國立政治大學經濟研究所碩士論文

指導教授：陳松男　博士

徐士勛　博士

五年期雙區間鎖定可贖回債券評價與分析

Analytical Valuation of 5 years USD callable dual range lock down steepner note

研究生：洪鉦傑　撰

中華民國 99 年 6 月

謝 詞

時光荏苒，兩年披星戴月的日子，即將隨著碩士論文的完成步入了尾聲。回想起當初考上政大的情景，彷彿如在昨日。踏出了校園，也意味著將面臨更多的挑戰，期望自己能夠更上層樓，為自己的未來打拚。

能夠順利完成學位，首先要感謝陳松男老師，從經濟系出身的我，對於財務工程算是標準的門外漢，經過陳老師三個學期以來課堂上的教授，以及在論文寫作期間的指導，得以了解財務工程的內涵，並因此將理論與實務結合，進而有此論文的誕生。也感謝徐士勛老師的不斷鼓勵，看著老師比我還擔心論文進度，也激勵我要更加努力；徐老師一直對於格式的叮嚀，才不致讓我犯下基本的錯誤。此外，也感謝風管系的謝明華老師，謝老師在課堂上教授的內容，也奠定了我對財務工程的認知，以及了解蒙地卡羅法在財務上的應用。

在政大經濟兩年的日子，國銘就像我們的大家長，我們都在他的照顧下茁壯；靖翰兩年的班代歲月，總是在班上事務上盡心盡力，認真負責的態度一直是我的榜樣；小蛇安的風趣，在課堂之餘總是帶給大家歡樂；晏伶和宇峻宛如天籟的歌聲，總是叫人回味；老簡的聰明頭腦，課堂上的問題多虧他才得以迎刃而解；有鴻儒的熱心，介紹了通識助理給我；有佩瑩與瑋庭兩位於北棟12F的時時陪伴，才使得在寫作期間不致於孤單；同門師兄弟健維在論文上的討論，也讓論文的進度得以加快，不至於處處碰壁；而孟溢與冠C是我在閒暇之餘，一起重訓健身的好夥伴；最後很感謝宏銘學長在程式上的指導，沒有學長的耐心，此論文也難以產生。

此外很感謝我的家人，在求學的路上皆不斷給予資源，未曾對我放棄過；有你們的栽培，才會有今天的我。最後感謝姿綸兩年來的包容，考上研究所後雖然相隔遙遠，是妳的包容讓我能安心在政大求學，感謝妳讓我的人生豐富完美。

洪鉦傑 謹致于

國立政治大學 經濟學系

民國九十九年六月

摘 要

本文採用 Lognormal Forward LIBOR Model (LFM) 利率模型，針對可贖回利差型結構債券進行相關的評價與避險分析。所選取的評價商品為勞埃德 TSB 銀行所發行的「五年期雙區間鎖定可贖回債券」，模型參數部分利用市場上既有的資料來進行校準，使模型表現其能更貼近市場利率的走勢，評價過程採用蒙地卡羅模擬來得到未來的現金流量，並搭配 Longstaff and Schwartz(2001)所提出的最小平方蒙地卡羅來處理同時具有可贖回與路徑相依的特性。

最後的評價結果可以發現，考慮發行商的贖回權下，一元美元本金的商品價值只有 0.81241 美元，不考慮贖回權下價值為 1.1195 美元，可見發行商的贖回權非常不利於投資人。而模擬結果也顯示發行商將在前幾期即進行贖回，並不會讓投資人持有到到期日。因此投資人面對眾多的金融商品時，要以符合個人需求下去做出選擇。

關鍵字：LIBOR 市場模型、最小平方蒙地卡羅、可贖回、結構型商品、
LFM、LSM、Callable

Abstract

This article presents an analytical valuation of “5 Years USD Callable Dual Range Lock Down Steepner Note”, a callable spread note, issued by Lloyds TSB bank under the Lognormal Forward LIBOR (LFM). Parameters of the model are calibrated by using existing data, making sure of the model performance to fit market interest rates well. The main method to get the future cash flows is the use of Monte Carlo simulations, and adapting the least squares Monte Carlo simulations proposed by Longstaff and Schwartz (2001) to deal with features of callable and path- dependence.

Consider the call right of the issuer, the results present that the price per 1 dollar principal is only 0.93154 dollar and 1.15109 dollar without the call right. In summary, the call right of issuer deeply damage investors’ returns. The simulated result also show that issuer will redeem the product in early quarters so that investors loss much future interest. Therefore, investors must make a choice to fit his own needs when facing many financial products.

國立政治大學 National Chengchi University

Key words: BGM, LIBOR market model, LFM、LSM、Callable

目 錄

第一章　緒論.....1

第一節 研究動機與目的.....1

第二節 研究架構.....3

第二章 文獻回顧.....5

第一節　均衡模型(EQUILIBRIUM MODEL).....5

第二節 無套利模型(ARBITRAGE-FREE MODEL).....8

第三章 研究方法.....12

第一節 LFM 模型架構.....12

第二節 不同機率測度下的遠期利率動態過程.....16

第三節 遠期利率波動度期間結構.....18

第四節 遠期利率的相關係數矩陣.....21

第五節 蒙地卡羅模擬.....22

第四章 五年期雙區間鎖定可贖回債券.....26

第一節 商品介紹.....26

第二節 建立殖利率曲線與校準參數.....30

第三節 產品評價.....39

第四節 避險參數分析.....43

第五節 發行商與投資人策略及風險分析.....44

第六節 本章小結.....45

第五章 結論與建議.....47

參考文獻.....48

表目錄

表 4-1. 利差上漲付息狀況 29

表 4-2 各季到期的 US INTERBANK OFFERED RATE (%) 30

表 4-3 各年度的 US IR SWAP – MIDDLE RATE (%) 30

表 4-4 每季殖利率估計值 32

表 4-5 遠期利率估計值 34

表 4-6 各年度到期的 USD CAP (6M) IMPLIED VOL 35

表 4-7 LFM 模擬之遠期利率(每日模擬) 40

國立政治大學 National Chengchi University

圖目錄

圖 1.1 全球店頭市場(OTC)衍生性商品名目交易金額 2

圖 1.2 研究架構流程圖 4

圖 4-1. USD 3M LIBOR 歷史走勢圖 28

圖 4-2. USD 30Y CMS 與 10Y CMS 歷史走勢圖 28

圖 4-3 殖利率曲線圖 33

圖 4-4 各年期 CAPLET 波動度曲線 36

圖 4-5 各年期之Φ變化 37

圖 4-6 各時點瞬間波動度期間結構 38

圖 4-7 校準後之遠期利率相關係數矩陣 39

圖 4-8 債券收益與發行機構收益關係(以 100 美元本金而言) 42

圖 4-9 各季發行商進行贖回的機率 42

第一章　緒論

第一節 研究動機與目的

自 2007 年下半年起，美國的次級房貸導致了全球性的金融風報，造成近年來的利率持續走跌，使得政府公債或者定存帶給投資人的回報減少許多。而結構型金融商品不僅可提供投資者保本(Principle Protected)的部分，亦能透過選擇權部分，使得投資報酬能隨著連結標走勢獲得比定存更多的回報。

金融風暴也造成了各界對金融衍生性商品的不信任與撻伐，但卻也因此忽略了衍生性商品在風險管理上的重要角色。隨著中國大陸逐漸開放，在衍生性商品的管制上勢必也會逐漸放鬆；且由此次的金融風暴也可以發現，國家與國家之間的相關程度愈來愈高，衍生性商品於避險需求上也將更廣泛應用，這都是財務工程未來還能夠持續發展的重要原因。

從圖 1.1 中，可看出雖然經歷金融風暴之後金融衍生性商品的交易量大量減少，但是近年來交易量仍又逐漸爬升，代表著不管在投資還是避險上，金融衍生性商品仍是首要的選擇，而其中利率相關的契約就占了總交易量的七成，因此本文欲利用嚴謹的理論模型來評價與分析利率相關的結構型商品，以期能使台灣財務工程的發展更上一層，並使投資大眾能更進一步的認識。

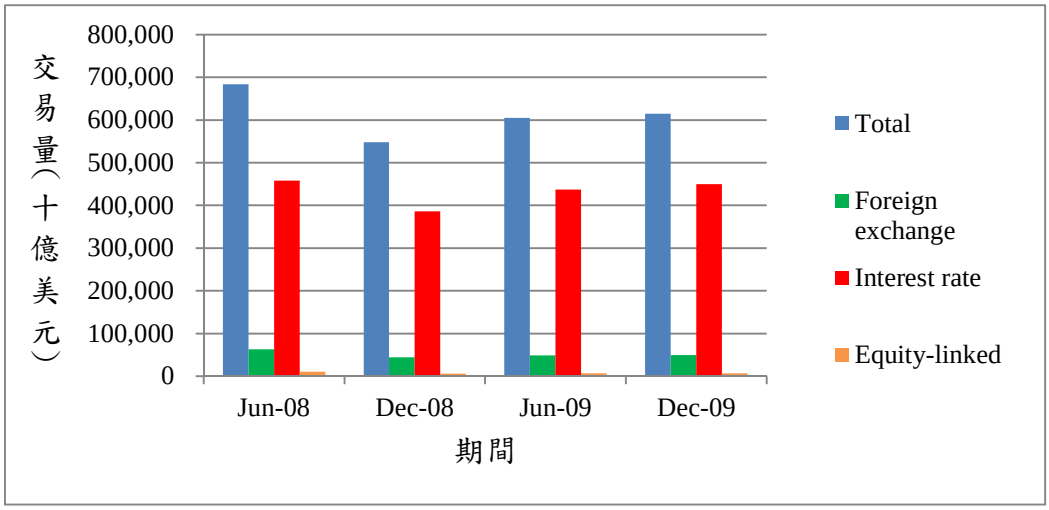

圖 1.1 全球店頭市場(OTC)衍生性商品名目交易金額

資料來源：國際清算銀行(BIS)

本文所要評價的利率結構型商品為勞埃德 TSB 銀行所發行，由於此商品之付息型態為一障礙選擇權(Barrier Option)形式，相較於一般選擇權(Plain Vanilla Option)複雜，且在台灣地區所發行的利率結構型商品中較為少見；且產品說明書為由英文撰寫，以上皆將使得一般投資大眾難以深入了解此商品，如貿然進行投資將使自身陷入虧損之中，故本文將從投資大眾的角度出發，將完整的評價過程可能帶來的風險及報酬作深入剖析。

此外，此商品的發行機構具有可提前贖回(Callable)權利的特性，此部分則將以發行者的角度進行分析，可提供於實務上的相關人士做一參考，藉以提高台灣財務工程發展的水平。

第二節 研究架構

本文共分五章：第一章為緒論，提出本文的研究動機、目的與研究架構。第二章為文獻回顧，介紹文獻上常見的利率模型的不同。第三章為研究方法，詳細說明本文所採用的 LFM 模型(BGM 模型)、參數校準方法及數值模擬方法。第四章為商品分析，以本文所選定的利率結構型商品做一完整的評價與分析。第五章為結論，針對本文之個案金融商品做總結，並提出未來研究方向。圖 1.2 為本文研究架構流程圖。

國立政治大學 National Chengchi University

圖 1.2 研究架構流程圖

第二章 文獻回顧

因為利率結構型商品相較以往的股價連結商品複雜，利率動態過程也不像股價動態過程單純為幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion)，例如需要考慮到均數回歸(Mean Reversion)特性。一般而言，一個好的利率模型需要具備以下兩個特點[1]：

1. 可以準確地描述(或校準，Calibration)目前的利率期間結構(Current Term of Interest Rate)。
2. 可以準確描述不同到期日的利率波動利率期間結構(Term Stucture of Volatility)與其相關係數結構(Correlation Structure)。

如此才能準確評價相關的利率結構型商品並在利率風險控管上發展出規利利率風險的有效方法與策略。因此利率模型的挑選，必須將以上特點加以考慮。利率模型可以分為均衡模型(Equilibrium Model)和無套利模型(Arbitrage-Free Model)，以下將介紹常見的利率模型。

第一節 均衡模型(Equilibrium Model)

均衡模型為由經濟學裡一般均衡的觀點出發，找出經濟體中會影響利率的因子，進而推導出當一經濟體系處於均衡時的利率期間結構為何。當模型是正確時，則由模型導出的債券價格當與目前市場上的價格相同。雖然均衡模型在假設上富含經濟意涵，但是由於模型參數校準上困難，因此造成模型得到的債券價格與市場上不符合，因而目前實務上已較少為使用此類模型。文獻上常見之模型介紹如下：

[1] 參見陳松男(2006)。

一、Vasicek 模型(1977)

Vasicek 為一單因子模型[2]，短期利率 r 具有均數回歸特性，且在風險中立的假設下，短期利率服從 Ornstein-Uhlenbeck 過程(O-U process)，短期利率 r 的動態過程如下：

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \sigma dZ_t \qquad (2\text{-}1)$$

其中，α 為利率均數回歸的速度，

γ 為短期利率的長期平均水準，

σ 為短期利率的波動度，

Z 為風險中立測度(Risk-Neutral)下的布朗運動，

其中$\alpha(\gamma - r_t)$表達了短期利率在長期下將會被拉回到一個長期水準 γ 的特性，α 愈大的話，利率回歸的速度也愈快。

而 Vasicek 模型因為假設短期利率r_t為常態分配，使得r_t小於零的機率為正，因此就實務上而言，將為一個重大的缺失。

二、CIR 模型(Cox–Ingersoll–Ross,1985)

CIR 認為未來的事件，風險偏好，消費偏好，投資策略的選擇等等都會影響未來的利率走勢。此模型採用一般均衡理論的資產評價模型推導出內升的利率期間結構進而決定零息債券(Zero Coupon Bond，ZCB)價格。CIR 假設短期利率r_t的動態過程如下：

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dZ_t \qquad (2\text{-}2)$$

以上各符號說明如同 Vasicek 模型。因為 CIR 假設波動度為短期利平方根的比率，而不是同 Vasicek 模型具有高斯特性，如此將可避免出現負利率的問題。

[2] 單因子模型是指短期利率的隨機過程僅受到一個隨機干擾項所影響(即只有一項布朗運動推動所有的短期利率的變動)。

因為如果r_t趨近於零時，$\sigma\sqrt{r_t}$將變得非常小；此時飄移項$\alpha(\gamma - r_t)$將主導了整個利率的變動，而其均數回歸的特性可將利率拉向γ。我們也可證明當$2\alpha\gamma \geqq \sigma^2$時，往上飄移的力道將足夠避$r_t = 0$[3]。

因 CIR 模型利率變動呈現非中央型的卡方分配(Non-Central Chi-Square)，在計算及參數校準上步驟繁雜，且經常與現在的利率期間結構無法吻合，實務應用受到極大限制，如今實務界已幾乎不採用此利率模型。

三、一般化單因子短期利率模型(Generalized One-Factor Short Rate Models)

除了 Vasicek 模型與 CIR 模型外，文獻上仍有其他單因子短期利率模型，而一般化單因子短期利率模型設定短期利率r_t的動態過程一般型式如下：

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^{\delta} dZ_t \qquad (2\text{-}3)$$

其中 α,β,δ 與 σ 皆為常數。例如 Vasicek 與 CIR 即分別假設$\delta = 0$和$\delta = 1/2$。而文獻上其他單因子短期利率模型列舉如下：

Dothan model(1978) $dr_t = \sigma r_t dZ_t$

Brennan − Schwartz model(1980) $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dZ_t$

Cox − Ingersoll − Ross variable rate model(1980) $dr_t = \sigma r_t^{3/2} dZ_t$

Constant elasticity of variance model $dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t^{\delta} dZ_t$

以上各式的設定也符合實務上所觀察到的現象，當利率水準愈低，其波動度亦隨著降低；利率水準愈高，其波動度亦隨著升高。此效果稱為水準效應(Level Effect)。

[3] 詳見 Cairns, A.J.G. (2004)。

第二節 無套利模型(Arbitrage-Free Model)

無套利模型採用現在的利率期間結構做基礎來推導出利率模型。其認為一個利率模型應該把現在利率期間結構當作投入變數，而不是產出變數。且由理論所推導出的債券價格如與市場上觀察到的債券價格不同的話，將出現套利空間。為解決此問題，陸續出現考慮放寬參數與時間相關(Time Dependent)和根據市場利率期間結構來進行校準的利率模型。因套利模型對於現在的期間結構提供良好的配適(Fitting)，而受到實務界的喜愛。文獻上常見的無套利利率模型說明如下：

一、HL 模型(Ho–Lee,1986)

HL 模型為文獻上最早對期間結構進行配適的利率模型。為不具均數回歸的 Vasicek 模型的二元樹形式。連續時間下短期利率r_t的極限形式如下：

$$dr_t = \phi(t)dt + \sigma dZ_t \tag{2-4}$$

其中$\phi(t)$為時間函數的飄移項，用來確保能夠配適期初的期間結構。

HL 模型雖將模型漂移項設定更自由，但因假設固定的波動率使其僅能在穩定的波動度結構下分析，且不具有均數回歸特性也是其缺失之一。

二、HW 模型(Hull-White,1990)

Hull-White 修正了 Ho–Lee 模型，加以考慮了均數回歸特性與非常數之波動度。對於上限利率買權(Caps)，下限利率賣權(Floors)及交換選擇權(Swaption)的評價也能與市場價格一致。Hull-White 假設短期利率模型動態如下：

$$dr_t = [\phi(t) - \alpha(t)r_t]dt + \sigma(t)r_t^{\beta}dZ_t \tag{2-5}$$

其中長期的利率水準為$\phi(t)/\alpha(t)$。且模型中各參數也都設定為時間的函數，來提高參數的自由度，以便吻合現在的期間結構。然而，也由於模型自由度提高，

相對地提高了參數校準的難度。 對於複雜的波動度期間結構，例如駝峰狀(Humped Shape)的遠期利率波動度結構，單因子模型則無法達到滿意的實證結果。因此，Hull-White(1994b)進一步提出雙因子模型來處理複雜的期間結構問題。

三、BDT 模型(Black – Derman – Toy,1990)

BDT 模型假設短期利率r_t服從對數常態分配，使得短期利率永遠不為負。如同 Ho–Lee 模型，BDT 模型的原始型亦為二元樹型態。在連續時間下，短期利率動態過程的對等形式為：

$$d\ln r_t = [\theta(t) - \frac{\sigma_r'(t)}{\sigma_r(t)}\ln r_t]dt + \sigma_r(t)dZ_t \qquad (2\text{-}6)$$

其中$\theta(t)$與$\sigma_r(t)$被用來確保配適現在的利率期間結構。當波動度函數$\sigma_r(t)$為常數時，BDT 模型退化為 Ho–Lee 模型的對數型態。

四、HJM 模型(Heath – Jarrow – Morton,1992)

為取得關於利率期間結構的訊息，我們可以透過債券價格$B(t,T)$，殖利率曲線$R(t,T)$或者瞬間遠期利率$F(t,T)$。而 HJM 模型即是利用瞬間遠期利率$F(t,T)$來建構一個連續的隨機過程來描述利率期間結構。在多因子型式下的HJM模型，$F(t,T)$取決於下式：

$$F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \alpha_F(u,T)du + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_F^i(u,T)dZ_i(u) \qquad (2\text{-}7)$$

以微分型式表達瞬間遠期利率$F(t,T)$的動態過程如下：

$$dF(t,T) = \alpha_F(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_F^i(t,T)dZ_i(t), \quad 0 \le t \le T \qquad (2\text{-}8)$$

其中

$F(0,T)$為遠期利率曲線的初始值，可由市場上直接觀察，

$\alpha_F(u,T)$為瞬間遠期利率的飄移項，

$\sigma_F^i(t,T)$為瞬間遠期利率第 i 個波動度函數，

Z_i為自然機率測度 P(Natural or True Probability Measure)下第 i 個布 朗運動，共有 n 個相依布朗運動共同決定瞬間遠期利率的隨機過程，

接著利用零息債券價格的動態過程：$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sum_{i=1}^{n} \sigma_P^i(t,T)dZ_i(t)$ ，

則可以推導出在風險中立測度 Q 下的瞬間遠期利率的動態過程為[4]：

$$dF(t,T) = \alpha_F^*(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_F^i(t,T)dZ_i^Q(t), \quad 0 \le t \le T \tag{2-9}$$

其中

$\alpha_F^*(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_F^i(t,T) \int_t^T \sigma_F^i(t,u)du$ ，

Z_i^Q為風險中立機率測度 Q 下第 i 個布朗運動。

由於 HJM 模型其漂移項與波動度皆設定為時間的函數，且為多因子模型，因此可以適當配適利率期間結構外，也更符合市場的波動度結構，使得在商品評價與避險上更趨完備，在此架構下，早期的短期利率模型皆為 HJM 模型的特例。但因 HJM 模型的飄移項與波動度有關，可能造成瞬間遠期利率有爆炸的問題。此外，瞬間遠期利率不是馬可夫過程(Non-Markovian Process)，其二元樹型態也不是馬可夫過程，以致在評價利率商品時，計算複雜；且過多的參數，校準上也是耗時的工作。

[4] 詳細過程見 Back, K (2005)。

五、市場模型(Market Model)

有鑑於在 HJM 模型中對於利率連續的假設的不合理，學者相繼發展出市場模型。此模型最大的特點就是開始對間斷的利率行為作描述，描述對象通常都是市場上可以觀察到的指標利率，常見的有倫敦銀行間拆放利率(LIBOR Rate)或者交換利率(Swap Rate)。

其中較完備的為 BGM(Brace、Gatarek、Musiela(1997))模型，使用的 LIBOR 為期間連續而非瞬間連續，為以簡單的單利型式在市場上交易。BGM 主要的內涵就在於將每個遠期利率都視為一個包含兩個零息債券的投資組合，意即設定遠期利率為可交易的商品（Traded Asset），加以證明每一個接連的遠期利率(3M 或者 6M)在個別單一的機率測度下是對數常態分配，而該遠其機率測度是由到期日與遠期利率到期日相同的零息債券做為計價單位(Numeraire)所引導出的機率測度。也因遠期利率為對數常態分配，故又稱為對數常態遠期 LIBOR 模型(Lognormal Forward-LIBOR Model，簡稱 LFM)。因此也提供了實務界運用 Black(1976)期貨選擇權的評價公式來評價利率上、下限選擇權嚴謹的理論架構。

另一常見的市場模型為 Jamshiedian(1997)發展出的對數常態遠期交換利率模型(Lognormal Forward-Swap Model，簡稱 LSM)，假設間斷的遠期交換利率，在遠期交換測度(Forward Swap Measure)下服從對數常態分配，以此評價利率交換選擇權。但是 LFM 與 LSM 雖在理論上出現不一致，但是實務上卻是一致的。本論文選擇採用 LFM 模型評價利率衍生性商品，其完整評價方法會在第三章有更詳細的說明。

第三章 研究方法

在第二章中我們已說明市場模型的優點，例如在市場模型的設定下，對 Black-76 模型實務上的使用提供嚴謹的的理論基礎，因此可直接將市場上利率的波動度的報價套入公式中。故本文將利用對數常態遠期利率模型(LFM)作為主要的評價工具；而 LFM 模型為採用了多因子來描述遠期利率的特性進而一般化利率期間結構，採用樹分析(例如二元樹，三元樹)將會造成節點無法重合，本文將利用蒙地卡羅法進行模擬。本章安排第一節為 LFM 模型介紹，第二節為推導出在不同機率測度下的遠期利率動態過程，第三節為波動度結構校準，第四節為相關係數較準，第五節為蒙地卡羅模擬介紹。

第一節 LFM 模型架構

一、LFM 的基本架構

首先定義各符號在模型中的意義。令$\mathrm{t}=0$為當下時間點，存在一時間集合$\mathcal{E}=\{\mathrm{T}_0,\ldots,\mathrm{T}_\mathrm{N}\}$，其可切割為每個遠期利率所包含的一段時間間距$(\mathrm{T}_{\mathrm{i}-1},\mathrm{T}_\mathrm{i})$直到到期日，與此對應的時間長度集合為$\{\delta_0,\ldots,\delta_\mathrm{N}\}$，也就是$\delta_\mathrm{i}=(\mathrm{T}_\mathrm{i}-\mathrm{T}_{\mathrm{i}-1})$，$\mathrm{i}>0$，且令$\mathrm{T}_{-1}=\mathrm{t}=0$。其中$\mathrm{T}_\mathrm{i}$皆以年為單位。遠期利率$F_k(t)=F(t;T_{k-1},T_k)$，$\mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{N}$表示，意即在 t 時點觀察到，於$T_{k-1}$生效並於$T_k$時點到期的遠期利率。在$T_{k-1}$時點時，$F_k(t)$與簡單複利即期利率(Simple Compounded Spot Rate) $L(T_{k-1},T_k)$相符合。

存在一機率測度$Q^k=(Q^{T_k})$為以到期日與遠期利率到期日相同之零息債券$P(\cdot,T_k)$當計價單位之機率測度。Q^k稱為在到期日T_k下的遠期測度(Forward

Measure)。在簡單複利下遠期利率的定義為：

$$F_k(t)P(t,T_k)=[P(t,T_{k-1})-P(t,T_k)]/\tau_k \tag{3-1}$$

上式的經濟意涵可解釋為：$F_k(t)P(t,T_k)$ 為一個可交易資產的價格(藉由買賣同等單位 $(1/\tau_k)$ 的 $P(t,T_{k-1})$ 及 $P(t,T_k)$。當其以 $P(t,T_k)$ 作為計價單位時，根據無套利理論，任一市場資產，f，以 $P(t,T_k)$ 為計價單位在 Q^k 測度下為一平賭過程：

$$\frac{f(t)}{P(t,T_k)}=E^{Q^k}\left[\frac{f(t)}{P(T,T_k)}\right] \tag{3-2}$$

因此在 Q^k 測度下，$\left[\frac{F_k(t)P(t,T_k)}{P(t,T_k)}\right]=F_k(t)$ 為一平賭過程。所以在 Q^k 測度下 $F_k(t)$ 的動態過程將不具飄移項(Driftless)，過程可表達為：

$$dF_k(t)=\underline{\sigma}_k(t)F_k(t)dZ^k(t)，t\le T_{k-1} \tag{3-3}$$

其中，$Z^k(t)$ 表示 Q^k 測度下 N 維的標準布朗運動，是一個 $N\times 1$ 的垂直向量，元素間的關係可由瞬間共變異矩陣 $\rho=(\rho_{i,j}),i,j=1,...,N$ 來表示，

$$dZ^k(t)dZ^k(t)'=\rho dt \tag{3-4}$$

另 $\underline{\sigma}_k(t)$ 為一 $1\times N$ 的水平向量，用以表示遠期利率 $F_k(t)$ 的波動係數。其除了第k個元素為 $\sigma_k(t)$ 外，其餘皆為 0，即

$$\underline{\sigma}_k(t)=[0\ 0\ ...\sigma_k(t)...\ 0\ 0]$$

所以(3-2)式可以更清楚表示如下

$$dF_k(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots \sigma_k(t) \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot F_k(t) \cdot \begin{bmatrix} dZ_1^k(t) \\ \vdots \\ dZ_k^k(t) \\ \vdots \\ dZ_N^k(t) \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

或以純量關係來表達成

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dZ_k^k(t)\ ,\ t \le T_{k-1} \tag{3-6}$$

其中，$Z_k^k(t)$的上標代表其為在Q^k測度下的布朗運動；下標則表示在$\mathrm{N} \times 1$的垂直向量中第 k 個元素，$\sigma_k(t)$則表示遠期利率$F_k(t)$在時點t的瞬間波動度。

接著，利用 Ito's lemma，我們可以得到

$$d \ln F_k(t) = -\frac{\sigma_k(t)^2}{2} dt + \int_0^T \sigma_k(t) dZ_k^k(t)\ ,\ t \le T_{k-1} \tag{3-7}$$

在(3-6)具有唯一強力解(Unique Strong Solution)的情況下，其唯一解為：

$$\ln F_k(t) = \ln F_k(0) - \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_k(t)^2 dt + \int_0^T \sigma_k(t) dZ_k^k(t) \tag{3-8}$$

二、利率買權與交換契約的評價

在此我們將說明本文會用到的兩個金融市場工具，分別為利率買權和利率交換。Cap 為一可讓投資人規避利率上升所面臨的風險的金融工具，可視為一連串的利率上限買權(Caplet)的投資組合。而 Caplet 評價公式如下：

$$\begin{aligned} Caplet(t; T_{k-1}, T_k, K) &= P(t, T_k) \delta_k Black(t, F_k(t), \gamma_k, K) \\ &= P(t, T_k) \delta_k (F_k(t) N(d_1) - K N(d_2)) \end{aligned} \tag{3-9}$$

其中 $d_{1,k} = \dfrac{\ln(F_k(t)/K) + \dfrac{\nu_k^2}{2}}{\nu_k}$ ，$d_{2,k} = d_{1,k} - \nu_k$ ，

$$\nu_k^2 = T_{k-1}\nu_{T_{k-1}-caplet}^2 \quad ,$$

$$\nu_{T_{k-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{k-1}-t}\int_t^{T_{k-1}} \sigma_k^2(u)du \quad 。$$

另一為可用來規避利率變動所面臨的風險的工具為利率交換。利率交換的雙方約定在有效期間內按期支付利息，直到契約終止。如一方按期支付固定利息，並從對方收取浮動利息，此即所謂的支付者利率交換(Payer IRS，簡稱 PIRS)。PIRS 在時間 t 的價值為：

$$PIRS(t,T_\alpha,T_\beta,K) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_k)\delta_k(F_k(t)-K) \tag{3-10}$$

其中，$(T_\alpha, T_{\alpha+1}, \cdots, T_{\beta-1})$為設定利率的時點，$(T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \cdots, T_\beta)$則為利息支付的時點。

因為利率交換契約是由一方支付固定利息，並從對方收取浮動利息，因此(3-10)可以拆解成兩部分：一為固定端(Fixed Leg)價值，另一為浮動端(Floating Leg)價值。

固定端價值：

$$Fixed_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} (\delta_k K)P(t,T_k)$$

浮動端價值：

$$Floating_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_k)\delta_k F_k(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_k)\left(\frac{P(t,T_{k-1})}{P(t,T_k)}-1\right)$$

$$= \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} (P(t,T_{k-1}) - P(t,T_k))$$

$$= P(t,T_0) - P(t,T_N)$$

而交換利率(Swap Rate)即固定端價值等於浮動端價值下之 K 值，

$$Fixed_{\alpha,\beta}(t) = Floating_{\alpha,\beta}(t)$$

$$\Rightarrow S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k)} = \frac{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k) F_k(t)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k)} \tag{3-11}$$

上式可進一步改寫為

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1 - \prod_{k=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1+\delta_k F_k(t)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i \prod_{k=\alpha+1}^{i} \frac{1}{1+\delta_k F_k(t)}} \tag{3-12}$$

，或者可改寫成

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k) F_k(t)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k)} = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \frac{\delta_k P(t,T_k)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k)} \cdot F_k(t)$$

$$= \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} w_k(t) F_k(t) \tag{3-13}$$

其中 $w_k(t) = \frac{\delta_k P(t,T_k)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k P(t,T_k)}$

由(3-13)顯示，交換利率可以視為遠期利率 $F_k(t)$ 的加權平均，其權值就是 $w_k(t)$ 。

第二節 不同機率測度下的遠期利率動態過程

一、遠期機率測度

由前一節的討論我們知道，以 $P(t,T_k)$ 為計價單位時，遠期利率 $F_k(t)$ 為一 Q^k -martingale。所以在機率測度 Q^k 下， $F_k(t)$ 其動態過程不具飄移項。而在實務

上通常會在同一個機率測度下來模擬一連串的遠期利率，以減低在不同機率測度下所面臨的困難。在遠期機率測度 $Q^i(=Q^{T_i})$，遠期利率 $F_k(t)$ 的動態過程有三種型式如下：

$$
\begin{aligned}
&i<k, t\le T_i: \quad dF_k(t)=\sigma_k(t)F_k(t)\sum_{j=i+1}^{k}\frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)}dt+\sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t)\\
&i=k, t\le T_{k-1}: \quad dF_k(t)=\sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t)\\
&i>k, t\le T_{k-1}: \quad dF_k(t)=-\sigma_k(t)F_k(t)\sum_{j=i+1}^{k}\frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)}dt+\sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t)
\end{aligned}
\tag{3-14}
$$

二、即期 LIBOR 機率測度

在本文中，為了模擬上的方便，將採用即期 LIBOR 機率測度[5]來進行，此測度利用間斷化的銀行帳戶 (Discretely Rebalanced Bank-Account) $B_{spot}(t)$ 取代連續的銀行帳戶作為計價單位。設定如下：

$$
\begin{aligned}
&B_{spot}(0)=1\\
&B_{spot}(T_n)=B_{spot}(T_{n-1})\frac{1}{P(T_{n-1},T_n)}=B_{spot}(T_{n-1})(1+\delta_nF_n(T_{n-1}))
\end{aligned}
\tag{3-15}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{spot}(t)&=P(t,T_{m(t)-1})B_{spot}(T_{m(t)-1})=\frac{P(t,T_{m(t)-1})}{\prod_{j=0}^{m(t)-1}P(T_{j-1},T_j)}\\
&=P(t,T_{m(t)-1})\prod_{j=0}^{m(t)-1}(1+\delta_jF_j(T_{j-1}))
\end{aligned}
\tag{3-16}
$$

其中，$m(t)=m \ \ if \ \ T_{m-2}<t<T_{m-1}, m\ge 1$ 。

$B_{spot}(t)$ 可視為一投資組合在時間 t 的現值，其可透過下列策略達成：

[5] 詳見 Brigo and Mercurio（2006）或 Jamshidian F. (1997)

- 在時點 0 以本金一元投資於零息債券 $P(0,T_0)$，然後持有到時點 T_0 。

- 在時點 T_0，可得到本利和 $\frac{1}{P(0,T_0)}$，再投資於零息債券 $P(T_0,T_1)$，然後持有到時點 T_1。

- 在時點 T_1，可得到本利和 $\frac{1}{P(0,T_0)}\frac{1}{P(T_0,T_1)}$，再投資於零息債券 $P(T_1,T_2)$，然後持有到時點 T_2。

重複以上策略，直到時點 $T_{m(t)-1}$；因此，這個投資策略在時點 $T_{m(t)-1}$ 預期會收到本利和 $\frac{1}{\prod_{j=0}^{m(t)-1} P(T_{j-1},T_j)}$，再以 $P(T_t,T_{m(t)-1})$ 折現到時點 t，即可得到(3-15)。

根據 Brigo and Mercurio（2006），在即期 LIBOR 機率測度下，遠期利率的動態過程可表達為：

$$dF_k(t)=\sigma_k(t)F_k(t)\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\rho_{k,i}\delta_i\sigma_i(t)F_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}dt+\sigma_k(t)F_k(t)dZ_k^{spot}(t) \qquad (3\text{-}17)$$

在商品評價部分，也將以(3-17)來做為建構未來遠期利率的主要公式。

第三節 遠期利率波動度期間結構

在校準 LFM 的波動度期間結構之前，我們必須先選擇適當的波動度函數態。文獻上一般可分為分段常數(Piecewise-Constant)和參數化(Parametric)兩種類型。然後利用市場上 Cap 的波動度報價和 Black's Cap 評價公式即可估計出波動度函數的各個參數。

本文中則是採取了參數化波動度函數[6]。 根據 Brigo and Mercurio(2006)，兩種可能的參數化波動度函數介紹如下：

[6] 分段常數波動度函數詳細介紹可見 Brigo and Mercurio（2006）。

$$\sigma_i(t) = \psi(T_{i-1} - t; a, b, c, d) = \left[a(T_{i-1} - t) + d\right]e^{-b(T_{i-1}-t)} + c \qquad (3\text{-}18)$$

(3-18)是第一種參數化波動度函數，波動度主要受到遠期利率距到期日的時間長度$(T_{i-1} - t)$影響。在這個假設之下，波動度期間結構會呈現駝峰狀(humped shape)，與市場所觀察的一致；另外，當時間長度$(T_{i-1} - t)$趨近無限大時，(3-18)會收斂至長期平均水準c；而當$(T_{i-1} - t)$趨近於零時，波動度會逼近$c+d$。當進行參數校準時，須注意a，b和c應為正數，而$c+d$也應為正數。然而，此參數化函數最大的問題為當時間往前推移，波動度函數圖形會整條水平移動，卻保持形狀不變。

為解決上述的問題，可引進一係數Φ；此係數會隨著遠期利率的到期日不同而變化，用以解決原先波動度函數不會隨時間遞減的問題。因其同時考慮了遠期利率的到期日Φ及距到期日的時間$(T_{i-1} - t)$的影響，使得函數更具有彈性，在Cap和Swaption的聯合校準更加準確。Brigo and Mercurio(2006)採用此參數化型態，而本文亦將採用(3-19)作為波動度函數。

$$\sigma_i(t) = \Phi_i\psi(T_{i-1} - t; a, b, c, d) = \Phi_i\left[(a(T_{i-1} - t) + d)e^{-b(T_{i-1}-t)} + c\right] \qquad (3\text{-}19)$$

三、利率買權之波動度結構與參數估計

在LFM模型中，有兩個相當重要的參數：利率波動度$\sigma_k(t)$和相關係數矩陣ρ，$\sigma_k(t)$決定了各個遠期利率在不同時點的波動度，ρ則決定了各個遠期利率彼此間的相關程度。下一節則將討論相關係數矩陣的校準。

一般而言，利率上限選擇權(Cap)的報價是以隱含波動度作為報價，此波動度為利率上限選擇權包函區間內的平均波動度，而因利率上限買權為一連串的利率買權(Caplet)的組合，利用Black's Cap formula即可求出每段區間利率買權的波

動度。

首先令一時間集合 $\mathrm{T}_j = [T_0, ..., T_j]$，而利率上限買權表示為：

$$Cap^{MKT}(0, \mathrm{T}_j, K) = \sum_{i=1}^{j} \delta_i P(0, T_i) Bl(K, F_i(0), \sqrt{T_{i-1}} \nu_{\mathrm{T}_j - Cap}) \tag{3-20}$$

其中 $K = S_{0,j}(0) = S(0; T_0, T_j)$，也就是(3-11)所求之交換利率。

因為市場上對於利率上限選擇權的報價採用單一平均波動度，即(3-20)中其所包含的 Caplet 皆採用此平均波動度。但實際上每個 Caplet 應該有其本身的波動度($\nu_{\mathrm{T}_j - Caplet}$)，帶入(3-20)也可求出利率上限買權的市場價格。故其關係應滿足下式：

$$\sum_{i=1}^{j} \delta_i P(0, T_i) Bl(K, F_i(0), \sqrt{T_{i-1}} \nu_{\mathrm{T}_j - Cap}) = \sum_{i=1}^{j} \delta_i P(0, T_i) Bl(K, F_i(0), \sqrt{T_{i-1}} \nu_{\mathrm{T}_j - Caplet}) \tag{3-21}$$

將不同的波動度報價帶入(3-21)關係式後，即可推算出 Caplet 從第一期到最後一期的波動度了。

最後說明參數估計部份。由(3-19)對瞬間波動度的定義，可將 Caplet 的波動度表達如下：

$$\nu^2_{\mathrm{T}_j - Caplet} = \frac{\Phi_j^2}{T_{j-1}} \int_0^{T_{j-1}} \{[a(T_{j-1} - t) + d] e^{-b(T_{j-1} - t)} + c\}^2 dt \tag{3-22}$$

因此，只要能夠從市場資料中求算出各期 Caplet 的波動度，即可估計出上式各個參數。

首先，我們必須假設 Φ_i 皆等於一，將波動度函數由(3-19)簡化成(3-18)，在求出 Caplet 的理論波動度。在理論波動度與市場波動度之誤差平方和(Sum of Squared Errors, SSE)最小下，即可估計出 a, b, c 和 d：

$$SSE = \underset{a,b,c,d}{Min} \sum_{i=1}^{m} \left[(\nu_{T_{i-1-caplet}}^{LFM})^2 - (\nu_{T_{i-1-caplet}}^{MKT})^2 \right]^2 \tag{3-23}$$

$$s.t. \quad a > 0, b > 0, c > 0, c + d > 0$$

將校準後的 a, b, c 和 d 帶入(3-22)以求算到期日因子Φ_i：

$$\Phi_i^2 = \frac{(\nu_{T_{i-1-caplet}}^{MKT})^2 T_{i-1}}{\int_0^{T_{j-1}} \{[a(T_{j-1} - t) + d]e^{-b(T_{j-1}-t)} + c\}^2 dt} \tag{3-24}$$

最後將得到的Φ_i, a, b, c 和 d 帶到參數化波動函數(3-19)，即得到校準後的瞬間波動度函數$\sigma_i(t)$。

第四節 遠期利率的相關係數矩陣

在進行遠期利率的模擬時，除了自身的瞬間波動度外，仍須考慮與其他遠期利率之間的相關係數。一般而言，得到遠期利率間瞬間相關係數的方法有兩種，一種為利用遠期利率的過去歷史資料來求算各個遠期利率之間的歷史瞬間相關係數；另一種為利用在 LFM 模型下推導出的近似 Swaption 公式，來求算隱含相關係數。

在本文中，將採用歷史資料來求算相關係數，而相關係數函數形式則採用 Rebonato(2002)中所介紹的指數遞減型瞬間相關係數，其缺點為當待評價的商品有非常遠的到期日時，可能出現相關係數為零的情形。但本文欲評價的金融商品投資期間僅五年，且此形式概念簡單，可簡化操作過程，故本文將採用此瞬間相關係數型態。

$$\rho_{i,j}(t) = e^{-k|T_i - T_j|} \ , t \le \min(T_i, T_j), k > 0 \tag{3-25}$$

從(3-25)可看出，瞬間相關係數不會隨時間改變，僅和到期日的差距作反向變動。在校準瞬間相關係數時，我們要找出 k 使得市場價格與理論價格的誤差平

方和最小，如下：

$$SSE = \underset{k}{Min} \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \left[(v_{\alpha,\beta}^{LFM})^2 - (v_{\alpha,\beta}^{MKT})^2 \right]^2 \tag{3-26}$$

第五節 蒙地卡羅模擬

一、原始蒙地卡羅模擬

面對高維度的 LFM 這種非馬可夫過程特性，將使得其樹狀模型的節點無法重和，因此實務上多以蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo)進行評價。由(3-16)在即期測度下，遠期利率的動態過程為：

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\rho_{k,i}\delta_i\sigma_i(t)F_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}dt + \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k^{spot}(t) \tag{3-27}$$

利用 *Ito's lemma* 可得

$$d\ln F_k(t) = \sigma_k(t) \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\rho_{k,i}\delta_i\sigma_i(t)F_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}dt - \frac{\sigma_k^2(t)}{2}dt + \sigma_k(t)dZ_k^{spot}(t) \tag{3-28}$$

接著利用 *Euler and Milstein scheme* 進行間斷化(*Discretization*)，可得到

$$\ln F_k(t+\Delta t) = \ln F_k(t) + \sigma_k(t) \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\rho_{k,i}\delta_i\sigma_i(t)F_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}\Delta t - \frac{\sigma_k^2(t)}{2}\Delta t$$

$$+\sigma_k(t)(Z_k^{spot}(t+\Delta t) - Z_k^{spot}(t)) \tag{3-29}$$

其中 $Z_k^{spot}(t+\Delta t) - Z_k^{spot}(t) \sim \mathrm{N}(0, \rho\Delta t)$ ， $\rho = (\rho_{i,j=1,\ldots,M})$

最後可以得到

$$F_k(t+\Delta t)=F_k(t)\exp\left(\sigma_k(t)\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\rho_{k,i}\delta_i\sigma_i(t)F_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}\Delta t-\frac{\sigma_k^2(t)}{2}\Delta t+\sigma_k(t)(Z_k^{spot}(t+\Delta t)-Z_k^{spot}(t))\right) \tag{3-30}$$

由於各期遠期利率之間具有相關性，也就是Z^{spot}彼此間不獨立；但我們所抽出的標準常態隨機亂數W^{spot}卻是彼此獨立的，所以必須先透*Cholesky Docomposition*來將相關係數ρ分解成$\rho=C\cdot C^T$(C為一下三角矩陣)，再將矩陣C與獨立的標準常態隨機亂數W^{spot}相乘，即可得到具有相關性的隨機亂數Z^{spot}，表達如下：

$$\begin{bmatrix} Z_1^{spot}(t+\Delta t)-Z_1^{spot}(t) \\ Z_2^{spot}(t+\Delta t)-Z_2^{spot}(t) \\ \vdots \\ Z_M^{spot}(t+\Delta t)-Z_M^{spot}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,M} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M,1} & C_{M,2} & \cdots & C_{M,M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1^{spot}(t+\Delta t)-W_1^{spot}(t) \\ W_2^{spot}(t+\Delta t)-W_2^{spot}(t) \\ \vdots \\ W_M^{spot}(t+\Delta t)-W_M^{spot}(t) \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

有了以上結果，我們就可以進行多變數的蒙地卡羅模擬出遠期利率未來的路徑。

二、最小平方蒙地卡羅模擬法(Least Squares Monte Carlo Approach, LSM)

Longstaff and Schwartz(2001)提出利用最小平方蒙地卡羅法來得出一個最適履約法則(optimal stopping rule)以極大化美式選擇權的價值。主要利用所模擬出之所有路徑配合最小平方法(Least Squares Regression)，從到期日以倒推(back approach)方式，求出並比較每個履約時點的「繼續持有價值(holding value」和「立即履約價值(immediate exercise value)」，以找出每條路徑的最適履約時點。如此，不同路徑將有不同的履約時點及到期價值，將不同路徑的現金流量折現到期初，加總平均後即可得到此一美式選擇權的價值。

首先，令$h(w_n,t)$為時點 t 立及履約價值，$w_n, n=1,...N$，為模擬路徑。

$C(w_n,s;t,T)$ 為對於所有 $s,t<s<T$ ，選擇權於時點 t 之前未被履約的條件下之現金流量。假設一美式選擇權只能在 M 個間斷時點：$0<t_1\le t_2\le t_3\le\cdots\le t_M=T$ 進行履約；當 M 夠大時，將有很好的近似。

在時點 t_m ，繼續持有價值 $F(w_n,t_m)$ 可定義為：

$$F(w_n,t_m)=E^Q\left[\sum_{j=m+1}^{M}\exp\left(-\int_{t_m}^{t_j}r(w_n,s)ds\right)C(w_n,t_j;t_m,T)\,|\,\Im_{t_m}\right] \tag{3-32}$$

其中，$r(w_n,s)$ 為無風險利率。

根據上述，最適履約問題即可轉變成比較立即履約價值與(3-31)條件期望值，當履約價值為正且大於(3-31)時，即進行履約。

對於 $F(w_n,t_m)$，則須選擇一種基底函數(basis function)，根據 Piterbarg(2004b)中建議使用簡單的二次多項式已足夠準確。因此，本文中將採用以下二次多項式作為條件期望函數：

$$Y=\alpha+\beta_1X+\beta_2X^2 \tag{3-33}$$

根據以上設定，主要蒙地卡羅執行步驟如下：

步驟一：

選定模擬遠期利率走勢的公式(3-30)及折現公式(3-16)，利用市場資料求出期初遠期 LIBOR 利率，並校準瞬間波動度及瞬間相關係數參數。

步驟二：

抽取出獨立亂數，並利用(3-31)轉為具相關性的亂數。接著模擬出一條遠期 LIBOR 利率路徑，並利用反向變易法(antithetic method)產生另一條利率路徑。重覆以上 $N/2$ 次，即可建構出 N 條利率路徑。

步驟三：

計算各路徑期末的商品價值。接著判斷在最後一個履約時點上，哪些路徑的商品是處於價內，將這些路徑在該時點的利率作為自變數，並把這些路徑的期末價值折現到此時點作為應變數，然後利用回歸式(3-33)求得各路徑的估計值，並判斷該時點是否為各路徑的履約時點。在倒數第二個履約時點上，一樣以該時點的利率作為自變數，如果一路徑有提早履約，以提早履約時點之價值折現到該時點作為應變數；若無，則以期末價值代替，同樣利用回歸式(3-33)來決定該時點是否為各路徑的履約時點。重覆以上過程直到第一個履約時點。

步驟四：

將各路徑的履約時點的價值以公式(3-16)折現至期初，若一路經無提早履約，則期末為履約時點。最後加總平均這些期初價值，即商品價值。

國立政治大學 National Chengchi University

第四章 五年期雙區間鎖定可贖回債券

此章為商品個案分析，將依據第三章的研究方法來進行分析。

第一節 商品介紹

一、商品說明書

商品名稱	五年期雙區間鎖定可贖回債券 (5 YEARS USD CALLABLE DUAL RANGE LOCK DOWN STEEPNER NOTE)
發行機構	勞埃德 TSB 銀行（Lloyds TSB Bank plc）
發行機構評等	穆迪 Aaa / 標準普爾 AA
發行日	2007.12.7
到期日	2012.12.7
投資期間	5年 (視情況發行商可進行贖回)
投資金額	USD 5,000,000
發行價格	100.00%
贖回價格	100.00%
利息計算	每季付息，30/360
計息方式	7.00%(*p.a.*)
連結標的	**Index 1：USD 3m LIBOR** 以倫敦時間上午 11:00 Telerate 3750 所顯示之 USD 3m LIBOR 為準。 **Index 1：USD 30y CMS – USD 10y CMS**

	此 30 年與 10 年固定期間交換利率為半年付息之利率交換，30/360 basis，以倫敦時間上午 11:00 ISDAFIXI 路透社頁面所顯示為準。
計息轉換條款	如 *Index* 1 於每一個觸發觀察日小於 4.75%，計息將由 7.00%(*p.a.*) 轉變為： $0.00\%(p.a.) \le 45 \times Index\ 2 \le 9.00\%(p.a.)$ 且一旦轉換成以上的計息方式後，將以此計息方式直到債券到期日。 附註： 觸發觀察日(*Trigger Observation Date*)為計息期間第一天之前兩日。 贖回日(Call Date)為由 2008.03.07 起，每一個付息日(包含到期日)發行商皆可進行贖回；且贖回時採行以面額 100%贖回。

二、商品特性

此商品最大的特色在於其具有障礙選擇權的特性，在未碰觸到障礙 (3m LIBOR<4.75%)前，得到一固定利息 7%；在碰觸到障礙後，將進入一較複雜的計息型態(45×(30y CMS - 10y CMS))，而當變成此計息型態時，將有機會得到較高之利息 9%；但也有可能因 30y CMS 與 10y CMS 的走勢關係，而使投資報酬率反而低於 7%。圖 4-1 與圖 4-2 為發行日前一年之 3m LIBOR、30y CMS 與 10y CMS 歷史走勢。

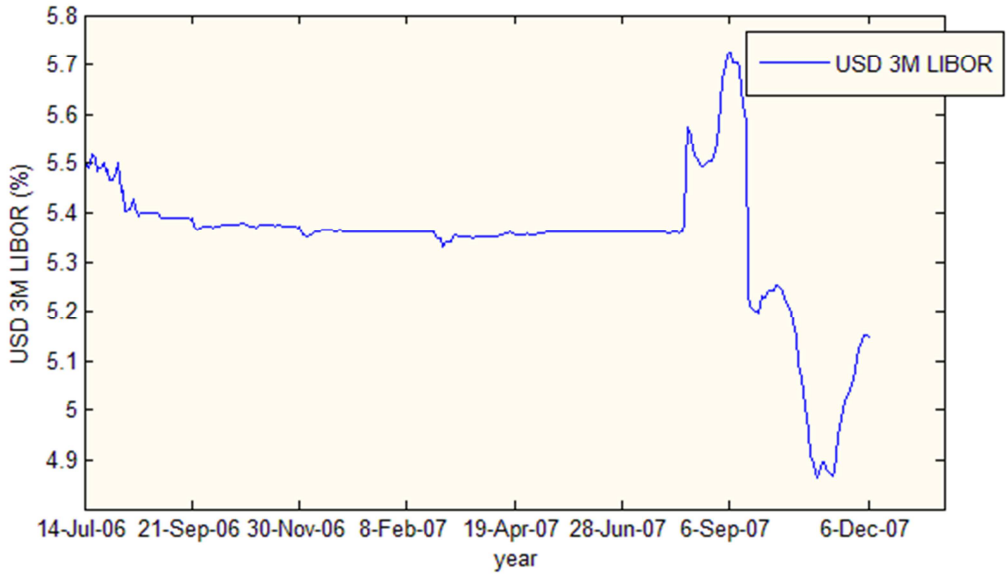

圖 4-1. USD 3m LIBOR 歷史走勢圖

資料來源：Datastream(2006/07/14 ~ 2007/12/06)

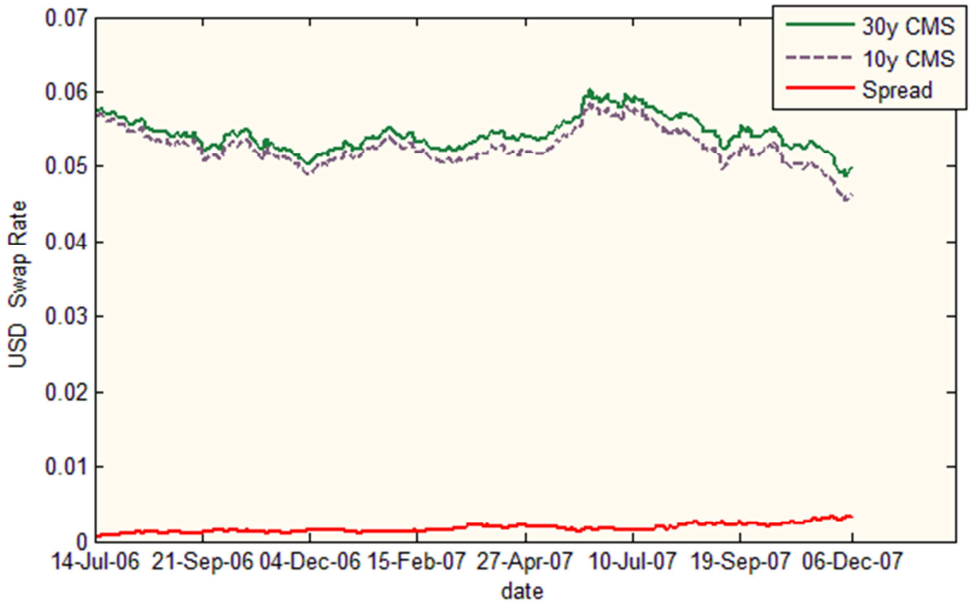

圖 4-2. USD 30y CMS 與 10y CMS 歷史走勢圖

資料來源：Board of Governors of the Federal Reserve System

(2006/07/14 ~ 2007/12/06)

三、情境分析

以下針對此商品作情境分析，先假設 3m LIBOR 走勢未突破門檻障礙 4.75%，接著假設 3m LIBOR 突破障礙下，30y CMS 和 10y CMS 之利差持續走高，走低和維持目前水準，共四種情形。

1. 3m LIBOR 始終維持在 4.75%以上

假設 3m LIBOR 在每個觸發觀察日皆大於 4.75%，根據條款，投資人每季將獲得固定付息 7%(年化報酬率)，如此我們可將投資此金融商品視為投資在利息較高之定存；但因報酬率高於目前的利率水準，因此須考慮到發行商進行贖回的問題。

2. 3m LIBOR 在第一個觸發觀察日小於 4.75%，且利差持續走高

假設交換利率利差每季上升 0.1%，目前的利差為 15.75% (以乘上 45 倍)，故第一季為 15.85%，之後為 15.95%，16.05%，以此類推。根據條款，投資人將每季皆可得到 9% (年化報酬率)，而如同情況 1，因為報酬率高於目前利率水準，因此發行商進行贖回的可能性很大。表 4-1 列出利差上漲時，投資人的收益狀況，假設在第四季時，發行商贖回此商品。

表 4-1. 利差上漲付息狀況

季	1	2	3	4
付息(年)	9%	9%	9%	9%

3. 3m LIBOR 在第一個觸發觀察日小於 4.75%，且利差持續走低

假設交換利率利差每季下跌 0.1%，第一季為 15.65%，之後為 15.55%，15.45%，以此類推。根據條款，即使投資人持有此商品到到期日，仍可每季獲得 9% (年化報酬率)；因此發行商進行贖回的可能性仍然很高。假設在第四季時，發行商贖回此商品，投資人的收益狀況同表 4-1。

4. 3m LIBOR 在第一個觸發觀察日小於 4.75%，且利差維持目前水準 15.75%

在此情況下，投資人收益仍如同情況 1，收益狀況同表 4-1。

第二節 建立殖利率曲線與校準參數

在進行蒙地卡羅模擬之前，必須使用期初的遠期利率、瞬間波動度和瞬間相關係數來做為模擬的基礎，而因市場上並無法直接取得相關的資料，此節將介紹得到相關資訊的方法。

一、建立期初殖利率曲線

在市場上可得到的 LIBOR rate 皆為一年以下，而為了建立一年期以上的殖利率曲線，可利用市場上對一年期以上的交換利率(Swap rate)的報價；而因本商品為每季付息，可配合拔靴法(Bootstrapping)以求出每季的殖利率，如此可得到一完整的殖利率曲線。發行日(2007/12/07)當天的各季到期的 LIBOR rate 和一年期以上的 Swap rate 報價如下：

表 4-2 各季到期的 US InterBank Offered Rate (%)

到期日	3 個月	6 個月	9 個月	12 個月
LIBOR rate	5.14063	4.93188	4.67375	4.48875

資料來源：Datastream (2007/12/07)

表 4-3 各年度的 US IR Swap – Middle Rate (%)

年	IRS	年	IRS
1	4.381	**9**	4.741
2	4.071	**10**	4.806
3	4.118	**12**	4.915

4	4.241	**15**	5.025
5	4.366	**20**	5.123
6	4.479	**25**	5.1425
7	4.577	**30**	5.1545
8	4.667		

資料來源：Datastream (2007/12/07)

將市場 Swap rate 資料利用非線性內插法(Cubic Spline)內插出以三個月為間隔的 Swap rate，並配合一年以下的 LIBOR rate，以拔靴法(Bootstrapping)根據交換利率的公式求出零息債券價格。交換利率公式採(3-11)如下：

$$S_{\alpha,\beta}(t)=\frac{P(t,T_\alpha)-P(t,T_\beta)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\delta_k P(t,T_k)} \tag{3-11}$$

上式表示現在時點$t=0$，觀察到的$T_\alpha - T_\beta$年期的交換利率，計息日為$(T_\alpha,...,T_{\beta-1})$，交割日為$(T_{\alpha+1},...,T_\beta)$。整理上式，

$$S_{\alpha,\beta}(t)\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\delta_k P(t,T_k)+P(t,T_\beta)=P(t,T_\alpha) \tag{4-1}$$

其中，現在時點$t=0,\alpha=0$，即，$T_0=0.25$

$$S_{0,\beta}(t)\sum_{k=1}^{\beta}\delta_k P(t,T_k)+P(t,T_\beta)=P(T_0,T_0)=1 \tag{4-2}$$

因為$P(t,T_\beta)=\exp(-r(0,\beta)\cdot\beta)$，此處$r(0,\beta)$為$\beta$年期的殖利率；且$r(0,0.25)$、$r(0,0.5)$、$r(0,0.75)$、$r(0,1)$和$S_{0,\beta}$已知下，進行重複運算，便可將 30 年內每季

為間隔的零息殖利率曲線(*Zero – Coupon Yield Curve*)求出，見表 4-3。本商品投資期間雖僅為 5 年，但連結到 30y CMS，故需要長達 35 年的殖利率曲線，且由於殖利率曲線會隨時間經過會愈趨平坦，因此假設 30 年後的殖利率皆相等，見圖 4-1。

表 4-4 每季殖利率估計值

到期日(年)	殖利率	到期日(年)	殖利率	到期日(年)	殖利率	到期日(年)	殖利率
0.25	5.1406%	**7.75**	4.6672%	**15.25**	5.1231%	**22.75**	5.2415%
0.5	4.9319%	**8**	4.6911%	**15.5**	5.1311%	**23**	5.2416%
0.75	4.6738%	**8.25**	4.7135%	**15.75**	5.1392%	**23.25**	5.2416%
1	4.4888%	**8.5**	4.7349%	**16**	5.1472%	**23.5**	5.2417%
1.25	4.2314%	**8.75**	4.7555%	**16.25**	5.1551%	**23.75**	5.2417%
1.5	4.1328%	**9**	4.7755%	**16.5**	5.1630%	**24**	5.2417%
1.75	4.0647%	**9.25**	4.7952%	**16.75**	5.1706%	**24.25**	5.2418%
2	4.0399%	**9.5**	4.8145%	**17**	5.1781%	**24.5**	5.2419%
2.25	4.0453%	**9.75**	4.8331%	**17.25**	5.1853%	**24.75**	5.2420%
2.5	4.0575%	**10**	4.8510%	**17.5**	5.1923%	**25**	5.2422%
2.75	4.0739%	**10.25**	4.8685%	**17.75**	5.1989%	**25.25**	5.2425%
3	4.0921%	**10.5**	4.8859%	**18**	5.2052%	**25.5**	5.2427%
3.25	4.1167%	**10.75**	4.9031%	**18.25**	5.2110%	**25.75**	5.2430%
3.5	4.1503%	**11**	4.9200%	**18.5**	5.2164%	**26**	5.2432%
3.75	4.1876%	**11.25**	4.9363%	**18.75**	5.2212%	**26.25**	5.2435%
4	4.2234%	**11.5**	4.9520%	**19**	5.2255%	**26.5**	5.2437%
4.25	4.2571%	**11.75**	4.9669%	**19.25**	5.2292%	**26.75**	5.2440%
4.5	4.2912%	**12**	4.9807%	**19.5**	5.2322%	**27**	5.2442%

4.75	4.3251%	**12.25**	4.9940%	**19.75**	5.2345%	**27.25**	5.2445%
5	4.3579%	**12.5**	5.0070%	**20**	5.2360%	**27.5**	5.2447%
5.25	4.3899%	**12.75**	5.0197%	**20.25**	5.2370%	**27.75**	5.2449%
5.5	4.4212%	**13**	5.0322%	**20.5**	5.2379%	**28**	5.2451%
5.75	4.4517%	**13.25**	5.0442%	**20.75**	5.2387%	**28.25**	5.2453%
6	4.4812%	**13.5**	5.0559%	**21**	5.2393%	**28.5**	5.2454%
6.25	4.5094%	**13.75**	5.0672%	**21.25**	5.2399%	**28.75**	5.2456%
6.5	4.5367%	**14**	5.0780%	**21.5**	5.2403%	**29**	5.2457%
6.75	4.5634%	**14.25**	5.0882%	**21.75**	5.2407%	**29.25**	5.2458%
7	4.5896%	**14.5**	5.0978%	**22**	5.2410%	**29.5**	5.2458%
7.25	4.6159%	**14.75**	5.1068%	**22.25**	5.2412%	**29.75**	5.2459%
7.5	4.6420%	**15**	5.1151%	**22.5**	5.2414%	**30**	5.2459%

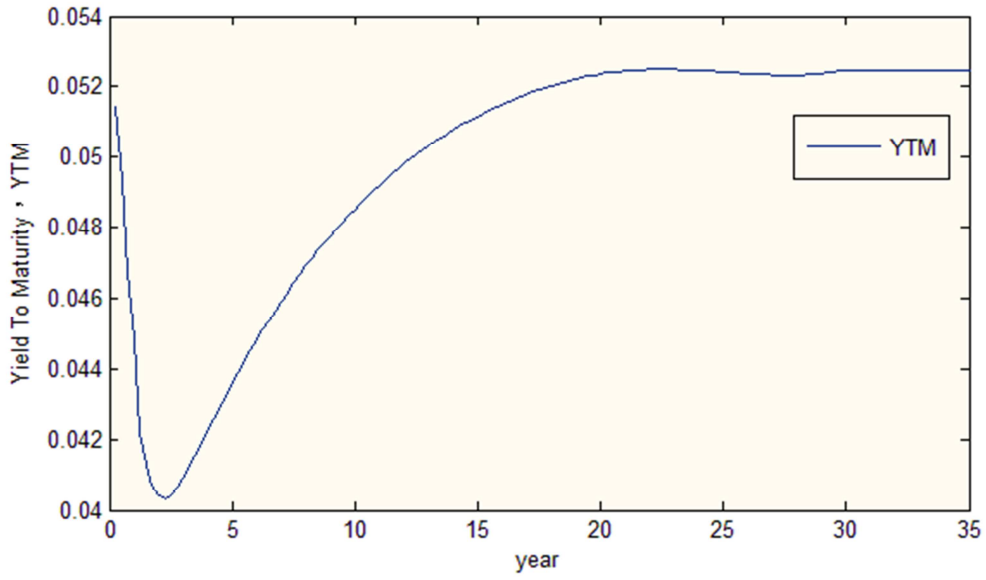

圖 4-3 殖利率曲線圖

二、估計期初遠期利率

在估計殖利率曲線後，我們接著必須求出期初遠期利率，作為往後模擬的初始值，建構出一連串的遠期利率。我們利用下式來得出期初遠期利率：

$$e^{-r(0,T_2)\times T_2} = e^{-r(0,T_1)\times T_1} \times e^{-F(0;T_1,T_2)\times(T_2-T_1)}$$

$$\Rightarrow F(0;T_1,T_2) = \frac{r(0,T_2)\times T_2 - r(0,T_1)\times T_1}{T_2 - T_1} \tag{4-3}$$

其中，$r(0,T_i)$：在時點 0(期初)到期日為T_i的即期 LIBOR 利率，$F(0;T_1,T_2)$：在時點 0 從T_1開始生效，止於T_2的遠期利率。

反覆將各期即其 LIBOR 利率帶入(3-14)，即可求出期初時不同時間區間的三個月遠期利率$F_k(0)=F(0;T_{k-1},T_k)$。表 4-4 僅列出前 20 期的遠期利率，而本商品共需 139 期遠期利率。

表 4-5 遠期利率估計值

遠期利率 $F(0;T_{k-1},T_k)$			
F(0;0.25,0.5)	4.7231%	**F(0;2.75,3)**	4.4097%
F(0;0.5,0.75)	4.1575%	**F(0;3,3.25)**	4.4992%
F(0;0.75,1)	3.9338%	**F(0;3.25,3.5)**	4.5791%
F(0;1,1.25)	3.1416%	**F(0;3.5,3.75)**	4.6572%
F(0;1.25,1.5)	3.6745%	**F(0;3.75,4)**	4.7319%
F(0;1.5,1.75)	3.7217%	**F(0;4,4.25)**	4.8019%
F(0;1.75,2)	3.8269%	**F(0;4.25,4.5)**	4.8678%
F(0;2,2.25)	3.9695%	**F(0;4.5,4.75)**	4.9293%
F(0;2.25,2.5)	4.1285%	**F(0;4.75,5)**	4.9852%

F(0;2.5,2.75)	4.2824%	**F(0;5,5.25)**	5.0350%

三、遠期利率瞬間波動度校準

在本文中，遠期利率瞬間波動度將採用參數化型態。以下利用遠期利率瞬間波動度與 Cap 隱含波動度之間的關係，來估計所需參數，進而得到瞬間波動度函數。

在商品發行日當天的 Cap 報價，如表 4-5。

表 4-6 各年度到期的 USD Cap (6M) Implied Vol.

期限(年)	**1Y**	**2Y**	**3Y**	**4Y**	**5Y**	**6Y**	**7Y**	**8Y**	**9Y**	**10Y**
$v_{Cap}(\%)$	25.14	28.2	27.29	25.97	24.7	23.69	22.75	21.92	21.25	20.66

資料來源：Datastream (2007/12/07)

為了校準出各不同到期日 Caplet 的波動度，須先以非線性插補法得出每半年期的 Cap 隱含波動度，帶入(3-21)，透過不斷迭代計算出各期 Caplet 隱含波動度。步驟如下：

步驟一：

在以六個月 LIBOR 為標的下，Caplet 的價值可用 Black's formula(3-9)來表示，其中 t=0，$\delta_k = \delta = 0.5$。Caplet 的價值可表達為：

$$Caplet(0;T_{k-1},T_k,K) = 0.5P(0,T_k)Black(F_k(0),\gamma_k,K) \tag{4-4}$$

步驟二：

由於 Cap 裡包含數個 Caplet，例如，1 年期 Cap 含有 1 個 Caplet；1.5 年期 Cap 含有 2 個 Caplet 等。因此 Cap 價值可根據達成：

$$Cap(0,T_n,K_n) = \sum_{k=1}^{n} Caplet(0;T_{k-1},T_k,K_k)$$

$$= 0.5\sum_{k=1}^{n} P(0,T_k)Black(F_k(0),\gamma_k,K_k)$$

$$= 0.5\sum_{k=1}^{n} P(0,T_k)Black(F_k(0),\sqrt{T_{k-1}}v_{T_{k-1}-Caplet},K_k) \tag{4-5}$$

其中，$v_{T_{k-1}-Caplet}$：到期日為T_k的 Caplet 波動度，

$K_n = S_{0,n}(0) = \dfrac{1-\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+0.5F_k(0)}}{\sum_{k=1}^{n}0.5\prod_{j=1}^{k}\dfrac{1}{1+0.5F_j(0)}}$：代表為期初時到期日為$T_n$的交換利率。

步驟三：

最後利用(3-21)，得到以下關係式：

$$Cap(0,T_n,K_n) = 0.5\sum_{k=1}^{n} P(0,T_k)Black(F_k(0),\sqrt{T_{k-1}}v_{T_{k-1}-Caplet},K_k)$$

$$= 0.5\sum_{k=1}^{n} P(0,T_k)Black(F_k(0),\sqrt{T_{k-1}}v_{T_k-Cap},K_k) \tag{4-6}$$

最後利用(4-6)不斷迭代即可求算出到期日為 0.5 年到 9.5 年的 Caplet 波動度，一共有 19 個波動度，如圖 4-4。

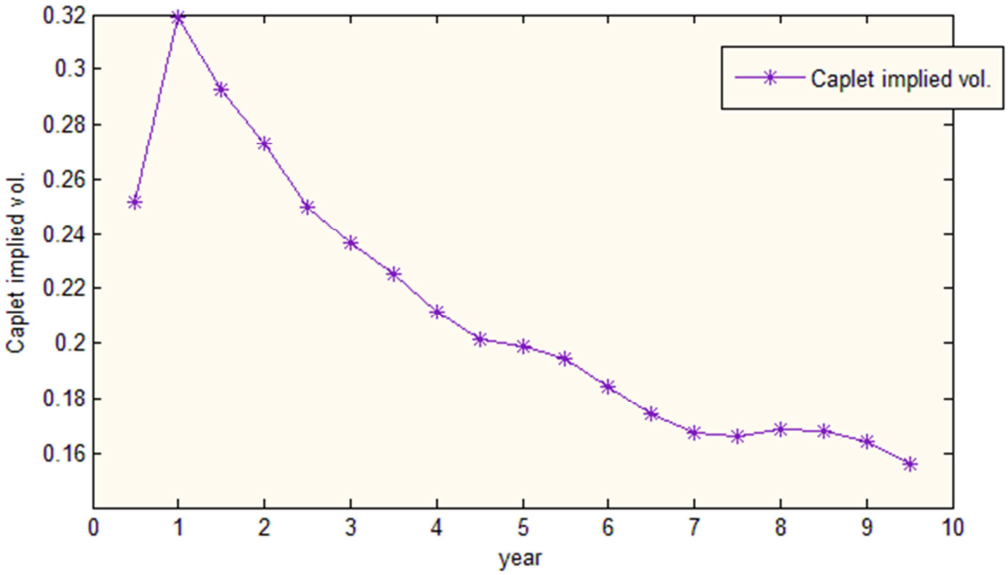

圖 4-4 各年期 Caplet 波動度曲線

由於本商品需要模擬未來 5 年各時點的 30 年期交換利率，需要有長達 35 年的 Caplet 波動度來建構遠期利率。而圖(4-4)僅包含前 9.5 年的 Caplet 波動度，所以假設 10 年期以後的波動都皆與生效日 9.5 年的 Caplet 波動度相同。

接著根據(3-22)，Caplet 波動度與遠期利率瞬間波動度的關係式：

$$v^2_{T_{j-Caplet}} = \frac{\Phi_j^2}{T_{j-1}} \int_0^{T_{j-1}} \{[a(T_{j-1}-u)+d]e^{-b(T_{j-1}-u)}+c\}^2 du \qquad (3\text{-}22)$$

如同第三章所述，先將Φ假設為 1，然後以理論波動度和市場波動度誤差平方和最小的參數為最佳估計值，在此得到的參數為：$a=1.2953$，$b=1.6942$，$c=0.0899$，$d=-0.0503$。接著利用(3-24)可求得對應的Φ，見圖 4-5。

$$\Phi_j^2 = \frac{(v^{MKT}_{T_{j-1}-Caplet})^2 T_{j-1}}{\int_0^{T_{j-1}} \{[a(T_{j-1}-u)+d]e^{-b(T_{j-1}-u)}+c\}^2 du} \qquad (3\text{-}24)$$

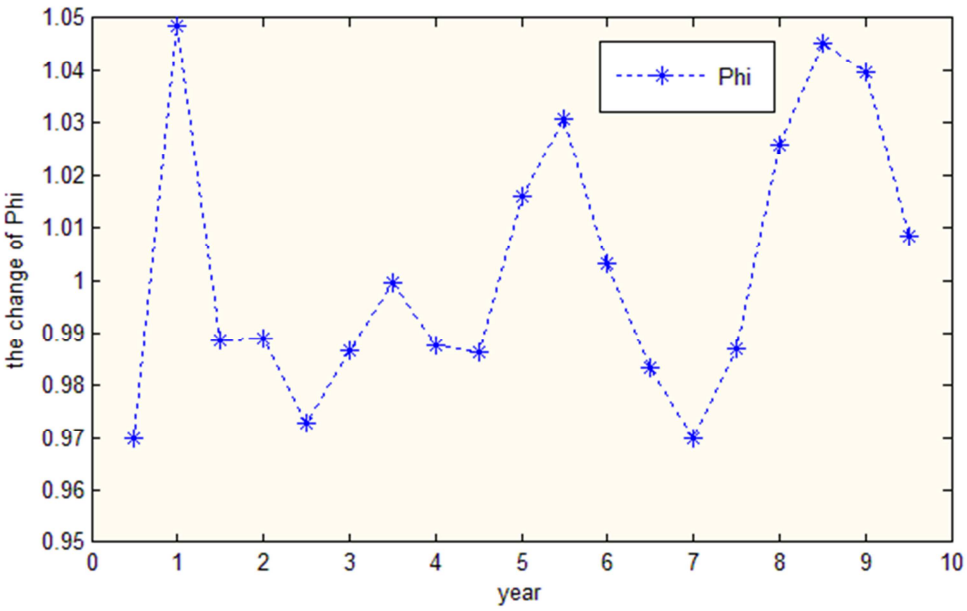

圖 4-5 各年期之Φ變化

最後將上述的參數帶入(3-19)，即可得到不同觀察日下的各遠期利率的瞬間波動度$\sigma_k(t)$。圖 4-6 繪出各個時點下的各個遠期利率瞬間波動度結構。

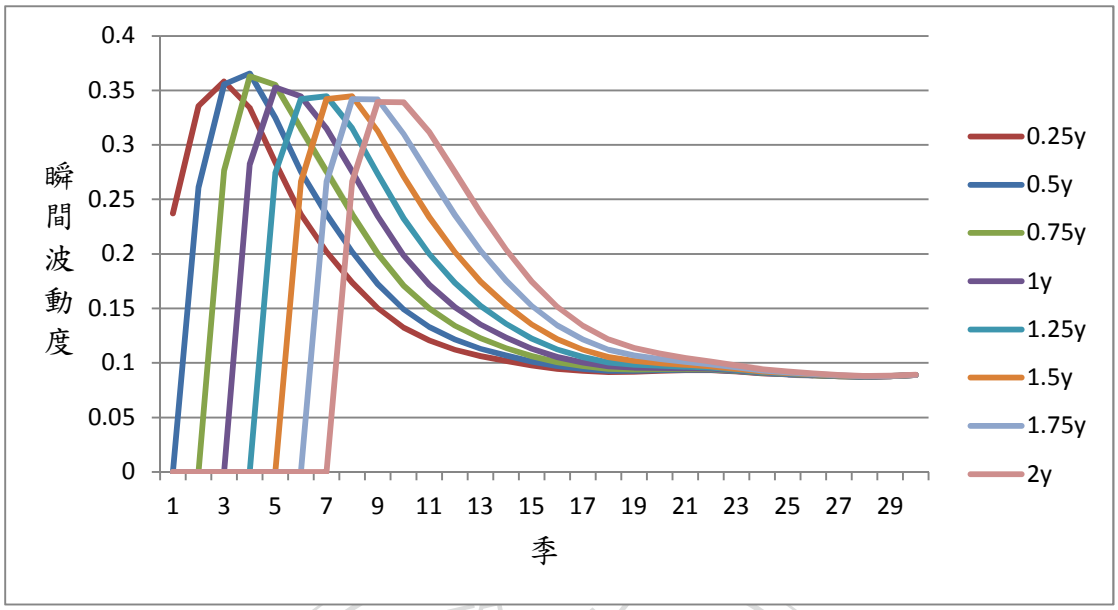

圖 4-6 各時點瞬間波動度期間結構

四、瞬間相關係數矩陣校準

如同第三章所介紹，本文使用(3-25)之指數遞減型瞬間相關係數型態，來描述遠期 LIBOR 利率瞬間相關係數：

$$\rho_{i,j}(t) = e^{-k|T_i - T_j|}, t \le \min(T_i, T_j), k > 0 \qquad (3\text{-}25)$$

接著，使用歷史資料來校準參數。利用前述求算期初遠期 LIBOR 利率的方式，帶入發行日前 180 天[7]每日之報價後，可以得到前 180 天每日之期初遠期 LIBOR 利率，再以此歷史資料得出歷史相關係數矩陣。最後，得出能使歷史相關係數與相關係數函數(3-25)之間的誤差平方和最小之參數。此處，我們得到最適參數值為 $k = 0.00729$ 。

圖 4-7 為校準後的遠期利率瞬間相關係數。可以看出，期數差距越遠的遠期利率相關係數越小，符合函數設定。

[7] 取樣時間為 2007 年 3 月 30 日至 2007 年 12 月 6 日。

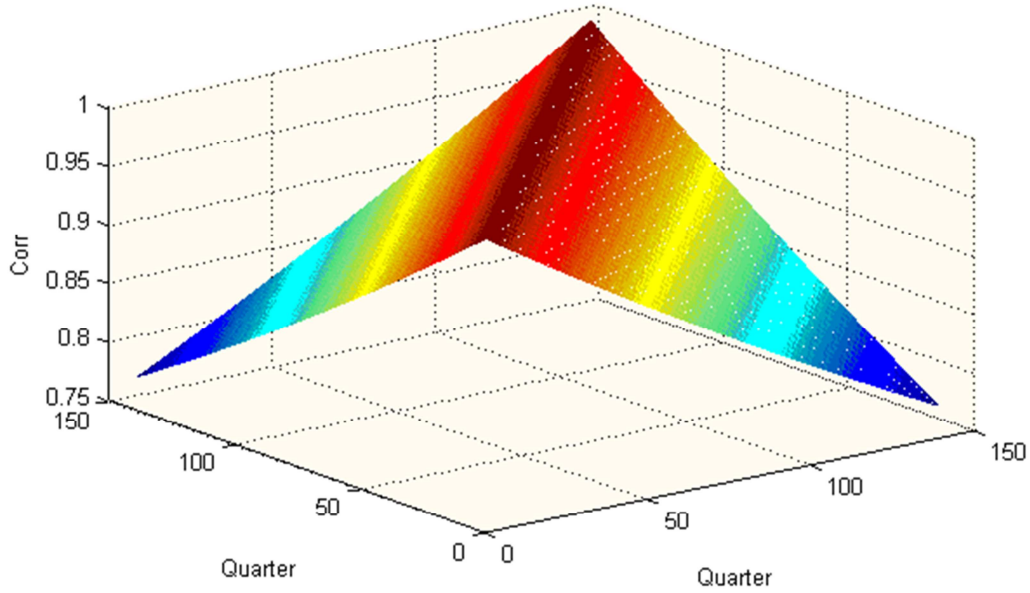

圖 4-7 校準後之遠期利率相關係數矩陣

第三節 產品評價

一、蒙地卡羅模擬

依照(3-30)，蒙地卡羅法模擬各期的遠期利率，且使用 Cholesky 分解來使所抽取之亂數具有相關性。

$$F_k(t+\Delta t)=F_k(t)\exp\left(\sigma_k(t)\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\rho_{k,i}\delta_i\sigma_i(t)F_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}\Delta t-\frac{\sigma_k^2(t)}{2}\Delta t+\sigma_k(t)(Z_k^{spot}(t+\Delta t)-Z_k^{spot}(t))\right) \tag{3-30}$$

在模擬上，令 $\Delta t=1/360$ ，$\delta_k=\delta=0.25$ 及所需的參數帶入上式，如此可以得到一連串的 3 個月的遠期 LIBOR 利率。由於商品特性為每季付息，評價時所需的資料只有每季付息時的交換利率利差。藉由表 4-6 可清出看出未來一年內整個模擬過程。

表 4-7 LFM 模擬之遠期利率(每日模擬)

$t=0$	$F(0;0.25,0.5)$	$F(0;0.5,0.75)$	…	$F(0;34.5,34.75)$	$F(0;34.75,35)$
$t=\frac{1}{360}$	$F(\frac{1}{360};0.25,0.5)$	$F(\frac{1}{360};0.5,0.75)$	…	$F(\frac{1}{360};34.5,34.75)$	$F(\frac{1}{360};34.75,35)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$t=0.25$	$F(0.25;0.25,0.5)$	$F(0.25;0.5,0.75)$	…	$F(0.25;34.5,34.75)$	$F(0.25;34.75,35)$
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
$t=0.5$		$F(0.5;0.5,0.75)$	…	$F(0.5;34.5,34.75)$	$F(0.5;34.75,35)$
⋮			⋮	⋮	⋮
$t=0.75$			…	$F(0.75;34.5,34.75)$	$F(0.75;34.75,35)$
⋮			⋮	⋮	⋮
$t=1$			…	$F(1;34.5,34.75)$	$F(1;34.75,35)$

⋮

⋮

在模擬時需要注意的地方是隨著時間的前進，例如當$t=90$(天)時，$F(90;90,180)$即轉變成為即期利率，因此須從遠期利率的模擬中剔除。

二、計算交換利率

本商品連結標的為美元 30y CMS 與 10y CMS 利率的利差，故需利用一連串的遠期利率來求得各付息時點的交換利率利差，進而得到商品各時期的現金流量。如同前文所定義過的，交換利率(Swap Rate)為使一利率交換契約之期初價值為零的履約價格。交換利率可表示為；

$$S_{\alpha,\beta}(t)=\frac{P(t,T_\alpha)-P(t,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\delta_i P(t,T_i)}=\frac{1-FP(t;T_\alpha,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\delta_i FP(t;T_\alpha,T_i)} \quad (4\text{-}7)$$

其中， $FP(t;T_\alpha,T_i)=\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_\alpha)}=\prod_{j=\alpha+1}^{i}FP_j(t)$ ， $FP_j(t)=\frac{1}{1+\delta_j F_j(t)}$ ，因此(4-5)可再改寫為：

$$S_{\alpha,\beta}(t)=\frac{1-\prod_{k=\alpha+1}^{\beta}\frac{1}{1+\delta_k F_k(t)}}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\delta_k\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1+\delta_j F_j(t)}} \tag{4-8}$$

利用(4-8)，即可計算出每個付息日的 30y CMS 與 10y CMS 利率利差，並計算各期利息金額。

三、評價結果

經過蒙地卡羅模擬了一萬次的結果，每一美元本金的理論價格為 0.93154 美元，標準誤為 0.002 美元，故發行機構的利潤為 7.35%[8]。純債券(不考慮贖回條件)價格為 1.15109 美元，零息債券價格為 0.80685 美元，可見此商品的價格幾乎全來自了零息債券部分。利息收入[9]為 0.34424 美元與提前贖回價值[10]為 0.21955 美元，以上皆不考慮購買商品時之手續費及保管費等。債券收益與發行機構收益關係列於圖 4-8：

[8] 發行機構利潤率= (1-0.93154)/ 0.93154 =0.0735。

[9] 利息收入=純債券價格-零息債券價格。

[10] 提前贖回價值=純債券價格-含贖回權債券價格。

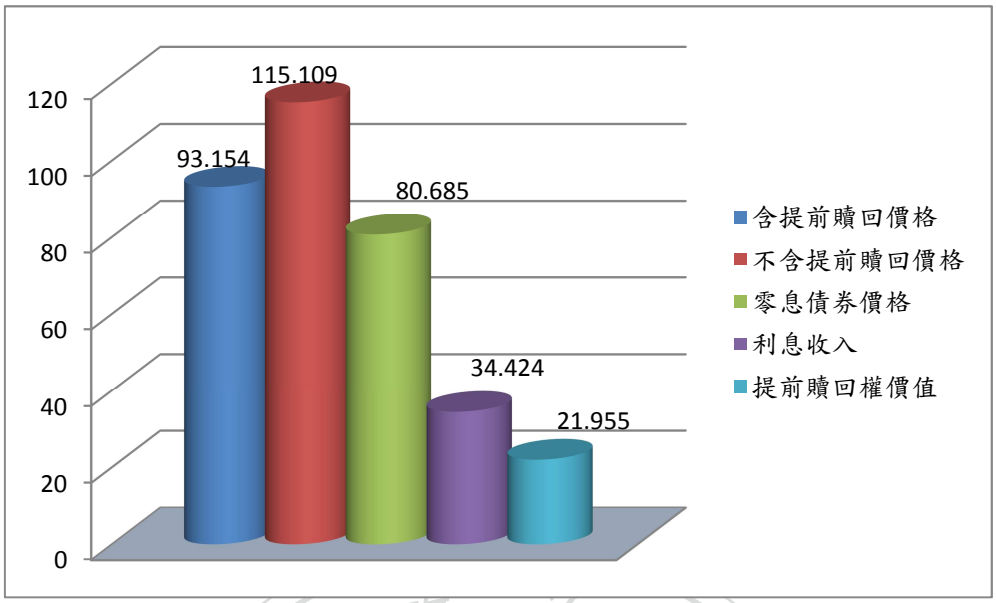

圖 4-8 債券收益與發行機構收益關係(以 100 美元本金而言)

由圖 4-9，可以發現在模擬時，商品在前兩季被贖回的機率已高達 76.88%了，這使得投資人失去了往後各期的利息收入；且模擬遠期利率時，3m LIBOR 在第一季前幾乎皆碰觸到障礙門檻 4.75%，造成付息型態的快速轉換，使得發行商進行贖回的動機增加。而實際上，本商品已於 2008 年 3 月 7 日由發行商贖回，此結果也與本文所模擬出的贖回結果大致相符。

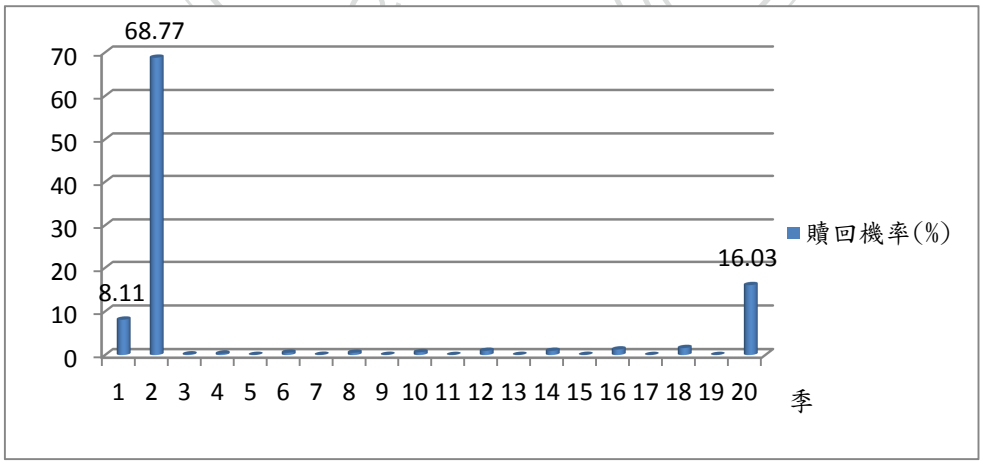

圖 4-9 各季發行商進行贖回的機率

第四節 避險參數分析

本節將對本商品的避險參數作說明，藉此了解當殖利率曲線與波動度結構變化時，對投資人造成的影響。

一、Delta

Delta 是指殖利率曲線變動時，對本商品價格的影響。此商品本金為 5,000,000 美元，由前一節已知V_0為 4,657,700 美元，而當殖利率曲線向上平移 10bp(0.1%)時，商品價格V_1為 4,576,000 美元，可得 Delta 為：

$$Delta = \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V_1 - V_0}{\Delta r} = \frac{4,576,000 - 4,657,700}{10} = -8170$$

表示當殖利率曲線向上平移 1bp 時，此商品價格會下跌 8170 美元。

二、Gamma

Gamma 是指殖利率曲線變動一單位時，對 Delta 變動的影響。V_0為 4,657,700 美元，假設殖利率曲線分別向上平移 10bp 及向下平移 10bp，當殖利率曲線向下平移時，商品價格V_2為 4,672,500 美元。Gamma 表示如下：

$$Gamma = \frac{V_2 - 2V_0 + V_1}{(\Delta r)^2} = \frac{4,672,500 - 2\times 4,657,700 + 4,576,000}{10^2} = -669$$

表示當殖利率曲線向上平移 1bp 時，此商品的 Delta 會下降 669。

三、Vega

Vega 指當波動度結構變動一單位時，對本商品價格的影響。當波動度結構向上平移 10bp 時，商品價格V_3為 4,644,550 美元。Vega 表示如下：

$$Vega = \frac{\Delta V}{\Delta \sigma} = \frac{V_3 - V_0}{\Delta \sigma} = \frac{4,644,550 - 4,657,700}{10} = -1425$$

表示當波動度結構向上平移 1bp 時，此商品的價格會減少 1425 美元。

第五節　發行商與投資人策略及風險分析

一、發行商的策略分析

從此商品的付息條件的設計可知，發行商付息的多寡乃根據市場上利率的走勢而定，當 3m LIBOR 利率在觸發觀察日低於 4.75%時，一旦發行商對於利率未來走勢看法錯誤，轉變後的計息型態可能使發行商面臨更高利息支出的潛在壓力。所幸發行商擁有可贖回此商品的權利，所以當利率走勢不利於自身時，發行商勢必會執行贖回權。

若發行商欲進行避險時，首先必須先針對 3m LIBOR 的走勢進行避險，可買入一現金或無償式買權(Cash-or-Nothing Call, CNC)來規避 3m LIBOR 碰觸到障礙門檻前的利息支出；而針對 30y CMS 與 10y CMS 的利率差走勢，可買入利率價差買權來規避 30y CMS 高於 10y CMS 的風險。但如發行商欲從市場上買入符合付息型態的避險工具仍屬不易，將使執行避險時的成本提高；因此對發行商而言，執行贖回將是規避虧損最好策略。

二、投資人的風險分析

由商品的付息型態來看，投資人投資此商品最主要的考量因素為：

1. 在觸發觀察日，3m LIBOR 是否會觸碰到門檻 4.75%。
2. 發行商是否會執行贖回權。

由發行日前 180 天的歷史走勢來看，3m LIBOR 幾乎都在 4.75%以上，所以不考慮發行商進行贖回下，此商品可視為一固定付息的債券。但由模擬結果來看，發行商在前幾期進行贖回的可能性很高，而主要原因可能也來自發行商給予了交換利率差 45 倍的乘數，雖定有付息上限 9%，但仍遠高於當時市場利率水準；因此投資人進行投資前勢必要有發行商提早贖回的認知。整體而言，投資人面臨

的風險有：

1. 匯率風險

因為此商品以美元計價，投資人除了負擔匯兌的手續費之外，還須承擔投資期間內美元大幅下跌的風險。

2. 在投資風險(提前贖回風險)

當發行商執行其贖回權時，意味著投資已到期，此時投資人將面臨了在投資風險。而這也是在可贖回的結構型商品中，投資人常面臨的風險。

3. 利率風險

由前一節可知，因為 Delta 為負值，因此當殖利率上升時會造成商品價值下降；因此當市場利率未來走勢不如投資人預期時，即會造成本金上的虧損。

4. 信用風險

當發行商無法履行其利息支付時，投資人即面臨了本金上的損失。

第六節 本章小結

本文所選擇商品為由全球知名的勞埃德銀行所發行，且擁有優良的信用等。雖然本商品的投資期間為五年，但由模擬結果可以看出真正的投資期間應該更短。儘管發行商提早贖回的可能性很大，但因其付息條件仍會對投資人具有相當的吸引力，可將此商品當作短期的高收益投資標的。

觀察過去 30y CMS 和 10y CMS 的歷史走勢，可以發現期利率差皆為正值，且一般而言，長天期的利率會大於短天期的利率。因此，對於發行商而言，在 45 倍的利率差加乘下，其實面臨了頗高的利息支出，如當發行商沒有適當的避

險方式時，提早贖回是可期的結果。 根據模擬的結果，此商品由發行商在前兩季贖回的累積機率也高達 76.88%，這也顯示了在發行此商品後，發行商進行避險的成本可能過高，而傾向以贖回的方式來降低其風險。

國立政治大學 National Chengchi University

第五章 結論與建議

本論文主要對於市面上交易量較大的利率結構型商進行評價。第四章中所採用的個案為勞埃德銀行發行的「五年期雙區間鎖定可贖回債券」，其計息方式連結了 3m LIBOR、30y CMS 及 2y CMS。以每一美元本金而言，商品的理論價格為 0.93154 美元，純債券(不考慮贖回條件)價格為 1.15109 美元。模擬結果亦發現，發行商在前兩季進行贖回的累積機率已達 76.88%，故本商品的投資期間雖為 5 年，實際上卻可能僅有 3 個月或 6 個月，且一旦發行商進行贖回，將使投資人的收益率未如預期，損失了大量利息收入。因此投資人在選擇金融商品時，不可只關心付息方式或其連結標的的歷史走勢，也應考慮到發行商的贖回和連結標的未來的走勢。對發行商而言，儘管提供了投資人如此高的付息，但因其自身的贖回權利，將使得自身虧損大幅降低，但卻會造成投資人的利息損失。

本文中，在評價商品時，皆僅考慮到發行商付息情形，並未深入研究投資人所面臨的信用風險；而這也是在金融風暴之後最重要的課題之一，因此後續的研究應可考慮納入此問題，以更貼近投資此商品時所面臨的風險與損益情形。

最後，由於市場上流通的結構型商品種類繁多，本文個案商品僅是其一，投資人應該抱持嚴謹的分析方式，可藉由本文中的評價流程以深入了解商品的報酬與風險，挑選出符合個人需求的金融商品。

參考文獻

1. 陳松男(2006)，利率金融工程學：理論模型與實務應用，新陸書局。
2. Back, K (2005), A Course in Derivative Securities: Introduction to Theory and Computation, Springer Finance.
3. Black, F., (1976), “The Pricing of Commodity Contracts, Journal of Financial Economics,” Vol. 3, pp. 167–179.
4. Black, F., Derman, E., Toy, W., (1990), “A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury bond options,” Financial Analysts Journal, pp. 33-39.
5. Brace, A., Gatarek, D., Musiela, M., (1997), “The market model of interest rate dynamics,” Mathematical Finance, Vol. 7, pp. 127–147.
6. Brennan, M.J., Schwartz, E.S., (1980), “Analyzing Convertible Bonds”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 15, pp. 907-929.
7. Brigo, D., and Mercurio, F (2006), Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit, Springer Finance.
8. Cairns, A.J.G., (2004), Interest rate models, Princeton University Press, Princeton.
9. Cox, J.C., Ingersoll, J.E., and Ross, S.A. (1980), “An Analysis of Variable Rate Loan Contract,” Journal of Finance, Vol. 53, pp. 389-403
10. Cox, J.C., Ingersoll, J.E., and Ross, S.A. (1985), “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” Econometrica, Vol. 53, pp. 385-407.
11. Dothan, U.L., (1978), “On the Term Structure of Interest Rates,” Journal of Financial Economics, Vol. 6 pp. 59-69.
12. F. A. Longstaff and E. S. Schwartz (2001), “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,” The Review of Financial Studies, Vol. 14, No. 1, pp.113-47.

13. Heath, D., Jarrow, R., Morton, A., (1992), “Bond Pricing and The Term Structure of Interest rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation,” Econometrica, Vol. 60, pp. 77–105.
14. Ho, T.S.Y., Lee, S.B.,(1986), “Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims,” Journal of Finance, Vol. 41, pp. 1011–1029.
15. Hull, J., White, A., (1990), “Pricing Interest-Rate-Derivative Securities,” Review of Financial Studies, Vol. 3(4), pp. 573–592.
16. Hull, J., White, A.,(1994b), “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-factor models,” Journal of Derivatives, pp. 7–16.
17. Jamshidian, F., (1997), “LIBOR and Swap Market Models and Measures,” Finance and Stochastics, Vol. 1, pp. 293–330.
18. Piterbarg. V. V., (2004b), “Pricing and Hedging Callable Libor Exotics in Forward Libor Models,” Journal of Computational Finance, Vol. 8(2), pp. 65-117.
19. Rebonato, R. (2002), Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond, Princeton University Press.
20. Vasicek, O., (1977), “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” Journal of Financial Economics, Vol. 5, pp. 177-88.

國立政治大學 National Chengchi University