)



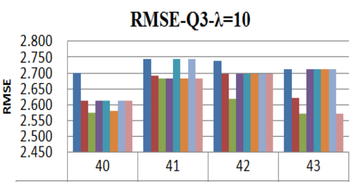
	40	41	42	43
公式1	0.8653	0.8548	0.8189	0.7982
公式2	0.8480	0.8446	0.8137	0.7774
公式3	0.8436	0.8481	0.7992	0.7680
公式4	0.8480	0.8481	0.8137	0.7982
公式5	0.8480	0.8548	0.8137	0.7982
公式6	0.8521	0.8481	0.8137	0.7982
公式7	0.8480	0.8548	0.8137	0.7982
公式8	0.8480	0.8481	0.8137	0.7680

圖 5-2-44 均方根誤差－ Q_3–卡方分配(自由度 5)



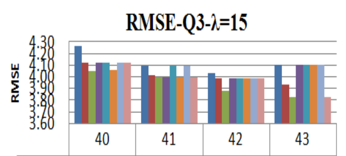
	40	41	42	43
公式1	1.122	1.101	1.110	1.095
公式2	1.099	1.095	1.104	1.068
公式3	1.094	1.107	1.084	1.056
公式4	1.099	1.107	1.104	1.095
公式5	1.099	1.101	1.104	1.095
公式6	1.109	1.107	1.104	1.095
公式7	1.099	1.101	1.104	1.095
公式8	1.099	1.107	1.104	1.056

圖 5-2-45 均方根誤差－ Q_3-卡方分配(自由度 10)



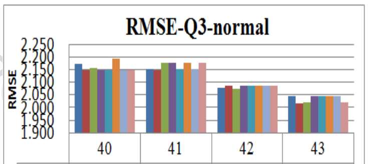
	40	41	42	43
公式1	2.699	2.744	2.738	2.711
公式2	2.613	2.690	2.696	2.621
公式3	2.573	2.683	2.618	2.571
公式4	2.613	2.683	2.696	2.711
公式5	2.613	2.744	2.696	2.711
公式6	2.581	2.683	2.696	2.711
公式7	2.613	2.744	2.696	2.711
公式8	2.613	2.683	2.696	2.571

圖 5-2-46 均方根誤差－ Q_3–指數分配(λ 係數 10)



	40	41	42	43
公式1	4.26	4.09	4.04	4.11
公式2	4.12	4.01	3.99	3.94
公式3	4.05	4.00	3.88	3.82
公式4	4.12	4.00	3.99	4.11
公式5	4.12	4.09	3.99	4.11
公式6	4.06	4.00	3.99	4.11
公式7	4.12	4.09	3.99	4.11
公式8	4.12	4.00	3.99	3.82

圖 5-2-47 均方根誤差- Q_3-指數分配(λ 係數 15)



	40	41	42	43
公式1	2.175	2.151	2.077	2.044
公式2	2.148	2.147	2.087	2.016
公式3	2.155	2.176	2.073	2.022
公式4	2.148	2.176	2.087	2.044
公式5	2.148	2.151	2.087	2.044
公式6	2.195	2.176	2.087	2.044
公式7	2.148	2.151	2.087	2.044
公式8	2.148	2.176	2.087	2.022

圖 5-2-48 均方根誤差- Q_3-常態(平均數,100 標準差 10)

由圖 5-2-43～5-2-48 觀察整理如下：

(1)卡方分配

① 由圖 5-2-43～圖 5-2-45 看出，大體上而言，公式三在 Q_3 之表現較其他公式呈現出較小的均方根誤差，而公式一則呈現出較大的均方根誤差。

② 由圖 5-2-43～圖 5-2-45 看出隨自由度增加，八組公式的均方根誤差量明顯增加。

(2) 指數分配

與卡方分配的結果相同，即公式三在樣本數 $N=40$～43 中均方根誤差值較小，而公式一在 $N=40$～43 中均方根誤差值較大。

(3) 常態分配

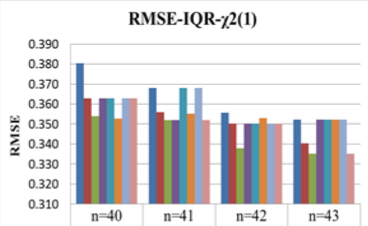
與 Q_1 圖形 5-2-42 比較，發現兩者均方根誤差值差不多。另外，由圖 5-2-48 看出，大體上而言，公式二在 Q_3 之表現較其他公式呈現出較小的均方根誤差。而公式六在 Q_3 之均方根誤差值明顯高於其他公式。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-43～圖 5-2-48 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其均方根誤差值都相同，此與定理四的證明結果相同。

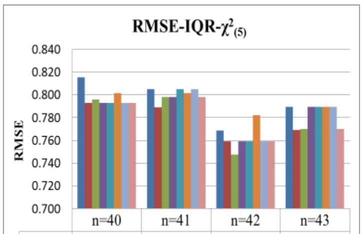
② 由圖 5-2-43～圖 5-2-48 觀察出均方根誤差在六種分配之第三四分位數情況下當樣本數 $N=40$ 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 $N=42$ 時，公式二、四、五、六、七、八的結果相同；樣本數 $N=41$ 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、六、八的結果相同；最後，在樣本數 $N=43$ 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

3-2、RMSE（IQR）



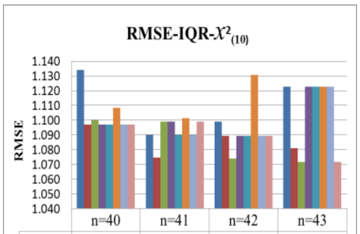
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.380	0.368	0.356	0.352
公式2	0.363	0.356	0.350	0.340
公式3	0.354	0.352	0.338	0.335
公式4	0.363	0.352	0.350	0.352
公式5	0.363	0.368	0.350	0.352
公式6	0.353	0.355	0.353	0.352
公式7	0.363	0.368	0.350	0.352
公式8	0.363	0.352	0.350	0.335

圖 5-2-49 均方根誤差-IQR-卡方分配(自由度 1)



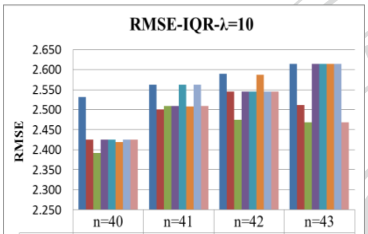
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	0.815	0.805	0.769	0.790
公式2	0.793	0.789	0.759	0.769
公式3	0.796	0.798	0.748	0.770
公式4	0.793	0.798	0.759	0.790
公式5	0.793	0.805	0.759	0.790
公式6	0.802	0.801	0.782	0.790
公式7	0.793	0.805	0.759	0.790
公式8	0.793	0.798	0.759	0.770

圖 5-2-50 均方根誤差-IQR-卡方分配(自由度 5)



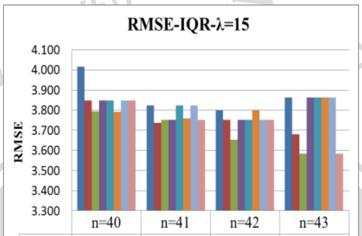
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	1.134	1.090	1.099	1.123
公式2	1.097	1.074	1.089	1.081
公式3	1.100	1.099	1.074	1.072
公式4	1.097	1.099	1.089	1.123
公式5	1.097	1.090	1.089	1.123
公式6	1.108	1.101	1.131	1.123
公式7	1.097	1.090	1.089	1.123
公式8	1.097	1.099	1.089	1.072

圖 5-2-51 均方根誤差-IQR-卡方分配(自由度 10)



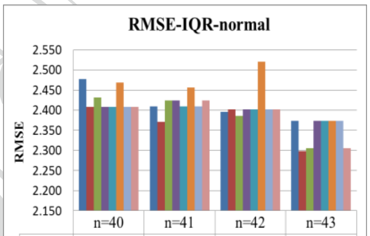
	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	2.532	2.562	2.590	2.614
公式2	2.426	2.501	2.545	2.511
公式3	2.392	2.509	2.475	2.469
公式4	2.426	2.509	2.545	2.614
公式5	2.426	2.562	2.545	2.614
公式6	2.419	2.509	2.587	2.614
公式7	2.426	2.562	2.545	2.614
公式8	2.426	2.509	2.545	2.469

圖 5-2-52 均方根誤差-IQR-指數分配(λ 係數 10)



	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	4.015	3.824	3.800	3.863
公式2	3.849	3.736	3.751	3.679
公式3	3.793	3.753	3.653	3.584
公式4	3.849	3.753	3.751	3.863
公式5	3.849	3.824	3.751	3.863
公式6	3.791	3.760	3.798	3.863
公式7	3.849	3.824	3.751	3.863
公式8	3.849	3.753	3.751	3.584

圖 5-2-53 均方根誤差-IQR-指數分配(λ 係數 15)



	n=40	n=41	n=42	n=43
公式1	2.477	2.410	2.395	2.374
公式2	2.409	2.371	2.402	2.298
公式3	2.432	2.424	2.386	2.305
公式4	2.409	2.424	2.402	2.374
公式5	2.409	2.410	2.402	2.374
公式6	2.468	2.456	2.520	2.374
公式7	2.409	2.410	2.402	2.374
公式8	2.409	2.424	2.402	2.305

圖 5-2-54 均方根誤-IQR-常態(平均數 100，標準差 10)

由圖 5-2-49～5-2-54 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① $\chi^2_{(1)}$：由圖 5-2-49 看出，大體上而言，公式三在 Q_3 之表現較其他公式呈現出較小的均方根誤差。

② $\chi^2_{(5)}$：由圖 5-2-50 看出八組公式在 $N=42$ 時，其均方根誤差值比其他樣本數的情況來得小一點。隨自由度增加，大體上而言，公式二在 Q_3 之表現較其他公式呈現出較小的均方根誤差。

③ $\chi^2_{(10)}$：由圖 5-2-51 看出八組公式在 N＝43 時，公式一、四、五、六、七之均方根誤差值比其他樣本數的情況來得大一點。隨自由度增加，大體上而言，公式二、公式三在 Q_3 之表現差不多，較其他公式呈現出較小的均方根誤差。

④ 由圖 5-2-49～圖 5-2-51 看出隨自由度增加，八組公式的均方根誤差量明顯增加。

(2) 指數分配

① λ＝10：由圖 5-2-52 看出八組公式在樣本數 N＝40 時，除了公式一以外，其他公式的均方根誤差值，較其他樣本數的情況來得小一點。

② λ＝15：由圖 5-2-53 看出八組公式在樣本數 N＝40～43 的均方根誤差值，幾乎呈現遞減情形，但隨著自由度增加，八組公式在 IQR 的均方根誤差量明顯增加。

(3) 常態分配

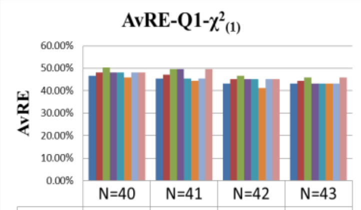
由圖 5-2-54 看出，八組公式在樣本數 N＝40～43 的均方根誤差值，幾乎呈現遞減情形。大體上而言，公式六的變異程度最大，而公式二的變異程度最小。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-49～圖 5-2-54 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其均方根誤差值都相同，此與定理四的證明結果相同。

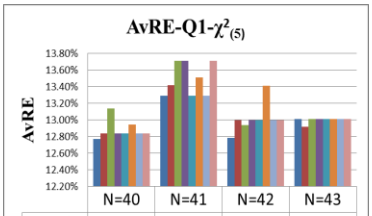
② 由圖 5-2-49～圖 5-2-54 觀察出均方根誤差在六種分配之四分位距情況下，當樣本數 N＝40 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝42 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八的結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

4、AvRE (Q_1)



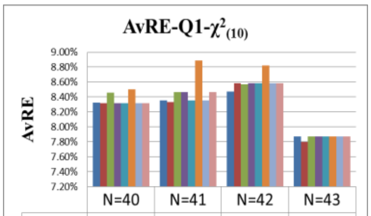
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	46.71%	45.48%	43.08%	43.29%
公式2	48.18%	47.25%	45.20%	44.34%
公式3	50.32%	49.71%	46.61%	45.98%
公式4	48.18%	49.71%	45.20%	43.29%
公式5	48.18%	45.48%	45.20%	43.29%
公式6	46.02%	44.32%	41.22%	43.29%
公式7	48.18%	45.48%	45.20%	43.29%
公式8	48.18%	49.71%	45.20%	45.98%

圖 5-2-55 平均相對誤差-Q_1-卡方分配(自由度 1)



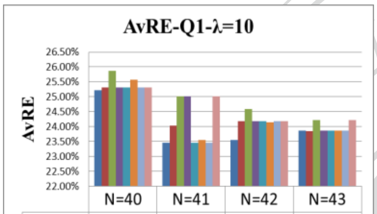
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	12.77%	13.29%	12.78%	13.01%
公式2	12.83%	13.42%	13.00%	12.92%
公式3	13.14%	13.71%	12.94%	13.01%
公式4	12.83%	13.71%	13.00%	13.01%
公式5	12.83%	13.29%	13.00%	13.01%
公式6	12.94%	13.51%	13.41%	13.01%
公式7	12.83%	13.29%	13.00%	13.01%
公式8	12.83%	13.71%	13.00%	13.01%

圖 5-2-56 平均相對誤差-Q_1-卡方分配(自由度 5)



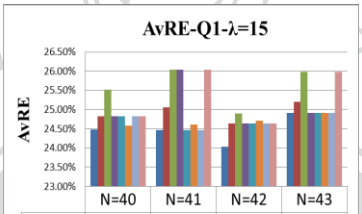
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	8.33%	8.36%	8.48%	7.870%
公式2	8.32%	8.33%	8.58%	7.799%
公式3	8.46%	8.46%	8.57%	7.869%
公式4	8.32%	8.46%	8.58%	7.870%
公式5	8.32%	8.36%	8.58%	7.870%
公式6	8.50%	8.89%	8.82%	7.870%
公式7	8.32%	8.36%	8.58%	7.870%
公式8	8.32%	8.46%	8.58%	7.869%

圖 5-2-57 平均相對誤差-Q_1-卡方分配(自由度 10)



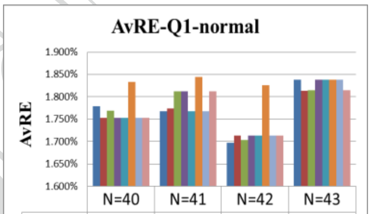
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	25.23%	23.45%	23.55%	23.86%
公式2	25.32%	24.04%	24.18%	23.84%
公式3	25.86%	25.02%	24.58%	24.22%
公式4	25.32%	25.02%	24.18%	23.86%
公式5	25.32%	23.45%	24.18%	23.86%
公式6	25.57%	23.55%	24.15%	23.86%
公式7	25.32%	23.45%	24.18%	23.86%
公式8	25.32%	25.02%	24.18%	24.22%

圖 5-2-58 平均相對誤差-Q_1-指數分配(λ 係數 10)



	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	24.48%	24.46%	24.03%	24.91%
公式2	24.82%	25.06%	24.64%	25.21%
公式3	25.52%	26.04%	24.90%	25.98%
公式4	24.82%	26.04%	24.64%	24.91%
公式5	24.82%	24.46%	24.64%	24.91%
公式6	24.58%	24.62%	24.71%	24.91%
公式7	24.82%	24.46%	24.64%	24.91%
公式8	24.82%	26.04%	24.64%	25.98%

圖 5-2-59 平均相對誤差-Q_1-指數分配(λ 係數 15)



	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	1.779%	1.768%	1.697%	1.838%
公式2	1.753%	1.774%	1.713%	1.813%
公式3	1.769%	1.812%	1.703%	1.814%
公式4	1.753%	1.812%	1.713%	1.838%
公式5	1.753%	1.768%	1.713%	1.838%
公式6	1.834%	1.845%	1.826%	1.838%
公式7	1.753%	1.768%	1.713%	1.838%
公式8	1.753%	1.812%	1.713%	1.814%

圖 5-2-60 平均相對誤差-Q_1 常態(平均數 100,標準差 10)

由圖 5-2-55～5-2-60 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

① 由圖 5-2-55 看出在極度右偏($\chi^2_{(1)}$)的資料結構中，八組公式的平均相對誤差量都很大，但彼此之間的差距也都很接近，所以由圖 5-2-55 看出八組公式在樣本數 N＝40～43 的平均相對誤差量差不多，而以公式六的平均相對誤差程度最小，不過也僅止於卡方分配自由度 1 的情況下表現較佳。

② 由圖 5-2-55～圖 5-2-57 看出隨自由度增加，八組公式的平均相對誤差量明顯減少。並由圖 5-2-56 看出，八組公式在樣本數 N＝41 時，其平均相對誤差程度

較其他樣本數的情況來得大一點，但由圖 5-2-57 發現在樣本數 N＝43 時，其平均相對誤差程度比其他樣本數的情況來得小一點。

(2) 指數分配

① 由圖 5-2-58 看出八組公式在樣本數 N＝40 時，其平均相對誤差程度較其他樣本數的情況來得大一點。

② 由圖 5-2-58、圖 4-2-59 看出隨自由度增加，在 λ＝10~λ＝15 的資料結構下，發現兩者的平均相對誤差程度都差不多，大體上而言，以公式三的平均相對誤差程度最大，而公式一的平均相對誤差程度最小。

(3) 常態分配

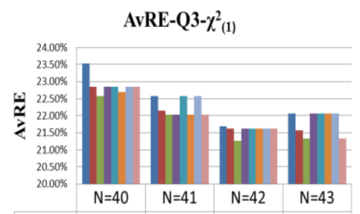
由圖 5-2-60 看出八組公式在常態分配的情況下，其平均相對誤差程度都很小但表現不一，大體上而言，以公式二的平均相對誤差程度最小。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-55～圖 5-2-60 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其平均相對誤差值都相同，此與定理四的證明結果相同。

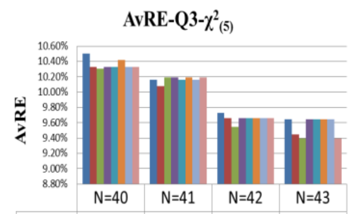
② 由圖 5-2-55～圖 5-2-60 觀察出平均相對誤差在六種分配之第一四分位數情況下當樣本數 N＝40 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝42 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八的結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

4-1、AvRE (Q_3)



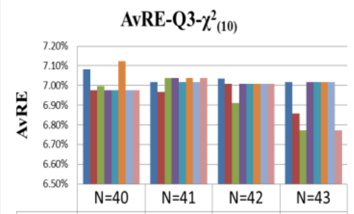
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	23.53%	22.58%	21.69%	22.06%
公式2	22.85%	22.14%	21.61%	21.56%
公式3	22.58%	22.03%	21.27%	21.34%
公式4	22.85%	22.03%	21.61%	22.06%
公式5	22.85%	22.58%	21.61%	22.06%
公式6	22.70%	22.03%	21.61%	22.06%
公式7	22.85%	22.58%	21.61%	22.06%
公式8	22.85%	22.03%	21.61%	21.34%

圖 5-2-61 平均相對誤差-Q_3-卡方分配(自由度 1)



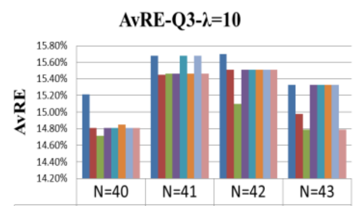
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	10.50%	10.16%	9.73%	9.64%
公式2	10.32%	10.08%	9.66%	9.45%
公式3	10.30%	10.19%	9.55%	9.39%
公式4	10.32%	10.19%	9.66%	9.64%
公式5	10.32%	10.16%	9.66%	9.64%
公式6	10.42%	10.19%	9.66%	9.64%
公式7	10.32%	10.16%	9.66%	9.64%
公式8	10.32%	10.19%	9.66%	9.39%

圖 5-2-62 平均相對誤差-Q_3-卡方分配(自由度 5)



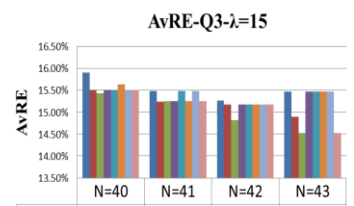
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	7.08%	7.02%	7.04%	7.02%
公式2	6.97%	6.97%	7.01%	6.86%
公式3	7.00%	7.04%	6.91%	6.77%
公式4	6.97%	7.04%	7.01%	7.02%
公式5	6.97%	7.02%	7.01%	7.02%
公式6	7.12%	7.04%	7.01%	7.02%
公式7	6.97%	7.02%	7.01%	7.02%
公式8	6.97%	7.04%	7.01%	6.77%

圖 5-2-63 平均相對誤差-Q_3-卡方分配(自由度 10)



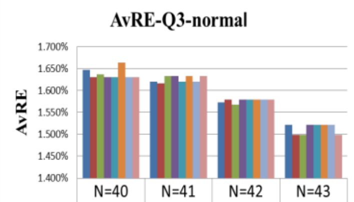
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	15.21%	15.68%	15.70%	15.32%
公式2	14.81%	15.45%	15.51%	14.98%
公式3	14.71%	15.46%	15.10%	14.79%
公式4	14.81%	15.46%	15.51%	15.32%
公式5	14.81%	15.68%	15.51%	15.32%
公式6	14.85%	15.46%	15.51%	15.32%
公式7	14.81%	15.68%	15.51%	15.32%
公式8	14.81%	15.46%	15.51%	14.79%

圖 5-2-64 平均相對誤差-Q_3-指數分配(λ 係數 10)



	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	15.90%	15.49%	15.27%	15.47%
公式2	15.51%	15.24%	15.17%	14.89%
公式3	15.43%	15.25%	14.82%	14.52%
公式4	15.51%	15.25%	15.17%	15.47%
公式5	15.51%	15.49%	15.17%	15.47%
公式6	15.64%	15.25%	15.17%	15.47%
公式7	15.51%	15.49%	15.17%	15.47%
公式8	15.51%	15.25%	15.17%	14.52%

圖 5-2-65 平均相對誤差-Q_3-指數分配(λ 係數 15)



	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	1.648%	1.620%	1.573%	1.521%
公式2	1.630%	1.617%	1.580%	1.499%
公式3	1.637%	1.633%	1.568%	1.498%
公式4	1.630%	1.633%	1.580%	1.521%
公式5	1.630%	1.620%	1.580%	1.521%
公式6	1.664%	1.633%	1.580%	1.521%
公式7	1.630%	1.620%	1.580%	1.521%
公式8	1.630%	1.633%	1.580%	1.498%

圖 5-2-66 平均相對誤差-Q_3 常態(平均數 100，標準 10)

由圖 5-2-61～圖 5-2-66 觀察整理如下：

(1) 卡方分配：由圖 5-2-61～圖 5-2-63 觀察到，

① 八組公式在樣本數 $N=40$～43 的平均相對誤差量差不多，大體上而言，公式一在 Q_3 之平均相對誤差程度明顯高於其他公式，而公式三在 Q_3 之表現則較其他公式呈現出較小的平均相對誤差。

② 隨著自由度的增加，Q_3 的平均相對誤差量在八組公式中呈現遞減的現象。

③ 與 Q_1 的情況相比， Q_3 的變異量較 Q_1 來得小。

(2) 指數分配

① 由圖 5-2-64 看出八組公式在樣本數 $N=40$ 時，其平均相對誤差程度較其他樣本數的情況來得小一點。

② 由圖 5-2-64～圖 5-2-65 看出隨自由度增加，大體上而言，公式三在 Q_3 之表現較其他公式呈現出較小的平均相對誤差，而公式一則呈現出較大的平均相對誤差。

(3) 常態分配

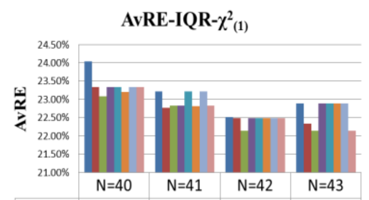
與 Q_1 圖形 5-2-60 比較，發現兩者之平均相對誤差值差不多。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-61～圖 5-2-66 觀察公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其平均相對誤差值都相同，此與定理四的證明結果相同。

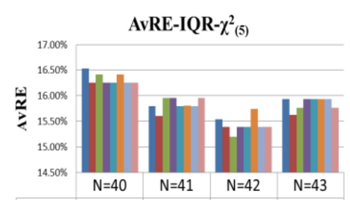
② 由圖 5-2-61～圖 54-2-66 觀察出平均相對誤差在六種分配之第三四分位數情況下當樣本數 $N=40$ 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 $N=42$ 時，公式二、四、五、六、七、八的結果相同；樣本數 $N=41$ 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、六、八的結果相同；最後，在樣本數 $N=43$ 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

4-2、AvRE (IQR)



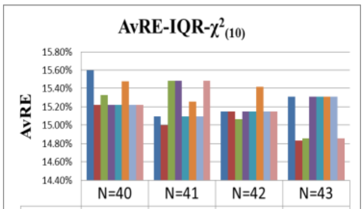
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	24.03%	23.21%	22.52%	22.88%
公式2	23.33%	22.76%	22.47%	22.32%
公式3	23.08%	22.82%	22.13%	22.13%
公式4	23.33%	22.82%	22.47%	22.88%
公式5	23.33%	23.21%	22.47%	22.88%
公式6	23.21%	22.81%	22.49%	22.88%
公式7	23.33%	23.21%	22.47%	22.88%
公式8	23.33%	22.82%	22.47%	22.13%

圖 5-2-67 平均相對誤差-IQR-卡方分配(自由度 1)



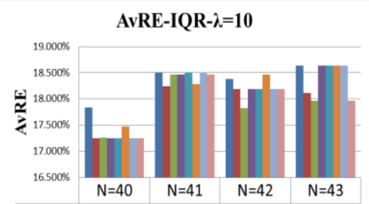
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	16.53%	15.79%	15.54%	15.93%
公式2	16.25%	15.60%	15.38%	15.62%
公式3	16.41%	15.95%	15.20%	15.76%
公式4	16.25%	15.95%	15.38%	15.93%
公式5	16.25%	15.79%	15.38%	15.93%
公式6	16.41%	15.81%	15.74%	15.93%
公式7	16.25%	15.79%	15.38%	15.93%
公式8	16.25%	15.95%	15.38%	15.76%

圖 5-2-68 平均相對誤差-IQR-卡方分配(自由度 5)



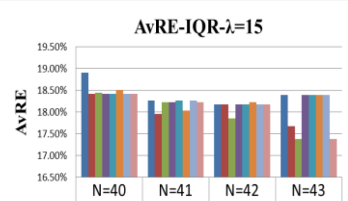
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	15.60%	15.10%	15.148%	15.311%
公式2	15.22%	15.00%	15.149%	14.830%
公式3	15.33%	15.49%	15.063%	14.852%
公式4	15.22%	15.49%	15.149%	15.311%
公式5	15.22%	15.10%	15.149%	15.311%
公式6	15.48%	15.25%	15.417%	15.311%
公式7	15.22%	15.10%	15.149%	15.311%
公式8	15.22%	15.49%	15.149%	14.852%

圖 5-2-69 平均相對誤差-IQR-卡方分配(自由度 10)



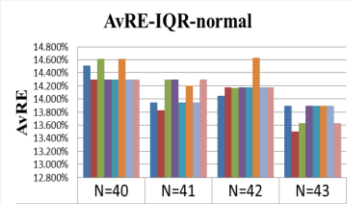
	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	17.841%	18.50%	18.38%	18.63%
公式2	17.246%	18.24%	18.19%	18.11%
公式3	17.254%	18.47%	17.82%	17.96%
公式4	17.246%	18.47%	18.19%	18.63%
公式5	17.246%	18.50%	18.19%	18.63%
公式6	17.473%	18.28%	18.46%	18.63%
公式7	17.246%	18.50%	18.19%	18.63%
公式8	17.246%	18.47%	18.19%	17.96%

圖 5-2-70 平均相對誤差-IQR-指數分配(λ 係數 10)



	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	18.90%	18.26%	18.16%	18.39%
公式2	18.41%	17.94%	18.17%	17.67%
公式3	18.44%	18.22%	17.84%	17.37%
公式4	18.41%	18.22%	18.17%	18.39%
公式5	18.41%	18.26%	18.17%	18.39%
公式6	18.50%	18.02%	18.22%	18.39%
公式7	18.41%	18.26%	18.17%	18.39%
公式8	18.41%	18.22%	18.17%	17.37%

圖 5-2-71 平均相對誤差-IQR-指數分配(λ 係數 15)



	N=40	N=41	N=42	N=43
公式1	14.508%	13.945%	14.044%	13.898%
公式2	14.295%	13.827%	14.180%	13.501%
公式3	14.608%	14.292%	14.168%	13.633%
公式4	14.295%	14.292%	14.180%	13.898%
公式5	14.295%	13.945%	14.180%	13.898%
公式6	14.613%	14.201%	14.632%	13.898%
公式7	14.295%	13.945%	14.180%	13.898%
公式8	14.295%	14.292%	14.180%	13.633%

圖 5-2-72 平均相對誤差-IQR 常態(平均數 100,標準差 10)

由圖 5-2-67～圖 5-2-72 觀察整理如下：

(1) 卡方分配

由圖 5-2-67～圖 5-2-69 看出八組公式在樣本數 N＝40～43 的平均相對誤差量差不多，大體上而言，在 $\chi^2_{(1)}$資料結構下，公式三在 IQR 之表現較其他公式呈現出較小的平均相對誤差，但隨著自由度增加，資料結構偏移至 $\chi^2_{(5)}$、$\chi^2_{(10)}$，八組公式之平均相對誤差量明顯遞減，且以公式二呈現出較小的平均相對誤差。

(2) 指數分配：由圖 5-2-70～圖 5-2-71 觀察到，

① 因與卡方分配自由度 1 的資料結構相似，所以平均相對誤差量都比較大。

② 隨自由度增加，八組公式僅在樣本數 N＝40 時，其平均相對誤差程度較其他樣本數的情況來得小一點。大體上而言，公式二、公式三在 IQR 之表現差不多，較其他公式呈現出較小的平均相對誤差量。

(3) 常態分配

由圖 5-2-72 看出，八組公式在樣本數 N＝40～43 的平均相對誤差程度表現不一。大體上而言，公式六之平均相對誤差程度最大，而公式二的平均相對誤差程度最小。

(4) 綜合表現

① 由圖 5-2-67～圖 5-2-72 觀察出公式五、公式七之表現，不論在哪種情形下，其平均相對誤差值都相同，此與定理四的證明結果相同。

② 由圖 5-2-67～圖 5-2-72 觀察出平均相對誤差在六種分配之四分位距情況下，當樣本數 N＝40 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝42 時，公式二、四、五、七、八的結果相同；樣本數 N＝41 時，公式一、五、七結果相同及公式三、四、八的結果相同；最後，在樣本數 N＝43 時，公式一、四、五、六、七結果相同及公式三、八的結果相同。

【公式證明與模擬實驗歸納整理】: 第 1、第 3 四分位數相同估計值者劃上註記。

公式 \ 樣本數	式	N=4k	N=4k+1	N=4k+2	N=4k+3
公式一 Minitab 、 SPSS	$i_1(\mathrm{r})=\frac{r(N+1)}{4}$ Q_r(線性插值法)		★		◆
公式二 Bowley (1901)	$i_2(\mathrm{r})=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}$ Q_r(線性插值法)	＊		※	
公式三 Excel 2000	$i_3(\mathrm{r})=\frac{r(N-1)}{4}+1$ Q_r(線性插值法)		◎		⊙
公式四 (國中)	$i_4(r)=\frac{rN}{4}$ $Q_r=\begin{cases} x_{[i_4(\mathrm{r})]+1}, & i_4(\mathrm{r})\notin\mathbb{Z}^+ \\ \frac{x_{i_4(\mathrm{r})}+x_{i_4(\mathrm{r})+1}}{2}, & i_4(\mathrm{r})\in\mathbb{Z}^+ \end{cases}$	＊	◎	※	◆
公式五 (高中)	$N=4k\,,4k+1$ $\begin{cases} Q_1=\frac{x_k+x_{k+1}}{2} \\ Q_3=\frac{x_{N-k}+x_{N-k+1}}{2} \end{cases}$ $N=4k+2\,,4k+3$ $\begin{cases} Q_1=x_{k+1} \\ Q_3=x_{N-k} \end{cases}$	＊	★	※	◆
公式六 Mendenhall & Sincich (1995)	$i_6(r)=\left\lceil\frac{r(N+1)}{4}\right\rceil$ $Q_r=x_{i_6(r)}$				◆
公式七 Moore & McCabe (2002)	$i_7(r):\begin{cases} i_1(\mathrm{r})=\frac{r(N+1)}{4}, & 奇 \\ i_2(\mathrm{r})=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}, & 偶 \end{cases}$ Q_r(線性插值法)	＊	★	※	◆
公式八 Tukey & Hoaglin (1983)	$i_8(r):\begin{cases} i_3(\mathrm{r})=\frac{r(N-1)}{4}+1 & 奇 \\ i_2(\mathrm{r})=\frac{rN}{4}+\frac{1}{2}, & 偶 \end{cases}$ Q_r(線性插值法)	＊	◎	※	⊙

(二）根據上述之綜合表現可知，在不同樣本數之下，某些公式會有相同的結果，現在我們將僅針對結果不同的幾類公式中，相互比較後找出在 Bias、SD、RMSE 及 AvRE 之表現最好公式。

最後將圖 5-2-1 ~5-2-72 中「表現最好」的公式，在不同樣本數及六種不同資料分配的情況下，依據四項評估指標並分為 Q_1、Q_3、IQR 三大類，整理歸納出如表 5-2-1 並說明之。

綜觀 Q_1、Q_3、IQR 在不同資料結構下之表現，由下表 5－2－1 觀察到：

1. 在 RMSE（Q_1）情況下：(絕對誤差)

(1) 由於公式一與公式六在右偏資料結構(卡方分配、指數分配)的表現差不多，因此無法在不對稱(右偏)資料結構中找出較適用之公式；但進一步就卡方分配而言，公式一表現較佳；指數分配則以公式六表現較佳。

(2) 在對稱資料結構中也無法找出較適用之公式。不過，如果在 Bias（Q_1）情況下，則公式二在對稱資料結構(常態分配)中表現較佳。

2. 在 RMSE（Q_3）情況下：(絕對誤差)

(1) 公式三在不對稱(右偏)資料結構(卡方分配、指數分配)中表現最好。

(2) 公式二則在對稱資料結構(常態分配)中表現最好。

3. 在 RMSE（IQR）情況下：(絕對誤差)

(1) 公式三在右偏資料結構(卡方分配、指數分配)中表現最好。

(2) 公式二則在對稱資料結構(常態分配)中表現最好。

4. 在 AvRE（Q_1）情況下：(相對誤差)

(1)公式一在不對稱(右偏)資料結構(卡方分配、指數分配)中表現最好。

(2) 公式一、公式二在對常態分配的表現差不多，因此無法在對稱資料結構(常態分配)中找出較適用之公式。

表 5-2-1 偏誤、標準差、均方根誤差、平均相對誤差-卡方、指數、常態等分配

資料結構	$\chi^2_{(1)}$				$\chi^2_{(5)}$				$\chi^2_{(10)}$				Exp(λ＝10)				Exp(λ＝15)				Normal			
N=40~43	40	41	42	43	40	41	42	43	40	41	42	43	40	41	42	43	40	41	42	43	40	41	42	43
Bias(Q_1)	公式六	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式一	公式一、五、七	公式二、四、五、七、八	公式一、四、五、六、七	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式一、四、五、六、七	公式一	公式一、五、七	公式一	公式一、四、五、六、七	公式一	公式一、五、七	公式一	公式一、四、五、六、七	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二
SD(Q_1)	公式六	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式一	公式一、五、七	公式六	公式二	公式一	公式一、五、七	公式一	公式三、八	公式一	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式六	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式二	公式一、五、七	公式三	公式三、八
RMSE(Q_1)	公式六	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式一	公式一、五、七	公式一	公式二	公式二、四、五、七、八	公式一、五、七	公式一	公式二	公式一	公式六	公式一	公式一、四、五、六、七	公式六	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式二、四、五、七、八	公式一、五、七	公式三	公式三、八
AvRE(Q_1)	公式六	公式六	公式六	公式一、四、五、六、七	公式一	公式一、五、七	公式一	公式一	公式二、四、五、七、八	公式二	公式一	公式二	公式一	公式一、五、七	公式一	公式二	公式一	公式一、五、七	公式一	公式一、四、五、六、七	公式二、四、五、七、八	公式一、五、七	公式一	公式二
Bias(Q_3)	公式三	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式三、四、六、八	公式二、四、五、六、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、六、七、八	公式二	公式三	公式三、四、六、八	公式三	公式二	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二	公式一、四、五、六、七
SD(Q_3)	公式二、四、五、七、八	公式三、四、八	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式六	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式六	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式一、五、七	公式三	公式三、八
RMSE(Q_3)	公式六	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式三	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式二
AvRE(Q_3)	公式三	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式三、八
Bias(IQR)	公式二、四、五、七、八	公式六	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式六	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式二、四、五、七、八	公式一、四、五、六、七
SD(IQR)	公式六	公式三、四、八	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式三、四、八	公式三	公式三、八	公式六	公式三、四、八	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八
RMSE(IQR)	公式六	公式三、四、六、八	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式三、八	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式六	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式二
AvRE(IQR)	公式三	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式二	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式三	公式三、八	公式二、四、五、七、八	公式二	公式一	公式二

註：矩形框代表公式顏色。▢：公式一，▢：公式二，▢：公式三，▢：公式六

5. 在 AvRE（Q_3）情況下：(相對誤差)

(1) 公式三在不對稱(右偏)資料結構(卡方分配、指數分配)中表現最好。

(2) 公式二、公式三在常態分配的表現差不多，因此無法在對稱資料結構(常態分配)中找出較適用之公式。

6. 在 AvRE（IQR）情況下：(相對誤差)

(1) 由於公式二與公式三在右偏資料結構的表現差不多(公式二比公式三好一點點)，因此無法在不對稱(右偏)資料結構找出較適用之公式。

(2) 公式二則在對稱資料結構(常態分配)中表現最好。

第六章　結論與建議

第一節　結　論

本研究之主要目的在於探討國中、高中教材在四分位數定義不同情形下，所可能衍生出來的差異情況。並蒐集從國中到高中及大學統計學教科書有關四分位數的不同計算公式，想了解這些公式在不同資料結構分配下，就第一、第三四分位數與四分位距的估計上，探討何種公式在何種資料型態下較適用。根據第四、五章之研究結果與討論，本章加以整理歸納，並提供建議，以供教師們從事教學時及未來研究之參考。

綜合研究發現，歸納結論如下：

一、有關四分位數的定義，大致上我們都知道，四分位數就是將資料分成四等份時的「割點」位置，教學上，老師應該先確定學生吸收並理解這個概念。至於實務上，因為我們面臨的是實際上觀察到的資料為有限筆，因此不同的操作定義，就可能會有些微不同的計算結果。

這個問題，反應了處理統計資料的實用特徵，因實務上所有資料數為有限，所以會衍生出一些問題。

國中四分位數的定義方式是採用百分位數的概念進行（中位數的定義方式也相同），因此由百分位數的角度來做思考的話，不會衍生任何問題。但是高中版本的四分位數定義方式並非著眼百分位數的想法，因此計算出來的值會略微不同。

其實當資料筆數非常大時，依據國中、高中的四分位數定義所得出的數值並沒有差別，但在量少時會出現些微差異，特別是在 $N=4k+1$ 時，至於在 $N=4k$、$4k+2$、$4k+3$ 時則相同。因此老師們可以試試看，將這項事實在教學時告訴學生(針對高中生部分)，兩者差異在於是否含中位數(第二四分位數)，由於操作定義的不同，導致結果有些差異，不過觀念上而言，二者都是合理的定義。但考試時則最好避免 $N=4k+1$ 這類情況。

二、將國中、高中及大學統計學教科書上所蒐集到有關四分位數的八組公式，經過模擬研究之後，發現八組公式在大樣本時的表現差異其實都不大，僅在小樣本 N＝40～43 的情況下，Bias、SD、RMSE、AvRE 會呈現出較明顯差異，其次是 N＝100～103 的情況；隨樣本數增加至 N＝400～403 時，Bias、SD、RMSE、AvRE 之差異愈來愈小；當 N＝1000～1003，其差異微乎其微，幾乎接近 0 。所以當數據資料為大樣本時，用哪一個公式已沒有多大的差別。故由第五章模擬研究發現八組公式於小樣本時之表現較佳情形，分成絕對誤差與相對誤差兩大類：

資料結構	右偏型(卡方分配、指數分配)	對稱型(常態分配)	資料結構	右偏型(卡方分配、指數分配)	對稱型(常態分配)	資料結構	右偏型(卡方分配、指數分配)	對稱型(常態分配)
Bias(Q_1)	公式一	公式二	Bias(Q_3)	公式三	公式二	Bias(IQR)	公式二	公式二
SD(Q_1)	公式六		SD(Q_3)	公式三		SD(IQR)	公式三	公式三
RMSE(Q_1)	公式一、公式六		RMSE(Q_3)	公式三	公式二	RMSE(IQR)	公式三	公式二
AvRE(Q_1)	公式一	公式一、公式二	AvRE(Q_3)	公式三	公式二、公式三	AvRE(IQR)	公式二、公式三	公式二

(1) 絕對誤差

公式一較適合用來求卡方分配（右偏型）第一四分位數；公式六則較適合用來求指數分配（右偏型）第一四分位數。公式三在卡方分配、指數分配（右偏資料結構）下，都得到較好的 Q_3 與 IQR 之估計，所以較適合用來求右偏型第三四分位數與四分位距。而公式二則較適合求對稱型之第三四分位數與四分位距。

(2) 相對誤差

公式一較適合用來求卡方分配、指數分配（右偏型）之第一四分位數。公式三在卡方分配、指數分配（右偏資料結構）下，得到較好的 Q_3 估計，所以較適合用來求右偏型第三四分位數。而公式二則較適合求對稱型之四分位距。

綜合上述可知公式一、公式六在絕對誤差之表現差不多，但公式一在相對誤差之表現較佳，故公式一較適合用來求右偏型第一四分位數。而公式三在絕對誤差與相對誤差之表現都較佳，故公式三較適合用來求右偏型第三四分位數。而公式二則較適用於對稱型資料結構。至於公式四（國中）、公式五（高中）在大部份資料型態上的表現儘管稱不上是最好， 但也不是最差。

第二節 建　議

國中在進行百分位數的教學時，建議在教中位數時可以先引導介紹第 50 百分位數，讓學生先有一點點的概念，接著介紹百分位數會更容易聽懂。而大部份的學生對於處理百分位數的態度，可能都用背誦的方式，直接帶入公式來算，未必懂得其意義，教師可針對學生程度給予適當的說明（繆友勇，2010）。所以國中階段的教學如同前面所述，以學生易懂為第一優先考量，P_{25}、P_{75} 簡明易懂，故應以『累積百分率圖』(百分位數 － 公式四）概念來引導較適宜，如此較容易引起學生之學習動機。

由前一節結論可知，公式一(Minitab)、公式三(Excel)在八組公式中的表現較佳。而 Minitab、Excel 又為數學常用的統計軟體及試算軟體，所以對國中階段的學生若能融入資訊教學，相信有助於學生進一步對四分位數與百分位數的了解，不妨讓學生體驗一下。雖然計算出來的結果與課本所學可能有一點出入，但請不用太在意，畢竟計算公式的不同，導致結果有些差異，但公式背後所蘊藏的意義是相同的，且國中階段的統計則是偏重觀念的教學。

參考文獻

一、中文部分

三民（2008）。高級中學數學第四冊。台北：三民書局。

田克明（1958）。統計公式探源，台中：東海大學。

全華（2008）。高級中學數學第四冊。台北：全華圖書。

南一國中數學教科書編撰委員會(2008)。高級中學數學第四冊。台南：南一書局。

南一國中數學教科書編撰委員會(2009)。國民中學數學教師手冊第六冊。台南：南一書局。

柴松林（1980）。統計學。台北：三民書局。

馬秀蘭、吳德邦（2002）。統計學：以 SPSS for windows 為例。台北縣中和市：新文京開發。(註：公式一)

翁錫伍、李善文、丁村成編著（2004）。領航龍騰高中數學（四）。台北：龍騰文化。

張紘炬（1988）。統計學。台北：華泰書局。

張紘炬（2002）。統計學。台北：華泰書局。

陳子昂、詹文男（1996）。資料統計、判決與解析。台北：財團法人資訊工業策進會。

康軒國中數學教科書編撰委員會（2005）。國民中學數學第六冊。台北：康軒文教。(註：公式四)

康軒國中數學教科書編撰委員會(2008)。國民中學數學教師手冊第六冊。台北：康軒文教。

康熙高中數學教科書編撰委員會（2005）。高級中學數學第四冊。台中：康熙圖書。

國家教育研究院－數學領域部編本教科書編輯委員會（2008）。國民中學數學教師手冊第六冊。台南：翰林出版。

國民中學學生基本學力測驗推動工作委員會網 http://www.bctest.ntnu.edu.tw/

教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程綱要－數學領域。教育部。

教育部國教專業社群網 http://teach.eje.edu.tw/9CC/fields/2003/math10.php

教育部國教專業社群網 http://teach.eje.edu.tw/9CC/fields/2003/math7.php

教育部國教專業社群網 http://teach.eje.edu.tw/data/數學領域綱要內容/(六)附錄2.htm

淺談百分位數取自：
http://www.worldone.com.tw/pdFile.do?pid=1119&file=education/education_1119.pdf

楊西孟（1934）。統計論叢－論分割數 (248 頁)，上海：黎明書局。（註：公式二）

準確度、精確度取自：http://en.wikipedia.org/wiki/Accuracy_and_precision

墨爾（2002）。統計學的世界，(鄭惟厚譯)，台北：天下文化。

鄭堯拌（1940）。統計學（上冊），台北：商務出版社。（註：公式七）

翰林國中數學教科書編撰委員會（2009）。國民中學數學教師手冊第六冊。台南：翰林出版。

翰林高中數學教科書編撰委員會（2008）。高級中學數學第四冊。台南：翰林出版。

龍騰高中數學教科書編撰委員會（2007）。高級中學數學第四冊。台北：龍騰文化。（註：公式五）

二、英文部分

Freund, J. and Perles, B., A New Look at Quartiles of Ungrouped Data, *American Stat*. *Vol*. 41, 200-203 (1987).

Hoaglin, D., Mosteller, F. and Tukey, J. (Ed.), *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, Wiley, New York (1983).（註：公式八）

Mendenhall, W. and Sincich, T. L., *Statistics for Engineering and the Sciences*, *4th ed*, Prentice-Hall (1995).（註：公式六）

Microsoft Excel 2000 ：Retrieved from http://apolloh.blog.excelhome.net（註：公式三）

Moore, D. S. and McCabe, G. P., *Introduction to the Practice of Statistics*, *4th ed*,W.

H. Freeman and Company, New York (2002). (註：公式七）