國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

三維條件常態分配相容性的探討

On the compatibility of three conditional normal distributions in three dimensions

碩專班學生： 何　霙 撰

指導教授： 姜志銘 博士

中華民國　一百 年　八 月　二十二 日

中文摘要

關於二維之變數，Arnold and Press (1989) 首先提出檢驗兩個條件分配是否滿足相容性的理論。本研究嘗試對 n 維之變數，探討 n 個條件分配滿足相容性的檢驗方式；並提出在三維聯合分配下，給定三個條件分配為常態(normal) 時，檢驗此三個條件分配滿足相容性的充分必要條件；最後，並推導出此三個條件分配滿足相容性時，其所對應的聯合機率密度函數之公式。若此三個條件分配其所對應的聯合機率密度函數進一步假設為常態時，檢驗其相容性的充分必要條件可更加以簡化。

關鍵詞：相容性；條件常態分配

Abstract

Arnold and Press (1989) first provide the theory about the compatibility of two conditional distributions in two dimensions. In this research, we extend the two dimensional cases to the high dimensional cases. In particular, we find the necessary and sufficient conditions of the compatibility of three conditional normal distributions in three dimensions. Furthermore, we also provide a formula to find the joint probability density function when three dimensional conditional normal distributions are compatible. Finally, simple sufficient and necessary conditions are also given when the joint distribution is further assumed to be normal.

Keywords : Compatible ; Conditional Normal Distribution

目次

1. 簡介

在眾多研究裡，對於現實生活中的資料收集，不易直接的獲得研究全體聯合分配的資訊，反而較易獲得條件分配下的資訊；然而，所得到條件分配下的資訊，是否來自於同一個聯合分配，就需要進行相容性(compatible)的檢驗。

首先，定義二維條件分配之相容性如下：

當給定兩個條件分配分別為 $X|Y$ 及 $Y|X$ ，若存在一個聯合分配使得它的條件分配亦分別為 $X|Y$ 及 $Y|X$ ，則稱這兩個條件分配是滿足相容性的。

本文主要為依據下述兩個小節探討及研究連續隨機變數條件分配之相容性。

1.1 二維條件分配滿足相容性之充要條件

由 Arnold and Press (1989)所提出。若兩個條件機率密度函數 $g_1(x|y)$ 及 $g_2(y|x)$ 滿足相容性 $\Leftrightarrow$ 滿足下述兩個條件：

(1) $N_1 = N_2$ ，其中 $N_1 = \{(x,y)|g_1(x|y) > 0\}$ 及 $N_2 = \{(x,y)|g_2(y|x) > 0\}$ 。

(2) 存在函數 $u(x)$ 、 $v(y)$ ，使得 $\dfrac{g_1(x|y)}{g_2(y|x)} = u(x)\cdot v(y)$ ，對所有的

$(x,y) \in N \equiv N_1 = N_2$ ，且 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx < \infty$（或 $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{v(y)}dy < \infty$）。

在前述的情形下，可推得聯合機率密度函數 $f(x,y) = g_2(y|x)\cdot \dfrac{u(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx}$ 的條件機率密度函數分別為 $g_1(x|y)$ 及 $g_2(y|x)$ 。

1.2 二維條件常態分配滿足相容性之充要條件

由蕭惠玲(2010)所提出。給定兩個條件分配分別具有如下的性質

$X|Y=y \sim N(\mu_1(y),\sigma_1^2(y))$，$\sigma_1^2(y)>0$，$\forall y\in R$；

$Y|X=x \sim N(\mu_2(x),\sigma_2^2(x))$，$\sigma_2^2(x)>0$，$\forall x\in R$；

其中$N(\mu,\sigma^2)$代表平均數為μ、變異數為σ^2的常態分配。

此兩個條件分配滿足相容性$\Leftrightarrow$滿足下述兩個條件：

(1) 存在常數d_i及e_j，$1\le i,j\le 4$，使得

$\mu_1(y)=(d_2+e_3y+e_4y^2)\times\sigma_1^2(y)$，$\sigma_1^2(y)=(d_1+e_1y+e_2y^2)^{-1}$；

$\mu_2(x)=(d_4+e_3x-\frac{1}{2}e_1x^2)\times\sigma_2^2(x)$，$\sigma_2^2(x)=(d_3-2e_4x+e_2x^2)^{-1}$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}u(x)dx<\infty$，

其中 $u(x)=\frac{1}{\sqrt{d_3-2e_4x+e_2x^2}}\exp[\frac{(d_4+e_3x-\frac{1}{2}e_1x^2)^2}{2(d_3-2e_4x+e_2x^2)}-\frac{d_1}{2}x^2+d_2x]$ 。

若給定以下情形，上述檢驗相容性的充要條件可進一步簡化。

情形 1. 給定的兩個條件常態分配之變異數皆不為常數：

條件(2)可簡化為 $e_2>0$，$e_1{}^2-4e_2d_1<0$，$e_4{}^2-e_2d_3<0$。

且在滿足相容性下，可推得此兩個條件常態分配所對應的聯合機率密度

函數 $f(x,y)\propto\exp([1\quad x\quad x^2]\begin{bmatrix}0 & d_4 & -\frac{d_3}{2}\\ d_2 & e_3 & e_4\\ -\frac{d_1}{2} & -\frac{e_1}{2} & -\frac{e_2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ y\\ y^2\end{bmatrix})$ 。

情形 2. 給定的兩個條件常態分配之變異數為常數且恆正：

條件(2)可簡化為 $e_3^{\,2} - d_1 d_3 < 0$。

且在滿足相容性下，可推得此兩個條件常態分配所對應的聯合機率密度

函數 $f(x,y) \propto \exp([1 \quad x \quad x^2]\begin{bmatrix} 0 & d_4 & -\frac{d_3}{2} \\ d_2 & e_3 & 0 \\ -\frac{d_1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix})$ 且為常態分配。

情形 3. 給定的兩個條件常態分配之變異數其一為常數且恆正，另一不為常數：

此兩個條件分配必不滿足相容性。

藉由上述的理論，本文將於第 2 章推展出檢驗三維及高維一般性條件分配滿足相容性之充要條件；並於文中第 3 章，設定條件分配為現實生活中最常見的常態分配，在三維空間中，進行相容性的探討，找出檢驗相容性的方法。

2. 高維條件分配相容性之探討

在本章中，將介紹三維與高維連續隨機變數之條件分配滿足相容性的定義，並推廣 Arnold and Press(1989) 所提出在二維空間中檢驗兩個條件分配滿足相容性的充分必要條件，推導出在三維與高維空間中檢驗三個與 n 個條件分配滿足相容性的充分必要條件。

【定義 1】

在三維的空間中，三個條件分配 $X|Y,Z$ 、$Y|X,Z$ 、$Z|X,Y$ ，其所對應的機率密度函數分別為 $f_{X|Y,Z}(x|y,z)$、$f_{Y|X,Z}(y|x,z)$、$f_{Z|X,Y}(z|x,y)$，若可以找到一個 X、Y、Z 的聯合機率密度函數 $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$ 能產生 $f_{X|Y,Z}(x|y,z)$ 、$f_{Y|X,Z}(y|x,z)$ 、$f_{Z|X,Y}(z|x,y)$ ，則稱此三個條件分配滿足相容性。

【定理 2】

在三維的空間中，三個條件分配 $X|Y,Z$ 、$Y|X,Z$ 、$Z|X,Y$ ，其所對應的機率密度函數分別為 $f_{X|Y,Z}(x|y,z)$ 、$f_{Y|X,Z}(y|x,z)$ 、$f_{Z|X,Y}(z|x,y)$ ，則上述三個條件分配滿足相容性 $\Leftrightarrow$ 滿足下列兩個條件：

(1) $\exists\, W_2(x,z),\ W_3(x,y),\ and\ U(y,z) \ni \dfrac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)} = \dfrac{W_2(x,z)}{U(y,z)}$ &

$$\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)} = \frac{W_3(x,y)}{U(y,z)}, \forall x,y,z$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(y,z)\,dydz < \infty$

【證明】

$(\Rightarrow)$ 因為 $X|Y,Z$ 、$Y|X,Z$ 、$Z|X,Y$ 滿足相容性，故存在 $f_{XYZ}(x,y,z)$，其中

$X|Y,Z$ 、$Y|X,Z$ 、$Z|X,Y$ 的條件機率密度函數分別為 $f_{X|Y,Z}(x|y,z)$、

$f_{Y|X,Z}(y|x,z)$ 、$f_{Z|X,Y}(z|x,y)$ 。

令 $W_2(x,z)$ 為 $f_{XYZ}(x,y,z)$ 的 X 、Z 邊際機率密度函數，亦即

$W_2(x,z)=f_{XZ}(x,z)$ ；同理，$W_3(x,y)=f_{XY}(x,y)$ 、$U(y,z)=f_{YZ}(y,z)$ ，

則可得證。

$(\Leftarrow)$ 令 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(y,z)dydz=c$ ，則 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(y,z)}{c}dydz=1$ 。

令 $h(x,y,z)=f_{X|Y,Z}(x|y,z)\cdot\frac{U(y,z)}{c}\Rightarrow\iiint h(x,y,z)dxdydz=1$

$$\Rightarrow\ h(y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y,z)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X|Y,Z}(x|y,z)\cdot\frac{U(y,z)}{c}dx=\frac{U(y,z)}{c}$$

$$\therefore\ h_{X|Y,Z}(x|y,z)=\frac{h(x,y,z)}{h(y,z)}=\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)\cdot\frac{U(y,z)}{c}}{\frac{U(y,z)}{c}}=f_{X|Y,Z}(x|y,z)$$

同理 $h(x,y,z)=f_{Y|X,Z}(y|x,z)\cdot\frac{W_2(x,z)}{c}=f_{Z|X,Y}(z|x,y)\cdot\frac{W_3(x,y)}{c}$ ，

可得 $h_{Y|X,Z}(y|x,z)=f_{Y|X,Z}(y|x,z)$ 、$h_{Z|X,Y}(z|x,y)=f_{Z|X,Y}(z|x,y)$ 。

$\therefore\ f_{XYZ}(x,y,z)=h(x,y,z)$ 存在，滿足相容性。■

在定理 2 中，所提到的 $U(y,z)$，在與 $W_2(x,z)$ 進行除法運算時，若存在含有 z 的公因式，將會對其進行約分，同樣地，在與 $W_3(x,y)$ 進行除法運算時，若存在含有 y 的公因式，亦將會對其進行約分，在這樣的情形下，給定的條件分配所對應的機率密度函數兩兩相除時，所得到的結果將會有所不同，將如下方推論 3 所敘述。

【推論 3】

在三維的空間中，三個條件分配$X|Y,Z$、$Y|X,Z$、$Z|X,Y$，其所對應的機率密度函數分別為$f_{X|Y,Z}(x|y,z)$、$f_{Y|X,Z}(y|x,z)$、$f_{Z|X,Y}(z|x,y)$，則上述三個條件分配滿足相容性$\Leftrightarrow$滿足下列兩個條件：

(1) $\exists\, V_1(x,z),\ U_1(y,z),\ V_2(x,y),\ U_2(y,z),\ f_1(y),\ f_2(x)$

$$\ni\ \frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)}=\frac{V_1(x,z)}{U_1(y,z)},\quad \frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)}=\frac{V_2(x,y)}{U_2(y,z)},\quad \&\ \frac{U_1(y,z)}{U_2(y,z)}=\frac{f_1(y)}{f_2(z)},\ \forall x,y,z$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U_1(y,z)f_2(z)dydz<\infty$

【證明】

$(\Rightarrow)$ 由**定理 2** 可知滿足相容性，則定理 2 中條件(1)、(2)成立。

令$V_1(x,z)=W_2(x,z)$、$V_2(x,y)=W_3(x,y)$、$U_1(y,z)=U_2(y,z)=U(y,z)$、$f_1(y)=f_2(z)=1$，則可得證。

$(\Leftarrow)$ 令$U(y,z)=U_1(y,z)\cdot f_2(z)$、$W_2(x,z)=V_1(x,z)\cdot f_2(z)$、$W_3(x,y)=V_2(x,y)\cdot f_1(y)$

$$\Rightarrow\ \frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)}=\frac{V_1(x,z)}{U_1(y,z)}=\frac{V_1(x,z)f_2(z)}{U_1(y,z)f_2(z)}=\frac{W_2(x,z)}{U(y,z)}\quad \&$$

$$\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)}=\frac{V_2(x,y)}{U_2(y,z)}=\frac{V_2(x,y)f_1(y)}{U_1(y,z)f_2(z)}=\frac{W_3(x,y)}{U(y,z)}$$

，則可得證。■

接下來，欲將定理 2 的結果，推廣至高維空間，首先定義高維度之相容性。

【定義 4】

在 n 維的空間中，X_{-i} 表示 $(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$，$n$ 個條件分配 $X_1 \middle| X_{-1}$、$X_2 \middle| X_{-2}$、$X_3 \middle| X_{-3}$、⋯、$X_n \middle| X_{-n}$，其所對應的機率密度函數分別為 $f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})$、$f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})$、$f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})$、⋯、$f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})$。若存在一個 X_1、X_2、X_3、⋯、X_n 的聯合機率密度函數 $f_{X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$，且由此聯合機率密度函數可產生 $f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})$、$f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})$、$f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})$、⋯、$f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})$，則稱此 n 個條件分配滿足相容性。

【定理 5】

在 n 維的空間中，X_{-i} 表示 $(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$，$n$ 個條件分配 $X_1 | X_{-1}$、$X_2 | X_{-2}$、$X_3 | X_{-3}$、⋯、$X_n | X_{-n}$，其所對應的機率密度函數分別為 $f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})$、$f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})$、$f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})$、⋯、$f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})$，則上述 n 個條件分配滿足相容性 $\Leftrightarrow$ 滿足下列兩個條件：

(1) $\exists\, W_2(x_{-2}),\ W_3(x_{-3}),\ \ldots,\ W_n(x_{-n}),\ U(x_{-1}) \ni \dfrac{f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})}{f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})} = \dfrac{W_2(x_{-2})}{U(x_{-1})}$,

$$\frac{f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})}{f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})} = \frac{W_3(x_{-3})}{U(x_{-1})},\ \cdots,\quad \& \ \frac{f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})}{f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})} = \frac{W_n(x_{-n})}{U(x_{-1})}$$

(2) $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} U(x_{-1})\,dx_{-1} < \infty$

【證明】

$(\Rightarrow)$ 因為 $X_1|X_{-1}$ 、 $X_2|X_{-2}$ 、 $X_3|X_{-3}$ 、⋯、 $X_n|X_{-n}$ 滿足相容性，故存在

$f_{X_1X_2X_3\ldots X_n}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ ，其中 $X_1|X_{-1}$ 、 $X_2|X_{-2}$ 、 $X_3|X_{-3}$ 、⋯、 $X_n|X_{-n}$ 的

條件機率密度函數分別為 $f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})$、$f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})$、$f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})$、⋯、

$f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})$ 。

令 $W_2(x_{-2})$ 為 $f_{X_1X_2X_3\ldots X_n}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ 的 $X_1,X_3,X_4,\ldots,X_n$ 邊際機率密度函數，

亦即 $W_2(x_{-2})=f_{X_{-2}}(x_{-2})$ ；同理，$W_3(x_{-3})=f_{X_{-3}}(x_{-3})$ 、⋯、$W_n(x_{-n})=f_{X_{-n}}(x_{-n})$ 、

$U(x_{-1})=f_{X_{-1}}(x_{-1})$ ，則可得證。

$(\Leftarrow)$ 令 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} U(x_{-1})dx_{-1}=c$ ，則 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{U(x_{-1})}{c}dx_{-1}=1$ 。

令 $h(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})\cdot\frac{U(x_{-1})}{c}$

$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^n}\cdots\int h(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n=1$

$\Rightarrow h(x_{-1})=\int_{\mathbb{R}} h(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)dx_1=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})\cdot\frac{U(x_{-1})}{c}dx_1=\frac{U(x_{-1})}{c}$

$$\therefore\ h_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})=\frac{h(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)}{h(x_{-1})}=\frac{f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})\cdot\frac{U(x_{-1})}{c}}{\frac{U(x_{-1})}{c}}=f_{X_1|X_{-1}}(x_1|x_{-1})$$

同理 $h(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})\cdot\frac{W_2(x_{-2})}{c}=f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})\cdot\frac{W_3(x_{-3})}{c}$

$$=\ldots=f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})\cdot\frac{W_n(x_{-n})}{c}$$

可得 $h_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})=f_{X_2|X_{-2}}(x_2|x_{-2})$ 、 $h_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})=f_{X_3|X_{-3}}(x_3|x_{-3})$ 、⋯、

$h_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})=f_{X_n|X_{-n}}(x_n|x_{-n})$ 。

$\therefore f_{X_1X_2X_3\ldots X_n}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=h(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ 存在，滿足相容性。■

3. 三維條件常態分配相容性之探討

本章第一節中，將探討給定三個三維條件分配均為常態分配時，檢驗其滿足相容性的充分必要條件，並試圖將條件簡化以方便使用，同時找出其與所對應的聯合機率密度函數彼此間的關係，並在本節的最後提供兩個例子，使讀者瞭解如何使用本節所提供三維條件常態分配相容性的檢驗方法。

另於第二節中，更進一步地去探討，若給定的三個三維條件常態分配滿足相容性且其所對應的聯合分配亦為常態時之充分必要條件為何，我們發現檢驗的充要條件可更加簡化。

3.1 滿足相容性之充要條件

首先，我們給定三個三維條件分配皆為常態分配具有如下的性質：

$X|Y=y,Z=z \sim N(\mu_1(y,z),\sigma_1^2(y,z))$，$\sigma_1^2(y,z)>0$，$\forall y,z \in R$；

$Y|X=x,Z=z \sim N(\mu_2(x,z),\sigma_2^2(x,z))$，$\sigma_2^2(x,z)>0$，$\forall x,z \in R$；

$Z|X=x,Y=y \sim N(\mu_3(x,y),\sigma_3^2(x,y))$，$\sigma_3^2(x,y)>0$，$\forall x,y \in R$；

並以[條件常態模型]簡稱，方便於後文中敘述。

接著，在[條件常態模型]下，開始探討如何以$\mu_1(y,z)$、$\mu_2(x,z)$、$\mu_3(x,y)$、$\sigma_1^2(y,z)$、$\sigma_2^2(x,z)$、$\sigma_3^2(x,y)$的關聯性來表達相容性的充分必要條件，並且將所得到的結果整理成定理 6。

【定理 6】

在[條件常態模型]下，此三個條件分配滿足相容性的充分必要條件為：

存在常數α_{ijk}，$0 \le i, j, k \le 2$，使得

$$\mu_1(y,z) = (\alpha_{122}, \alpha_{121}, \alpha_{120}, \alpha_{112}, \alpha_{111}, \alpha_{110}, \alpha_{102}, \alpha_{101}, \alpha_{100}) * [(y^2, y, 1) \otimes (z^2, z, 1)] \times \sigma_1^2(y,z)$$

$$\mu_2(x,z) = (\alpha_{212}, \alpha_{211}, \alpha_{210}, \alpha_{112}, \alpha_{111}, \alpha_{110}, \alpha_{012}, \alpha_{011}, \alpha_{010}) * [(x^2, x, 1) \otimes (z^2, z, 1)] \times \sigma_2^2(x,z)$$

$$\mu_3(x,y) = (\alpha_{221}, \alpha_{211}, \alpha_{201}, \alpha_{121}, \alpha_{111}, \alpha_{101}, \alpha_{021}, \alpha_{011}, \alpha_{001}) * [(x^2, x, 1) \otimes (y^2, y, 1)] \times \sigma_3^2(x,y)$$

$$\sigma_1^2(y,z) = \{-2 \times (\alpha_{222}, \alpha_{221}, \alpha_{220}, \alpha_{212}, \alpha_{211}, \alpha_{210}, \alpha_{202}, \alpha_{201}, \alpha_{200}) * [(y^2, y, 1) \otimes (z^2, z, 1)]\}^{-1}$$

$$\sigma_2^2(x,z) = \{-2 \times (\alpha_{222}, \alpha_{221}, \alpha_{220}, \alpha_{122}, \alpha_{121}, \alpha_{120}, \alpha_{022}, \alpha_{021}, \alpha_{020}) * [(x^2, x, 1) \otimes (z^2, z, 1)]\}^{-1}$$

$$\sigma_3^2(x,y) = \{-2 \times (\alpha_{222}, \alpha_{212}, \alpha_{202}, \alpha_{122}, \alpha_{112}, \alpha_{102}, \alpha_{022}, \alpha_{012}, \alpha_{002}) * [(x^2, x, 1) \otimes (y^2, y, 1)]\}^{-1}$$

且
$$\begin{aligned} f(x,y,z) \propto \exp(&\alpha_{222}x^2y^2z^2 + \alpha_{221}x^2y^2z + \alpha_{220}x^2y^2 + \alpha_{212}x^2yz^2 + \alpha_{211}x^2yz + \alpha_{210}x^2y \\ &+ \alpha_{202}x^2z^2 + \alpha_{201}x^2z + \alpha_{200}x^2 + \alpha_{122}xy^2z^2 + \alpha_{121}xy^2z + \alpha_{120}xy^2 \\ &+ \alpha_{112}xyz^2 + \alpha_{111}xyz + \alpha_{110}xy + \alpha_{102}xz^2 + \alpha_{101}xz + \alpha_{100}x \\ &+ \alpha_{022}y^2z^2 + \alpha_{021}y^2z + \alpha_{020}y^2 + \alpha_{012}yz^2 + \alpha_{011}yz + \alpha_{010}y + \alpha_{002}z^2 + \alpha_{001}z) \end{aligned}$$

是可積分的。其中，$(a_1, \dots, a_k) * (b_1, \dots, b_k) = a_1b_1 + \dots + a_kb_k$；

$(a_1, a_2, a_3) \otimes (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \dots + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$。

【證明】

$(\Rightarrow)$ 由推論 3 可知滿足相容性，則推論 3 中條件(1)成立。

所以 $\dfrac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)} = \dfrac{V_1(x,z)}{U_1(y,z)}$

又 $$\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(y,z)}}\exp[-\dfrac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}]}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(x,z)}}\exp[-\dfrac{(y-\mu_2(x,z))^2}{2\sigma_2^2(x,z)}]}$$

$$=\frac{\sigma_2(x,z)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}+\frac{(y-\mu_2(x,z))^2}{2\sigma_2^2(x,z)}]$$

$$=\frac{\sigma_2(x,z)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}+\frac{y^2}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-y\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}+\frac{1}{2}\frac{\mu_2^2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}]$$

令 $K(x,y,z)=-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}+\frac{y^2}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-y\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}$ ....①

∵ $K(x,y,z)=K_1(y,z)+K_2(x,z)\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial y}K(x,y,z)=K_3(y,z)$ 則

$$\frac{\partial}{\partial y}K(x,y,z)=-\frac{x^2}{2}(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)})+x(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)})+y\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}=K_3(y,z)$$

....②

∴ $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}=C_1(z)y+C_2(z)$ & $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}=C_3(z)y+C_4(z)$ ，

其中 $C_i(z),\ i\in\mathbb{N}$ 為 z 的函數

$\Rightarrow\ \frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}=\frac{1}{2}C_1(z)y^2+C_2(z)y+C_5(z)$ & $\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}=\frac{1}{2}C_3(z)y^2+C_4(z)y+C_6(z)$

$\Rightarrow\ \sigma_1^2(y,z)=[\frac{1}{2}C_1(z)y^2+C_2(z)y+C_5(z)]^{-1}$ ....③

& $\mu_1(y,z)=\dfrac{\frac{1}{2}C_3(z)y^2+C_4(z)y+C_6(z)}{\frac{1}{2}C_1(z)y^2+C_2(z)y+C_5(z)}$ ....④

將③、④代入②

$$\Rightarrow K_3(y,z)=-\frac{x^2}{2}[C_1(z)y+C_2(z)]+x[C_3(z)y+C_4(z)]+y\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}$$

$$=y[\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{x^2}{2}C_1(z)+xC_3(z)]+[-\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{x^2}{2}C_2(z)+xC_4(z)]$$

∴ $\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{x^2}{2}C_1(z)+xC_3(z)=C_7(z)$ & $-\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{x^2}{2}C_2(z)+xC_4(z)=C_8(z)$

$\Rightarrow\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}=\frac{x^2}{2}C_1(z)-xC_3(z)+C_7(z)$ & $\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}=-\frac{x^2}{2}C_2(z)+xC_4(z)-C_8(z)$

$\Rightarrow\sigma_2^2(x,z)=[\frac{1}{2}C_1(z)x^2-C_3(z)x+C_7(z)]^{-1}$ ....⑤

& $\mu_2(x,z)=\dfrac{-\frac{1}{2}C_2(z)x^2+C_4(z)x-C_8(z)}{\frac{1}{2}C_1(z)x^2-C_3(z)x+C_7(z)}$ ....⑥

將③、④、⑤、⑥代入①

$$\Rightarrow K(x,y,z) = -\frac{x^2}{2}C_5(z) + xC_6(z) + \frac{y^2}{2}C_7(z) + yC_8(z)$$

$$\Rightarrow \frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)} = \frac{\sigma_2(x,z)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} + x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} - \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} + \frac{y^2}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)} - y\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)} + \frac{1}{2}\frac{\mu_2^2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}]$$

$$= \frac{\sigma_2(x,z)}{\sigma_1(y,z)}\exp[\frac{y^2}{2}C_7(z) + yC_8(z) - \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} - \frac{x^2}{2}C_5(z) + xC_6(z) + \frac{1}{2}\frac{\mu_2^2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}]$$

$$= \frac{1}{\sigma_1(y,z)}\exp[\frac{y^2}{2}C_7(z) + yC_8(z) - \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}] \times \sigma_2(x,z)\exp[-\frac{x^2}{2}C_5(z) + xC_6(z) + \frac{1}{2}\frac{\mu_2^2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}]$$

$$= [U_1(y,z)]^{-1} \times V_1(x,z)$$

$$\Rightarrow U_1(y,z) = \sigma_1(y,z)\exp[-\frac{y^2}{2}C_7(z) - yC_8(z) + \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}] \cdots\cdots ⑦$$

$$\& \quad V_1(x,z) = \sigma_2(x,z)\exp[-\frac{x^2}{2}C_5(z) + xC_6(z) + \frac{1}{2}\frac{\mu_2^2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}] \cdots\cdots ⑧$$

同樣地， $\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)} = \frac{V_2(x,y)}{U_2(y,z)}$

又 $$\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(y,z)}}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_3^2(x,y)}}\exp[-\frac{(z-\mu_3(x,y))^2}{2\sigma_3^2(x,y)}]}$$

$$= \frac{\sigma_3(x,y)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)} + \frac{(z-\mu_3(x,y))^2}{2\sigma_3^2(x,y)}]$$

$$= \frac{\sigma_3(x,y)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} + x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} - \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} + \frac{z^2}{2}\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - z\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} + \frac{1}{2}\frac{\mu_3^2(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}]$$

令 $$H(x,y,z) = -\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} + x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} + \frac{z^2}{2}\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - z\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} \cdots\cdots ⑨$$

∵ $H(x,y,z) = H_1(y,z) + H_2(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}H(x,y,z) = H_3(y,z)$ 則

$$\frac{\partial}{\partial z}H(x,y,z) = -\frac{x^2}{2}(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}) + x(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}) + z\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - \frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} = H_3(y,z)$$

$\cdots\cdots$ ⑩

$$\therefore \ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} = D_1(y)z + D_2(y) \ \ \& \ \ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} = D_3(y)z + D_4(y) \ ,$$

其中 $D_i(y),\ i \in \mathbb{N}$ 為 y 的函數

$$\Rightarrow \ \frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} = \frac{1}{2}D_1(y)z^2 + D_2(y)z + D_5(y) \ \& \ \frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} = \frac{1}{2}D_3(y)z^2 + D_4(y)z + D_6(y)$$

$$\Rightarrow \ \sigma_1^2(y,z) = [\frac{1}{2}D_1(y)z^2 + D_2(y)z + D_5(y)]^{-1} \cdots\cdots\cdots ⑪$$

$$\& \ \ \mu_1(y,z) = \frac{\frac{1}{2}D_3(y)z^2 + D_4(y)z + D_6(y)}{\frac{1}{2}D_1(y)z^2 + D_2(y)z + D_5(y)} \cdots\cdots\cdots ⑫$$

將⑪、⑫代入⑩

$$\Rightarrow H_3(y,z) = -\frac{x^2}{2}[\mathrm{D}_1(y)z + D_2(y)] + x[\mathrm{D}_3(y)z + D_4(y)] + z\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - \frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}$$

$$= z[\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - \frac{x^2}{2}D_1(y) + xD_3(y)] + [-\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} - \frac{x^2}{2}D_2(y) + xD_4(y)]$$

$$\therefore \ \frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - \frac{x^2}{2}D_1(y) + xD_3(y) = D_7(y) \ \& \ -\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} - \frac{x^2}{2}D_2(y) + xD_4(y) = D_8(y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} = \frac{x^2}{2}D_1(y) - xD_2(y) + D_7(y) \ \& \ \frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} = -\frac{x^2}{2}D_2(y) + xD_4(y) - D_8(y)$$

$$\Rightarrow \sigma_3^2(x,y) = [\frac{1}{2}D_1(y)x^2 - D_3(y)x + D_7(y)]^{-1} \cdots\cdots\cdots ⑬$$

$$\& \ \ \mu_3(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}D_2(y)x^2 + D_4(y)x - D_8(y)}{\frac{1}{2}D_1(y)x^2 - D_3(y)x + D_7(y)} \cdots\cdots\cdots ⑭$$

將⑪、⑫、⑬、⑭代入⑨

$$\Rightarrow H(x,y,z) = -\frac{x^2}{2}D_5(y) + xD_6(y) + \frac{z^2}{2}D_7(y) + zD_8(y)$$

$$\Rightarrow \frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)} = \frac{\sigma_3(x,y)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} + x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} - \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} + \frac{z^2}{2}\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} - z\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)} + \frac{1}{2}\frac{\mu_3^2(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}]$$

$$= \frac{\sigma_3(x,y)}{\sigma_1(y,z)}\exp[\frac{z^2}{2}D_7(y) + zD_8(y) - \frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)} - \frac{x^2}{2}D_5(y) + xD_6(y) + \frac{1}{2}\frac{\mu_3^2(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}]$$

$$=\frac{1}{\sigma_1(y,z)}\exp[\frac{z^2}{2}D_7(y)+zD_8(y)-\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]\times\sigma_3(x,y)\exp[-\frac{x^2}{2}D_5(y)+xD_6(y)+\frac{1}{2}\frac{\mu_3^2(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}]$$

$$=[U_2(y,z)]^{-1}\times V_2(x,y)$$

$$\Rightarrow U_2(y,z)=\sigma_1(y,z)\exp[-\frac{z^2}{2}D_7(y)-zD_8(y)+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]\text{.........................}⑮$$

$$\& \quad V_2(x,y)=\sigma_3(x,y)\exp[-\frac{x^2}{2}D_5(y)+xD_6(y)+\frac{1}{2}\frac{\mu_3^2(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}]\text{......................}⑯$$

另外，由③、⑪得到

$$\sigma_1^2(y,z)=\frac{1}{2}C_1(z)y^2+C_2(z)y+C_5(z)=\frac{1}{2}D_1(y)z^2+D_2(y)z+D_5(y)$$

$\Rightarrow\sigma_1^2(y,z)$ 中 y、z 的最高次數皆為二次，令 C_{ij} 、 D_{ij} , $i,j\in\mathbb{N}$ 為常數，可得

左式 $=\frac{1}{2}(C_{12}z^2+C_{11}z+C_{10})y^2+(C_{22}z^2+C_{21}z+C_{20})y+(C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50})$

$$=\frac{1}{2}C_{12}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{11}y^2z+\frac{1}{2}C_{10}y^2+C_{22}yz^2+C_{21}yz+C_{20}y+C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50}$$

右式 $=\frac{1}{2}(D_{12}y^2+D_{11}y+D_{10})z^2+(D_{22}y^2+D_{21}y+D_{20})z+(D_{52}y^2+D_{51}y+D_{50})$

$$=\frac{1}{2}D_{12}y^2z^2+\frac{1}{2}D_{11}yz^2+\frac{1}{2}D_{10}z^2+D_{22}y^2z+D_{21}yz+D_{20}z+D_{52}y^2+D_{51}y+D_{50}$$

$\therefore C_{12}=D_{12}$, $C_{11}=2D_{22}$, $C_{10}=2D_{52}$, $2C_{22}=D_{11}$, $C_{21}=D_{21}$, $C_{20}=D_{51}$, $2C_{52}=D_{10}$, $C_{51}=D_{20}$, $C_{50}=D_{50}$。

由③、④、⑪、⑫得到

$$\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}=\frac{1}{2}C_3(z)y^2+C_4(z)y+C_6(z)=\frac{1}{2}D_3(y)z^2+D_4(y)z+D_6(y)$$

$\Rightarrow$ 左式 $=\frac{1}{2}(C_{32}z^2+C_{31}z+C_{30})y^2+(C_{42}z^2+C_{41}z+C_{40})y+(C_{62}z^2+C_{61}z+C_{60})$

$$=\frac{1}{2}C_{32}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{31}y^2z+\frac{1}{2}C_{30}y^2+C_{42}yz^2+C_{41}yz+C_{40}y+C_{62}z^2+C_{61}z+C_{60}$$

右式 $=\frac{1}{2}(D_{32}y^2+D_{31}y+D_{30})z^2+(D_{42}y^2+D_{41}y+D_{40})z+(D_{62}y^2+D_{61}y+D_{60})$

$$=\frac{1}{2}D_{32}y^2z^2+\frac{1}{2}D_{31}yz^2+\frac{1}{2}D_{30}z^2+D_{42}y^2z+D_{41}yz+D_{40}z+D_{62}y^2+D_{61}y+D_{60}$$

$\therefore C_{32}=D_{32}$, $C_{31}=2D_{42}$, $C_{30}=2D_{62}$, $2C_{42}=D_{31}$, $C_{41}=D_{41}$, $C_{40}=D_{61}$, $2C_{62}=D_{30}$, $C_{61}=D_{40}$, $C_{60}=D_{60}$。

又由推論 3 中條件(1)可知 $\dfrac{U_1(y,z)}{U_2(y,z)}=\dfrac{f_1(y)}{f_2(z)}$ ，將⑦、⑮代入

$$\Rightarrow \frac{U_1(y,z)}{U_2(y,z)}=\frac{\sigma_1(y,z)\exp[-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]}{\sigma_1(y,z)\exp[-\frac{z^2}{2}D_7(y)-zD_8(y)+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]}=\frac{\exp[-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)]}{\exp[-\frac{z^2}{2}D_7(y)-zD_8(y)]}$$

$$=\frac{\exp[-\frac{y^2}{2}(C_{72}z^2+C_{71}z+C_{70})-y(C_{82}z^2+C_{81}z+C_{80})]}{\exp[-\frac{z^2}{2}(D_{72}y^2+D_{71}y+D_{70})-z(D_{82}y^2+D_{81}y+D_{80})]}$$

$$=\frac{\exp(-\frac{C_{72}}{2}y^2z^2-\frac{C_{71}}{2}y^2z-\frac{C_{70}}{2}y^2-C_{82}yz^2-C_{81}yz-C_{80}y)}{\exp(-\frac{D_{72}}{2}y^2z^2-\frac{D_{71}}{2}yz^2-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{82}y^2z-D_{81}yz-D_{80}z)}=\frac{f_1(y)}{f_2(z)}$$

$\therefore C_{72}=D_{72}$ ， $C_{71}=2D_{82}$ ， $2C_{82}=D_{71}$ ， $C_{81}=D_{81}$ ，

$f_1(y)=\exp(-\frac{C_{70}}{2}y^2-C_{80}y)$ ....⑰

$f_2(z)=\exp(-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z)$ ....⑱

再將所得到的式子進行整理，可得下述三個結果：

（1） $\sigma_1^2(y,z)=[\frac{1}{2}C_1(z)y^2+C_2(z)y+C_5(z)]^{-1}$

$=[\frac{1}{2}(C_{12}z^2+C_{11}z+C_{10})y^2+(C_{22}z^2+C_{21}z+C_{20})y+(C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50})]^{-1}$

$=(\frac{1}{2}C_{12}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{11}y^2z+\frac{1}{2}C_{10}y^2+C_{22}yz^2+C_{21}yz+C_{20}y+C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50})^{-1}$

$\sigma_2^2(x,z)=[\frac{1}{2}C_1(z)x^2-C_3(z)x+C_7(z)]^{-1}$

$=[\frac{1}{2}(C_{12}z^2+C_{11}z+C_{10})x^2-(C_{32}z^2+C_{31}z+C_{30})x+(C_{72}z^2+C_{71}z+C_{70})]^{-1}$

$=(\frac{1}{2}C_{12}x^2z^2+\frac{1}{2}C_{11}x^2z+\frac{1}{2}C_{10}x^2-C_{32}xz^2-C_{31}xz-C_{30}x+C_{72}z^2+C_{71}z+C_{70})^{-1}$

$\sigma_3^2(x,y)=[\frac{1}{2}D_1(y)x^2-D_3(y)x+D_7(y)]^{-1}$

$=[\frac{1}{2}(D_{12}y^2+D_{11}y+D_{10})x^2-(D_{32}y^2+D_{31}y+D_{30})x+(D_{72}y^2+D_{71}y+D_{70})]^{-1}$

$$=(\frac{1}{2}D_{12}x^2y^2+\frac{1}{2}D_{11}x^2y+\frac{1}{2}D_{10}x^2-D_{32}xy^2-D_{31}xy-D_{30}x+D_{72}y^2+D_{71}y+D_{70})^{-1}$$

$$=(\frac{1}{2}C_{12}x^2y^2+C_{22}x^2y+C_{52}x^2-C_{32}xy^2-2C_{42}xy-2C_{62}x+C_{72}y^2+2C_{82}y+D_{70})^{-1}$$

發現：$[\sigma_1^2(y,z)]^{-1}$、$[\sigma_2^2(x,z)]^{-1}$、$[\sigma_3^2(x,y)]^{-1}$ 的最高次項 y^2z^2、x^2z^2、x^2y^2 係數相同。

（2）$\mu_1(y,z)=\dfrac{\frac{1}{2}C_3(z)y^2+C_4(z)y+C_6(z)}{\frac{1}{2}C_1(z)y^2+C_2(z)y+C_5(z)}=\dfrac{\frac{1}{2}C_3(z)y^2+C_4(z)y+C_6(z)}{[\sigma_1^2(y,z)]^{-1}}$

$$\Rightarrow\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}=\frac{1}{2}C_3(z)y^2+C_4(z)y+C_6(z)$$

$$=\frac{1}{2}(C_{32}z^2+C_{31}z+C_{30})y^2+(C_{42}z^2+C_{41}z+C_{40})y+(C_{62}z^2+C_{61}z+C_{60})$$

$$=\frac{1}{2}C_{32}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{31}y^2z+\frac{1}{2}C_{30}y^2+C_{42}yz^2+C_{41}yz+C_{40}y+C_{62}z^2+C_{61}z+C_{60}$$

$$\mu_2(x,z)=\frac{-\frac{1}{2}C_2(z)x^2+C_4(z)x-C_8(z)}{\frac{1}{2}C_1(z)x^2-C_3(z)x+C_7(z)}=\frac{-\frac{1}{2}C_2(z)x^2+C_4(z)x-C_8(z)}{[\sigma_2^2(x,z)]^{-1}}$$

$$\Rightarrow\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}=-\frac{1}{2}C_2(z)x^2+C_4(z)x-C_8(z)$$

$$=-\frac{1}{2}(C_{22}z^2+C_{21}z+C_{20})x^2+(C_{42}z^2+C_{41}z+C_{40})x-(C_{82}z^2+C_{81}z+C_{80})$$

$$=-\frac{1}{2}C_{22}x^2z^2-\frac{1}{2}C_{21}x^2z-\frac{1}{2}C_{20}x^2+C_{42}xz^2+C_{41}xz+C_{40}x-C_{82}z^2-C_{81}z-C_{80}$$

$$\mu_3(x,y)=\frac{-\frac{1}{2}D_2(y)x^2+D_4(y)x-D_8(y)}{\frac{1}{2}D_1(y)x^2-D_3(y)x+D_7(y)}=\frac{-\frac{1}{2}D_2(y)x^2+D_4(y)x-D_8(y)}{[\sigma_3^2(x,y)]^{-1}}$$

$$\Rightarrow\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}=-\frac{1}{2}D_2(y)x^2+D_4(y)x-D_8(y)$$

$$=-\frac{1}{2}(D_{22}y^2+D_{21}y+D_{20})x^2+(D_{42}y^2+D_{41}y+D_{40})x-(D_{82}y^2+D_{81}y+D_{80})$$

$$=-\frac{1}{2}D_{22}x^2y^2-\frac{1}{2}D_{21}x^2y-\frac{1}{2}D_{20}x^2+D_{42}xy^2+D_{41}xy+D_{40}x-D_{82}y^2-D_{81}y-D_{80}$$

$$=-\frac{1}{4}C_{11}x^2y^2-\frac{1}{2}C_{21}x^2y-\frac{1}{2}C_{51}x^2+\frac{1}{2}C_{31}xy^2+C_{41}xy+C_{61}x-\frac{1}{2}C_{71}y^2-C_{81}y-D_{80}$$

發現：$\dfrac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}$、$\dfrac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}$、$\dfrac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}$ 交互作用項 yz、xz、xy 係數相同。

(3) $U_1(y,z)f_2(z)=\sigma_1(y,z)\exp[-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]\times\exp(-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z)$

$$=\sigma_1(y,z)\exp[\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$

$$=(\frac{1}{2}C_{12}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{11}y^2z+\frac{1}{2}C_{10}y^2+C_{22}yz^2+C_{21}yz+C_{20}y+C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50})^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\exp[\frac{1}{2}\times\frac{(\frac{1}{2}C_{32}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{31}y^2z+\frac{1}{2}C_{30}y^2+C_{42}yz^2+C_{41}yz+C_{40}y+C_{62}z^2+C_{61}z+C_{60})^2}{\frac{1}{2}C_{12}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{11}y^2z+\frac{1}{2}C_{10}y^2+C_{22}yz^2+C_{21}yz+C_{20}y+C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50}}$$

$$-\frac{y^2}{2}(C_{72}z^2+C_{71}z+C_{70})-y(C_{82}z^2+C_{81}z+C_{80})-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$

推出 $f(x,y,z)\propto f_{X|Y,Z}(x|y,z)U_1(y,z)f_2(z)=$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(y,z)}}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}]\times\sigma_1(y,z)\exp[\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{x^2}{2}(\frac{1}{2}C_{12}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{11}y^2z+\frac{1}{2}C_{10}y^2+C_{22}yz^2+C_{21}yz+C_{20}y+C_{52}z^2+C_{51}z+C_{50})$$

$$+x(\frac{1}{2}C_{32}y^2z^2+\frac{1}{2}C_{31}y^2z+\frac{1}{2}C_{30}y^2+C_{42}yz^2+C_{41}yz+C_{40}y+C_{62}z^2+C_{61}z+C_{60})$$

$$-\frac{y^2}{2}(C_{72}z^2+C_{71}z+C_{70})-y(C_{82}z^2+C_{81}z+C_{80})-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{4}C_{12}x^2y^2z^2-\frac{1}{4}C_{11}x^2y^2z-\frac{1}{4}C_{10}x^2y^2-\frac{1}{2}C_{22}x^2yz^2-\frac{1}{2}C_{21}x^2yz-\frac{1}{2}C_{20}x^2y$$

$$-\frac{1}{2}C_{52}x^2z^2-\frac{1}{2}C_{51}x^2z-\frac{1}{2}C_{50}x^2+\frac{1}{2}C_{32}xy^2z^2+\frac{1}{2}C_{31}xy^2z+\frac{1}{2}C_{30}xy^2$$

$$+C_{42}xyz^2+C_{41}xyz+C_{40}xy+C_{62}xz^2+C_{61}xz+C_{60}x$$

$$-\frac{1}{2}C_{72}y^2z^2-\frac{1}{2}C_{71}y^2z-\frac{1}{2}C_{70}y^2-C_{82}yz^2-C_{81}yz-C_{80}y-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z)$$

最後，將符號改寫，令$\alpha_{222}=-\frac{1}{4}C_{12}$、$\alpha_{221}=-\frac{1}{4}C_{11}$、$\alpha_{220}=-\frac{1}{4}C_{10}$、$\alpha_{212}=-\frac{1}{2}C_{22}$、$\alpha_{211}=-\frac{1}{2}C_{21}$、$\alpha_{210}=-\frac{1}{2}C_{20}$、$\alpha_{202}=-\frac{1}{2}C_{52}$、$\alpha_{201}=-\frac{1}{2}C_{51}$、$\alpha_{200}=-\frac{1}{2}C_{50}$、$\alpha_{122}=\frac{1}{2}C_{32}$、$\alpha_{121}=\frac{1}{2}C_{31}$、$\alpha_{120}=\frac{1}{2}C_{30}$、$\alpha_{112}=C_{42}$、$\alpha_{111}=C_{41}$、$\alpha_{110}=C_{40}$、$\alpha_{102}=C_{62}$、$\alpha_{101}=C_{61}$、$\alpha_{100}=C_{60}$、$\alpha_{022}=-\frac{1}{2}C_{72}$、$\alpha_{021}=-\frac{1}{2}C_{71}$、$\alpha_{020}=-\frac{1}{2}C_{70}$、$\alpha_{012}=-C_{82}$、$\alpha_{011}=-C_{81}$、$\alpha_{010}=-C_{80}$、$\alpha_{002}=-\frac{D_{70}}{2}$、$\alpha_{001}=-D_{80}$且定義符號 $(a_1,...,a_k)*(b_1,...,b_k)$
$=a_1b_1+...+a_kb_k$；$(a_1,a_2,a_3)\otimes(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+...+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3$。

再將三個結果整理如下，則可得證。

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z)\propto \exp(&\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y\\
&+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2\\
&+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x\\
&+\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{020}y^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z)
\end{aligned}
$$

$$\mu_1(y,z)=(\alpha_{122},\alpha_{121},\alpha_{120},\alpha_{112},\alpha_{111},\alpha_{110},\alpha_{102},\alpha_{101},\alpha_{100})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\times\sigma_1^2(y,z)$$

$$\mu_2(x,z)=(\alpha_{212},\alpha_{211},\alpha_{210},\alpha_{112},\alpha_{111},\alpha_{110},\alpha_{012},\alpha_{011},\alpha_{010})*[(x^2,x,1)\otimes(z^2,z,1)]\times\sigma_2^2(x,z)$$

$$\mu_3(x,y)=(\alpha_{221},\alpha_{211},\alpha_{201},\alpha_{121},\alpha_{111},\alpha_{101},\alpha_{021},\alpha_{011},\alpha_{001})*[(x^2,x,1)\otimes(y^2,y,1)]\times\sigma_3^2(x,y)$$

$$\sigma_1^2(y,z)=\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{221},\alpha_{220},\alpha_{212},\alpha_{211},\alpha_{210},\alpha_{202},\alpha_{201},\alpha_{200})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\}^{-1}$$

$$\sigma_2^2(x,z)=\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{221},\alpha_{220},\alpha_{122},\alpha_{121},\alpha_{120},\alpha_{022},\alpha_{021},\alpha_{020})*[(x^2,x,1)\otimes(z^2,z,1)]\}^{-1}$$

$$\sigma_3^2(x,y)=\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{212},\alpha_{202},\alpha_{122},\alpha_{112},\alpha_{102},\alpha_{022},\alpha_{012},\alpha_{002})*[(x^2,x,1)\otimes(y^2,y,1)]\}^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
(\Leftarrow)\ \because\ \frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)}&=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(y,z)}}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(x,z)}}\exp[-\frac{(y-\mu_2(x,z))^2}{2\sigma_2^2(x,z)}]}\\
&=\frac{\sigma_2(x,z)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}+\frac{(y-\mu_2(x,z))^2}{2\sigma_2^2(x,z)}]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\sigma_2(x,z)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}+\frac{y^2}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-y\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}+\frac{1}{2}\frac{\mu_2^2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}]$$

考慮 $K(x,y,z)=-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}+\frac{y^2}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}-y\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}$

$$=-\frac{x^2}{2}\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{221},\alpha_{220},\alpha_{212},\alpha_{211},\alpha_{210},\alpha_{202},\alpha_{201},\alpha_{200})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\}$$
$$+x\{(\alpha_{122},\alpha_{121},\alpha_{120},\alpha_{112},\alpha_{111},\alpha_{110},\alpha_{102},\alpha_{101},\alpha_{100})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\}$$
$$+\frac{y^2}{2}\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{221},\alpha_{220},\alpha_{122},\alpha_{121},\alpha_{120},\alpha_{022},\alpha_{021},\alpha_{020})*[(x^2,x,1)\otimes(z^2,z,1)]\}$$
$$-y\{(\alpha_{212},\alpha_{211},\alpha_{210},\alpha_{112},\alpha_{111},\alpha_{110},\alpha_{012},\alpha_{011},\alpha_{010})*[(x^2,x,1)\otimes(z^2,z,1)]\}$$

$$=\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2$$
$$+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x$$
$$-\alpha_{222}x^2y^2z^2-\alpha_{221}x^2y^2z-\alpha_{220}x^2y^2-\alpha_{122}xy^2z^2-\alpha_{121}xy^2z-\alpha_{120}xy^2-\alpha_{022}y^2z^2-\alpha_{021}y^2z-\alpha_{020}y^2$$
$$-\alpha_{212}x^2yz^2-\alpha_{211}x^2yz-\alpha_{210}x^2y-\alpha_{112}yz^2-\alpha_{111}xyz-\alpha_{110}xy-\alpha_{012}yz^2-\alpha_{011}yz-\alpha_{010}y$$

$$=\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x-\alpha_{022}y^2z^2-\alpha_{021}y^2z-\alpha_{020}y^2-\alpha_{012}yz^2-\alpha_{011}yz-\alpha_{010}y$$

$$=K_2(x,z)+K_1(y,z)$$

$$\Rightarrow\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Y|X,Z}(y|x,z)}=V_1(x,z)\times[U_1(y,z)]^{-1}\cdots\cdots⑲$$

$$\Rightarrow U_1(y,z)=\sigma_1(y,z)\exp[\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{020}y^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]$$

$$\cdots\cdots⑳$$

同樣地，$\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(y,z)}}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_3^2(x,y)}}\exp[-\frac{(z-\mu_3(x,y))^2}{2\sigma_3^2(x,y)}]}$

$$=\frac{\sigma_3(x,y)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{(x-\mu_1(y,z))^2}{2\sigma_1^2(y,z)}+\frac{(z-\mu_3(x,y))^2}{2\sigma_3^2(x,y)}]$$
$$=\frac{\sigma_3(x,y)}{\sigma_1(y,z)}\exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}+\frac{z^2}{2}\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)}-z\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}+\frac{1}{2}\frac{\mu_3^2(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}]$$

考慮 $H(x,y,z)=-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}+\frac{z^2}{2}\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)}-z\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}$

$$=-\frac{x^2}{2}\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{221},\alpha_{220},\alpha_{212},\alpha_{211},\alpha_{210},\alpha_{202},\alpha_{201},\alpha_{200})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\}$$
$$+x\{(\alpha_{122},\alpha_{121},\alpha_{120},\alpha_{112},\alpha_{111},\alpha_{110},\alpha_{102},\alpha_{101},\alpha_{100})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\}$$
$$+\frac{z^2}{2}\{-2\times(\alpha_{222},\alpha_{212},\alpha_{202},\alpha_{122},\alpha_{112},\alpha_{102},\alpha_{022},\alpha_{012},\alpha_{002})*[(x^2,x,1)\otimes(y^2,y,1)]\}$$
$$-z\{(\alpha_{221},\alpha_{211},\alpha_{201},\alpha_{121},\alpha_{111},\alpha_{101},\alpha_{021},\alpha_{011},\alpha_{001})*[(x^2,x,1)\otimes(y^2,y,1)]\}$$

$$=\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2$$
$$+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x$$
$$-\alpha_{222}x^2y^2z^2-\alpha_{212}x^2yz^2-\alpha_{202}x^2z^2-\alpha_{122}xy^2z^2-\alpha_{112}xyz^2-\alpha_{102}xz^2-\alpha_{022}y^2z^2-\alpha_{012}yz^2-\alpha_{002}z^2$$
$$-\alpha_{221}x^2y^2z-\alpha_{211}x^2yz-\alpha_{201}x^2z-\alpha_{121}xy^2z-\alpha_{111}xyz-\alpha_{101}xz-\alpha_{021}y^2z-\alpha_{011}yz-\alpha_{001}z$$

$$=\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{210}x^2y+\alpha_{200}x^2+\alpha_{120}xy^2+\alpha_{110}xy+\alpha_{100}x-\alpha_{022}y^2z^2-\alpha_{012}yz^2-\alpha_{002}z^2-\alpha_{021}y^2z-\alpha_{011}yz-\alpha_{001}z$$

$$=H_2(x,y)+H_1(y,z)$$

$$\Rightarrow\frac{f_{X|Y,Z}(x|y,z)}{f_{Z|X,Y}(z|x,y)}=[U_2(y,z)]^{-1}\times V_2(x,y)\cdots\cdots\text{㉑}$$

$$\Rightarrow U_2(y,z)=\sigma_1(y,z)\exp[\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{002}z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{011}yz+\alpha_{001}z+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]$$
$$\cdots\cdots\text{㉒}$$

又由⑳、㉒得到

$$\frac{U_1(y,z)}{U_2(y,z)}=\frac{\sigma_1(y,z)\exp[\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{020}y^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]}{\sigma_1(y,z)\exp[\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{002}z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{011}yz+\alpha_{001}z+\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}]}$$
$$=\frac{\exp[\alpha_{020}y^2+\alpha_{010}y]}{\exp[\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z]}$$

$$\Rightarrow\frac{U_1(y,z)}{U_2(y,z)}=\frac{f_1(y)}{f_2(z)}\cdots\cdots\text{㉓}$$

∴ 由⑲、㉑、㉓可知滿足推論 3 中的條件(1)；又 $f(x,y,z)$ 是可積分的等價於推論 3 中的條件(2)，則得證。■

【備註】 α_{ijk} 具有以下性質

(1) μ_l $(l=1,2,3)$ 式中 α_{ijk} 的第 l 個下標全為 1，其他下標值則為對應變數 x,y 或 z 的指數值。例如：$\mu_2(x,z)$ 式中所含 x^2z 項的係數為 α_{211}。

(2) σ_l^2 $(l=1,2,3)$ 式中 α_{ijk} 的第 l 個下標全為 2，其他下標值則為對應變數 x,y 或 z 的指數值。例如：$\sigma_2^2(x,z)$ 式中所含 x^2z 項的係數為 α_{221}。

(3) $f(x,y,z)$ 中所含係數 α_{ijk} 其對應項為 $\alpha_{ijk}x^iy^jz^k$。

雖然，定理 6 提供了三個三維條件常態分配滿足相容性的充要條件；然而，這些條件在使用上仍屬複雜，我們將再更進一步找尋其中關係，試圖將條件簡化。

若 $f_{X|Y,Z}(x|y,z)$、$f_{Y|X,Z}(y|x,z)$、$f_{Z|X,Y}(z|x,y)$ 滿足相容性，則存在邊際分配

$$f_{XY}(x,y)\text{、}f_{YZ}(y,z)\text{、}f_{XZ}(x,z) \ni \frac{f_{X|Y,Z}}{f_{Y|X,Z}}=\frac{f_{XZ}(x,z)}{f_{YZ}(y,z)} \ \& \ \frac{f_{X|Y,Z}}{f_{Z|X,Y}}=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_{YZ}(y,z)}$$

又由推論 3 中的條件(1)可知

存在常數 c_1、c_2 及函數 $U_1(y,z)$、$V_1(x,z)$、$U_2(y,z)$、$V_2(x,y)$、$f_1(y)$、$f_2(z)$

使得 $f_{XY}(x,y)=c_2V_2(x,y)f_1(y)$、$f_{YZ}(y,z)=c_1U_1(y,z)f_2(z)=c_2U_2(y,z)f_1(y)$、

$f_{XZ}(x,z)=c_1V_1(x,z)f_2(z)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x,y,z)&=f_{X|Y,Z}(x|y,z)\times f_{YZ}(y,z)\propto f_{X|Y,Z}(x|y,z)\times U_1(y,z)f_2(z)=f_{X|Y,Z}(x|y,z)\times U_2(y,z)f_1(y)\\&=f_{Y|X,Z}(y|x,z)\times f_{XZ}(x,z)\propto f_{Y|X,Z}(y|x,z)\times V_1(x,z)f_2(z)\\&=f_{Z|X,Y}(z|x,y)\times f_{XY}(x,y)\propto f_{Z|X,Y}(z|x,y)\times V_2(x,y)f_1(y)\end{aligned}$$

在[條件常態模型]下，將⑦、⑧、⑯、⑰、⑱代入，可得

$$f(x,y,z)\propto \exp[-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}+x\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}-\frac{y^2}{2}C_7(z)-yC_8(z)-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$
$$\propto \exp[-\frac{y^2}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}+y\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}-\frac{x^2}{2}C_5(z)+xC_6(z)-\frac{D_{70}}{2}z^2-D_{80}z]$$
$$\propto \exp[-\frac{z^2}{2}\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)}+z\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}-\frac{x^2}{2}D_5(y)+xD_6(y)-\frac{C_{70}}{2}y^2-C_{80}y]$$

令 $g_1(x,y,z)=\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}x-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}$ 、

$g_2(x,y,z)=\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}$ 、

$g_3(x,y,z)=\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}z-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)}$ 。

可發現 $f(x,y,z)$ 為指數函數，其中包含 x 的項由 $g_1(x,y,z)$ 而來；包含 y 的項由 $g_2(x,y,z)$ 而來；包含 z 的項由 $g_3(x,y,z)$ 而來。所以，$g_1(x,y,z)$ 、 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中會有同類項，且係數應相同；而 $f(x,y,z)$ 可由 $g_1(x,y,z)$、$g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 所組成。

由定理 6 可知

$$g_1(x,y,z)=\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}x-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}$$
$$=\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2$$
$$+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x$$

$$g_2(x,y,z)=\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}$$
$$=\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2$$
$$+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{020}y^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y$$

$$g_3(x,y,z)=\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}z-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)}$$
$$=\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z$$
$$+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z$$

及 $f(x,y,z)\propto \exp(\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y$

$$+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2$$

$$+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x$$

$$+\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{020}y^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z)$$

經比較係數，可得其中關係，而有下述推論 7。

【推論 7】

在[條件常態模型]下，令 $g_1(x,y,z)=\dfrac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}x-\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_1^2(y,z)}$ 、

$g_2(x,y,z)=\dfrac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}y-\dfrac{y^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_2^2(x,z)}$ 、 $g_3(x,y,z)=\dfrac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}z-\dfrac{z^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma_3^2(x,y)}$ 。

則 (1) [條件常態模型]滿足相容性的充分必要條件為

$\exists\alpha_{n_1n_2n_3}\ni\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in S_k}\alpha_{n_1n_2n_3}x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}=g_k(x,y,z)$ ，$\forall k=1,2,3$ ，其中

$S_k=\{(n_1,n_2,n_3)\,|\,n_k\in\{1,2\};當i\neq k時,n_i\in\{0,1,2\}\}$ 。

(2) [條件常態模型]滿足相容性下，有 $f(x,y,z)\propto\exp(\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in S}\alpha_{n_1n_2n_3}x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3})$ ，

其中 $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ 。

【備註】

(1) $g_1(x,y,z)$ 為由 $X|Y,Z$ 的條件平均及條件變異數而得；$g_2(x,y,z)$ 為由 $Y|X,Z$ 的條件平均及條件變異數而得；$g_3(x,y,z)$ 為由 $Z|X,Y$ 的條件平均及條件變異數而得。

(2) 由推論 7 中(1)可知 $x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$ 項，$(n_1,n_2,n_3)\in\{1,2\}^3$，若出現必同時出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中，而且係數相同； $x^{n_1}y^{n_2}$ 項，$(n_1,n_2)\in\{1,2\}^2$ ，若出現必同時出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_2(x,y,z)$ 中，而且係數相同(亦即不會出現在 $g_3(x,y,z)$ 中)； $y^{n_2}z^{n_3}$ 項，$(n_2,n_3)\in\{1,2\}^2$ ，若出

現必同時出現在 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中，而且係數相同； $x^{n_1}z^{n_3}$ 項，

$(n_1,n_3)\in\{1,2\}^2$ ，若出現必同時出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中，而且係數相同；而 x^{n_1} 項， $n_1\in\{1,2\}$ 、 y^{n_2} 項， $n_2\in\{1,2\}$ 、 z^{n_3} 項， $n_3\in\{1,2\}$ ，若出現，則僅分別出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中。

由於上述推論 7 的檢驗方式較定理 6 來得容易判別，下方所提供的例子將以推論 7 的方式來作檢驗。

$\boxed{例 1}$：給定 $X\big|Y=y,Z=z\sim N(\frac{yz+2y+2z}{y^2z^2+y^2+z^2},\frac{1}{y^2z^2+y^2+z^2})$，

$$Y\big|X=x,Z=z\sim N(\frac{xz+2x+2z}{x^2z^2+x^2+z^2},\frac{1}{x^2z^2+x^2+z^2})，$$

$$Z\big|X=x,Y=y\sim N(\frac{xy+2x+2y}{x^2y^2+x^2+y^2},\frac{1}{x^2y^2+x^2+y^2})。$$

可得

$$g_1(x,y,z)=\frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}x-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)}=-\frac{1}{2}x^2y^2z^2-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2z^2+xyz+2xy+2xz$$

$$g_2(x,y,z)=\frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)}=-\frac{1}{2}x^2y^2z^2-\frac{1}{2}x^2y^2+xyz+2xy-\frac{1}{2}y^2z^2+2yz$$

$$g_3(x,y,z)=\frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}z-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)}=-\frac{1}{2}x^2y^2z^2-\frac{1}{2}x^2z^2+xyz+2xz-\frac{1}{2}y^2z^2+2yz$$

同時出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中的項，包含 $x^2y^2z^2$ 項以及 xyz 項，其中 $x^2y^2z^2$ 項的係數均為 $-\frac{1}{2}$ ， xyz 項的係數均為 1；

同時出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_2(x,y,z)$ ，但不出現在 $g_3(x,y,z)$ 中的項，包含 x^2y^2 項以及 xy 項，其中 x^2y^2 項的係數均為 $-\frac{1}{2}$ ， xy 項的係數均為 2；

同時出現在 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ ，但不出現在 $g_1(x,y,z)$ 中的項，包含 y^2z^2 項以及 yz 項，其中 y^2z^2 項的係數均為 $-\frac{1}{2}$ ， yz 項的係數均為 2；

同時出現在 $g_1(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ ，但不出現在 $g_2(x,y,z)$ 中的項，包含 x^2z^2 項以及 xz 項，其中 x^2z^2 項的係數均為 $-\frac{1}{2}$ 、 xz 項的係數均為 2；

滿足推論 7 中(1)的檢驗方式，所以，此三個條件分配滿足相容性。

另由推論 7 中(2)可知對應之聯合機率密度函數為

$f(x,y,z) \propto \exp(-\frac{1}{2}x^2y^2z^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2z^2 + xyz + 2xy + 2xz - \frac{1}{2}y^2z^2 + 2yz)$ 。■

$\boxed{\text{例 2}}$：給定 $X|Y=y,Z=z \sim N(\frac{yz+2y^2+2z^2}{y^2z^2+2yz+1}, \frac{1}{y^2z^2+2yz+1})$ ，

$$Y|X=x,Z=z \sim N(\frac{xz+2x^2+2z^2}{x^2z^2+2xz+1}, \frac{1}{x^2z^2+2xz+1}),$$

$$Z|X=x,Y=y \sim N(\frac{xy+2x^2+2y^2}{x^2y^2+2xy+1}, \frac{1}{x^2y^2+2xy+1})\text{。}$$

可得

$$g_1(x,y,z) = \frac{\mu_1(y,z)}{\sigma_1^2(y,z)}x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_1^2(y,z)} = -\frac{1}{2}x^2y^2z^2 - x^2yz - \frac{1}{2}x^2 + xyz + 2xy^2 + 2xz^2$$

$$g_2(x,y,z) = \frac{\mu_2(x,z)}{\sigma_2^2(x,z)}y - \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_2^2(x,z)} = -\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + 2x^2y - xy^2z + xyz - \frac{1}{2}y^2 + 2yz^2$$

$$g_3(x,y,z) = \frac{\mu_3(x,y)}{\sigma_3^2(x,y)}z - \frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_3^2(x,y)} = -\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + 2x^2z - xyz^2 + xyz + 2y^2z - \frac{1}{2}z^2$$

根據推論 7 中(1)的檢驗方式，x^2yz 項若出現應同時出現在 $g_1(x,y,z)$、$g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中，而且係數相同，但在此例中， x^2yz 項只出現在 $g_1(x,y,z)$ 中，而未出現在 $g_2(x,y,z)$ 、 $g_3(x,y,z)$ 中，所以，此三個條件分配不滿足相容性。■

以上兩個例子的相容性檢驗，顯示本節所提供的理論與驗證方法不只簡單也很直接。接著，透過觀察定理 6，可得三個條件常態分配與其所對應的聯合機率

密度函數彼此間的關係，當所知道的訊息不為條件分配時，而是聯合機密度函數時，亦可推出其條件常態分配，如下述定理 8。

【定理 8】

在三維的空間中，若有一聯合機率密度函數

$f(x,y,z) \propto \exp(\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\{0,1,2\}^3} \alpha_{n_1n_2n_3} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3})$，且其條件分配滿足[條件常態模型]，

則 $\mu_1(y,z) = [\frac{\partial}{\partial x}\ln(f(x,y,z))\Big|_{x=0}]\times\sigma_1^2(y,z)$，$\sigma_1^2(y,z) = [-\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\ln(f(x,y,z))]^{-1}$；

$\mu_2(x,z) = [\frac{\partial}{\partial y}\ln(f(x,y,z))\Big|_{y=0}]\times\sigma_2^2(x,z)$，$\sigma_2^2(x,z) = [-\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\ln(f(x,y,z))]^{-1}$；

$\mu_3(x,y) = [\frac{\partial}{\partial z}\ln(f(x,y,z))\Big|_{z=0}]\times\sigma_3^2(x,y)$，$\sigma_3^2(x,y) = [-\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\ln(f(x,y,z))]^{-1}$。

3.2 滿足相容性且聯合分配亦為常態分配之充要條件

在開始探討本節主題前，依據 Yates and Goodman (2005)，我們先提供三維常態分配聯合機率密度函數的型式，並表成如下之引理 9。

【引理 9】

當 $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim N_3(\mu,\Sigma)$，$\mu = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x{}^2 & \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y & \rho_{xz}\sigma_x\sigma_z \\ \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y & \sigma_y{}^2 & \rho_{yz}\sigma_y\sigma_z \\ \rho_{xz}\sigma_x\sigma_z & \rho_{yz}\sigma_y\sigma_z & \sigma_z{}^2 \end{bmatrix}$，

則 $f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}[\det(\Sigma)]^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp[-\frac{1}{2}(\underline{\mathrm{X}}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{\mathrm{X}}-\underline{\mu})]$。

其中 $-\frac{1}{2}(\underline{\mathrm{X}}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{\mathrm{X}}-\underline{\mu}) = -\frac{1}{2}[C_{11}(x-\mu_x)^2 + C_{22}(y-\mu_y)^2 + C_{33}(z-\mu_z)^2$

$+2C_{12}(x-\mu_x)(y-\mu_y) + 2C_{13}(x-\mu_x)(z-\mu_z) + 2C_{23}(y-\mu_y)(z-\mu_z)]$

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{1+2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}-\rho_{xy}{}^{2}-\rho_{xz}{}^{2}-\rho_{yz}{}^{2}}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{1-\rho_{yz}{}^{2}}{\sigma_x{}^{2}} & \dfrac{\rho_{xz}\rho_{yz}-\rho_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} & \dfrac{\rho_{xy}\rho_{yz}-\rho_{xz}}{\sigma_x\sigma_z}\\ \dfrac{\rho_{xz}\rho_{yz}-\rho_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} & \dfrac{1-\rho_{xz}{}^{2}}{\sigma_y{}^{2}} & \dfrac{\rho_{xy}\rho_{xz}-\rho_{yz}}{\sigma_y\sigma_z}\\ \dfrac{\rho_{xy}\rho_{yz}-\rho_{xz}}{\sigma_x\sigma_z} & \dfrac{\rho_{xy}\rho_{xz}-\rho_{yz}}{\sigma_y\sigma_z} & \dfrac{1-\rho_{xy}{}^{2}}{\sigma_z{}^{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$$

接著，將探討當[條件常態模型]滿足相容性，其所對應的聯合分配亦為常態分配的充要條件，並將其結果整理成定理 10。

【定理 10】

當[條件常態模型]滿足相容性，則其聯合分配為常態分配的充分必要條件為：

$\mu_1(y,z)=(\alpha_{110}y+\alpha_{101}z+\alpha_{100})\times\sigma_1^2(y,z)$ ，$\sigma_1^2(y,z)=(-2\alpha_{200})^{-1}>0$

$\mu_2(x,z)=(\alpha_{110}x+\alpha_{011}z+\alpha_{010})\times\sigma_2^2(x,z)$ ，$\sigma_2^2(x,z)=(-2\alpha_{020})^{-1}>0$

$\mu_3(x,y)=(\alpha_{101}x+\alpha_{011}y+\alpha_{001})\times\sigma_3^2(x,y)$ ，$\sigma_3^2(x,y)=(-2\alpha_{002})^{-1}>0$

且 $\alpha_{110}{}^{2}<4\alpha_{200}\alpha_{020}$ ，$\alpha_{101}{}^{2}<4\alpha_{200}\alpha_{002}$ 為滿足聯合分配可積的條件。

【證明】

$(\Rightarrow)$ 由定理 6 可知滿足相容性，則

$$\begin{aligned}f(x,y,z)\propto\exp(&\alpha_{222}x^2y^2z^2+\alpha_{221}x^2y^2z+\alpha_{220}x^2y^2+\alpha_{212}x^2yz^2+\alpha_{211}x^2yz+\alpha_{210}x^2y\\&+\alpha_{202}x^2z^2+\alpha_{201}x^2z+\alpha_{200}x^2+\alpha_{122}xy^2z^2+\alpha_{121}xy^2z+\alpha_{120}xy^2\\&+\alpha_{112}xyz^2+\alpha_{111}xyz+\alpha_{110}xy+\alpha_{102}xz^2+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x\\&+\alpha_{022}y^2z^2+\alpha_{021}y^2z+\alpha_{020}y^2+\alpha_{012}yz^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z)\end{aligned}$$

又因 $f(x,y,z)$ 為常態分配，則由引理 9 可知

$\alpha_{222}=\alpha_{221}=\alpha_{220}=\alpha_{212}=\alpha_{211}=\alpha_{210}=\alpha_{202}=\alpha_{201}=\alpha_{122}=\alpha_{121}=\alpha_{120}=\alpha_{112}=\alpha_{111}$

$=\alpha_{102}=\alpha_{022}=\alpha_{021}=\alpha_{012}=0$ 。

可將定理 6 滿足相容性之充要條件簡化為下

$$\begin{aligned}\mu_1(y,z)&=(0,0,0,0,0,\alpha_{110},0,\alpha_{101},\alpha_{100})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\times\sigma_1^2(y,z)\\&=(\alpha_{110}y+\alpha_{101}z+\alpha_{100})\times\sigma_1^2(y,z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2(x,z)&=(0,0,0,0,0,\alpha_{110},0,\alpha_{011},\alpha_{010})*[(x^2,x,1)\otimes(z^2,z,1)]\times\sigma_2^2(x,z)\\&=(\alpha_{110}x+\alpha_{011}z+\alpha_{010})\times\sigma_2^2(x,z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3(x,y)&=(0,0,0,0,0,\alpha_{101},0,\alpha_{011},\alpha_{001})*[(x^2,x,1)\otimes(y^2,y,1)]\times\sigma_3^2(x,y)\\&=(\alpha_{101}x+\alpha_{011}y+\alpha_{001})\times\sigma_3^2(x,y)\end{aligned}$$

$$\sigma_1^2(y,z)=\{-2\times(0,0,0,0,0,0,0,0,\alpha_{200})*[(y^2,y,1)\otimes(z^2,z,1)]\}^{-1}=(-2\alpha_{200})^{-1}>0$$

$$\sigma_2^2(x,z)=\{-2\times(0,0,0,0,0,0,0,0,\alpha_{020})*[(x^2,x,1)\otimes(z^2,z,1)]\}^{-1}=(-2\alpha_{020})^{-1}>0$$

$$\sigma_3^2(x,y)=\{-2\times(0,0,0,0,0,0,0,0,\alpha_{002})*[(x^2,x,1)\otimes(y^2,y,1)]\}^{-1}=(-2\alpha_{002})^{-1}>0$$

而 $f(x,y,z)$ 可積的條件等價於推論 3 中的條件(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U_1(y,z)f_2(z)dydz<\infty$$

又 $U_1(y,z)f_2(z)$

$$=(-2\alpha_{200})^{-\frac{1}{2}}\times\exp[-\frac{(\alpha_{110}y+\alpha_{101}z+\alpha_{100})^2}{4\alpha_{200}}+\alpha_{020}y^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z]$$

$$\Rightarrow-\frac{\alpha_{110}{}^2}{4\alpha_{200}}+\alpha_{020}<0，-\frac{\alpha_{101}{}^2}{4\alpha_{200}}+\alpha_{002}<0\ \Rightarrow\alpha_{110}{}^2<4\alpha_{200}\alpha_{020}，\alpha_{101}{}^2<4\alpha_{200}\alpha_{002}$$

得證。

($\Leftarrow$) 因為 $f(x,y,z)\propto f_{X|Y,Z}(x|y,z)\cdot U_1(y,z)f_2(z)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\alpha_{200}x^2+\alpha_{110}xy+\alpha_{101}xz+\alpha_{100}x+\alpha_{020}y^2+\alpha_{011}yz+\alpha_{010}y+\alpha_{002}z^2+\alpha_{001}z)$$

滿足三維常態分配，則得證。■

4. 結論

本文主要在探討連續隨機變數之條件分配滿足相容性的充要條件，相關的研究結果，整理成以下三點：

(1) 推導出給定三個一般性的三維條件分配，檢驗此三個條件分配滿足相容性的充要條件；及給定 n 個一般性的 n 維條件分配，檢驗此 n 個條件分配滿足相容性的充要條件。

(2) 在給定三個三維條件分配皆為常態分配時，提供直接利用條件平均以及條件變異數的關係，檢驗滿足相容性的充要條件之理論與簡易方法。

(3) 在給定三個三維條件常態分配滿足相容性下，假設這三個條件分配來自常態聯合分配，則前述條件平均與條件變異數的關係可進一步簡化，並推出此假設成立時的充要條件。

最後，未來的研究方向，可考慮將目前三維條件常態模型擴充到高維條件常態模型。

參考文獻

[1] Arnold, B. C. and Press, S. J.(1989) Compatible conditional distributions. *J.Amer. Statist. Assoc.*, 84, 152-156.

[2] Yates, R. D. and Goodman, D. J.(2005) *Probability and Stochastic Processes* (2nd ed), John Wiley ＆ Sons.

[3] 蕭惠玲撰(2010)，**二維聯合分配下條件常態分配相容性之探討**，國立政治大學應用數學系數學教學碩士在職專班碩士論文。