國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

應用模糊統計於試題難易度評量

Application of fuzzy statistics in assessment for test difficulty

碩專班學生：謝昇倫 撰

指導教授：吳柏林 博士

中華民國一百年一月十一日

摘要

試題難易度評量一直是許多人研究的課題。但傳統方法的五點量表問卷只提供固定尺度的選擇，似乎無法完整地表達受測者真實且複雜的思考。因此本文將以模糊問卷調查進行試題難易度的探討。許多研究應用模糊平均數、模糊眾數或模糊中位數等概念於試題難易度評量。而本文將以此為基礎，定義一種新的距離，再透過一些轉換取得試題的難易度指標，進而比較各試題之間難度的差異。本文的另一個重點，是各個不同難度因子的向度來決定各試題的難度。再以模糊相對權重的概念，對各向度的難易度指標作加權，進而比較、分析。

關鍵字：模糊統計、模糊相對權重、試題難易度評量

Abstract

Assessment for test difficulty have been the subject of many studies. The traditional method of a Likert scale questionnaire provides only a fixed scale choice, but it seems that we can't fully express the real and complex thinking of respondents. Therefore, the thesis will apply fuzzy questionnaire to probe into test difficulty. Concepts such as Fuzzy mean, Fuzzy mode or Fuzzy median are applied in studies of assessment for test difficulty. The thesis will be based on these conceptions to define a new distance, and obtain the difficulty index of test through some conversion. Moreover, it will compare the differences of difficulty among test items. Another focus of this paper is to determine the difficulty of each item according to various dimensions of difficulty factors. Afterwards, the difficulty index of each dimension will be weighted, compared, and analyzed with the concept of fuzzy relative weight.

Keywords：Fuzzy statistics, Fuzzy relative weight, Assessment for test difficulty

目錄

表目錄

1. 前言

在中國自隋唐開科取士以來，歷經宋、元、明、清諸朝不斷的改進，此一科舉取才的考試制度，雖然源自中國，但中國卻一直沒有針對「考試」這門學問進行比較科學化的量化分析。在綿延數千年後，世界各國爭相採用，以作爲文官制度的選拔依據，致使近代的心理計量學(psychometrics)的發展卻起源於外國，西風東漸後，才傳入中國 (余民寧，2002)。雖然古今中外對於人才的進用大多數是採用考試的方式產生，而施測單位如欲拔擢一爲適合需求的人才，試題之設計即更顯重要，因爲一份良好的試卷，可讓符合需求且真正有能力者出現，一般大小考試試卷的型態不乏選擇題、是非題、填空題、申論題、計算題等等題型，因此試題分析其優劣適當是有其重要性的。

但試題難易度的評量尚無一致的標準，每當學測或基測過後，總是在新聞或報紙上看到補習班老師在對今年的試題難度作評論，但這樣的評論的依據爲何？靠的是補教老師個人的經驗？抑或有其他任何科學化的標準？如果說一分題目很難，是難在什麼地方？是難在計算過程很繁瑣，還是難在題目敘述太長太複雜？是想不出解題的策略，或是因爲創新的命題方式讓題目變得很難？了解學生覺得困難的部分，是身爲一個教師亟欲探究的部分，一旦了解這點，不但對教師的教學有幫助，對學生的診斷性學習更有正確的切入點。

本研究想要應用模糊統計方法，發展一種新的評量試題難易度的方法，提供教師一種新工具，藉由這個方法來了解到底是數學題目是在哪一個面向難度太高導致學生學習困難，或者有其他的原因，以作爲教學參考，改進教學方法進而幫助更多學生，期望能提高學生數學學習的動機、興趣及自信。

2. 模糊理論

2.1 模糊數

人類的的感覺是模糊的。當有人說今天天氣很熱的時候，究竟他對於『熱』的定義爲何？多少度的溫度範圍可以稱爲『熱』呢？對於這樣的問題，每個人的回答皆因其主觀性而有不同，即使回答者爲同一人，也會因爲時地不同而有不同的回應。諸如此類很多的論點和問題，都不是能夠用絕對的二元邏輯所可以界定的。原因則接來自人類思維的模糊性。但人類卻常常被要求做出絕對的判斷或選擇，以人性的觀點來看，這是十分不合理的。

人類的邏輯是模糊的，因爲即使在條件或資料不明確下，依然能夠憑直覺來推論研討。例如有人建議下雨時，車子容易打滑，所以要減速慢行。然而，若只是下一點小雨，不減速也無妨，但若下的是傾盆大雨，不減速就不行了。我們很難去定義下多大才叫傾盆大雨，但是我們的大腦會自動去作這件事情。諸如此類的判斷，對人類來說是極自然的，但要電腦來推論，就很麻煩，因爲把資料登錄電腦時，若沒有嚴格的定義，去掉所有模糊，則電腦是不會有作用的。所以要讓電腦作業，先決條件是必須勉強地把所有定義都弄清楚。人類最拿手的是圖形認識或剖析抽象化事物，而電腦在這方面就不靈光了。所以到目前爲止，人類總是遷就自己去配合電腦，如果電腦不引進模糊概念，人類將受到束縛無法解脫。

模糊概念並不只侷限在研究人類的思維與情感而已。在以往嚴謹精確的原則要求下，許多技術層面所衍生出來的灰色地帶，都必須耗費相當大的心力爲複雜的系統寫下嚴密的定義與敘述，灰色地帶中的每一個細微末節，都必須完全考慮到，盡全力使得其中的模糊變得明確，但若稍有一遺漏，則全

盤皆墨，一切又得從頭做起。而模糊理論確提供一種新的思維模式，只需要明瞭各種屬性的狀況，利用軟計算方法建立大略性的處理模式，即可處理系統中灰色地帶的問題。所以我們應該要了解到：灰色或是模糊不清的事件是層出不窮的，也是無法完全避免的，也因此才讓我們體認到研究模糊理論的重要性。

隸屬度函數是模糊理論的基礎，它是從傳統集合中的特徵函數(characteristic function)所衍生出來的，用以表達元素對模糊集合的隸屬度(membership)，其範圍介於 0 到 1 之間。對於元素和集合關係，古典集合將元素和集合之間的關係以特徵函數來說明，亦即 $I(x)=1$，若 $x \in A$；$I(x)=0$，若 $x \notin A$。但是 Zadeh (1965)在模糊集合論中提到，若一個元素屬於某一個集合的程度越大，則其隸屬度值越接近 1，反之則越接近 0。

隸屬度函數是模糊理論最基本的概念，它不僅可以描述模糊集合的性質，更可以對模糊集合進行量化，並且利用精確的數學方法，來分析和處理模糊性資訊。然而，要建立一個足以表達模糊概念的隸屬度函數，並不是一件容易的事。其原因在於隸屬度函數脫離不了個人的主觀意識，故沒有通用的定理或公式，通常是根據經驗或統計來加以確定，很難像客觀事物一樣有很強的說服力。因此，隸屬度函數的建立經常是具有爭議性的，也沒有一種隸屬度函數是可以被廣泛接受而使用的。

隸屬度函數可分為離散型(discrete type)與連續型(continuous type)兩種。離散型的隸屬度函數是直接給予有限模糊集合內每個元素的隸屬度，並以向量的形式表現出來；而連續型隸屬度函數則有幾種常用的函數形式(S-函數、Z-函數、π-函數、三角形函數、梯形函數、高斯(鐘形)函數)來描述模糊集合。

函數定義的表現，可以是無限模糊集合的元素及其隸屬度之間的關係，也可以是有限模糊集合的元素及其隸屬度之間的關係。

傳統的統計方法透過一般的抽樣調查往往只能得到單一的數值資料、或是固定尺度的選擇，但如此並不足以能夠完整地反應人類個體的想法。若能讓受訪者根據自己的意識，利用隸屬度函數或區間值表達心中對於問項真正屬意的程度，則可更完整地傳達人類真實的思維。再考慮具有模糊特性的問項時，資料本身便具有不確定性與模糊性，所以我們先定義模糊數如下。

定義 2.1 模糊數(吳柏林，2005)

設 U 為一論域，令 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 為論域 U 的因子集。u 為一對應到 $[0,1]$ 間的實數函數，即 $u: U \to [0,1]$。假若佈於論域 U 之一述句 X 其相對於因子集的隸屬度函數以 $\{\mu_1(X), \mu_2(X), \cdots, \mu_n(X)\}$ 表示，則在離散(discrete)的情形下，述句 X 的模糊數可表示成：

$$\mu_U(X) = \frac{\mu_1(X)}{A_1} + \frac{\mu_2(X)}{A_2} + \cdots + \frac{\mu_n(X)}{A_n}$$

其中+是或的意思，$\frac{\mu_i(X)}{A_i}$ 表示述句 X 隸屬於因子集 A_i 的程度。當 U 為連續時，述句 X 的模糊數可表示成：$\mu(X) = \int_{x \in X} \frac{\mu_i(X)}{A_i}$ 。

例 2.1 一天念書時間的模糊數表示

假設 X 為國中學生一天上網幾個小時，以模糊數表示為 $\mu_\Omega(X)$ ，論域 Ω 可視為整數論域，即是上網時數。設 $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$ ， X :一天上網時間模糊數的隸屬度函數為 $\{\mu_0(X) = 0.2$, $\mu_1(X) = 0.4$ ， $\mu_2(X) = 0.3$, $\mu_3(X) = 0.1$, , $\mu_4(X) = 0$, $\mu_5(X) = 0\}$ 則 X :一天上網幾個小時的模糊數可表示為

$$\mu_U(X) = \frac{0.2}{0} + \frac{0.4}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5}$$

2.2 軟計算

軟計算(soft computing)與傳統實數計算方法(硬計算)不同的是，軟計算乃基於模糊數或模糊樣本，包括區間數、多值數、語言變數等的數學運算。舉例來說：某大學生每週運動 2-4 回，每回 1-2 小時，那一週運動幾小時？又如某人出外旅遊 7,8 天，需攜帶若干胃腸藥，而胃腸藥標示成人每日 3-4 回，每回 5-7 顆，請問他須攜帶多少顆。傳統數學並無法對此作一明確的計算，但是一般人均會作一概略的計算。這實在應屬於軟計算過程。

定義 2.2 模糊集合之基本運算(吳柏林，2005)

設 A, B 為論域 U 中的兩個模糊集合，其隸屬度表徵為 μ_A, μ_B 。

(a) 補集： $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$

(b) 交集： $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A \wedge \mu_B$

(c) 聯集： $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A \vee \mu_B$

(d) 距離： d = 歐基里德(Euclidian)

$$d(A,B) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (n = \text{論域因子集個數})$$

例 2.2 設 A, B 兩國人民對宗教的隸屬度為

$$A = \frac{0.3}{\text{佛教}} + \frac{0.2}{\text{基督教}} + \frac{0.1}{\text{回教}} + \frac{0.3}{\text{其他教}} + \frac{0.1}{\text{未信教}}$$

$$B = \frac{0.2}{\text{佛教}} + \frac{0.3}{\text{基督教}} + \frac{0.2}{\text{回教}} + \frac{0.1}{\text{其他教}} + \frac{0.2}{\text{未信教}}$$

則根據定義 2.2 可得以下之關係

$$A^c = \frac{0.7}{\text{佛教}} + \frac{0.8}{\text{基督教}} + \frac{0.9}{\text{回教}} + \frac{0.7}{\text{其他教}} + \frac{0.9}{\text{未信教}}$$

$$A \cap B = \frac{0.2}{\text{佛教}} + \frac{0.2}{\text{基督教}} + \frac{0.1}{\text{回教}} + \frac{0.1}{\text{其他教}} + \frac{0.1}{\text{未信教}}$$

$$A \cup \mathrm{B} = \frac{0.3}{佛教} + \frac{0.3}{基督教} + \frac{0.2}{回教} + \frac{0.3}{其他教} + \frac{0.2}{未信教}$$

$$d(A,B) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{0.1^2 + 0.1^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + 0.1^2} = 0.25$$

2.3 決定難度的因子

波利亞在其 1957 年的著作《怎樣解題》中告訴我們，解題活動的四個主要階段是：**了解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧過程**（驗算、檢討）。了解問題可以讓我們清楚知道，什麼才是我們要尋找的解答，再根據問題中已知數與未知數存在的各種關係，訂定解題計畫，然後就是耐心地進行數學計算，求得答案後，最好能再逐步檢查、驗算，並討論其意義，才能在解題活動中得到最好的結果。

而在基測的考試過程中，七十分鐘的應答時間對大部分的學生來說僅是剛好足夠而已，甚至部分學生連作答完全部的題目都有困難。鮮少有學生能夠利用多餘的時間去作回顧過程這個動作。再者，回顧過程這個因素似乎沒有什麼難易度的差別。所以，本研究把”回顧過程”這個因子忽略。

我們也從這幾年的基測試題發現，很多學生認爲較難的題目，都有個共同的特徵，就是題目很創新。學生對於沒有見過的題目，在作答的表現上往往都不是非常理想。在教學的過程中，我們也常常跟學生灌輸一個概念：基測的題目在新不在難！所以，本研究希望能夠將”創新”這個向度列爲決定試題難易的一個因子。

總合以上，將波利亞的解題的前三個步驟，再加上創新。決定出了四個因子：**題目敘述、解題策略、計算過程、創新程度**。本研究將以模糊問卷調查的方法，去分析試題分別在這四個因子上的難易度。

2.4 模糊權重分析

很明顯地，樣本由某因素考慮時，屬於某一類；而由另一因素考慮時，則可能屬於另一類。可見權重之決定，及如何決定會影響到分類結果，因此，作多變量分類前我們必須先要對權重作一合理的估計。傳統分類方法常把各因子以相同權重看待，但實際上，論域因子的權重應該不同，因爲樣本的特徵因素未必同等重要。就像我們選購衣服時，先考慮衣服的價格、舒適度或顏色等等。可知不同的因子有著不同的權重，而對各因子重視的程度，又因人而異，不易評估。若以相同權重看待各因子，或者以主觀的個人意識作判斷去定義因子權重，易產生不適當的分類結果。

如何決定各因子的權數？本文考慮以模糊統計法來估計之。所謂模糊統計法就是將所有因子以模糊問卷的形式依重要程度收集資訊，並採用統計方法轉換得到權重值。在社會調查中，人們常常被訪問去陳述並預測他們未來的行爲意圖。

一般來說，透過專家的訪問或統計上的抽樣調查，通常可以獲得不錯的預測效果。模糊統計法不同於以往的社會調查，在於傳統的問卷總是使用某些固定的回答模式測度喜好程度，並以整數所衍生的名義尺度記錄此評量與行爲結果間的統計相關性。然而，在人類思維與行爲中，幾乎都是反映事物模糊性的概念，所表現出來的自然語言也都是模糊語言。因此，對社會調查而言，模糊模式較適合於評估人類模糊思維的可能性(possibility)及可行性(feasibility)。

在說明模糊權重分析的運算之前，我們先對偏好序列、模糊權重及模糊相對權重的基本定義介紹。

定義 2.3 偏好序列 (utility sequence) (吳柏林，2005)

假設偏好序列為 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_f\}$，則定義 $r_1<r_2<\cdots<r_f$ 為偏好遞增序列(utility increasing sequence)；反之，$r_1>r_2>\cdots>r_f$ 為偏好遞減序列(utility decreasing sequence)。

定義 2.4 模糊權重 (fuzzy weight,*FW*) (吳柏林，2005)

假設論域集合 $S=\{S_1,S_2,\ \cdots,\ S_k\}$，偏好序列 $r=\{r_1,r_2,\ \cdots,\ r_f\}$，且 S_i 在 r_f 的隸屬度為 μ_{s_if}。則論域因子的模糊權重 $FW=(FW_{s_1},\ \cdots,\ FW_{s_k})$ 定義為

$$FW_{s_i}=\sum_{l=1}^{f}\frac{\mu_{s_il}}{r_l}=\frac{\mu_{s_i1}}{r_1}+\frac{\mu_{s_i2}}{r_2}+\cdots+\frac{\mu_{s_if}}{r_f}\ ;\ i=1,\ldots,k$$

以下我們舉一個例子說明偏好序列及模糊權重中隸屬度函數所代表的意義。

例 2.3

假設評鑑台北市區房屋價格的論域為 $S=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}=\{$地點、格局大小、建材、周邊設施$\}$，偏好序列為 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_5\}=\{$很不重要、不重要、普通、重要、很重要$\}$。因為 $r_1<r_2<\cdots<r_5$，故偏好序列 r 為偏好遞增序列。

根據定義 2.4，若評房屋價格時衡量地點因素是”10%的很不重要”和”37%的不重要”，而衡量格局大小因素時是”20%的重要”和”80%的很重要”等等。以隸屬度函數表示，則為 $\mu_{S_11}=0.1$、$\mu_{S_12}=0.37$、$\mu_{S_24}=0.2$ 和 $\mu_{S_25}=0.8$。

在模糊集合中，隸屬度的範圍從 0 到 1。每個語言變項，例如形狀，代表一個可能性分佈，而且關於分佈的評定結果往往因人而異。所以將這些受訪者的回答加以平均，以得到論域因子 S 在偏好序列 r 的隸屬度 μ_S 較合理的分佈。

模糊權重表示各因子的自我權重分佈，但模糊權重分析的主要目的是求得因子所代表的權重值各是多少，亦即相對的權重。從這個基礎上，進一步地定義模糊相對權重，以供我們在作模糊分析時使用。

定義 2.5 模糊相對權重(fuzzy relative weight, *FRW*) (吳柏林，2005)

假設論域集合 $S=\{S_1,S_2,\ \cdots,\ S_k\}$，偏好序列 $r=\{r_1,r_2,\ \cdots,\ r_f\}$，且 S_i 在 r_j 的隸屬度函數為 $\mu_{S_{ij}}$。則模糊相對權重 $FRW=(FRW_{S_1},\ \cdots,\ FRW_{S_c})$ 為由模糊權重 FW 採 m 等第評分標準法轉換所得。若 $r_1<r_2<\cdots<r_f$，則

$$FRW_{S_i}=\frac{\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f} l\cdot\mu_{S_i l}}，i=1,2,\cdots,k \text{ 。}$$

反之，若 $r_1>r_2>\cdots>r_f$ 時，則

$$FRW_{S_i}=\frac{\sum_{l=1}^{f}(n-l+1)\cdot\mu_{S_i l}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f}(n-l+1)\cdot\mu_{S_i l}}，i=1,2,\cdots,k \text{ 。}$$

爲了清楚理解 *FRW* 從 *FW* 經由 f 等第評分標準法轉換而來的過程，以下舉例說明它們的關係。

例 2.4

假設人們在選購衣服時，考慮是否購買的因素有衣服的樣式、質料、大小、顏色和價格。且衡量的重要性各為不重要、普通和重要。則根據模糊權重的定義，得$k=5$與$f=3$。也就是說，論域集合為$S=\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}=\{$樣式、質料、大小、顏色、價格$\}$，而偏好序列為$r=\{r_1,r_2,r_3\}=\{$不重要、普通、重要$\}$。因為$f=3$，故根據定義 2.4 利用三等第評分標準法去求得樣式、質料、大小、顏色和價格的模糊相對權重。

爲了求論域因子的模糊相對權重，首先設計一個模糊評鑑表(fuzzy evaluation table)的問卷形式如下：

表 2.1 模糊評鑑表 A 在偏好序列 U 的一般隸屬度 μ_A

S \ r	r_1	r_2	$\cdots$	r_f
S_1	$\mu_{S_1 1}$	$\mu_{S_1 2}$	$\cdots$	$\mu_{S_1 f}$
S_2	$\mu_{S_2 1}$	$\mu_{S_2 2}$	$\cdots$	$\mu_{S_2 f}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
S_k	$\mu_{S_k 1}$	$\mu_{S_k 2}$	$\cdots$	$\mu_{S_k f}$

假設$r_1<r_2<\cdots<r_f$，以此問卷訪問專家對論域集合在各偏好序列下的隸屬程度。這些專接評分平均後的各因子之偏好度，即爲模糊權重集。根據定義 2.4 知，論域之各因子的模糊權重分別爲

$$FW_{S_1}=\sum_{l=1}^{f}\mu_{S_1 l}/r_l=\mu_{S_1 1}/r_1+\mu_{S_1 2}/r_2+\cdots+\mu_{S_1 f}/r_f\text{，}$$

$$FW_{S_2} = \sum_{l=1}^{f} \mu_{S_2 l} / r_l = \mu_{S_2 1} / r_1 + \mu_{S_2 2} / r_2 + \cdots + \mu_{S_2 f} / r_f \ ,$$

$$\vdots$$

$$FW_{S_k} = \sum_{l=1}^{f} \mu_{S_k l} / r_l = \mu_{S_k 1} / r_1 + \mu_{S_k 2} / r_2 + \cdots + \mu_{S_k f} / r_f \ 。$$

再利用 m 等第評分標準法，分別計算論域中各因子的模糊相對權重 FRW。所謂 m 等第評分標準法，就是將 m 個偏好序列 r 視爲 f 個等第，對此 f 個偏好序列取數量化。亦即，給定 r_1 爲一分，給定 r_2 爲二分，如此繼續到給定 r_f 爲 f 分。根據所得的隸屬度乘上其相對應的分數，分別求初它們相對的模糊權重分佈，則爲各因子的模糊相對權重。故以定義 2.5 的表示法，各因子的模糊相對權重 FRW 分別爲

$$FRW_{S_1} = \frac{\sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_1 l}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_1 l}}$$

$$FRW_{S_2} = \frac{\sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_2 l}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_2 l}}$$

$$\vdots$$

$$FRW_{S_k} = \frac{\sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_k l}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_k l}}$$

以上的方法，爲作多變量分類考慮各因子的模糊相對權數法。舉一個關於評定試題難易度方面的例子，以解釋使用模糊權重分析法決定評定試題難易的權重集。

例 2.5

考慮以模糊評鑑表訪問專家在評定試題難易度時，衡量試題所採用的評價因素之重要程度。假設訪問數位專家對模糊評鑑表評分，經過統計平均後的資料如下：

表 2.2 平均後之偏好度

偏好序列 評鑑項目	很不重要	不重要	普通	重要	很重要
題目敘述	0.1	0.37	0.7	0.77	0.67
解題策略	0	0.1	0.4	0.8	0.92
計算過程	0.2	0.47	0.8	0.7	0.3
創新程度	0.3	0.7	0.6	0.2	0.92

根據定義 2.4 ，我們得到此四因子的模糊權重分別為

$$FW_{形狀} = 0.1/很不重要 + 0.37/不重要 + 0.7/普通 + 0.77/重要 + 0.67/很重要$$

$$FW_{解題策略} = 0/很不重要 + 0.1/不重要 + 0.4/普通 + 0.8/重要 + 0.92/很重要$$

$$FW_{計算過程} = 0.2/很不重要 + 0.47/不重要 + 0.8/普通 + 0.7/重要 + 0.3/很重要$$

$$FW_{創新程度} = 0.3/很不重要 + 0.7/不重要 + 0.6/普通 + 0.2/重要 + 0.1/很重要$$

再利用五等第評分標準法，給定「很重要」為 5 分，「重要」為 4 分，「普通」為 3 分，「不重要」為 2 分，而「很不重要」則給定為 1 分。根據表 2.2 上的隸屬度分別乘以其相對偏好序列給定的數量，根據定義 2.5 公式，分別計算出各因子的模糊相對權重，亦即

$$\sum_{l=1}^{5} l \cdot \mu_{題目敘述,l} = 1\times(0.1) + 2\times(0.37) + 3\times(0.7) + 4\times(0.77) + 5\times(0.67) = 9.37$$

$$\sum_{l=1}^{5} l \cdot \mu_{解題策略,l} = 1\times(0) + 2\times(0.1) + 3\times(0.4) + 4\times(0.8) + 5\times(0.92) = 9.2$$

$$\sum_{l=1}^{5} l \cdot \mu_{計算過程,l} = 1\times(0.2) + 2\times(0.47) + 3\times(0.8) + 4\times(0.7) + 5\times(0.3) = 7.84$$

$$\sum_{l=1}^{5} l \cdot \mu_{創新程度,l} = 1\times(0.3) + 2\times(0.7) + 3\times(0.6) + 4\times(0.2) + 5\times(0.1) = 4.8$$

因為 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{f} l \cdot \mu_{S_i l} = 9.37 + 9.2 + 7.84 + 4.8 = 31.21$，故此四個項目的模糊相對權重分別為

$$FRW_{題目敘述} = \frac{9.37}{31.21} = 0.30$$

$$FRW_{解題策略} = \frac{9.2}{31.21} = 0.29$$

$$FRW_{計算過程} = \frac{7.84}{31.21} = 0.25$$

$$FRW_{創新程度} = \frac{4.8}{31.21} = 0.16$$

故得「題目敘述」因子的權重為 0.30，「解題策略」因子的權重為 0.29，「計算過程」因子的權重為 0.25，「創新程度」因子的權重為 0.16。

3. 研究方法

本研究將以發專家問卷的方式，取得專家對 98 學年度第一次國中基本學力測驗的難易度的模糊問卷。而此問卷主要分為兩部分，第一部分為專家們對於題目敘述、解題策略、計算過程、創新程度這四個決定難度的因子的重要性的看法。第二部分為專家對每一道個別題目，分別以四個向度去決定其隸屬度。

本章將以定義 2.2 中的歐基里德距離為基礎，定義出另一種新的距離，稱之為**聚類距離**。將從問卷中得到的模糊樣本加以平均，然後分四個向度求得每一題的模糊平均數對於五個語言變數{非常容易、容易、中等、困難、非常困難}的聚類點之間的聚類距離。而其基本概念是，距離越短，代表越偏向該語言變數；反之，距離越長，則代表越偏離該語言變數。

接著再將聚類距離轉換成**聚類比例**，以此比例當成原模糊數對於五個語言變數的隸屬度，而得到一個新的模糊數－**聚類模糊數**。

其實這時所得到的聚類模糊數，其本身即具備一定程度的解釋能力。但若要比較各題之間難易度，則可利用反模糊化的概念，最後將每一個聚類距離模糊數的反模糊化值求出，即可以此數代表原樣本所代表的題目在某個向度的**難易度指標**。

依照此難易度指標，我們除了可以分向度來比較各題之間的難度順序之外，甚至可以將各項度的難度指數分別乘上從第一部分問卷數據中所得到的模糊相對權重值，即得到各題目的綜合加權難易度指標。

定義 3.1　聚類點(*clustering point*)

設 U 為一論域，令 $L=\{L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_k\}$ 為佈於論域 U 的 k 個語言變數。則定義 $L_i'=\frac{\mu_1}{L_1}+\frac{\mu_2}{L_2}+\cdots+\frac{\mu_k}{L_k}$ ，其中 $\mu_j=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$ 。稱為對於語言變數 L_i 的聚類點(*clustering point*)。

例 3.1　聚類點實例

考慮以模糊評鑑表訪問專家在評定試題難易度時，$L=\{L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ L_5\}$ ＝{非常容易、容易、中等、困難、非常困難}為五個語言變數，則

$$L_1'=\frac{1}{\text{非常容易}}+\frac{0}{\text{容易}}+\frac{0}{\text{中等}}+\frac{0}{\text{困難}}+\frac{0}{\text{非常困難}},$$

$$L_2'=\frac{0}{\text{非常容易}}+\frac{1}{\text{容易}}+\frac{0}{\text{中等}}+\frac{0}{\text{困難}}+\frac{0}{\text{非常困難}},$$

$$L_3'=\frac{0}{\text{非常容易}}+\frac{0}{\text{容易}}+\frac{1}{\text{中等}}+\frac{0}{\text{困難}}+\frac{0}{\text{非常困難}},$$

$$L_4'=\frac{0}{\text{非常容易}}+\frac{0}{\text{容易}}+\frac{0}{\text{中等}}+\frac{1}{\text{困難}}+\frac{0}{\text{非常困難}},$$

$$L_5'=\frac{0}{\text{非常容易}}+\frac{0}{\text{容易}}+\frac{0}{\text{中等}}+\frac{0}{\text{困難}}+\frac{1}{\text{非常困難}}。$$

分別為對於五個語言變數的聚類點。

定義 3.2　聚類距離(*distance between sample and clustering point*)

設 U 為一論域，令 $L=\{L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_k\}$ 為佈於論域 U 的 k 個語言變數。L_i' 為對於語言變數 L_i 的聚類點。若 A 為一離散模糊數，且 A 對於語言變數 L_i 的隸屬度為 $\mu_i(A)$ ，則定義

$$D_i(A)=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\sum_{j=1}^{k}(1+(i-j)^2)(\mu_j(A)-\delta_{ij})^2}\ ，\ \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

為 A 對語言變數 L_i 的聚類距離。

本文所定義的聚類距離是根據定義 2.2 中的歐基里德距離

$d(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}$ 所做的修正，修正的原因是問卷題目的語言變數{非常容易、容易、中等、困難、非常困難}，含有**偏好序列**的成分。舉例來說，若 $A=\frac{0}{非常容易}+\frac{0.3}{容易}+\frac{0.6}{中等}+\frac{0.1}{困難}+\frac{0}{非常困難}$ 爲一離散模糊數，若採用歐基里德距離的算法，分別去算 A 與非常容易和非常困難這兩個語言變數聚類點的距離

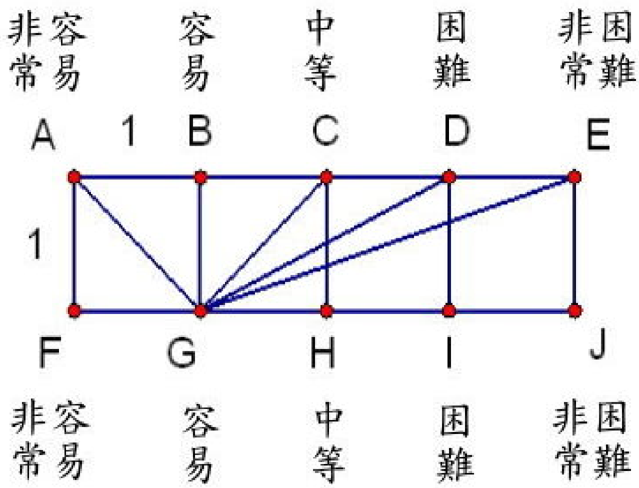
$$d(A,L_1^{'})=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(0-1)^2+(0.3-0)^2+(0.6-0)^2+(0.1-0)^2+(0)^2}\approx 0.54$$

$$d(A,L_5^{'})=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(0)^2+(0.3-0)^2+(0.6-0)^2+(0.1-0)^2+(0-1)^2}\approx 0.54$$

可以發現這兩個距離是一模一樣的。但是 A 這個模糊數的隸屬度很明顯的比較偏向中間偏左，但對非常容易和非常困難的距離卻一樣，這就造成不合理的現象。

爲了修正這個不合理的情況，在原公式中多乘上了一個修正係數：$(1+(i-j)^2)$，讓聚類距離的公式變得合理化。這個修正係數是假定樣本與聚類點的距離爲 1，而五個語言變數之間的距離也爲 1(如圖 3.1)。利用畢氏定

圖 3.1



理，我們可以得到 G 點到 A、B、C、D、E 五個點的距離分別是 $\overline{GA}=\sqrt{2}$、$\overline{GB}=1$、$\overline{GC}=\sqrt{2}$、$\overline{GD}=\sqrt{5}$、$\overline{GE}=\sqrt{10}$。從原本距離公式：$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}$ 觀察到 $(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2$ 代表樣本與聚類點在單一語言變項的距離的平方，所以在此公式前，我們嘗試乘上一個係數 $(1+(i-j)^2)$，此數代表距離倍數的平方，即 $\left(\overline{GA}\right)^2=2\left(\overline{GB}\right)^2$、$\left(\overline{GC}\right)^2=2\left(\overline{GB}\right)^2$、$\left(\overline{GD}\right)^2=5\left(\overline{GB}\right)^2$、$\left(\overline{GE}\right)^2=10\left(\overline{GB}\right)^2$。如此便可修正原先公式造成帶有偏好序列性質的語言變項中不合理的情況。以下爲聚類距離的實例：

例 3.2　聚類距離實例

$L=\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}=\{$非常容易、容易、中等、困難、非常困難$\}$為五個語言變數，若 $A=\frac{0}{\text{非常容易}}+\frac{0.3}{\text{容易}}+\frac{0.6}{\text{中等}}+\frac{0.1}{\text{困難}}+\frac{0}{\text{非常困難}}$ 為一離散模糊數，則

$$D_1(A)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(0-1)^2+2(0.3-0)^2+5(0.6-0)^2+10(0.1-0)^2+17(0-0)^2}\approx 0.78$$

$$D_2(A)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{2(0-0)^2+(0.3-1)^2+2(0.6-0)^2+5(0.1-0)^2+10(0-0)^2}\approx 0.50$$

$$D_3(A)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5(0-0)^2+2(0.3-0)^2+(0.6-1)^2+2(0.1-0)^2+5(0-0)^2}\approx 0.26$$

$$D_4(A)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{10(0-0)^2+5(0.3-0)^2+2(0.6-0)^2+(0.1-1)^2+2(0-0)^2}\approx 0.62$$

$$D_5(A)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{17(0-0)^2+10(0.3-0)^2+5(0.6-0)^2+2(0.1-0)^2+(0-1)^2}\approx 0.86$$

分別為對於五個語言變數的聚類距離。

此時得到的聚類距離，代表一個模糊樣本與五個語言變數的聚類點之間的距離。此距離值越短，表示此樣本越接近該語言變數。而爲了表示此樣本

對於各個語言變數的隸屬度，我們利用倒數轉換，將此距離轉化成另外一個數值，即以下定義的聚類比例。

定義 3.3　聚類比例(*clustering ratio*)和聚類模糊數(*clustering fuzzy number*)

設 U 為一論域，令 $L=\{L_1,L_2,\cdots,L_k\}$ 為佈於論域 U 的 k 個語言變數。L_i' 為對於語言變數 L_i 的聚類點。若 A 為一離散模糊數，且 $D_i(A)$ 為對於語言變數 L_i 的聚類距離，則定義

$$R_i(A)=\frac{\dfrac{1}{D_i(A)}}{\sum_j\left(\dfrac{1}{D_j(A)}\right)}$$

為 A 對語言變數 L_i 的聚類比例。

又定義

$$R(A)=\sum_i\frac{R_i(A)}{L_i}$$

為 A 對於對語言變數 L_i 的聚類模糊數

例 3.3　聚類比例與聚類模糊數實例

$L=\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}=\{$非常容易、容易、中等、困難、非常困難$\}$為五個語言變數，若 $A=\dfrac{0}{非常容易}+\dfrac{0.3}{容易}+\dfrac{0.6}{中等}+\dfrac{0.1}{困難}+\dfrac{0}{非常困難}$ 為一離散模糊數，承例 3.2，$D_1(A)\approx 0.78$、$D_2(A)\approx 0.50$、$D_3(A)\approx 0.26$、$D_4(A)\approx 0.62$、$D_5(A)\approx 0.86$，則

$$R_1(A)=\frac{\dfrac{1}{0.78}}{\dfrac{1}{0.78}+\dfrac{1}{0.50}+\dfrac{1}{0.26}+\dfrac{1}{0.62}+\dfrac{1}{0.86}}\approx 0.13$$

$$R_2(A)=\frac{\frac{1}{0.50}}{\frac{1}{0.78}+\frac{1}{0.50}+\frac{1}{0.26}+\frac{1}{0.62}+\frac{1}{0.86}}\approx 0.21$$

$$R_3(A)=\frac{\frac{1}{0.26}}{\frac{1}{0.78}+\frac{1}{0.50}+\frac{1}{0.26}+\frac{1}{0.62}+\frac{1}{0.86}}\approx 0.38$$

$$R_4(A)=\frac{\frac{1}{0.62}}{\frac{1}{0.78}+\frac{1}{0.50}+\frac{1}{0.26}+\frac{1}{0.62}+\frac{1}{0.86}}\approx 0.16$$

$$R_5(A)=\frac{\frac{1}{0.86}}{\frac{1}{0.78}+\frac{1}{0.50}+\frac{1}{0.26}+\frac{1}{0.62}+\frac{1}{0.86}}\approx 0.12$$

分別為對於五個語言變數的聚類比例。

而 $R(A)=\frac{0.13}{\text{非常容易}}+\frac{0.21}{\text{容易}}+\frac{0.38}{\text{中等}}+\frac{0.16}{\text{困難}}+\frac{0.12}{\text{非常困難}}$

為 A 對於對語言變數 L 的聚類模糊數。

從定義 3.3 得到的聚類模糊數，其本身已經是具有相當程度參考價值的資料，也具有相當程度的解釋能力。而爲了要比較題目之間的難度排序，可利用反模糊化的概念，賦予各語言變數不同的權重值，求得一個反模糊化值，即可以此數值當成難易度指標，即可比較題目之間的難度差異。也可將各題的難易度按照指標範圍作分類。

定義 3.4　反模糊化值(吳柏林，2005)

設 x 為一模糊數，語言變數 $\{L_i\ ;i=1, ..., k\}$ 為論域 U 中有序的數列。$\mu_{L_i}(x)=m_i$ 為模糊樣本 x 對於 L_i 的隸屬度，$\sum_{i=1}^{k}\mu_{L_i}(x)=1$，則稱 $x_f=\sum_{i=1}^{k}m_iL_i$ 為模糊數 x 的反模糊化值。

定義 3.5　難易度指標(*difficulty index*)

設 A 為一代表試題難度之離散模糊數，$R(A)$為 A 之聚類模糊數，$L=\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$ 為佈於論域 U 的 k 個語言變數。$R_i(A)$ 為對於語言變數 L_i 的聚類比例，$\sum_{i=1}^{k} R_i(A)=1$。m_i 為被賦予 L_i 的難度權重值。則稱 $DI(A)=\sum_{i=1}^{k} m_i R_i(A)$ 為模糊數 A 的難易度指標。

例 3.4　聚類模糊數的難易度指標

$L=\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}=\{$非常容易、容易、中等、困難、非常困難$\}$為五個語言變數，若 $A=\frac{0}{非常容易}+\frac{0.3}{容易}+\frac{0.6}{中等}+\frac{0.1}{困難}+\frac{0}{非常困難}$ 為一離散模糊數，承例 3.3，聚類模糊數 $R(A)=\frac{0.13}{非常容易}+\frac{0.21}{容易}+\frac{0.38}{中等}+\frac{0.16}{困難}+\frac{0.12}{非常困難}$ 。

若分別賦予五個語言變數的權重為：

非常容易＝0，容易＝0.25，普通＝0.5，困難＝0.75，非常困難＝1

則 A 的難易度指標 $DI(A)$為

$$0.13\times 0+0.21\times 0.25+0.38\times 0.5+0.16\times 0.75+0.12\times 1=0.48$$

若依照上例的語言變數權重來計算難易度指標，我們可以簡單的將難易度指標區分成幾個範圍，分別給予這些範圍適當的反模糊語言變數：

表 3.1 難易度指標範圍與反模糊語言變數

難易度指標範圍	反模糊語言變數
0.2 ~ 0.3	非常容易
0.3 ~ 0.4	容易
0.4 ~ 0.5	中間偏易
0.5 ~ 0.6	中間偏難
0.6 ~ 0.7	困難
0.7 ~ 0.8	非常困難

4. 實例應用

本研究利用軟統計方法來進行問卷調查之解析，期以更接近人類思維模式來反應專家們對於 98 學年度第一次國中基本學力測驗數學科試題難易度的看法。本問卷的抽取對象是台北縣市國高中的數學科教師，有效問卷共 20 份。填寫問卷時間在 98 學年度下學期第 17 周。問卷問題共 35 題，共分為兩部分，第一部分請填寫者填寫決定難度的因子的重要性；第二部分則是填寫各題的難度。其中以模糊問卷方式，每題我們請填寫者以 1 到 10 之間的數字，給予一隸屬度，且每題隸屬度總合為 10。為了驗證本方法所得之難易度指標與學生答對率的相關性，於基測後一周內取得五個班級學生的作答情況，並統計這些學生在每一題的答對率。

4.1 各因子的模糊權重

根據問卷的第一部分的結果將其平均，再以定義 2.5 的方法，求得四個決定試題難易度因子的模糊權重以及模糊相對權重，整理如下表格：

表 4.1 難度四因子的模糊相對權重

	題目敘述	解題策略	計算過程	創新程度
很不重要	0	0	0	0.02
不重要	0.03	0	0.05	0.19
普通	0.40	0.11	0.27	0.47
重要	0.55	0.72	0.63	0.31
非常重要	0.02	0.17	0.05	0.01
模糊權重	3.56	4.06	3.68	3.1
模糊相對權重(%)	24.72	28.19	25.55	21.52

由此表可知，本問卷的研究對象認爲決定難度最重要的因子是解題策略，其次是計算過程，再來是題目敘述，最後才是創新程度。而其重要性的權重分別爲 28.19%、25.55%、24.72%、21.52%。

4.2 各難度向度的結果分析

將問卷數據的模糊均數球出，再依照研究方法分四個向度，算出各題對於五個語言變數的聚類距離與聚類比例，以表格方式整理如下表4.2~表4.5。

表 4.2　題目敘述向度各題的聚類比例

題號	題目敘述向度的聚類比例				
	非常容易	容易	普通	困難	非常困難
1	48.64	20.34	13.23	9.95	7.85
2	14.38	23.37	34.75	15.58	11.91
3	61.65	14.87	10.04	7.52	5.92
4	10.96	14.91	44.79	17.69	11.65
5	50.15	19.57	12.93	9.69	7.65
6	42.93	22.54	14.74	11.05	8.73
7	43.67	22.15	14.64	10.91	8.64
8	15.91	35.58	23.60	14.14	10.77
9	11.64	17.89	45.21	14.50	10.77
10	37.95	25.43	15.58	11.76	9.28
11	24.63	37.05	16.39	12.34	9.58
12	53.21	18.00	12.35	9.18	7.26
13	12.19	18.63	42.82	15.16	11.21
14	19.07	43.60	16.26	11.92	9.15
15	10.25	15.16	51.23	13.52	9.85
16	48.72	20.31	13.18	9.95	7.84
17	9.97	14.68	52.51	13.23	9.62
18	11.59	16.22	43.37	17.04	11.78
19	8.20	11.60	60.23	11.75	8.23
20	10.87	14.06	21.97	35.50	17.60
21	11.68	15.26	28.02	29.31	15.75
22	11.34	15.26	41.51	19.38	12.51
23	9.63	13.17	52.16	15.00	10.04
24	10.80	14.20	23.92	35.26	15.82
25	9.90	12.94	19.37	41.00	16.79
26	11.56	15.34	39.86	20.16	13.07
27	11.94	15.87	34.28	23.70	14.22
28	8.77	11.44	16.10	46.47	17.22
29	12.04	15.99	33.19	24.36	14.41
30	12.17	16.25	28.67	27.61	15.29
31	5.20	7.29	74.85	7.43	5.23
32	10.10	14.69	52.24	13.24	9.72
33	8.97	11.70	16.82	45.68	16.82
34	9.59	12.46	16.75	40.19	21.00

表 4.3　解題策略向度各題的聚類比例

題號	解題策略向度的聚類比例				
	非常容易	容易	普通	困難	非常困難
1	12.20	59.80	12.62	8.77	6.61
2	23.52	38.50	16.27	12.23	9.47
3	11.79	15.35	25.37	30.35	17.14
4	13.40	19.85	34.92	18.80	13.03
5	48.94	19.87	13.33	9.98	7.88
6	7.88	11.40	62.09	10.85	7.78
7	9.69	13.99	53.81	13.09	9.43
8	9.12	12.39	54.91	14.11	9.48
9	9.62	13.23	52.51	14.68	9.97
10	15.74	37.37	22.44	13.94	10.52
11	14.31	24.17	33.60	15.96	11.96
12	19.29	44.37	15.72	11.68	8.94
13	6.65	9.46	68.04	9.25	6.60
14	18.82	46.32	15.09	11.20	8.57
15	16.31	32.80	25.03	14.62	11.24
16	15.25	45.14	18.29	12.12	9.20
17	15.86	35.84	23.35	14.20	10.76
18	13.65	22.64	36.32	15.65	11.74
19	7.87	10.86	61.69	11.60	7.98
20	9.30	12.80	54.05	14.23	9.62
21	12.42	19.09	41.86	15.30	11.33
22	13.85	22.57	36.14	15.63	11.81
23	9.91	13.55	50.75	15.42	10.37
24	6.02	8.67	71.01	8.33	5.97
25	11.48	15.10	24.04	32.55	16.84
26	9.94	14.68	52.51	13.23	9.64
27	10.76	13.86	19.02	34.01	22.36
28	8.92	11.61	16.32	45.51	17.65
29	6.58	9.09	67.99	9.66	6.68
30	8.28	11.88	60.05	11.57	8.22
31	9.93	13.04	19.99	40.85	16.19
32	10.37	13.39	17.97	35.41	22.85
33	10.68	13.96	22.23	36.59	16.54
34	11.44	15.55	41.58	18.98	12.45

表 4.4　計算過程向度各題的聚類比例

題號	計算過程向度的聚類比例				
	非常容易	容易	普通	困難	非常困難
1	45.50	21.40	14.17	10.57	8.36
2	51.66	19.05	12.49	9.39	7.41
3	14.43	24.20	32.54	16.60	12.23
4	23.71	37.38	16.75	12.46	9.69
5	13.78	22.97	36.02	15.51	11.72
6	14.28	24.81	33.60	15.55	11.76
7	15.23	28.56	29.15	15.38	11.67
8	18.70	46.14	15.27	11.26	8.63
9	23.52	38.50	16.27	12.23	9.47
10	14.25	24.13	33.58	16.05	11.98
11	8.22	11.93	60.48	11.27	8.10
12	16.77	40.57	19.41	13.22	10.03
13	17.19	33.53	23.19	14.79	11.30
14	39.45	25.22	14.98	11.38	8.96
15	36.91	26.73	15.41	11.72	9.22
16	11.35	16.98	46.19	14.74	10.74
17	12.44	18.86	41.14	15.96	11.60
18	15.96	37.49	22.34	13.74	10.47
19	15.52	27.75	29.35	15.53	11.86
20	59.49	15.81	10.55	7.92	6.23
21	10.35	15.43	50.65	13.64	9.93
22	12.60	20.06	40.90	15.14	11.31
23	60.84	15.16	10.27	7.68	6.05
24	10.70	14.96	47.26	16.07	11.01
25	8.56	11.81	58.16	12.69	8.78
26	8.49	12.44	59.29	11.47	8.31
27	9.89	13.06	20.13	41.11	15.81
28	10.18	15.10	51.99	13.05	9.67
29	11.55	16.59	45.80	15.10	10.96
30	14.49	24.17	32.99	16.24	12.12
31	6.92	9.18	13.07	57.95	12.88
32	9.79	13.50	51.66	14.91	10.14
33	7.48	10.35	63.49	11.08	7.61
34	10.07	14.95	51.91	13.36	9.71

表 4.5　創新程度向度各題的聚類比例

題號	創新程度向度的聚類比例				
	非常容易	容易	普通	困難	非常困難
1	60.90	15.23	10.20	7.65	6.02
2	12.59	61.45	11.39	8.32	6.25
3	16.47	36.78	22.33	13.82	10.61
4	9.36	12.74	53.56	14.60	9.75
5	59.49	15.81	10.55	7.92	6.23
6	56.77	16.96	11.21	8.43	6.64
7	63.86	14.02	9.46	7.09	5.57
8	9.86	13.09	20.65	41.03	15.36
9	11.48	17.82	45.82	14.26	10.62
10	18.21	45.75	15.80	11.45	8.79
11	62.36	14.63	9.84	7.38	5.80
12	56.77	16.96	11.21	8.43	6.64
13	9.74	13.68	52.36	14.34	9.89
14	62.36	14.63	9.84	7.38	5.80
15	13.88	50.70	16.35	10.89	8.18
16	63.86	14.02	9.46	7.09	5.57
17	15.84	50.64	14.81	10.63	8.09
18	11.93	15.94	33.33	24.48	14.32
19	11.25	15.29	42.37	18.89	12.20
20	12.21	16.60	33.85	23.22	14.13
21	15.71	34.70	24.17	14.49	10.93
22	9.53	13.62	53.83	13.52	9.51
23	8.92	11.60	16.06	45.01	18.41
24	11.15	16.52	46.61	14.96	10.75
25	9.83	12.59	16.88	35.31	25.38
26	15.67	33.26	25.15	14.77	11.14
27	10.81	13.77	20.03	34.15	21.23
28	11.44	15.55	41.58	18.98	12.45
29	10.75	15.12	47.02	16.10	11.01
30	11.84	17.82	43.56	15.55	11.23
31	10.34	13.68	22.33	38.07	15.58
32	9.70	12.25	16.49	26.30	35.26
33	9.46	11.97	15.95	26.42	36.19
34	8.99	11.38	15.14	24.26	40.23

4.3 各向度的難易度指標及排序

表 4.6　各向度的各題難易度指標及排名

題號	題目敘述難度指標	排名	題號	解題策略難度指標	排名	題號	計算過程難度指標	排名	題號	創新程度難度指標	排名
1	0.2701	30	1	0.3444	33	1	0.2873	31	1	0.2067	30
2	0.4682	23	2	0.3641	31	2	0.2546	32	2	0.3355	26
3	0.2029	34	3	0.5642	7	3	0.4700	17	3	0.4133	22
4	0.5104	13	4	0.4955	20	4	0.3676	26	4	0.5066	13
5	0.2628	32	5	0.2700	34	5	0.4710	16	5	0.2140	29
6	0.3003	28	6	0.4981	18	6	0.4643	20	6	0.2280	27
7	0.2967	29	7	0.4965	19	7	0.4493	22	7	0.1913	33
8	0.4207	24	8	0.5061	10	8	0.3625	28	8	0.5973	7
9	0.4872	21	9	0.5054	11	9	0.3641	27	9	0.4868	19
10	0.3224	27	10	0.4153	28	10	0.4684	18	10	0.3671	24
11	0.3630	26	11	0.4677	25	11	0.4977	7	11	0.1991	31
12	0.2482	33	12	0.3666	30	12	0.3979	25	12	0.2280	27
13	0.4864	22	13	0.4992	15	13	0.4237	23	13	0.5024	15
14	0.3712	25	14	0.3610	32	14	0.3129	30	14	0.1991	31
15	0.4939	20	15	0.4292	26	15	0.3240	29	15	0.3720	23
16	0.2697	31	16	0.3872	29	16	0.4914	13	16	0.1913	33
17	0.4946	18	17	0.4204	27	17	0.4885	14	17	0.3612	25
18	0.5030	15	18	0.4730	23	18	0.4132	24	18	0.5333	9
19	0.5005	16	19	0.5024	13	19	0.4511	21	19	0.5138	11
20	0.5872	5	20	0.5051	12	20	0.2140	33	20	0.5262	10
21	0.5555	7	21	0.4851	22	21	0.4934	10	21	0.4256	21
22	0.5162	12	22	0.4724	24	22	0.4813	15	22	0.4996	16
23	0.5066	14	23	0.5070	9	23	0.2073	34	23	0.6310	5
24	0.5777	6	24	0.4989	17	24	0.5044	4	24	0.4941	17
25	0.6046	4	25	0.5705	6	25	0.5033	5	25	0.6345	4
26	0.5196	11	26	0.4949	21	26	0.4966	8	26	0.4311	20
27	0.5310	10	27	0.6083	3	27	0.5997	2	27	0.6031	6
28	0.6298	1	28	0.6284	1	28	0.4923	12	28	0.5136	12
29	0.5328	9	29	0.5019	14	29	0.4933	11	29	0.5038	14
30	0.5440	8	30	0.4989	16	30	0.4683	19	30	0.4912	18
31	0.5005	17	31	0.6008	4	31	0.6517	1	31	0.5872	8
32	0.4945	19	32	0.6175	2	32	0.5053	3	32	0.6629	3
33	0.6242	3	33	0.5859	5	33	0.5025	6	33	0.6698	2
34	0.6264	2	34	0.5136	8	34	0.4942	9	34	0.6884	1

從表 4.2 到表 4.5 可以看出，各題在各向度對於五個語言變數的難度隸屬。而從表 4.6 更可進一步看出，各題在各向度的難易度指標及難易度排名。例如在題目敘述和解題策略向度難度最高的都是第 28 題，在計算過程向度難度最高的是第 31 題；而在創新程度向度的難度最高的則是第 34 題。

4.4 綜合向度的聚類比例

將各向度難度的聚類比例，按照第一部分得到的模糊相對權重加權，即得到各題的綜合向度的聚類比例，整理如下表 4.7。

表 4.7　綜合向度各題的聚類比例

題號	綜合向度的聚類比例				
	非常容易	容易	普通	困難	非常困難
1	40.20	30.64	12.64	9.28	7.24
2	26.10	34.73	18.82	11.49	8.85
3	25.80	22.11	22.76	17.63	11.70
4	14.56	21.58	36.73	16.00	11.13
5	42.52	19.72	18.43	10.88	8.45
6	28.71	18.78	32.15	11.58	8.79
7	31.17	19.74	28.28	11.84	8.98
8	13.41	26.90	29.67	19.18	10.85
9	14.07	21.83	40.00	13.92	10.18
10	21.38	32.84	22.16	13.41	10.21
11	25.65	22.17	31.10	12.02	9.06
12	35.10	30.98	14.86	10.76	8.31
13	11.38	18.79	46.96	13.22	9.65
14	33.53	33.43	14.22	10.60	8.22
15	19.55	30.74	27.18	12.80	9.72
16	32.99	25.11	22.25	11.17	8.48
17	13.52	29.46	33.26	13.64	10.11
18	13.36	23.40	33.85	17.41	11.98
19	10.63	16.31	48.90	14.21	9.94
20	23.14	14.70	30.65	19.81	11.70
21	12.41	20.57	36.88	18.16	11.98
22	11.98	18.19	42.49	15.98	11.36
23	22.64	13.45	33.29	19.71	10.91
24	9.50	13.34	48.05	18.39	10.72
25	9.99	13.19	30.06	30.16	16.61
26	11.21	18.27	45.22	14.83	10.47
27	10.84	14.13	23.29	33.30	18.43
28	9.75	13.31	30.82	31.74	14.38
29	10.10	14.01	49.21	16.07	10.62
30	11.60	17.38	41.83	17.58	11.61
31	8.08	10.77	32.29	36.36	12.50
32	10.01	13.49	34.74	22.73	19.03
33	9.18	12.05	30.08	30.13	18.56
34	10.11	13.74	32.39	23.93	19.84

4.5 綜合向度的難易度指標及排序

表 4.8 綜合向度各題的難易度指標及排名

題號	加權難易度指標	排名
1	0.2818	34
2	0.3557	29
3	0.4183	23
4	0.4689	17
5	0.3075	33
6	0.3824	27
7	0.3693	28
8	0.4679	18
9	0.4608	19
10	0.3956	25
11	0.3917	26
12	0.3155	32
13	0.4774	16
14	0.3164	31
15	0.4060	24
16	0.3426	30
17	0.4434	22
18	0.4781	15
19	0.4913	13
20	0.4556	21
21	0.4918	11
22	0.4914	12
23	0.4570	20
24	0.5187	8
25	0.5755	4
26	0.4877	14
27	0.5859	3
28	0.5693	6
29	0.5077	9
30	0.5006	10
31	0.5861	2
32	0.5682	7
33	0.5921	1
34	0.5742	5

由表 4.7 可看出來，在經過各向度的模糊相對權重加權之後，各題的綜合難度隸屬。進一步從表 4.8 可以看出，整體難度最高的是第 33 題，第二名是第 31 題，第三名是第 27 題。比較分向度難度值和綜合難度值，可以發現一些有趣的現象。例如第 28 題在題目敘述和解題策略兩個向度中都是難度最高的，但經過加權之後的難度僅排名第六。而像第 33 題，在各向度的排

名分別是第 3、第 5、第 6 和第 2。沒有一個向度是最難，但整體的難度卻是排名第一。

我們也可將表 4.8 的加權難易度指標當成是各題的整體難度。從這個難易度指標我們大致上可以區分，難易度指標介於 0.6~0.7 的屬於困難；難易度指標介於0.5~0.6的屬於中間偏難;難易度指標介於0.4~0.5 屬於中間偏易；難易度指標介於 0.3~0.4 的屬於容易；難易度指標介於 0.2~0.3 屬於非常容易。

而從表 4.8 來看本次基測試題並沒有綜合難易度指標高於 0.6 的題目，只有在分各向度難度時，有零星幾題的難易度指標高於 0.6。我們將表 4.8 的難易度指標依照 0.2~0.3、0.3~0.4、0.4~0.5、0.5~0.6 三個區間範圍，將題數及比例整理如下表 4.9。

表 4.9 四個難易指標範圍的題目分佈與題數比例

難度指標	0.2~0.3	0.3~0.4	0.4~0.5	0.5~0.6
反模糊化語言變數	非常容易	容易	中間偏易	中間偏難
題號	1	2、5、6、7、10、11、12、14、16	3、4、8、9、13、15、17、18、19、20、21、22、23、26	24、25、27、28、29、30、31、32、33、34
題數	1	9	14	10
比例	2.94%	26.47%	41.18%	29.41%

從表 4.9 可以看出2.94%的題目屬於非常容易;26.47%的題目屬於容易；41.18%的題目屬於中間偏易；29.41%的題目屬於中間偏難。從此結果可以看出，本次題目的難度，大部分都是屬於中間偏易或是容易，這與國民中學基本學力測驗出題的難度分配原則「中間偏易」是相符的。

4.6 難易度指標及試題答對率之相關性

本節將把每一題的加權難度與學生的作答結果作一比較。學生作答結果是由問卷方式，於 98 第一次國中基本學力測驗後一周內，請五個班級的國三學生填答他們在基測數學科的作答情形。發出問卷 185 份，回收的有效問卷 179 份。回收問卷後計算各題之答對率，並算出各題答對率與各題難易度指標的相關係數。如下表：

表 4.10 各題答對率與難易度指標之相關係數

題號	答對率	加權難度	題號	答對率	加權難度
1	0.8337	0.2818	18	0.6484	0.4781
2	0.7100	0.3557	19	0.5874	0.4913
3	0.7516	0.4183	20	0.5063	0.4556
4	0.7816	0.4689	21	0.6411	0.4918
5	0.6632	0.3075	22	0.6105	0.4914
6	0.7816	0.3824	23	0.5876	0.4570
7	0.7426	0.3693	24	0.5132	0.5187
8	0.7105	0.4679	25	0.4421	0.5755
9	0.5711	0.4608	26	0.5842	0.4877
10	0.6442	0.3956	27	0.5447	0.5859
11	0.6632	0.3917	28	0.4697	0.5693
12	0.7247	0.3155	29	0.5329	0.5077
13	0.5821	0.4774	30	0.6876	0.5006
14	0.7208	0.3164	31	0.4284	0.5861
15	0.5895	0.4060	32	0.4074	0.5682
16	0.6632	0.3426	33	0.4400	0.5921
17	0.6800	0.4434	34	0.4642	0.5742
相關係數		−0.7985			

從表 4.10 可看出，各題的試題答對率與難易度指標的相關係數為−0.7985，達到相當程度的負相關。可見由此方法得到的難易度指標與學生對題目難度的感受大致上是相符合的。

5. 結論與建議

相較於傳統的試題難易度評量方法，模糊問卷所取得的數據資料，更能真實反映試題難度的模糊性。將決定難度的因子分成數個不同的向度，可從不同的角度去檢視試題的難易度。而將模糊相對權重的概念應用於試題難易度評量，能將試題依不同向度的權重作加權，以此得到試題的綜合難度指數，便於比較與分析。與傳統只從單一面向去考慮難度的方法來比較，分多向度去決定難度似乎更具有說服力。

本文提出聚類距離與聚類比例的新定義，取代直接使用模糊平均數或模糊眾數等概念，對所取得的模糊問卷作解釋。研究者發現，這樣的方法具有相當好的解釋能力。而利用反模糊化概念取得的難易度指標，則是便於對試題難度作排序及分類。

最後，研究者對未來的研究方向及應用提出幾點建議：

1、本研究所採用的四個決定難度的因子，並非固定不變。本文僅提出分向度評量試題難易度的概念，後續研究者可視不同情況需要，採取不同的因子來決定試題的難度。或者可對本文採取的因子，蒐集更多專家學者的意見，取得一致的共識，得到更精準的模糊相對權重值。

2、本研究所定義的聚類距離，是針對具有偏好序列性質的語言變數所定義的。而此種特殊的距離在模糊理論上所具有的性質，也值得後續深入研究。

3、本研究所提出的分向度決定難度的概念，以及將試題依照難易度指標範圍分類的作法，可應用於命題卡的製作或是題庫系統的建立。

參考文獻

[1]王文俊(1997)。認識 Fuzzy。台北：全華書局。

[2]江彥聖(2008)。模糊相關係數及其應用。國立政治大學應用數學系數學教學碩士在職專班碩士學位論文。

[3]余民寧(2002)。教育測驗與評量－成就測驗與教學評量。台北：心理。

[4]阮亨中、吳柏林(2000)。模糊數學與統計應用。台北：俊傑。

[5]吳柏林(2005)。模糊統計導論：方法與應用。台北：五南。

[6]吳柏林(2002)。現代統計學。台北：前程。

[7]吳柏林(1997)。社會科學研究中的模糊邏輯與模糊統計分析。國立政治大學研究通訊，7，17-38。

[8]波利亞(2006)。怎樣解題(蔡坤憲，譯)。台北：天下遠見。（原著第二版出版於 1985 年）

[9]黃新發、吳寶珍、連秀玉(2009)。應用模糊調查與統計分析國民中學基本學力測驗。管理科學與統計決策，6(1)，50-62。

[10]Zadeh L.A. (1965) Fuzzy set. Information and Control, Vol. 8, 338-353.