單一方程式共整合 – GARCH 模型: 台灣股市之實證研究

王高文 · 毛維凌*

共整合與 GARCH 模型可謂當代總體計量理論中最成功的二個應用, 但是將二者結合在一起的研究卻不多見。就此, 本文建構一個單一方程式共整合 – GARCH(1,1) 模型。該模型參數的最大概似估計式及其漸近分配被導出, 其中共整合參數估計式的漸近分配是混合常態。在實證應用上, 本文以台灣股市之股價指數與其指數期貨之日資料進行模型配適。實證結果顯示股價指數與指數期貨確實是共整合的, 並且二者之干擾項都呈現頗強的 GARCH 效果。

關鍵詞: 單根檢定, 因果檢定, 共整合檢定, 固定相關檢定
JEL 分類代號: C13, C32

1 前言

一般而言, 許多經濟與金融變數是非恆定的 (nonstationary), 但 Engle and Granger (1987) 發現有些非恆定變數之線性組合是恆定的。據此, 他們提出共整合概念, 賦此恆定的線性組合予「長期均衡」的實質經濟意義, 並將觀察到的殘差 (residuals) 解釋成「短期動態誤差修正項」。自此後, 共整合理論與其實證應用廣受經濟學界重視與研究。然而,衆多研究亦發現很多的經濟與金融變數的條件變異數是隨時間變動的並且有叢聚波動 (clustering volatility) 的特徵,其中尤以高頻率之金融變數最爲普遍。爲捕捉此條件異質變異數而發展的模型在實證應用上最成功者首推 Engle (1982) 提出之自迴歸條件異質變異數

*作者分別爲私立德明技術學院財務金融系助理教授與國立政治大學經濟系教授。作者特別感謝執行編輯林金龍教授與二位匿名評審所提供之詳盡意見與建議。文中若有任何錯誤,當由作者負責。

經濟論文叢刊 (*Taiwan Economic Review*), 32:1 (2004), 1–24。
國立台灣大學經濟學系出版

(autoregressive conditional heteroscedasticity: ARCH) 模型及其家族, 而其中應用最廣的當爲 Bollerslev (1986) 設立之 GARCH (generalized ARCH) 模型。截至目前, 共整合模型與 GARCH 模型可謂總體計量理論中應用最廣泛的模型。然而, 我們發現將二者結合在一起的研究並不多見。

Franses *et al.* (1994) 的模擬試驗是利用 Engle and Granger (1987) 的二階段估計法檢定雙變數 VAR–GARCH 模型的共整合關係。相同地, Lee and Tse (1996) 也是運用模擬的技術研究 VAR–GARCH 模型的共整合檢定問題; 他們指出, 若 GARCH 型干擾項的四階動差不存在, 則 Johansen (1988) 的概似比檢定 (也稱跡數檢定 (trace test)) 會過度拒絕無共整合的虛無假設, 因而有產生虛無共整合 (spurious cointegration) 的可能。在理論模型方面, Li *et al.* (2001) 研究之條件異質性的共整合模型已考慮了多變數 ARCH(q) 過程的干擾項。由於參數估計式的 Hessian 矩陣是區塊對角化的矩陣, 所以他們採用分離式的估計法: 共整合參數與 ARCH 參數分開估計 (請見該文頁 1140, 1143)。這種方法是 Ahn and Reinsel (1990) 提出的二階段降階 (reduced rank) 估計程序。另外, Wong *et al.* (2000) 的研究是將 Li *et al.* (2001) 的模型擴展至多變數 GARCH 過程的干擾項; 與 Li *et al.* 相同的, 他們也是採用分離式的估計法。值得一提的, 他們採用的是三階段估計法。第一階段, 以 Ahn and Reinsel (1990) 的最小平方法估計誤差修正模型 (error correction model: ECM) 的參數。第二階段, 利用第一階段估計的殘差進行 GARCH 參數的最大概似估計 (其中 ECM 的參數估計值是固定的)。第三階段, 將第二階段估出的 GARCH 參數代入對數 – 概似函數, 然後再次地估計 ECM 的參數 (此時 GARCH 參數的估計值固定不變)。又, Ling and McAleer (2003) 雖已導出 VARMA–GARCH 模型參數的全訊息最大概似估計式 (maximum likelihood estimators: MLE) 及其漸近分配 (asymptotic distributions), 但他們的討論只限於恆定的 VARMA–GARCH 模型。目前, 關於干擾項爲 GARCH 過程的時間序列模型的理論研究已漸受學界重視 (e.g., Ling and Li 1998, 2003; Ling and McAleer 2003; Seo, 1999)。對「時間序列 – GARCH 模型」有興趣的讀者可參考 Li *et al.* (2002), 該文對此類模型的理論發展有相當完整的文獻回顧。然而, 就作者所知及由 Li *et al.* (2002) 之文獻回顧間接推測, 關於共整合 – GARCH 模型的理論研究, 到目前爲止仍尚未有突破性的進展。

本文的主要目的是建立一個簡單的共整合 – GARCH 模型, 然後探討此模

型的共整合參數與 GARCH 參數的 MLE 及其漸近分配。自 Engle and Granger (1987) 提出二階段估計法後, 迄今已發展之共整合系統的估計方法可概分爲二: 一爲單一方程式估計法, 另一爲系統估計法。前者主要有 Phillips and Hansen (1990) 之 Fully-Modified OLS 估計法以及 Hendry 分析法之動態迴歸設定; 後者當屬 Johansen (1988) 之全訊息最大概似估計法最具代表性。Phillips (1988, 1991) 與 Banerjee *et al.* (1993) 指出, 若共整合系統之干擾項可校正爲聯合的平賭差分序列 (martingale difference sequence: MDS), 則單一方程式共整合模型之參數的最小平方估計式 (least squares estimator: LSE) 是最適的, 其效率等同於全訊息的 MLE。此種動態迴歸設定更享有待估計參數較簡約的好處。循此, 本文先將 Phillips (1988) 討論之共整合模型的干擾項改爲 Bollerslev's (1990) 固定條件相關 (constant conditional correlation: CCC) 的雙變數 GARCH(1,1) 過程。[1] 然後應用 Hendry 分析法, 以直交校正 (orthogonal correction) 程序將二條非恆定但是彼此共整合的時間序列結合爲單一方程式的共整合 – GARCH(1,1) 模型, 其中包含有整合的 (integrated) 與恆定的迴歸子 (regressors)。如此設定可使共整合模型具有條件異質變異數的特徵, 並且使模型之干擾項成爲聯合的 MDS。Seo (1999) 與 Ling and Li (1998) 分別指出, 用最大概似法估計單變數的非恆定 AR–GARCH 模型與 ARMA–GARCH 模型的參數是比較有效的。因爲共整合模型是單根模型的延伸, 所以可預期的, MLE 比 LSE 有效的結論在本文建構的模型中仍將繼續成立。基於此, 我們採用最大概似法估計參數。參考 Seo (1999) 與 Ling and Li (1998) 的分析法, 我們導出共整合參數與 GARCH 參數的 MLE, 其中共整合參數的 MLE 的漸近分配是混合常態 (mixed normal)。如前述, 因爲共整合系統的干擾項已被校正爲聯合的 MDS, 所以上述 MLE 的效率應當等同於全訊息的 MLE。因此, 本文與 Li *et al.* (2001) 及 Wong *et al.* (2000) 二篇研究的不同處在於, 他們分析的向量 ECM 比本文設定的單一方程式共整合模型更一般化, 但本文採用之估計法卻

[1]事實上, 將單變數 ARCH 家族推向多變數領域時, 由於自迴歸與非線性之結構, 使得待估計參數的數目急遽地膨脹。解決之道, 除 Bollerslev (1990) 之 CCC 假設外, 尚有 Engle and Kroner (1995) 之 “BEKK” 公式。以上二個方法皆可以有效減縮待估計參數的數目, 但是前者模型之參數的解釋較具經濟上的實質意義。又, Bollerslev (1990) 發現, 將 CCC 假設應用在國際匯率的實證研究是適當的; 此一假設後經 Tse (2000) 發展之 LM 檢定支持, Tse 並進一步將之應用於現貨與期貨價格之實證研究; Ling and McAleer (2003) 亦採用 CCC 假設。相同地, 本文也將共整合 – GARCH 模型之條件變異數 — 共變異數矩陣假設爲 CCC 的型式。另外, 本文在 4.4 節提出一個診斷檢定, 可檢定 CCC 假設是否合理。

又比他們所採用者更具效率。因爲 Li *et al.* (2001, Eqs. 4.4 and 5.4) 及 Wong *et al.* (2000, 頁 9) 是用 Engle (1982) 建議之 scoring 演算法進行遞迴估計, 共整合參數與 GARCH 參數不是同時地更新, 而本文是使用 Bollerslev (1986) 建議之 BHHH 演算法進行遞迴估計, 共整合參數與 GARCH 參數是同時的更新。誠如一位評審人點出的, 當共整合參數牽涉到 GARCH 參數的估計時, 聯合估計必然是比較有效率的。換言之, Hendry 分析法在 GARCH 型誤差的共整合模型中仍會繼續維持其最適效率性, 但是分離式的有限訊息最大概似估計法則會產生訊息上的損失。這樣的結論本質上可由 Pagan (1984), Pagan and Ullah (1988) 與 Phillips (1988) 等文章間接推論獲得。事實上, 在隨機波動 (stochastic volatility) 模型的文獻中, Sandmann and Koopman (1998) 與 Singleton (2001) 也有類似的發現。

最後, 在實證應用上, 我們是用台灣股市的加權股價指數與其指數期貨契約的日資料進行模型配適。本文共估計 4 組資料, 最後只有 3 組資料適合本文建構的模型。在實證過程中我們分別討論 GARCH 型干擾項對單根檢定, 因果檢定與共整合檢定的影響。在單根檢定方面, 因爲實證資料顯現的 GARCH 效果並不強 (四階動差存在), 所以本文先用 Dickey and Fuller (1979) 提出之檢定量進行單根檢定。依據 Kim and Schmidt (1993) 模擬試驗之結論, 此舉並不會有產生過度拒絕單根的疑慮。另外, 本文亦以 Ling *et al.* (2003) 建議之方法進行 MLE 單根檢定。在因果檢定方面, 我們是依 Granger (1988) 與 Vilasuso (2001) 的建議進行。主要結論是: 台灣股市的指數期貨目前並沒有領先現貨市場, 所以尚未具備價格發現的功能。在共整合檢定方面, 因爲 Engle and Granger (1987) 的二階段共整合檢定本質上就是一個單根檢定 (例如 Dickey-Fuller 檢定), 所以與上述單根檢定相似的, 只要 GARCH 型干擾項的四階動差存在, 則以殘差爲基礎的二階段共整合檢定並不會產生 size 扭曲, 自然也就不會有 Lee and Tse (1996) 指出的「虛無共整合」問題。

本文其餘內容分述如下。第 2 節, 單一方程式共整合模型回顧與 CCC 雙變數 GARCH 過程設定。第 3 節, 利用最大概似估計程序導出單一方程式共整合 – GARCH(1,1) 模型參數的 MLE 及其漸近分配。這些理論結果基本上是 Ling and Li (1998) 的研究的延伸。第 4 節爲實證分析。本文選取台灣股市之股價指數與其指數期貨契約的收盤日資料進行模型配適。實證結果顯示, 股價指數與指數期貨是彼此共整合的, 並且這些非恆定變數的干擾項都有明顯 GARCH

特徵。由於本文估計出的 GARCH 參數都能滿足二階與四階動差存在的限制式, 隱含傳統的單根檢定與共整合檢定的建議都是可信賴的。另外, 本節亦提出一個診斷檢定, 可檢定 CCC 假設是否合理。診斷檢定的結果顯示, CCC 假設應用在股價指數與指數期貨這種類型的資料是適當的。第 5 節爲結論。

2 模型回顧與設定

2.1 單一方程式共整合模型回顧

假設雙變數共整合系統的資料產生過程 (Data Generating Process: DGP) 爲

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \gamma y_{2t} + u_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= u_{2t}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{u}_t = (u_{1t}, u_{2t})'$ 是平均數爲 0, 變異數–共變異數矩陣爲弱恆定的干擾項 (weakly stationary disturbances)。在文獻上, 這些干擾項可爲同期相關與序列自我相關。明顯的, $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ 是整合階次爲 1 的變數 (記作 I(1)), 並且線性組合 $(1, -\gamma)\mathbf{y}_t$ 是恆定的。一般將此線性組合定義爲系統的長期均衡關係, 而將 u_{1t} 視爲此關係之短期誤差修正項。Stock (1987) 指出共整合參數 γ 的 LSE 具有超一致性 (superconsistency) 的性質, 其收斂至眞實參數 γ_0 之速率爲 n (樣本觀察值個數), 不是古典理論的 $\sqrt{n}$。雖然 γ 的 LSE 具超一致性, 但因受迴歸子 y_{2t} 爲內生變數及干擾項爲序列相關之影響, 使得 γ 之 LSE 的漸近分配中有「擾嚷參數」(nuisance parameters)。

Banerjee *et al.* (1993) 與 Phillips (1988, 1991) 指出, 透過單一方程式動態迴歸設定即可順利消除擾嚷參數, 從而獲得 γ 之最適估計式。此種動態迴歸設定統稱爲 Hendry 分析法。循此, (1) 式可改寫爲

$$y_{1t} = \gamma y_{2t-1} + \lambda' \mathbf{x}_t + \eta_t, \tag{2}$$

其中 $\eta_t = u_{1t} - \mathbb{E}[u_{1t}|u_{2t}, \mathcal{F}_{t-1}]$ 是一個 MDS, $\mathbb{E}[\cdot|\cdot]$ 是條件期望值運算元, $\mathbf{x}_t = (u_{2t}, \mathbb{E}[u_{1t}|u_{2t}, \mathcal{F}_{t-1}])'$, $\lambda = (\gamma, 1)'$, $\mathcal{F}_t$ 是截至 t 期止有效的訊息集合。Phillips (1991) 指出, 共整合系統之估計與推論的重點在於能否將單根變數之訊息納入估計程序中。亦即, 只要 $(\eta_t, u_{2t})'$ 是聯合的 MDS, 則他們的長期變異數 – 共變異數矩陣是一個對角矩陣。因此由最小平方法, (2) 式之 γ 的 LSE

(記作 $\hat{\gamma}_{LS}$) 是 γ_0 的不偏估計式, 而且其漸近有效性與全訊息最大概似估計式是同等的。然而, 既有的研究並未探討 $\mathbf{u}_t$ 的變異數是條件異質的狀況, 所以結合條件異質變異數的單一方程式共整合模型的統計性質目前仍屬未知。我們假設 $\mathbf{u}_t$ 是 CCC 的雙變數 GARCH 過程, 然後將研究的焦點集中於共整合參數 γ 的 MLE (記作 $\hat{\gamma}_n$) 及其漸近分配上。另外, 非恆定時間序列與 GARCH 型干擾項的結合亦衍生出一些關於單根檢定,因果檢定與共整合檢定的議題。我們在第 4 節的實證分析中會討論這些議題。現在, 先設定 CCC 的 GARCH 過程。

2.2 固定條件相關的雙變數 GARCH 過程

假設 $\mathbf{u}_t = (\sqrt{h_{1t}}\epsilon_{1t}, \sqrt{h_{2t}}\epsilon_{2t})'$, $\mathbf{u}_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$, 其中隨機變數 $(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t})' \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_\epsilon)$, 條件變異數 — 共變異數矩陣

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{h}_t \Sigma_\epsilon \mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} h_{1t}^{1/2} & 0 \\ 0 & h_{2t}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1t}^{1/2} & 0 \\ 0 & h_{2t}^{1/2} \end{bmatrix}。 \tag{3}$$

以上設定爲 CCC 的雙變數 GARCH 模型 (Bollerslev 1990), 其中 ρ 爲 ϵ_{1t} 與 ϵ_{2t} 之相關係數, 也是 u_{1t} 與 u_{2t} 的條件相關係數。本文進一步假設 $h_{it} = w_i + \alpha_i u_{it-1}^2 + \beta_i h_{it-1}$, $w_i > 0, \alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i < 1, \beta_i^2 + 2\alpha_i\beta_i + 3\alpha_i^2 < 1$, $i = 1, 2$。這些參數限制式隱含 $\mathbf{u}_t$ 是共變異數恆定的干擾項, 並且其四階動差存在, i.e., $\mathbb{E}(u_{it}^4) < \infty$。據此, (2) 式可改寫爲

$$y_{1t} = \gamma y_{2t} + \rho\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2} + \eta_t, \quad \eta_t = \epsilon_{1.2t}h_{1t}^{1/2}, \tag{4}$$

其中 $\epsilon_{1.2t} = \epsilon_{1t} - \rho\epsilon_{2t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{1.2})$, $\sigma_{1.2} = 1 - \rho^2$, $\mathbb{E}(\epsilon_{1.2t}^3) = 0$, $\mathbb{E}(\epsilon_{1.2t}^4) = 3\sigma_{1.2}^2$。給定 $\mathcal{F}_{t-1}$, η_t 是條件均數等於 0, 條件變異數等於 $\sigma_{1.2}h_{1t}$ 的常態隨機變數; 另外, 我們將其非條件 (unconditional) 變異數記作 $\sigma^2 = \mathbb{E}(\eta_t^2) = \sigma_{1.2}w_1/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$。因爲 η_t 與 u_{2t} 直交, 故保證聯合概似函數可分解成邊際的與條件的概似函數。這意謂著共整合參數 γ 可單獨透過 (4) 式估計與認定, 不用理會 u_{2t} (Banerjee *et al.* 1993, p. 245)。經由動態迴歸設定, $\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2}$ 之訊息被導入原本靜態的共整合系統中, 這使得共整合參數的估計必然牽涉到 h_{1t} 的估計 (亦即 w_1, α_1, β_1 的估計)。因此, 在下一節本文應用最大概似法估計 (4) 式, 式中的參數是聯合地被估出。由 Phillips (1988) 的論點推測, 此舉當能提高參數估計的有效性。亦即, $\hat{\gamma}_n$ 的效率會優於 $\hat{\gamma}_{LS}$。此後, 爲使符號簡單, 本文令 $(w_1, \alpha_1, \beta_1) = (w, \alpha, \beta)$。

3 單一方程式共整合 – GARCH(1,1) 模型

給定起始值 $\mathcal{S}_0 = (\mathbf{y}_0', \mathbf{u}_0', h_{10}, h_{20})$, 則對數–條件概似函數可表示爲

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(\theta) &= \sum_{t=1}^{n} l_t(\theta),\\ l_t(\theta) &= -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\sigma_{1.2} - \frac{1}{2}\ln h_{1t} - \frac{1}{2}\frac{\eta_t^2}{\sigma_{1.2}h_{1t}},\end{aligned} \tag{5}$$

其中未知的參數向量 $\theta' = (\gamma, \rho, \delta')$, $\delta' = (w, \alpha, \beta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^5$, Θ 爲參數空間。依照 Seo (1999) 與 Ling and Li (1998) 的方法, 令 $\theta_0' = (\gamma_0, \rho_0, \delta_0')$, $\delta_0' = (w_0, \alpha_0, \beta_0)$ 爲 θ 之眞實參數值, $\hat{\theta}_n$ 爲 θ 之 MLE。$l_t(\theta)$ 之一階與二階導數爲

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial\gamma} = -\frac{\xi_t}{h_{1t}}\left[a(L)u_{1t-1}y_{2t-1}\right] + \frac{\eta_t y_{2t}}{\sigma_{1.2}h_{1t}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial\rho} = \frac{\rho}{\sigma_{1.2}}\left[1 - \frac{\eta_t^2}{\sigma_{1.2}h_{1t}}\right] + \frac{\eta_t\epsilon_{2t}}{\sigma_{1.2}h_{1t}^{1/2}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial\delta} = \frac{\xi_t}{2h_{1t}}\frac{\partial h_{1t}}{\partial\delta}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\gamma^2} &= -\left[\frac{2\xi_t}{h_{1t}^2} + \frac{u_{1t}^2 + u_{1t}\eta_t}{\sigma_{1.2}h_{1t}^3}\right]\left[a(L)u_{1t-1}y_{2t-1}\right]^2\\ &\quad + 2\frac{(u_{1t}+\eta_t)y_{2t}}{\sigma_{1.2}h_{1t}^2}\left[a(L)u_{1t-1}y_{2t-1}\right]\\ &\quad + \frac{\xi_t}{h_{1t}}\left[a(L)y_{2t-1}^2\right] - \frac{y_{2t}^2}{\sigma_{1.2}h_{1t}},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\gamma\,\partial\rho} &= \left(\frac{u_{1t}\epsilon_{2t}}{\sigma_{1.2}h_{1t}^{3/2}} - \frac{2\rho\eta_t u_{1t}}{\sigma_{1.2}^2 h_{1t}^2}\right)\left[a(L)u_{1t-1}y_{2t-1}\right]\\ &\quad + \left(\frac{2\rho\eta_t}{\sigma_{1.2}^2 h_{1t}} - \frac{\epsilon_{2t}}{\sigma_{1.2}h_{1t}^{1/2}}\right)y_{2t},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\gamma\,\partial\delta'} &= \left[\left(\frac{u_{1t}^2 + u_{1t}\eta_t}{2\sigma_{1.2}h_{1t}^3} + \frac{\xi_t}{h_{1t}^2}\right)\left[a(L)u_{1t-1}y_{2t-1}\right]\right.\\ &\quad \left. - \frac{u_{1t}+\eta_t}{2\sigma_{1.2}h_{1t}^2}y_{2t}\right]\frac{\partial h_{1t}}{\partial\delta'},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\rho^2} = \frac{1+\rho^2}{\sigma_{1.2}^2}\left[1 - \frac{\eta_t^2}{\sigma_{1.2}h_{1t}}\right] + \frac{4\rho\eta_t\epsilon_{2t}}{\sigma_{1.2}^2 h_{1t}^{1/2}} - \frac{\epsilon_{2t}^2}{\sigma_{1.2}} - \frac{2\rho^2\eta_t^2}{\sigma_{1.2}^3 h_{1t}}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\rho\partial\delta'} = \left[\frac{\rho\eta_t u_{1t}}{\sigma_{1.2}^2 h_{1t}^2} - \frac{u_{1t}\epsilon_{2t}}{2\sigma_{1.2}h_{1t}^{3/2}}\right]\frac{\partial h_{1t}}{\partial\delta'}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\delta\partial\delta'} = -\frac{u_{1t}^2 + u_{1t}\eta_t}{4\sigma_{1.2}h_{1t}^3}\frac{\partial h_{1t}}{\partial\delta}\frac{\partial h_{1t}}{\partial\delta'} + \xi_t\frac{\partial}{\partial\delta'}\left[\frac{1}{2h_{1t}}\frac{\partial h_{1t}}{\partial\delta}\right], \tag{14}$$

其中 L 爲後移運算元, $\xi_t = u_{1t}\eta_t/(\sigma_{1.2}h_{1t}) - 1$, $a(L) = \alpha/(1-\beta L) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L^k$。令 $D_t = \partial l_t(\theta)/\partial\theta|_{\theta=\theta_0}$, $I_t = \partial^2 l_t(\theta)/\partial\theta\partial\theta'|_{\theta=\theta_0}$。將 $\mathcal{L}_n(\theta)$ 之一階導數在 θ_0 點上作一階的泰勒展開可得到

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n(\theta)}{\partial\theta} = \sum_{t=1}^{n}\left\{D_t + I_t(\theta-\theta_0) + (I_t(\theta_n^*) - I_t)(\theta-\theta_0)\right\}, \tag{15}$$

其中 θ_n^* 位於 θ 與 θ_0 之間。

首先, 定義 5×5 的對角矩陣 $Q_n = \mathrm{diag}(n^{-1}, n^{-1/2}, \cdots, n^{-1/2})$, 然後將 D_t 與 I_t 分解爲 $\{D_{it}\}$ 與 $\{I_{ijt}\}$, $i, j = \gamma, \rho, \delta$。由 Ling and Li (1998), 我們可導出, (1) 若 $\| (1/\sqrt{n})Q_n^{-1}(\theta-\theta_0) \| < 1$, 則 $\sum_{t=1}^{n} Q_n(I_t(\theta) - I_t)Q_n = O_p(\| (1/\sqrt{n})Q_n^{-1}(\theta-\theta_0) \|)$; (2) $(1/\sqrt{n})Q_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = o_p(1)$, 隱含 $\hat{\theta}_n$ 是 θ_0 的一致性估計式; (3) $Q_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = -[\sum_{t=1}^{n} Q_n I_t Q_n + O_p(\| (1/\sqrt{n})Q_n^{-1}(\theta_n^* - \theta_0) \|)]^{-1}\sum_{t=1}^{n} Q_n D_t$。"$\| \cdot \|$" 表示 Euclidean norm, $O_p(1)(o_p(1))$ 表示 bounded (converge to zero) in probability。由 Hansen (1992, Theorem 2.1) 與 Engle (1982, Lemma) 可推知 $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} I_{\rho\delta t} = n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n} I_{\gamma\rho t} = n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n} I_{\gamma\delta t} = o_p(1)$。亦即, 運用不同的收斂速度, Q_n, 可使標準化的 Hessian 矩陣成爲一個區塊對角的矩陣; 這隱含長期參數 (γ) 與短期參數 (ρ, δ') 的 MLE 是漸近獨立的, 並使得 (4) 式的統計推論可回歸到古典理論的模式。

由 Ergodic 定理與大數法則可進一步推知 $n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} D_{\rho t} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^{-2})$, $n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} D_{\delta t} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\delta^{-1})$, $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} I_{\rho\rho t} \xrightarrow{p} -\sigma_\rho^{-2}$, $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} I_{\delta\delta t} \xrightarrow{p} -\Sigma_\delta^{-1}$, 其中 "$\xrightarrow{\mathcal{D}}$" ("$\xrightarrow{p}$") 表示 convergence in distribution (probability),

$$\sigma_\rho^2 = \frac{\left(1-\rho_0^2\right)^2}{1+\rho_0^2},\ \Sigma_\delta = \frac{4}{g}\mathrm{diag}\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{h_{1t}^2(\theta_0)}\frac{\partial h_{1t}(\theta_0)}{\partial\delta}\frac{\partial h_{1t}(\theta_0)}{\partial\delta'}\right]\right)^{-1},$$

$g = 1 + 1/(1-\rho_0^2)$。故, $\hat{\rho}_n$ 與 $\hat{\delta}_n = (\hat{w}_n, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)'$ 的漸近分配分別爲

$$\sqrt{n}\left(\hat{\rho}_n - \rho_0\right) = \left(\frac{-1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_{\rho\rho t}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} D_{\rho t}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_\rho^2\right), \quad (16)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\delta}_n - \delta_0) = \left(\frac{-1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_{\delta\delta t}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} D_{\delta t}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \Sigma_\delta\right)。 \quad (17)$$

由 (16) 式, 我們可輕易地獲得虛無假設 $\rho_0 = 0$ 的檢定量, $\sqrt{n}\hat{\rho}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$。

至於 $\hat{\gamma}_n$ 的分配, 爲使符號簡潔, 令 $D_{\gamma t} = \partial l_t(\theta)/\partial\gamma$, $I_{\gamma\gamma t} = \partial^2 l_t(\theta)/\partial\gamma\partial\gamma'$。又, 令 $\sigma_u^2 = \mathbb{E}(u_{2t}^2) = w_2/(1-\alpha_2-\beta_2)$, $\varpi_t = \sigma_u\eta_t/(\sigma_{1.2}h_{1t})$, $v_{t,j} = \sigma_u\xi_t u_{1t-j}/h_{1t}$, $j \geq 1$。由 Seo (1999) 與 Ling and Li (1998), 應用 invariance 原理, 則 $\Lambda_t = (u_{2t}, \eta_t, \varpi_t, v_{t,j}, v_{t,k})'$ 之部分和 (partial sum) 的漸近分配爲: (假設 $k > j$)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\Lambda_t \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} G_1(r) \\ G_2(r) \\ U(r) \\ V_j(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} = BM(\Omega),$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u & \sigma_u^2/\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g\phi_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g\phi_k^2 \end{bmatrix}。 \quad (18)$$

這裡, $[nr]$ 表示取 nr 的最大整數, $BM(\Omega)$ 是均數等於 $\mathbf{0}$, 長期變異數–共變異數矩陣等於 $r\Omega$ 的布朗運動, $r \in [0,1]$, $1/\kappa = \mathbb{E}[1/(\sigma_{1.2}h_{1t})]$, $\phi_j^2 = \mathbb{E}(\sigma_u^2 u_{1t-j}^2/h_{1t}^2)$, $\phi_k^2 = \mathbb{E}(\sigma_u^2 u_{1t-k}^2/h_{1t}^2)$。特別地, 若 $k \neq j$, $V_j(r)$ 與 $V_k(r)$ 彼此無關。

接著, 令 $V(r) = U(r) - V_0(r)$, $V_0(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j V_j(r) = BM(gA(a,\phi))$, 其中 $A(a,\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\phi_j^2$。因爲 h_{1t} 是二階恆定的 GARCH 過程, 故 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是指數型遞減的數列; 並且若 $\phi_j^2 < \infty, \forall j$, 則 $A(a,\phi)$ 亦是有限的。爲便於分析, 令 $W_1(r) = G_1(r)/\sigma_u$, $W_2(r) = G_2(r)/\sigma$; 如此設定隱含 $(W_1(r), W_2(r))$

是相互獨立的標準布朗運動。由 Ω, 我們亦可推知 $W_1(r)$ 與 $V(r)$ 相互獨立, 但 $W_2(r)$ 與 $V(r)$ 沒有。根據以上設定並參考 Engle (1982, Lemma), Hansen (1992, 1995) 與 Seo (1999), 由 (6) 與 (9) 式本文可以導出 $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} D_{\gamma t} \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_0^1 W_1(r)\,\mathrm{d}V(r)$, $-n^{-2}\sum_{t=1}^{n} I_{\gamma\gamma t} \xrightarrow{\mathcal{D}} K\int_0^1 W_1^2(r)\ \mathrm{d}r$, 其中 $K=\sigma_u^2/\kappa+gA(a,\phi)$ 爲 $V(1)$ 的變異數。因此, $\hat{\gamma}_n$ 的漸近分配爲

$$n\left(\hat{\gamma}_n-\gamma_0\right)=\left(n^{-2}\sum_{t=1}^{n} I_{\gamma\gamma t}\right)^{-1}\left(n^{-1}\sum_{t=1}^{n} D_{\gamma t}\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}\frac{\int_0^1 W_1(r)\mathrm{d}V(r)}{K\int_0^1 W_1^2(r)\mathrm{d}r}。\tag{19}$$

因爲 $W_1(r)$ 與 $V(r)$ 相互獨立, 所以 $\hat{\gamma}_n$ 之漸近分配是混合的常態 (Johansen, 1995, Lemma 13.2)。透過最大概似估計, 共整合參數與 GARCH 參數的估計同時進行。已知 $(\eta_t, u_{2t})'$ 是聯合的 MDS, 因此 $\hat{\gamma}_n$ 之漸近分配的漸近有效性與全訊息最大概似估計式是同等的。

4 實證應用: 台灣股價指數之現貨與期貨

4.1 資料

一般而言, 股價指數及其衍生的期貨契約是高度相關的非恆定變數, 亦即二者是共整合的。現在的實證研究均指出股價指數之現貨與期貨之聯合分配應是時間相依的條件變異數過程, 例如 GARCH 型誤差。因此, 利用雙變數的誤差修正 GARCH 模型配適股價資料是自然且合理的選擇。

台灣期貨交易所於 1998 年 7 月 21 日推出第一個期貨商品: 台灣加權股價指數期貨 (簡稱台股期貨並記作 F_1), 標的物爲台灣證券交易所發行量加權股價指數 (簡稱台股指數並記作 S_1)。1 年後, 1999 年 7 月 21 日, 再推出兩個期貨契約: 電子類股價指數期貨 (簡稱電子期貨並記作 F_2) 及金融保險類股價指數期貨 (簡稱金融期貨並記作 F_3), 其標的物分別爲台灣證券交易所電子類股價指數 (簡稱電子指數並記作 S_2) 及金融保險類股價指數 (簡稱金融指數並記作 S_3)。另外, 該所又於 2001 年 4 月 9 日推出標的物爲台股指數的小型台指期貨 (記作 F_4)。本文分別由台灣期貨交易所, 台灣證券交易所與新報資料庫取得上述變數的收盤日資料。事實上, 每一種期貨同時有 5 個契約在同一交易日交易。本文採用之期貨指數資料爲交易最活絡的「最近月契約」之收盤價格。又, 因考慮指數期貨市場開放之初指數價格較不安定 (成交口數少, 價格波動

大), 故本文將初期階段的部分交易資料刪除, 以避免實證分析受此不安定因素影響。本文共分析四個模型, 模型 I, (S_1, F_1), 期間 1999 年 2 月 1 日至 2002 年 12 月 31 日, 1008 筆觀察值; 模型 II, (S_2, F_2) 與模型 III, (S_3, F_3), 資料期間同爲 1999 年 12 月 1 日至 2002 年 12 月 31 日, 785 筆觀察值; 模型 IV, (S_1, F_4), 期間 2001 年 6 月 1 日至 2002 年 12 月 31 日, 393 筆觀察值。以上資料是經過對數轉換並乘上 100 的數值, 亦即, 例如, $S = 100 \times \ln$ (股價指數)。因此, ΔS 與 ΔF 即爲投資於現貨與期貨的日報酬率 (百分比)。本文將這些報酬率的敍述統計量列於表 1 上方。

表 1 中每個報酬率的峰度係數都至少在 3 以上, 顯示這些變數可能是來自「高峰厚尾」的分配; 此外, 這些報酬率之樣本平均都趨近於 0。本文先針對個別報酬率變數進行條件均數爲 0 的 GARCH(1,1) 模型估計, 再檢定此結構是否合理。表 1 中央所列之估計值顯示, 所有報酬率變數之 GARCH 參數 (w_r, α_r, β_r) 都至少達 5% 的顯著水準, 並且七個模型的估計值都滿足 $\alpha_r + \beta_r < 1$, $\beta_r^2 + 2\alpha_r\beta_r + 3\alpha_r^2 < 1$, 隱含這些 GARCH(1,1) 過程是二階恆定的並且四階動差存在。而這七個 GARCH(1,1) 模型 $(\Delta S_{1t}, \ldots, \Delta S_{3t}, \Delta F_{1t}, \ldots, \Delta F_{4t})$ 的標準化殘差平方的 20 階 Ljung-Box Q 檢定值 (對應之 p 值) 分別爲 21.26 (0.382), 21.61 (0.362), 16.71 (0.672), 20.69 (0.415), 18.92 (0.527), 15.68 (0.736), 26.98 (0.136); 在 5% 顯著水準下, 這些值均無法拒絕無序列相關之虛無假設, 故使用 GARCH(1,1) 過程來描述這些報酬率的條件變異數的動態是適當的。

4.2 單根檢定

在進行各變數的單根檢定前, 本文先討論單根檢定的相關問題。假設 y_t 是 I(1) 變數, 其 DGP 如下: (令 $y_0 = 0$)

$$y_t = \varphi y_{t-1} + u_t, \quad u_t = \epsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = w_u + \alpha_u u_{t-1}^2 + \beta_u h_{t-1}, \tag{20}$$

其中 ϵ_t 是 i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, $\varphi = 1$。已知, 若 y_t 之 GARCH 型誤差是非整合的 $(\alpha_u + \beta_u < 1)$, 非退化的 $(w_u > 0)$ 並且波動參數 α_u 不大 (隱含 $\mathbb{E}(u_t^4) < \infty$), 則 DF (Dickey-Fuller) 單根檢定的建議仍是可信賴的 (Kim and Schmidt 1993; 此後簡稱 KS), 因爲 $\varphi = 1$ 的 DF 檢定統計量的漸近分配仍舊沒變 (Ling and Li 1998; Li *et al.* 2002)。雖然如此, Ling and Li (1998) 已進一步證明 φ 的 MLE (記作 $\hat{\varphi}_{ML}$) 的效率優於其 LSE (記作 $\hat{\varphi}_{LS}$); 更現在的, Ling *et al.* (2003) 的模擬

表 1: 敍述統計量, GARCH(1,1) 估計與單根檢定

	ΔS_1	ΔS_2	ΔS_3	ΔF_1	ΔF_2	ΔF_3	ΔF_4
平均數	−0.0273	−0.0953	−0.0452	−0.0303	−0.0971	−0.0490	−0.0340
標準差	1.8823	2.3512	2.0984	2.1550	2.7567	2.3660	2.2194
偏態係數	0.0833	0.1859	0.1695	0.0684	0.1456	0.1202	0.1377
峰度係數	3.7939	3.2189	3.4996	4.6476	3.5293	3.9633	4.2907
觀察值	1,007	784	784	1,007	784	784	392
w_r	0.2063	0.2777	0.4138	0.1474	0.3446	0.2988	0.2061
	(2.665)	(2.273)	(2.082)	(3.293)	(2.807)	(2.656)	(1.863)
α_r	0.1054	0.0741	0.0909	0.1086	0.1062	0.0926	0.0702
	(4.188)	(2.887)	(3.518)	(5.490)	(3.949)	(4.257)	(2.591)
β_r	0.8368	0.8759	0.8150	0.8622	0.8486	0.8539	0.8903
	(21.47)	(21.27)	(13.12)	(37.55)	(23.39)	(25.91)	(23.40)
	單根檢定						
	S_1	S_2	S_3	F_1	F_2	F_3	F_4
$\hat{\tau}_{n\mu}$	−0.484	−1.170	−0.656	−0.475	−1.030	−0.638	−0.328
ρ_c	0.901	0.926	0.936	0.817	0.868	0.895	0.897
c_ρ	1.110	1.080	1.068	1.223	1.152	1.117	1.114
M_φ	0.015	−0.125	−0.106	0.011	−0.162	−0.090	−0.026

* S 爲股價指數現貨, F 爲股價指數期貨, ΔS 與 ΔF 分別爲現貨與期貨的日報酬率; “1” 代表台股指數, “2” 電子類指數, “3” 金融保險類指數, “4” 小型台指期貨。本表報酬率之迴歸式爲條件均數等於 0 的標準 GARCH(1,1) 模型, (w_r, α_r, β_r) 爲對應之參數, 小括弧內爲 z 統計量。$\hat{\tau}_{n\mu}$ 是 (20) 式 $\varphi = 1$ 的 DF 單根檢定值 (t-檢定值), 其 5% 顯著水準的臨界點爲 -1.95。$M_\varphi = nc_\rho(\hat{\varphi}_{ML} - 1)$ 是 MLE 單根檢定的統計量, $\{n = 1000, \rho_c = 0.9$, 5% 顯著水準$\}$ 的臨界點爲 -7.5716, $\{n = 1000, \rho_c = 0.8$, 5% 顯著水準$\}$ 爲 -7.1699, $\{n = 500, \rho_c = 0.9$, 5% 顯著水準$\}$ 爲 -7.5942, $\{n = 300, \rho_c = 0.9$, 5% 顯著水準$\}$ 爲 -7.6011 (Ling *et al.*, 2003, Table 6)。7 個變數之 $\hat{\varphi}_{ML}$ 都非常接近 1, 其中變數 S_1 與 F_1 的估計值大於 1, 其餘估計值小於 1。因爲 7 個 $\hat{\varphi}_{ML}$ 的可辨識精確度在小數點第四位以後, 故本表不列出這些估計值, 以避免因近似值問題造成混淆。

結果也傾向支持 $\hat{\varphi}_{ML}$ 較有效這個論點 (特別是 $n > 300$ 之樣本)。雖然表 1 的 GARCH(1,1) 的估計值顯示, 本文使用的股價資料應不會陷入過度拒絕有單根的虛無假設的問題, 但爲求慎重我們仍進行下列二種單根檢定: 傳統的 DF 檢定與 Ling *et al.* 的 MLE 單根檢定。根據 Ling *et al.* (2003, p. 11), 若 ϵ_t 是 i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, 則 $H_0 : \varphi = 1$ 的檢定統計量及其漸近分配爲

$$M_\varphi = nc_\rho\left(\hat{\varphi}_{ML}-1\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\rho_c\int_0^1 B_1(r)\mathrm{d}B_1(r)}{\int_0^1 B_1^2(r)\mathrm{d}r} + \sqrt{1-\rho_c^2}\frac{\int_0^1 B_1(r)\mathrm{d}B_2(r)}{\int_0^1 B_1^2(r)\mathrm{d}r},$$

其中 $B_1(r)$ 與 $B_2(r)$ 是相互獨立的標準布朗運動, $c_\rho = 1/\rho_c = \sqrt{\mathbb{E}(h_t)K_\varphi}$, $K_\varphi = \mathbb{E}(1/h_t) + 2\alpha_u^2\sum_{k=1}^\infty \beta_u^{2(k-1)}\mathbb{E}(u_{t-k}^2/h_t^2)$。實際檢定時, $\mathbb{E}(h_t)$ 與 K_φ 分別由其一致的估計式 $\hat{\mathbb{E}}(h_t) = \hat{w}_u/(1-\hat{\alpha}_u-\hat{\beta}_u)$ 與 $\hat{K}_\varphi$ 替代。因爲 $\sum_{k=1}^\infty \beta_u^{2(k-1)}\mathbb{E}(u_{t-k}^2/h_t^2) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^\infty \beta_u^{2(k-1)}u_{t-k}^2/h_t^2)$, 所以只要令 $y_0 = O_p(1)$, 例如 $y_0 = 0$, 則

$$\hat{K}_\varphi = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\left(\frac{1}{\hat{h}_t} + 2\hat{\alpha}_u^2\sum_{k=1}^\infty \hat{\beta}_u^{2(k-1)}\frac{\hat{u}_{t-k}^2}{\hat{h}_t^2}\right),$$

其中 $\hat{h}_t, \hat{u}_{t-k}, \hat{w}_u, \hat{\alpha}_u$ 及 $\hat{\beta}_u$ 是最後一次 BHHH 演算後得到的估計值。然後, 將計算出的 M_φ 與 Ling *et al.* (2003, Table 6) 所列之臨界點比較, 即可進行 MLE 的單根檢定。

現在報告上述二種單根檢定之實證結果。表 1 下方列出之 $\hat{\tau}_{n\mu}$ 代表檢定 (20) 式 $\varphi = 1$ 的 DF 檢定值 (t-檢定值, 5 % 顯著水準的臨界點爲 -1.95, 請參考 Banerjee *et al.* (1993) 之 Table 4.2)。在 5% 的顯著水準下, 傳統的 DF 檢定建議 7 個變數都是 I(1) 的時間序列。另外, 最大概似估計顯示, 7 個變數之 $\hat{\varphi}_{ML}$ 都非常接近 1, 其中變數 S_1 與 F_1 的估計值大於 1, 其餘估計值小於 1。再對照 Ling *et al.* (2003, Table 6), 7 個變數的 M_φ 值都明顯的超過該表所列出的適當的臨界點。故, MLE 單根檢定之建議大致上與 DF 檢定相同。此結果基本上是可預期的, 因爲 7 個變數的誤差項都是非整合的且是非退化的 GARCH(1,1) 過程, 故 DF 檢定仍是漸近合理的。簡言之, 表 1 所列之 7 個變數的整合階次均爲 1, 其 GARCH 型干擾項是二階恆定的且四階動差存在。

4.3 弱外生性檢定與因果檢定

弱外生性與 Granger 非因果性 (non-causality) 雖有極密切的關係, 但卻各自擁有截然不同的概念, 並且二者不相互隱含 (Geweke 1984; Davidson and MacKinnon 1993, 頁 630)。亦即, 弱外生性與待估計參數的推論有關, 而 Granger 非因果性則是著重於預測, 所以 Granger 非因果性不是弱外生性的必要條件, 也非充分條件。

本文之目的是條件模型 (4) 式的推論, 感興趣的參數是 θ。爲使此條件模型的估計無效率的損失, y_{2t} 必須是弱外生的變數。在雙變數體系 (所得與消費), Engle and Granger (1987, 頁 273) 建議, 經由檢定第一階段迴歸所估計出的誤差修正項 (落遲一期) 的係數是否顯著, 即可作爲判定依變數是否爲弱外生變數的依據; 若爲避免估計複雜的共整合系統, Johansen (1992, 頁 398) 亦有類似的建議。簡言之, 在共整合系統中, 如果我們最感興趣的是共整合參數 γ, 則弱外生性檢定即等同於是調整係數 (落遲一期的誤差修正項之係數) 的顯著性檢定 (Johansen 1995, Theorem 8.1)。據此, 本文先利用 Johansen's 跡數檢定偵測模型 I–IV 中的變數是否有共整合關係。[2] 檢定結果顯示, 模型 I–IV 中的變數確實是共整合的 (模型 I, II 及 IV 之跡數檢定的檢定量列在表 3 下方, 其中 Q_0 與 Q_1 分別代表秩 (rank) 等於 0 與等於 1 之跡數檢定量; 模型 III 之檢定值未列出)。既然本文分析之焦點集中在共整合系統的條件模型並且對模型中的變數何者爲外生沒有先驗的看法, 因此依 Engle and Granger (1987) 與 Johansen (1992) 之建議, 我們將利用邊際模型的誤設檢定, 逐一檢定所有變數的外生性。此種誤設檢定事實上與 Granger 非因果性檢定是極相似的。就本文分析之模型而言, 二者是可同時進行的, 請見以下的討論。

Granger (1988) 指出, 如果二個 I(1) 變數有共整合的關係, 則必能表示爲 ECM 的型式, 並可透過此 ECM 進行因果檢定。Granger and Lin (1995) 進一步指出, 長期而言, 二個 I(1) 變數不會有因果關係存在, 除非它們是共整合的。既然前面已檢定出模型 I–IV 之變數是共整合的, 則由 Granger (1988), 因果檢定方程式可設定爲

$$\Delta S_t = b_1 + \gamma_1 E_{t-1} + \sum_{i=1}^{k_1} \psi_{1i} \Delta S_{t-i} + \sum_{i=1}^{k_2} \psi_{2i} \Delta F_{t-i} + \tilde{u}_{1t}, \tag{21}$$

$$\Delta F_t = b_2 + \gamma_2 E_{t-1} + \sum_{i=1}^{k_3} \psi_{3i} \Delta S_{t-i} + \sum_{i=1}^{k_4} \psi_{4i} \Delta F_{t-i} + \tilde{u}_{2t}, \tag{22}$$

其中 E_t 爲 S_t 與 F_t 的誤差修正項。因爲共整合參數具超一致性, 所以 E_t 可由 S_t 對 F_t 的最小平方迴歸的殘差替代。就因果檢定而言, 由 (21) 式, 若 $\gamma_1 \neq 0$

[2] Lee and Tse (1996) 指出, 如果 I(1) 變數之 GARCH 型誤差項的四階動差存在, 則跡數檢定仍是適當的。據此, 因爲本文使用之資料未違反四階動差的條件, 所以我們便直接利用跡數檢定進行共整合的檢定。在 4.4 節, 本文會進一步討論共整合檢定的問題。

或 $\psi_{2i} \neq 0, \forall i \geq 1$, 則 F_{t-i} causes S_t; 由 (22) 式, 若 $\gamma_2 \neq 0$ 或 $\psi_{3i} \neq 0, \forall i \geq 0$, 則 S_{t-i} causes F_t。就外生性檢定而言, 若 $\gamma_1 \neq 0$ 但 $\gamma_2 = 0$, 則 F_t 是外生變數, S_t 不是; 若 $\gamma_1 = 0$ 但 $\gamma_2 \neq 0$, 則 F_t 是內生變數, 而 S_t 是外生的; 最後, 若 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, 則 F_t 與 S_t 無共整合關係。換言之, 我們可透過因果檢定方程式, (21)–(22) 式, 之係數的顯著性同時檢定弱外生性與 Granger 無因果性, 並進而判斷強外生性 (其定義請參考 Banerjee *et al.* 1993, 頁 18)。

由表 1 之估計結果推測, $\tilde{u}_{it}$, $i = 1, 2$, 應該也是條件異質變異數的干擾項。由於 (21) 與 (22) 式含有依變數落遲項的自變數, 所以最小平方法不是最適的 (Engle, 1982)。Vilasuso (2001) 發現, 若因果檢定方程式干擾項之條件變異數是相關的, 則以最小平方進行檢定會產生扭曲的因果關係。因此, 本文依 Vilasuso (2001) 之建議, 利用最大概似估計法進行 Granger 因果檢定, 其中 $\tilde{u}_{1t}$ 與 $\tilde{u}_{2t}$ 假設為 GARCH(1,1) 過程的干擾項。估計結果顯示此設定是適當的 (未列出)。至於落遲期數的選取, 本文是根據最小的 AIC (Akaike Information Criterion) 值來決定 $k_1, \ldots, k_4$ 的大小。前述四個模型的因果檢定結果列於表 2, 其中模型 I 之 $E_t = S_t - 0.9998F_t$, 模型 II 之 $E_t = S_t - 1.0002F_t$, 模型 III 之 $E_t = S_t - 0.9996F_t$, 模型 IV 之 $E_t = S_t - 1.0004F_t$。

四個模型的 AIC 值均建議 $k_i = 1,\ i = 1, \cdots, 4$, 之模型最適當, 所以我們可以藉由 z 統計量直接檢定 (21) 式之 (γ_1, ψ_{21}) 與 (22) 式之 (γ_2, ψ_{31}) 之顯著性以完成因果檢定。表 2 之估計結果建議以下因果關係: 模型 I, II 與 IV 均是 S_{t-1} causes F_t 但 F_{t-1} 未 cause S_t; 模型 III 是 S_{t-1} causes F_t 且 F_{t-1} causes S_t。另一方面, 表 2 之 γ_1 與 γ_2 的估計值亦建議以下關於外生變數的建議: 模型 I–IV 中的股價指數現貨 S_t 都可視為外生變數, 因為四個模型估計的 γ_1 都不顯著且 γ_2 都顯著。綜合這二個檢定, 我們有以下關於強外生變數的建議: 既然模型 I, II 與 IV 之 S_t 是弱外生變數並且 F_{t-1} 未 cause S_t, 所以此三個模型的 S_t 可判定為強外生變數; 無論如何, 模型 III 之 S_t 並不滿足強外生性的條件。

根據因果性檢定, 我們有以下結論。一般而言, 期貨市場有價格發現的功能, 期貨價格應領先現貨價格。然而, 眾多實證研究對此一關係的看法事實上是分歧的, 因為不同的交易制度 (e.g., 交易成本, 漲跌幅限制) 與市場規模的大小往往會左右期貨 — 現貨價格的領先 — 落後關係。就模型 I, II 與 IV 而言, 本文認為, 台灣的股價指數期貨市場仍處於初期的發展階段與市場規模仍小這二個因素是造成期貨價格未領先現貨價格的主要原因。

表 2: Granger 因果檢定: (21)–(22) 式

	係數	模型 I (S_1, F_1)	模型 II (S_2, F_2)	模型 III (S_3, F_3)	模型 IV (S_1, F_4)
(21) 式	b_1	0.016	−0.069	−0.081	−0.021
		(0.284)	(−0.859)	(−1.107)	(−0.238)
	γ_1	0.086	0.120	0.006	0.210
		(1.331)	(1.639)	(0.099)	(1.606)
	ψ_{11}	−0.028	−0.026	−0.172*	−0.111
		(−0.317)	(−0.231)	(−1.750)	(−0.667)
	ψ_{21}	0.105	0.104	0.178*	0.164
		(1.320)	(1.054)	(2.075)	(1.055)
(22) 式	b_2	0.040	−0.085	−0.079	0.001
		(0.693)	(−0.940)	(−0.986)	(0.005)
	γ_2	0.376*	0.328*	0.192*	0.548*
		(5.601)	(3.961)	(2.703)	(3.712)
	ψ_{31}	0.140	0.177	0.024	−0.005
		(1.541)	(1.292)	(0.836)	(−0.022)
	ψ_{41}	−0.105	−0.143	−0.057	0.001
		(−1.300)	(−1.187)	(−0.549)	(0.006)

[1] 符號 S 與 F 之說明請參考表 1; * 表示 5% 的顯著水準; 小括弧內爲 z 統計量。

最後, 雖然四個模型之弱外生性檢定結果建議用條件模型估計共整合關係仍舊有效率 (Engle *et al.* 1983; Davidson and MacKinnon 1993, p. 630), 但是模型 III 之係數 ψ_{11} 與 ψ_{21} 是顯著的, 這隱含 S_{3t} 不是純粹的隨機漫步過程; 換言之, 模型 III 並不適合本文分析之模型, (1) 式。至於模型 I, II 與 IV, 表 2 之估計值顯示, 用此三個模型之資料配適 (1) 式應該是適當的。[3] 綜合上述討論, 本文在下一節的共整合分析中將不再討論模型 III。

[3] 因爲 (1) 式之 y_{1t} 可改寫爲: $\Delta y_{1t} = -(y_{1t-1} - \gamma y_{2t-1}) + (u_{1t} + \gamma u_{2t})$。又, 如果 (22) 式之 E_{t-1} 是用 F_{t-1} 對 S_{t-1} 最小平方迴歸的殘差替代, 則 γ_2 之估計值應出現爲負數。因此, 模型 I, II 與 IV 隱含的資料結構及參數符號與 (1) 式之要求是一致的。

4.4 共整合: 檢定與估計

爲進行 (4) 式的推估, 本文將變數作以下對應: 模型 I: $(F_{1t}, S_{1t}) \to (y_{1t}, y_{2t})$; 模型 II: $(F_{2t}, S_{2t}) \to (y_{1t}, y_{2t})$; 模型 IV: $(F_{4t}, S_{1t}) \to (y_{1t}, y_{2t})$。在報告 (4) 式的估計結果前, 尚有關於共整合檢定的問題需要進一步地討論。最常見的共整合檢定是 Johansen (1988) 的跡數檢定, 其次是 Engle and Granger (1987) 的二階段共整合檢定 (以殘差爲基礎的單根檢定, 以後簡稱 EG-test)。現在的問題是, 當誤差項是 GARCH 過程時, 這些檢定仍是穩健的嗎? 簡言之, 此問題與單根檢定所面臨者大致上相同。Lee and Tse (1996, Table 1) 指出, 只要 GARCH 型誤差項的四階動差存在, 則前述二個共整合檢定的 size 扭曲不大; 但是, 若四階動差不存在, 則這些檢定會過度拒絕虛無假設, 進而發現「虛無的共整合」, 但情況也不算嚴重。該文 Table 2 亦顯示, 只要樣本夠大, 二個檢定的檢定力都極高, 即使是四階動差不存在的 GARCH 過程; 但小樣本時, EG-tests 的檢定力就相對的較低。

現在回到實證分析的討論。本文研究的三個實證模型的估計結果列於表 3, 小括弧內爲 z 統計量。首先, 表 3 下方所列是共整合檢定的結果, 其中 Q_0 與 Q_1 分別代表秩等於 0 與等於 1 的跡數檢定量 (其臨界點請參考 Johansen (1995, Table 15.1)), $\hat{\rho}_{n\mu}(\hat{\eta})$ 與 $\hat{\tau}_{n\mu}(\hat{\eta})$ 分別是以 (4) 式之殘差 $\hat{\eta}_t$ 爲基礎的 EG-tests,[4] 而 $M_{\varphi}(\hat{\eta})$ 是以 $\hat{\eta}_t$ 爲基礎的 Ling *et al.* (2003) 的 MLE 單根檢定。這些檢定都顯示, 本文分析的三個模型中的變數確實是共整合的。其次, 本文以 Bollerslev (1986) 採用之 BHHH 演算法進行 (4) 式的估計, 其中 ϵ_{2t} 是由其一致性估計式, $\hat{\epsilon}_{2t} = \Delta y_{2t}/\hat{h}_{2t}^{1/2}$, 替代; 表 3 上方是估計結果。由 (16) 式, 虛無假設 $\rho_0 = 0$ 的 z 統計量是簡單計算的, i.e., $\sqrt{n}\hat{\rho}_n$。又, 根據 Bollerslev (1986) 與 Lee and Hansen (1994, Theorem 3), $\sqrt{n}(\hat{\delta}_n - \delta_0)$ 的漸近共變異數矩陣的一致性估計值爲 $\hat{B}_n^{-1}\hat{A}_n\hat{B}_n^{-1}$, 其中 $\hat{B}_n = -n^{-1}\sum \partial^2 l_t/(\partial\delta\partial\delta')$ 與 $\hat{A}_n = n^{-1}\sum(\partial l_t/\partial\delta)(\partial l_t \partial\delta')$ 是最後一次 BHHH 演算後計算出的值。因此, 當條件常態假設不成立時, 雖然表示條件概似函數, (5) 式, 的設定有誤, 但是 $\hat{\delta}_n$ 仍是一致的。此即所謂的 Quasi-MLE。利用 $\hat{B}_n^{-1}\hat{A}_n\hat{B}_n^{-1}$ 的對角線元素, 即可分別計算出虛無假設 $\delta_0 = \mathbf{0}$ 的 z 統計量。至於 (w_2, α_2, β_2) 的顯著性檢定

[4]事實上, 這就是以殘差 $\hat{\eta}_t$ 爲基礎的 DF 單根檢定, 其 DGP 如同 (20) 式 (i.e., y_t 由 $\hat{\eta}_t$ 替代), 所以 $\hat{\rho}_{n\mu}(\hat{\eta}) = n(\hat{\varphi}_{LS} - 1)$, $\hat{\tau}_{n\mu}(\hat{\eta})$ 是 $H_0 : \varphi = 1$ 的 t 統計量, 二者之 5% 臨界點分別是 -15.64 與 -2.76 (Maddala and Kim 1998, Tables 6.1–6.2, Regression a)。

表 3: 單一方程式共整合 – GARCH(1,1) 模型的估計與檢定

	模型 I $(F_1, S_1) \to (y_1, y_2)$	模型 II $(F_2, S_2) \to (y_1, y_2)$	模型 IV $(F_4, S_1) \to (y_1, y_2)$
γ	1.0002*(44188)	0.9996*(19607)	0.9996*(26611)
ρ	0.0802*(2.545)	0.2610*(7.308)	0.2036*(4.031)
w	0.1411*(4.823)	0.2349*(2.755)	0.1701*(2.574)
α	0.3714*(6.933)	0.1178*(3.313)	0.2712*(3.782)
β	0.4769*(7.275)	0.6447*(6.246)	0.4722*(3.474)
w_2	0.2039*(2.358)	0.3113*(1.800)	0.2883 (0.933)
α_2	0.1048*(3.815)	0.0822*(3.250)	0.0532 (1.465)
β_2	0.8386*(19.52)	0.8619*(17.61)	0.8655*(7.719)
觀察值	1,007	784	392
		共整合檢定	
Q_0	227.3	144.4	105.4
Q_1	0.233	1.415	0.114
$\hat{\rho}_{n\mu}(\hat{\eta})$	−390.9	−233.3	−162.2
$\hat{\tau}_{n\mu}(\hat{\eta})$	−15.66	−11.68	−10.10
$M_{\varphi}(\hat{\eta})$	−357.9	−271.6	−168.2

* 本表之迴歸式爲 $y_{1t} = \gamma y_{2t} + \rho\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2} + \eta_t$, $\Delta y_{2t} = \epsilon_{2t}h_{2t}^{1/2}$, 其中 $\eta_t = \epsilon_{1.2t}h_{1t}^{1/2}, h_{1t} = w + \alpha u_{1t-1}^2 + \beta h_{1t-1}, h_{2t} = w_2 + \alpha_2 u_{2t-1}^2 + \beta_2 h_{2t-1}$。小括弧內爲 z 統計量。Q_0 與 Q_1 分別爲秩等於 0 與 1 的跡數檢定量, 5% 臨界點分別爲 12.21 與 4.14 (Johansen 1995, Table 15.1); $\hat{\rho}_{n\mu}(\hat{\eta})$ 與 $\hat{\tau}_{n\mu}(\hat{\eta})$ 是以 $\hat{\eta}_t$ 爲基礎的 EG-tests, 5% 臨界點分別是 −15.64 與 −2.76 (Maddala and Kim 1998, Tables 6.1–6.2, Regression a); $M_{\varphi}(\hat{\eta})$ 是 $\hat{\eta}_t$ 的 MLE 單根檢定值 (Ling *et al.* 2003)。

亦是依上述程序完成。

最後, 已知 (19) 式之 $\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)$ 是混合的常態分配, 其中 $W_1(r) = BM(1)$ 與 $V(r) = BM(K)$ 是相互獨立的布朗運動。事實上, 對 (19) 式等號二邊同乘 $(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} I_{\gamma\gamma t})^{1/2}$ 可得到

$$n\left(\hat{\gamma}_n - \gamma_0\right)\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} I_{\gamma\gamma t}\right)^{1/2} = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} D_{\gamma t}}{\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} I_{\gamma\gamma t}\right)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\int_0^1 W_1(r)\mathrm{d}V(r)}{\left(K\int_0^1 W_1^2(r)\mathrm{d}r\right)^{1/2}}。$$

根據 Banerjee *et al.* (1993, Table 3.3, Example 5) 與 Li *et al.* (2002, p. 258), 上式最後一項是一個標準常態隨機變數, $\mathcal{N}(0, 1)$。換言之, 在 BHHH 的最後一次演算後, 令 $\gamma_0 = 0$, 然後計算 $\hat{\gamma}_n(\sum_{i=1}^{n} I_{\gamma\gamma t})^{1/2}$, 即可得到虛無假設 $\gamma_0 = 0$ 的 z 統計量。表 3 顯示, 只有模型 IV 之 y_{2t} 方程式中的 w_2 及 α_2 不顯著, 其餘係數均至少達 5% 顯著水準; 並且, 由 3 個模型 6 條方程式中的 GARCH 參數的估計值可看出, 這些 GARCH(1,1) 過程是二階恆定的 $(\alpha + \beta < 1, \alpha_2 + \beta_2 < 1)$ 並且四階動差存在 $(\beta^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha^2 < 1, \beta_2^2 + 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_2^2 < 1)$。由此結果可推測, 表 3 下方之共整合檢定是可信賴的, 因爲四階動差的條件未被違反。根據 z 統計量, 三個模型的共整合關係是非常顯著的。估計的共整合向量分別是 $(1, -1.0002)'$, $(1, -0.9996)'$ 與 $(1, -0.9996)'$, 隱含股價指數期貨對現貨市場的漲跌的反應幾乎是亦步亦趨的。至於 $\hat{\rho}_n$, 模型 I, II 與 IV 的估計值分別是 0.0802, 0.2610 與 0.2036, 所以其檢定值 $\sqrt{n}\hat{\rho}_n$ 分別是 2.545, 7.308 與 4.031。在 5% 顯著水準下, 這些值皆能拒絕 $\rho = 0$ 之虛無假設, 表示期貨市場與現貨市場之隨機衝擊是正相關的, 其中以電子期貨與其現貨之相關性最高, 台股期貨與台股指數之相關性最低。又, 根據前面的 Granger 因果檢定, 我們可以判斷出這些隨機衝擊的傳導是單向的。

另一方面, 如果 (u_{1t}, u_{2t}) 之條件相關係數是隨時間變動的, 隱含 (4) 式之設定有誤。爲此, 我們設立一非固定條件相關的對立模型以進行 CCC 假設的診斷檢定。假設 $\rho_t = \rho + \varrho M(\mathcal{F}_{t-1})$, 其中 $M(\mathcal{F}_{t-1})$ 是 $s \times 1$ 的 $\mathcal{F}_{t-1}$ 的函數, 而 ϱ' 爲對應的 $s \times 1$ 常數向量, $s \geq 1$。因此, (4) 式可改寫爲

$$y_{1t} = \gamma y_{2t} + \rho\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2} + \varrho m_t + \eta_t, \tag{23}$$

其中 $m_t = M(\mathcal{F}_{t-1})\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2}$。在 $\rho_t = \rho$ 之虛無假設下, 隱含 $\varrho = 0$, CCC 設定是合理的, (4) 式的設定是正確的。換言之, 最大概似估計之殘差 $\hat{\eta}_t$ 不應含有 m_t 之訊息。循此, 由 $\hat{\eta}_t$ 對 m_t 進行 OLS 迴歸, 所得之係數應皆爲 0 (常數項除外), 所以 CCC 設定之診斷可由傳統的 F 檢定完成。爲進行 CCC 設定的檢定, 我們必須清楚地定義 $M(\mathcal{F}_{t-1})$ 的內容。已知 y_{1t} 與 y_{2t} 是 I(1) 變數, 爲避免 $M(\mathcal{F}_{t-1})$ 爲非恆定, 並且參照 Tse (2000) 的作法, 本文假設 $M(\mathcal{F}_{t-1}) = \Delta y_{1t-1}\Delta y_{2t-1}$。所以 $m_t = \Delta y_{1t-1}\Delta y_{2t-1}\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2}$ (在迴歸分析時, $\epsilon_{2t}h_{1t}^{1/2}$ 是用 (4) 式的估計值替代)。接下來, 由 $\hat{\eta}_t$ 對 m_t 與常數項迴歸, 其結果爲:

$$\text{模型 I:} \quad \hat{\eta}_t = \underset{(-3.03)}{-0.0887} + \underset{(1.22)}{0.0037}\, m_t, \tag{24}$$

$$\text{模型 II:} \quad \hat{\eta}_t = \underset{(1.12)}{0.0467} - \underset{(-0.03)}{0.0001}\, m_t, \tag{25}$$

$$\text{模型 IV:} \quad \hat{\eta}_t = \underset{(-1.25)}{-0.0513} + \underset{(1.55)}{0.0083}\, m_t, \tag{26}$$

小括弧內爲 z 統計量。在 5% 顯著水準下, (24)–(26) 式中 m_t 的係數都是不顯著的, 表示模型 I, II 及 IV 之 $\hat{\eta}_t$ 未殘留 m_t 的訊息, 所以無法拒絕 CCC 之假設。這表示 CCC 之假設應用在這三個模型是適當的。

5 結論

用 Hendry 的動態迴歸設定, 本文建立一個單一方程式的共整合 – GARCH(1,1) 模型。經由最大概似估計, 共整合參數與 GARCH 參數是聯合地被估出。我們的分析顯示, 這些 MLE 是眞實參數的一致性估計式, 其中共整合參數的 MLE 的漸近分配是混合的常態。以上理論結果的限制是 GARCH 型干擾項的四階動差必須存在。在實證應用上, 本文以台灣股市之股價指數與其指數期貨之收盤日資料進行實證分析。由 Granger 因果檢定, 我們發現台灣股市的指數期貨目前幾乎都沒有領先現貨市場, 所以都不具備價格發現的功能。又, 我們估計出的 GARCH 參數值都滿足二階與四階動差存在的限制式, 所以傳統的單根檢定與共整合檢定的建議都是可信賴的。檢定與估計的結果顯示, 股價指數與指數期貨是非恆定但彼此共整合的 I(1) 變數, 並且這些非恆定變數的干擾項都有明顯 GARCH 特徵。另外, CCC 假設的診斷檢定顯示, 將 CCC 假設應用在股價指數與指數期貨這種類型的資料是適當的。

最後, 因為 GARCH 模型在實證應用上經常出現四階動差不存在的情形, 所以將之與非恆定的時間序列結合就會自然地衍生出傳統的單根檢定與共整合檢定是否仍然是穩健的問題。就本文所知, 除了 Kim and Schmidt (1993) 與 Lee and Tse (1996) 的模擬試驗研究外, 此類模型的漸近理論目前仍付之闕如。我們相信, 這是一個未來可行的研究方向。

參考文獻

Ahn, S. K. and G. C. Reinsel (1990), "Estimation for partially nonstationary multivariate autoregressive models", *Journal of the American Statistical Association*, 85, 813823.

Banerjee, A., J. J. Dolado, J. W. Galbraith and D. F. Hendry (1993), *Cointegration, Error Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*, Oxford: Oxford University Press.

Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.

Bollerslev, T. (1990), "Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH approach", *Review of Economic studies* 72, 498–505.

Davidson, R. and J. G. MacKinnon (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford: Oxford University Press.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1979), "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root", *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427–431.

Engle, R. F. (1982), "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 50, 987–1008.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger (1987), "Co-integration and error correction: representation, Estimation and Testing", *Econometrica*, 55, 251–276.

Engle, R. F., D. F. Hendry and J. F. Richard (1983), "Exogeneity", *Econometrica*, 51, 277–304.

Engle, R. F. and K. F. Kroner (1995), "Multivariate simultaneous generalized ARCH", *Econometric Theory*, 11, 122–150.

Franses, P. H., P. Kofman and J. Moser (1994), "GARCH Effects on a Test of Cointegration", *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 4, 19–26.

Geweke, J. (1984), "Inference and causality in economic time series models", Ch. 19 in Z. Griliches and M.D. Intriligator, eds., *Handbook of Econometrics*, II, Amsterdam: North-Holland.

Granger, C. W. J. (1988), "Some recent developments in a concept of causality", *Journal of Econometrics*, 39, 199–211.

Granger, C. W. J. and J. L. Lin (1995), "Causality in the long run", *Econometric Theory*, 11, 530–536.

Hansen, B. E. (1992), "Convergence to stochastic integrals for dependent heterogeneous processes", *Econometric Theory*, 8, 489–500.

Hansen, B. E. (1995), "Regression with nonstationary volatility", *Econometrica*, 63, 1113–1132.

Johansen, S. (1988), "Statistical analysis of cointegration vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231–254.

——— (1992), "Cointegration in partial systems and the efficiency of single equation analysis", *Journal of Econometrics*, 52, 389–402.

——— (1995), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, New York: Oxford University Press.

Kim, K. and P. Schmidt (1993), "Unit root tests with conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 59, 287–300.

Lee, S. W. and B. E. Hansen (1994), "Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator", *Econometric Theory*, 10, 29–52.

Lee, T. H. and Y. Tse (1996), "Cointegration tests with conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 73, 401–410.

Li, W. K., S. Ling and M. McAleer (2002), "Recent theoretical results for time series models with GARCH errors", *Journal of Economic Surveys*, 16, 245–269.

Li, W. K., S. Ling and H. Wong (2001), "Estimation for partially nonstationary multivariate autoregressive models with conditional heteroskedasticity", *Biometrika*, 88, 1135–1152.

Ling, S. and W. K. Li (1998), Limiting distribution of maximum likelihood estimators for unstable autoregressive moving-average time series with general autoregressive heteroscedastic errors", *Annals of Statistics*, 26, 84–125.

Ling, S. and W. K. Li (2003), "Asymptotic inference for unit root processes with GARCH(1,1) errors", *Econometric Theory*, 19, 541–564.

Ling, S., W. K. Li and M. McAleer (2003), "Estimation and testing for unit root processes with GARCH(1,1) errors: theory and monte carlo evidence", *Econometric Reviews*, Forthcoming.

Ling, S. and M. McAleer (2003), "Asymptotic theory for a vector ARMA–GARCH model", *Econometric Theory*, 19, 280–310.

Maddala G. S. and I. M. Kim (1998), *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge: Cambridge University Press.

Pagan, A. R. (1984), "Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors", *International Economic Review*, 25, 221–247.

Pagan, A. R. and A. Ullah (1988), "The econometric aanlysis of models with risk terms", *Journal of Applied Econometrics*, 3, 87–105.

Phillips, P. C. B. (1988), "Reflections on econometric methodology", *Economic Record*, 64, 344–359.

Phillips, P. C. B. (1991), "Optimal inference in Co-integration systems", *Econometrica*, 59, 282–306.

Phillips, P. C. B. and B. E. Hansen (1990), "Statistical inference in instrumental variables regression with I(1) processes", *Review of Economic Studies*, 57, 99–125.

Sandmann, G. and S. J. Koopman (1998), "Estimation of stochastic volatility models via monte carlo maximum likelihood", *Journal of Econometrics*, 87, 271–301.

Seo, B. (1999), "Distribution theory for unit root tests with conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 91, 113–144.

Singleton, K. J. (2001), "Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function", *Journal of Econometrics*, 102, 111–141.

Stock, J. H. (1987), "Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors", *Econometrica*, 55, 1035–1056.

Tse, Y. K. (2000), "A test for constant correlations in a multivariate GARCH model", *Journal of Econometrics*, 98, 107–127.

Vilasuso, J. (2001), "Causality test and conditional heteroskedasticity: monte carlo evidence", *Journal of Econometrics*, 101, 25–35.

Wong, H., W. K. Li and S. Ling (2000), A Cointegrated Conditional Heteroskedasticity Model with Financial Applications, Working Paper, Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University.

投稿日期: 2002年3月5日, 接受日期: 2003年11月26日

A Single Equation Cointegration Model with GARCH(1,1) Errors: Evidence from the Taiwan Stock Market

Gao-Wen Wang

Department of Finance and Banking, Takming College

Wei-Lin Mao

Department of Economics, National Cheng-Chi University

The cointegration and GARCH models are the two most successful applications in macroeconomic econometrics, but only few researchers attempt to integrate these two popular models. This paper introduces a single equation cointegration model with GARCH(1,1) disturbances. Maximum likelihood estimators and their asymptotic distributions are derived for the parameters in the equation, in which the estimator of the cointegrating coefficient is asymptotically mixed and normally distributed. Empirically, we employ the model to examine Taiwan stock indexes and the associated futures prices of daily stock market data. The resulting estimates show that index futures and spot indexes are indeed cointegrated, and that the disturbances also exhibit a strong GARCH effect.

Keywords: unit root test, causality test, cointegration test,
constant correlation test
JEL classification: C13, C32