國立政治大學應用數學系

數學教學碩士在職專班

碩士學位論文

一個點線面的切割問題

A Partition Problem with Points, Lines and Planes

碩專班學生：李昱欣 撰

指導教授：李陽明博士

中華民國 一〇二 年 八 月 廿三 日

摘　　要

在這篇論文中，我們希望用不同角度來重新探討一個古典的數學問題；點、線、面切割最多區域問題，雖然這個問題已經經由許多方法得到公式，例如：遞迴關係、差分方程式、歐拉公式、標準 n 維空間切割系統等等，並延伸出其他方面的問題，可以運用在很多地方，所以我們希望可以再找到更簡單易懂的論證方式，可以讓國中學生也能理解。

思考學生現有的數學觀念，我們發現利用不等式的數學觀念，藉由定義出一套有規則的系統以及數學歸納法，可以以更直接，簡單的理論驗證出此數學公式，最後我們更希望能將這理論推廣至 n 維度空間。

Abstract

In this research, we will discuss a classical mathematical question from different aspects. The question of maximizing the number of regions made up by points, lines and planes has been proved and developed many formulas, using Recurrence Relations, Difference Equations, and Euler's Formula etc., which can extend to other questions and apply to many areas. Therefore, we hope to find an easier way to prove it which may help middle school students to understand better.

We find that we can use the concept of inequality from what the students learn so far. By defining a logical system and using Induction, we can prove this mathematical formula in an easier and more direct way. Finally we hope it can be generalized to n-dimensional space.

一個點線面的切割問題

A Partition Problem with Points, Lines and Planes

目　　錄

1. 緒論

1.1 前言

在教學現場上，有次班上學生要開同樂會，學生訂了幾個大 pizza，當然每個人都滿心期望能吃到幾塊?於是就趁機問問同學，如果只切四刀，如何把 pizza 切出最多塊(當然大小不考慮在內)，能一分鐘內畫出來的同學，便能獲得一罐解渴的可樂。這問題對於國中生而言是充滿挑戰性的，讓他們在同樂時還能動動腦！當然最後是有同學畫出來的。但問他們為什麼，卻回答不出來，於是便請他們回家上網查查資料。

但這樣一問讓我聯想到以前看過平面上的切割問題，只記得公式，上網找了找，發現證明的方法雖然有很多種，最常用也是最簡單的方法的便是利用遞迴數列的觀念解答，但這樣的說法是否能讓國中的學生理解呢?

隔天，果真幾個對數學較有興趣的孩子興致沖沖的跑來，他們有查到類似的數學問題，但看不懂，只知道有公式，問著公式怎麼來的呢?奇怪的數學符號 C_k^n 又是什麼意思?還有一位對數學比較興趣的學生天真的問，只有切 pizza 有公式嗎?如果切西瓜呢?可不可以切最多塊?有公式嗎?這樣一問，也讓我在腦中一直思考著，想著如何用他們可以接受的數學觀念解釋給他們聽，正巧課本正在教解一元一次不等式及圖解，看著黑板上，一元一次不等式的解在數線上不是一點而是一段範圍，如果把數個不等式的解都畫同一條數線上，看起來就好像把這條數線切割成了若干塊，如果用這樣的想法找到適合的標記方式，或許可以延伸至坐標平面上，甚至三度空間中，也就可以讓現在的國中生接受怎麼去切割出最多區域的公式了!!

1.2 緒論

首先我們知道三個典型的點線面切割出最多區域數學問題，已在許多的數學方法中得到論證，例如：遞迴關係、差分方程式、歐拉公式、標準 n 維空間切割系統等等。所以這篇文章中我們希望用另一種更簡單易懂的數學觀點來論證此問題，以比較直接的方式呈現出來，進而希望推廣至更高階空間中。

第二章先介紹利用遞迴關係的方式來論證此古典點線面切割數學問題，並證明此問題的公式。

第三章以中學學生的觀點可以了解為想法，我們藉由圖形觀察到可以用較簡單直接的不等式的數學觀念，重新定義出一套有系統規則的理論，再利用數學歸納法便可以更加了解點線面切割問題公式的推導過程，使得此問題變得更加淺顯易懂。

第四章針對第三章所提出的定義、定理和標記方式加以解釋，並舉例說明。

第五章描述論文結論與問未來展望。

2. 典型的點線面切割最多區域問題

2.1 描述三個典型點線面的切割問題

我們將三個典型點線面的切割問題描述如下:

Question 1:一維度直線上有 k 個點,則這相異 k 點可將此直線最多切割出幾段區域?

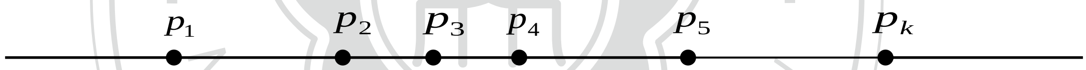
Question 2:二維度平面上有 k 條一維度直線,則這 k 條一維度直線可將此平面最多切割出幾塊區域?

Question 3:三維度空間中有 k 個二維度平面,則這 k 個二維度平面可將此空間最多切割出幾塊區域?

2.2 用遞迴關係解 Question 1

假設在一維度直線 L 中有 k 個點,則這相異 k 點可將此直線最多切割出幾段相異區域?

直線 L



我們用遞迴關係的觀念找到此題解法:

假設此 k 個點, p_1 , p_2 , ... p_k ,在一維度直線 L 中,可將此直線最多切割出 a_k 段不同的區域,首先先在直線 L 線標上(k-1)個相異點,則此(k-1)個相異點可將此直線 L 最多切割出 a_{k-1} 段區域,當標上第 k 個點在直線 L 上,此點必將直線 L 上的某段區域分割為兩段相異區域,比之前(k-1)個相異點再多切割出一段,這樣 k 個相異點使得直線 L 切割出最多段區域,由此可知,我們便可得到一個遞迴的關係式

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = a_{k-1} + 1 \end{cases}$$

重複這樣的算式往前推至 a_{k-1} 、 a_{k-2} ...可得到下列結果:

$$
\begin{aligned}
& \text{k=1，} && a_1 = a_0 + 1 \\
& \text{k=2，} && a_2 = a_1 + 1 \\
& \quad \vdots && \quad \vdots \\
+) \; & \text{k=k，} && a_k = a_{k-1} + 1 \\
\hline
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_0 + \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{\text{共有 k 個 1}} \\
&= a_0 + \text{ k} \\
&= C_0^k + C_1^k
\end{aligned}
$$

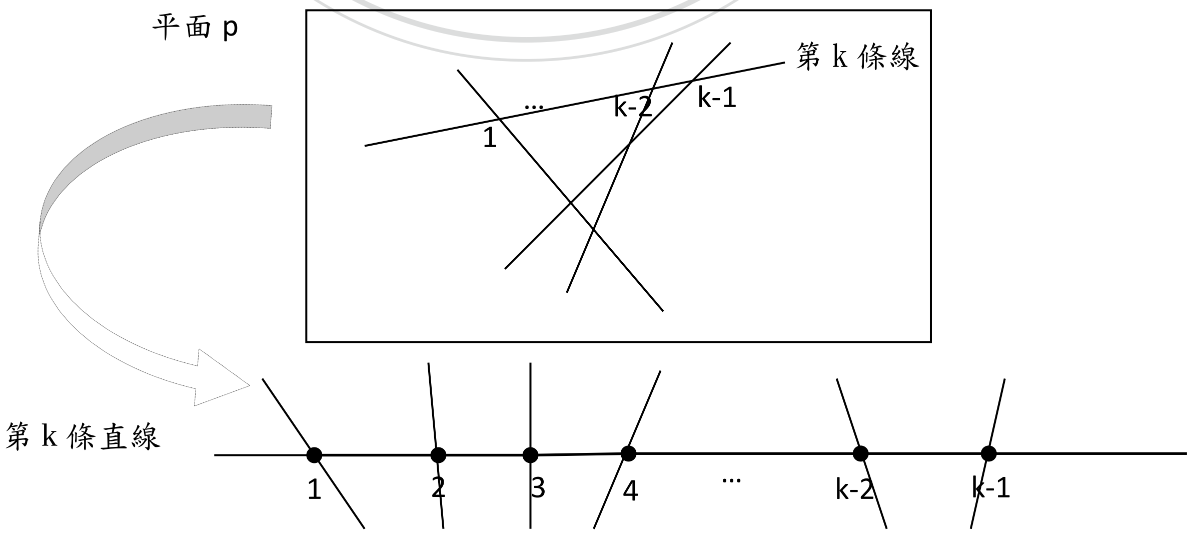
由此可知 $a_k = C_0^k + C_1^k$

2.3 用遞迴關係解 Question 2

假設有 k 條直線在一個二維度平面上，則這 k 條直線可將此平面最多切割出幾塊區域?

我們一樣用遞迴關係的觀念找到此題解法:

假設有 k 條直線 L_1，L_2，$\ldots L_k$，在一個二維度平面 P 上，可將此平面最多切割 b_k 塊相異區域，首先先在平面 P 上，標出其中(k-1)直線，則此(k-1)條直線可將此平面最多切割出 b_{k-1} 塊相異區域，接著再插入第 k 條直線，為了使這 k 條直線切割出最多塊相異區域，所以第 k 條直線必須和其他(k-1)條直線皆兩兩相交於新的一點，於是第 k 條直線上共有(k-1)個相異交點。



原本由(k-1)條直線所切割出最多塊的相異區域,並不因為插入第k條直線而不見,而第k條直線上這(k-1)個相異交點,由前面Question 1可知,一直線上有相異(k-1)點可將此直線切割出最多a_{k-1}段相異區域,這a_{k-1}段在平面上可延展出a_{k-1}塊相異區域,結合上述的觀念,所以我們可以得到一個遞迴關係式為

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_k = b_{k-1} + a_{k-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lllllll}
 & k=1 & b_1 & = & b_0 & + & a_0 \\
 & k=2 & b_2 & = & b_1 & + & a_1 \\
 & k=3 & b_3 & = & b_2 & + & a_2 \\
 & . & . & & . & & . \\
 & . & . & & . & & . \\
 & . & . & & . & & . \\
+) & k=k & b_k & = & b_{k-1} & + & a_{k-1} \\
\hline
 & & b_k & = & b_0 & + & \sum_{i=0}^{i=k-1} a_i
\end{array}$$

且根據Question1,將 $a_k = c_0^k + c_1^k$ 代入

$$b_k = b_0 + \sum_{i=0}^{i=k-1} a_i$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{i=k-1} c_0^i + \sum_{i=0}^{i=k-1} c_1^i$$

然後,我們利用已知性質

$$C_r^r + C_r^{r+1} + C_r^{r+2} + \ldots + C_r^n = C_{r+1}^{n+1}$$ 詳見[2]

得到 $$C_0^0 + C_0^1 + C_0^2 + \ldots. + C_0^{k-1} = C_1^k$$

$$C_1^0 + C_1^1 + C_1^2 + C_1^3 + \ldots. + C_1^{k-1} = C_2^k$$

最後我們令 $1 = C_0^k$

$$b_k = 1 + \sum_{i=0}^{i=k-1} c_0^i + \sum_{i=0}^{i=k-1} c_1^i$$

$$= C_0^k + C_1^k + C_2^k$$

由此可知$b_k = C_0^k + C_1^k + C_2^k$

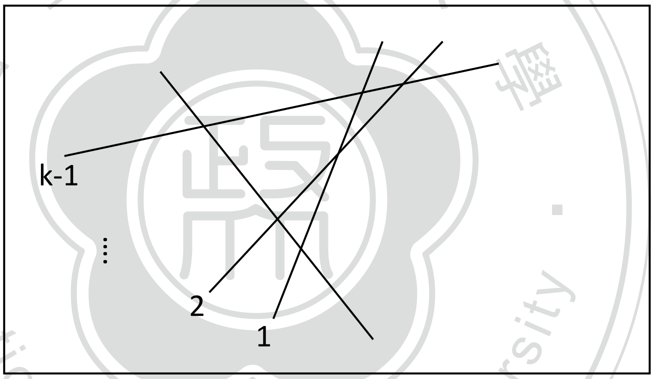
2.4 用遞迴關係解 Question 3

假設有 k 個平面在一個三維度空間中，則這 k 個平面可將此空間最多切割出幾塊區域?

我們一樣用遞迴關係的關係找到此題解法

假設有 k 個平面 P_1 ， P_2 ， … P_k ，在一個三維度空間中，則最多可將此空間最多切割出 c_k 塊相異區域，首先我們先在此空間中標上其中(k-1)個平面，則這此(k-1)塊平面可將空間最多切割出 c_{k-1} 塊相異區域，接著再插入第 k 個平面，為了使這 k 個平面切割出最多塊相異區域，如同前面 Question2 一樣，則第 k 個平面必須和前面(k-1)個平面皆兩兩相交於一條新的直線，於是第 k 個平面上共有(k-1)條相異直線。

第 k 個平面上(k-1)條線



我們觀察第ｋ個平面上這（ｋ－１）條相異直線，原本由相異（ｋ－１）個平面所切割的最多區域並不因此不見，每一塊區域因為第ｋ個平面的插入而分為兩塊，所以這（ｋ－１）條相異直線可將平面切割出幾塊區域，就表示會多出幾塊區域，由前面 Question 2 知道，（ｋ－１）條直線在一平面上，可將此平面最多切割出 b_{k-1} 塊相異區域，綜合上述觀念，我們可以得到一個遞迴關係式為下：

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_k = c_{k-1} + b_{k-1} \end{cases}$$

$$
\begin{array}{llcllll}
k=1 & c_1 & = & c_0 & + & b_0 \\
k=2 & c_2 & = & c_1 & + & b_1 \\
k=3 & c_3 & = & c_2 & + & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+)\ k=k & c_k & = & c_{k-1} & + & b_{k-1} \\
\hline
 & c_k & = & c_0 & + & \sum_{i=0}^{i=k-1} b_i
\end{array}
$$

且根據 Question1，得到 $b_k = C_0^k + C_1^k + C_2^k$ 代入

$$c_k = c_0 + \sum_{i=0}^{i=k-1} b_i$$

$$c_k = 1 + \sum_{i=0}^{i=k-1} C_0^i + \sum_{i-0}^{i=k-1} C_1^i + \sum_{i=0}^{i=k-1} C_2^i$$

然後，我們利用已知性質

$$C_r^r + C_r^{r+1} + C_r^{r+2} + \ldots + C_r^n = C_{r+1}^{n+1}$$ 詳見[2]

得到

$$C_0^0 + C_0^1 + C_0^2 + \ldots + C_0^{k-1} = C_1^k$$

$$C_1^0 + C_1^1 + C_1^2 + C_1^3 + \ldots + C_1^{k-1} = C_2^k$$

$$C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \ldots + C_2^{k-1} = C_3^k$$

最後我們一樣令 $1 = C_0^k$

$$c_k = 1 + \sum_{i=0}^{i=k-1} C_0^i + \sum_{i=0}^{i=k-1} C_1^i + \sum_{i=0}^{i=k-1} C_2^i$$

$$= C_0^k + C_1^k + C_2^k + C_3^k$$

由此可知 $c_k = C_0^k + C_1^k + C_2^k + C_3^k$

3. 以淺顯的觀點探討點線面切割最多區域問題

在這個章節中，我們將用另一個觀點重新探討這三個點線面切割最多塊區域問題，甚至推廣至更高維度空間中，從上一章中，雖然我們已經藉由遞迴關係的推導，得到了三個切割區域問題的公式：

有 k 個點，在一維度直線上，則這相異 k 點可將此直線最多切割出 $C_0^k + C_1^k$ 塊區域。

有 k 條一維度直線在一個二維度平面上，則這 k 條直線可將此平面最多切割出 $C_0^K + C_1^k + C_2^k$ 塊區域。

有 k 個二維度平面在一個三維度空間中，則這 k 個平面可將此空間最多切割出 $C_0^k + C_1^k + C_2^k + C_3^k$ 塊區域。

這三個公式比較之前的公式有規律且好運算，但由遞迴關係的推導中，我們仍是無從得知為何會產生這樣有規律的公式，所以在這一章節，我們將重新用另一個角度來探討這三個點線面切割最多塊區域問題，並了解公式的規則性。

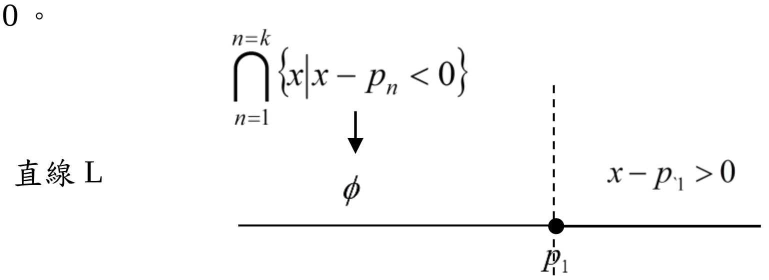
3.1 以不等式觀點重新探討 Question 1

回歸到 Question 1，有 k 個點，p_1、$p_2 \cdots p_k$，在一維度直線 L 上，則可將此直線 L 切割出最多段區域。

【定義 3.1】直線上有相異有 k 點，其中任一點 p_k 皆可將直線分為兩段區域，分別標記為 $x - p_k < 0$ 、 $x - p_k > 0$，k=1、2⋯，將 $\bigcap_{n=1}^{n=k} \{x | x - p_n < 0\}$ 的區域標記為 ϕ 。

k=1 時：

直線 L 上一點 p_1 可將此直線分為兩段區域 ，可用一元一次不等式的觀念來標記，可以依序標記為 $x - p_1 < 0$ 、$x - p_1 > 0$；根據定義 3.1，可以將這兩塊區域依序標記為 ϕ ，$x - p_1 > 0$ 。

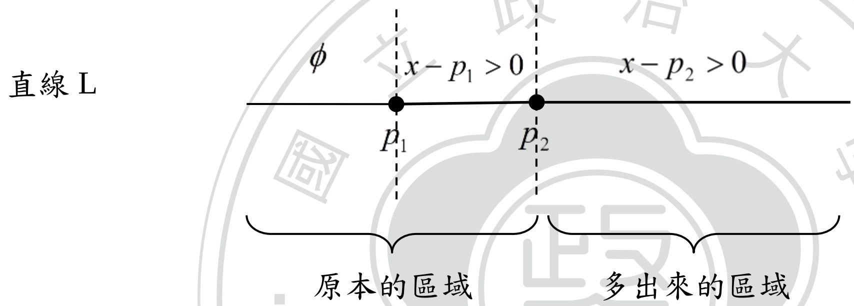


k=2 時：

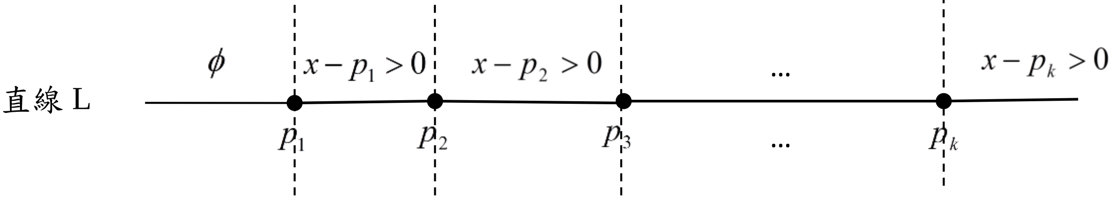
直線 L 上多插入一點 p_2， $p_2 > p_1$，這樣直線 L 有相異兩點，所以這樣直線 L 則被分為三段區域，為了讓切割出的區域有規律不混淆，所以我們將直線 L 上分成原本的區域以及多出來的區域，這邊我們對於多出來的區域加以定義。

【定義 3.2】在一維度直線 L 上，有(k-1)個相異點，插入第 k 個點 p_k ，多出來的區域為 $x - p_k > 0$ 的那段區域。

所以我們將不改變其原本的區域標記方式，而根據定義 3.2 和不等式的觀念將多出來的那一段區域，標記為 $x - p_2 > 0$，則這三段區域的標記如下：



如果我們再插入 p_3，可以將直線 L 切割為四段區域，我們一樣跟上述的方式一樣，不改變原本的區域的標記方式，根據定義 3.1 和不等式的觀念，將多出來的那一段區域，標記為 $x - p_3 > 0$，所以這四段區域標記為 ϕ 、 $x - p_1 > 0$ 、 $x - p_2 > 0$ 、 $x - p_3 > 0$ ，以此類推下，如果有 k 個相異的點在此直線上，可將此線最多切割出(k+1)段相異區域，再重複用上述的觀念和定義 3.1，我們便可以將直線 L 上這(k+1)段區域標記為 ϕ 、 $x - p_1 > 0$ 、 $x - p_2 > 0 \ldots$ 、 $x - p_k > 0$ 。



這樣的標記方式，可以清楚且簡單標記各段相異區域，同時在這樣的推導下，我們

發現第一段都是用 ϕ 表示，而有 k 段區域的標記方式，我們根據不等式的觀念，皆標記為 $x-p_n>0$，n=1、2、...、k。

【定理 3.1】在直線 L 上有 k 個點，將直線 L 切割出最多 $C_0^k+C_1^k$ 段區域。

證明：

我們想要證明第一段為 ϕ，其他區域則可標記為 $x-p_n>0$，n=1、2、...、k。由上述定義 3.1 及圖示可清楚得知。

所以我們可以得到下列結果：

此段 $\bigcap_{n=1}^{n=k}\{x \mid x-p_n<0\}$，n=1、2、、k 表示，標記成 ϕ。

$\uparrow$

$C_0^k+C_1^k$

$\downarrow$

任取一點 p_k，必有一段區域可標記為 $x-p_n>0$，n=1、2、...

所以此 k 段區去可標記為 $x-p_1>0$， $x-p_2>0\ldots$， $x-p_k>0$

我們由這個最基本的點切割問題，搭配不等式的觀念，發現了這個更簡單容易的方式，可以推導出公式，而且讓我們更了解公式 $C_0^k+C_1^k$ 所代表的意義，那麼其他兩個基本的切割問題是不是一樣也可以用同樣的觀念來推導出公式呢?

3.2 以不等式觀點重新探討 Question 2

由上一節中我們從另一個角度重新推導相異 k 點，可將一維度直線切割出最多幾段區域的公式，於是我們想也可以用這樣的觀念來推導直線切割的問題，並了解 k 條直線可將此平面切割出最多幾塊區域的公式。

Question 2：假設有 k 條一維度直線在一個二維度平面上，則這 k 條直線可將此平面最多切割出幾塊區域?

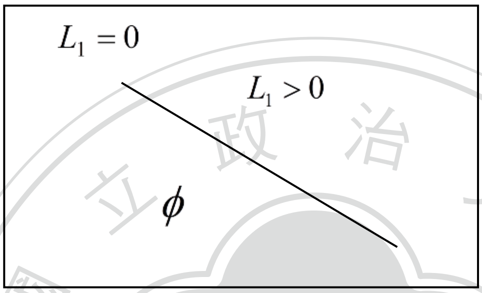
【定義 3.3】平面上有 n 條直線，這邊我們定義 $L_n=ax_n+by_n+c_n$，n=1、2、...、k，其中任一條直線 $L_k=0$ 皆可將平面分為兩塊區域，分別標記為 $L_k<0$、$L_k>0$，k=1、2⋯，

將$\bigcap_{n=1}^{n=k}\{(x,y)|a_n x+b_n y+c_n<0\}$的區域標記為$\phi$ 。

k=1 時：

一個二維度平面上有一條直線$ax_1+by_1+c_1=0$，明顯的可將此平面切割兩塊區域，我們可以根據定義 3.3 並只用”大於”的觀點來標記這兩塊區域。

這邊我們定義$L_n=ax_n+by_n+c_n$，n=1、2、...、k，所以此直線為$L_1=0$，將直線上方標記表$L_1>0$，直線下方則標記為ϕ，表示如下：

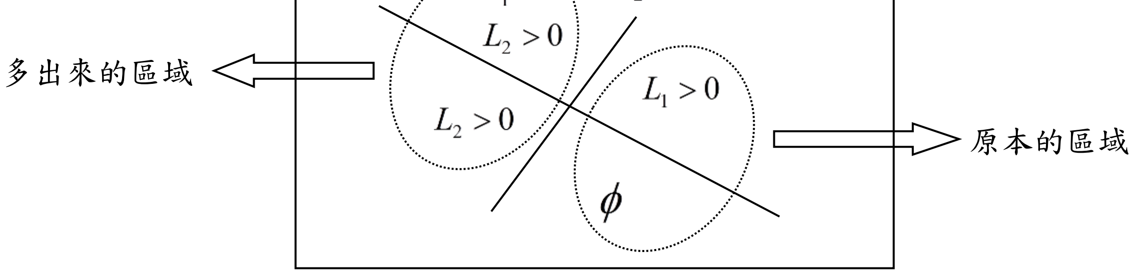


k=2 時：

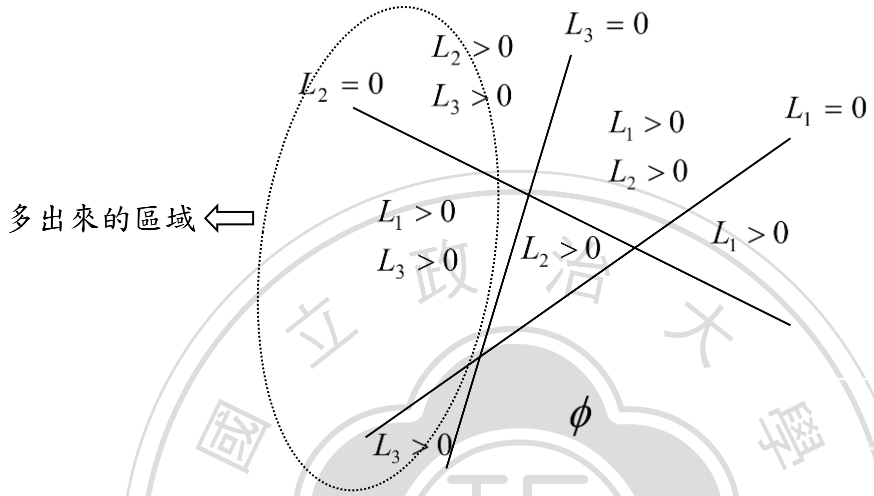
在平面上多插入一條$ax_2+by_2+c_2=0$，即為$L_2=0$，我們發現原本的兩塊區域皆被切割，而多出了兩塊區域，所以平面上有四塊區域，為了讓這些區域有規律而不混淆，所以我們將平面分成原本的區域和多出來的區域，這邊我們對多出來的區域加以定義。

【定義 3.4】在一個二維度平面上，有(k-1)條相異直線，插入第 k 條直線$L_k=0$後，則原有的區域被切割，多出來的區域在$L_k=0$的上方也就是$L_k>0$的區域。

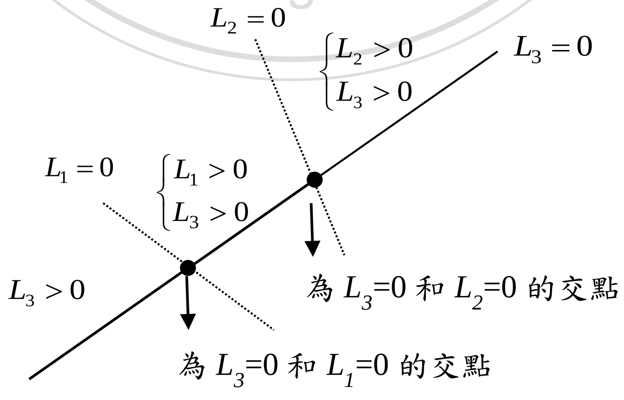
我們不改變原本的區域的標記方式，而根據定義 3.4 將多出來的區域加以標記，一塊多出來的區域為切割$L_k>0$，標記為$\begin{cases}L_1>0\\L_2>0\end{cases}$，而另一塊多出來的區域切割$\phi$，因為我們只用大於的觀點在標記，所以直接標記$L_2>0$，表示如下：



依此類推 k=3 時，平面再插入 $L_3=0$，則此平面被切割為七塊區域，跟 k=2 時一樣，我們根據定義 3.2，將直線 $L_3=0$ 上方的三塊區域定為多出來的區域，直線 $L_3=0$ 下方為原本的區域，我們不改變原本的區域標記的方式，並根據不等式的觀念並只用大於的觀點將多出來的區域，分別標記為 $\begin{cases}L_1>0\\L_3>0\end{cases}$、$\begin{cases}L_2>0\\L_3>0\end{cases}$、$L_3>0$，表示如下：



由上述 k=3，我們發現到，因為要切割出最多塊區域，所以最後插入的 $L_3=0$，一定與其他兩條直線皆相交於新的一點，如果 $L_3=0$ 為通過原本區域的 ϕ，且與其他兩直線由下而上分別交於兩點，我們可以重新令第一個交點為 $L_3=0$ 和 $L_1=0$ 交點，第二個交點為 $L_3=0$ 和 $L_2=0$ 的交點，再根據定義 3.2，這樣多出來的區域其標記方式就非常清楚有規律。



而且根據 Question 1，我們可以知道在一維度直線上有相異 3 點，則可將直線最多切割出 $C_0^3+C_1^3$ 段區域，每一段在二維度平面上皆延伸為一塊區域，所以以此類推，我

們再插入 $L_4=0$ 、 $L_5=0\ldots$我們皆可以方便算出平面上多切割出來的區域並且標記。

更重要的的是我們也發現到三條相異直線在二維度平面上所切割出來的區域，根據二元一次不等式觀念，可用最多兩條直線大於 0 的不等式來表示，其中最下面那一塊區域則永遠用 ϕ 表示。

由上述的發現，如果我們再插入 $L_4=0$ 、 $L_5=0\ldots L_{k-1}=0$ ，到平面上有相異 k 條直線是否也可以跟上述一樣?我們用數學歸納法來證明。

這邊我們先證明一個引理。

【引理 3.1】平面上有 n 條直線(n>1)切割出最多塊區域，一定能找到一條直線通過其中任意(n-1)條直線所切割出來標記為 ϕ 的區域。

證明：利用數學歸納法(*Induction*)證明

n=2 時，必定成立!

假設 n=k-1 時成立，則 n=k 時：平面上有 k 條直線，我們先移開其中一條直線，只剩(k-1)條直線在平面上，根據假設，一定有一條直線通過其中任意(k-2)條直線所切割出標記為 ϕ 的區域，令此直線為 $L_{k-1}=0$ 。

接著我們再將移開的直線放回，如果此直線已通過此 ϕ ，則令為 $L_k=0$ ，則 n=k 成立!如果此直線不通過此 ϕ，則我們將剛才直線 $L_{k-1}=0$ 令為 $L_k=0$，則 n=k 成成立! 則此引理由數學歸納法得證。

【定理 3.2】假設有 k 條一維度直線在一個二維度平面上，則這 k 條直線可將此平面最多切割出 $C_0^k+C_1^k+C_2^k$ 塊區域。

證明：

我們想要證明每一塊區域可用最多兩條直線大於 0 的不等式來標記，其中最下面那一塊區域則永遠用 ϕ 表示，利用數學歸納法(*Induction*)來證明。

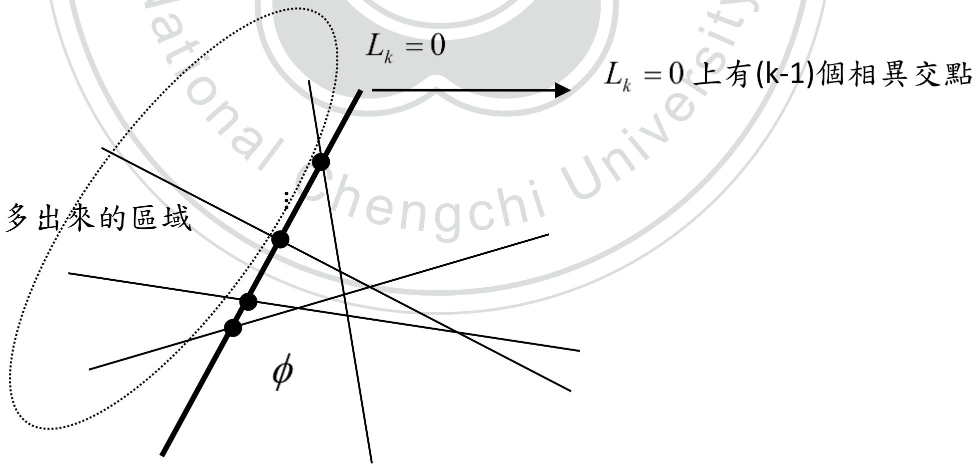
首先我們知道，因為要將平面切割成最多塊，所以這 k 條直線皆兩兩相交於一點，所以第 k 條直線上必有(k-1)個相交交點，這邊我們定義 $L_n=ax_n+by_n+c_n$，n=1、2、**…**、k。

n=1 時，可知一條直線 $L_1=0$ 可將平面最多切割成二塊區域，根據定義標記為 $L_1>0$、ϕ，所以成立。

接著我們假設 n=(k-1)成立；有(k-1)條相異直線將平面最多切割出 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-1}$ 塊區域，且每一塊區域可用最多兩條直線大於 0 的不等式來標記，則根據定義最下面那一塊區域則用 ϕ 表示。

則 n=k 時，平面有 k 條直線時，因為要切割出最多塊區域所以兩兩直線相交於一點，我們先任意移開一直線，使得平面上剩(k-1)條直線，則根據假設，這(k-1)條線所切割出的區域每一塊區域最多可用兩條直線大於 0 的不等式來標記，其中最下面那一塊區域則用 ϕ 表示。

我們再把移開的直線放回，則根據引理 3.1，則平面上 k 條直線中，上述(k-1)直線所形成的區域 ϕ，我們一定會找到一條直線通過此 ϕ，為我們將此直線令為 $L_k=0$，且 $L_k=0$ 和其他(k-1)條直線各交於新的一點，則 $L_k=0$ 上有(k-1)個相異交點，那麼我們根據定義 3.4 清楚知道多出來的區域在哪裡，如圖所示。

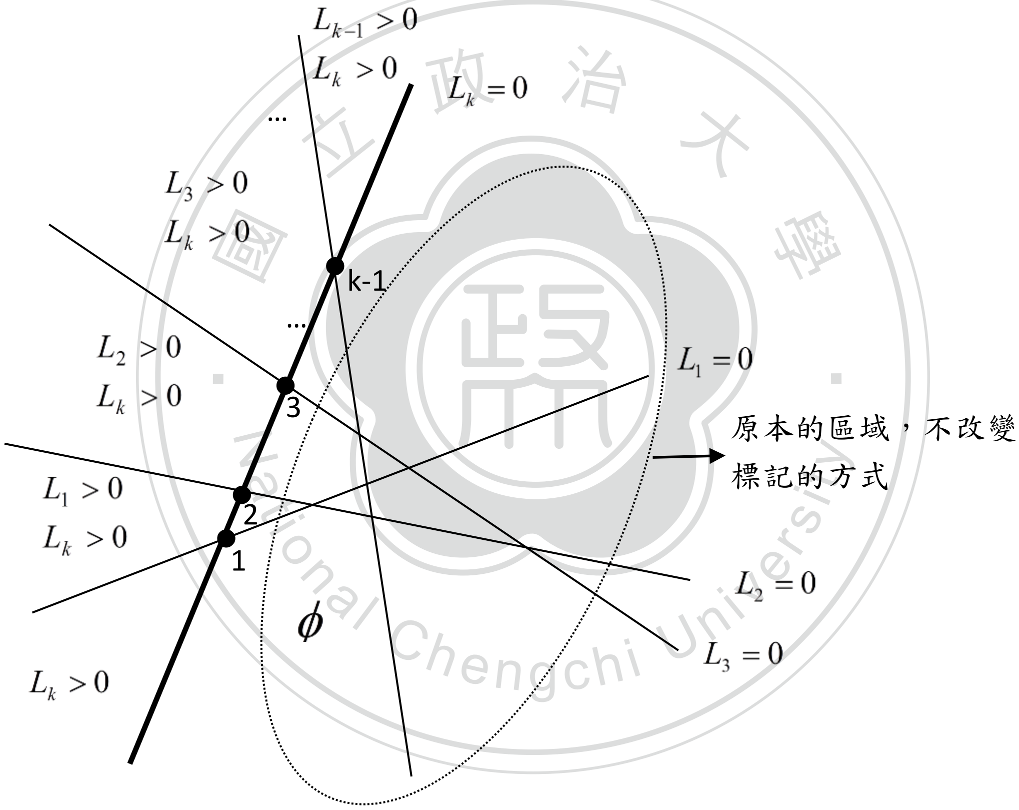


我們根據前面 Question 1 的結果可以知道，一維度直線上相異 k 個點可將此直線最多切割為(k+1)段區域，那麼在二維度平面上直線 $L_k=0$ 上，有相異(k-1)個交點切割出 k 段區域，每一段可延展成一塊區域，所以會多出 k 塊區域。

且為了標記方便好記，我們將 $L_k=0$ 由下往上的上第一交點令為 $L_k=0$ 和 $L_1=0$ 的交

點，第二個交點令為 $L_k=0$ 和 $L_2=0$ 的交點，以此類推至第(k-1)個交點為 $L_k=0$ 和 $L_{k-1}=0$ 的交點，而且由下而上每一個交點都會延展出一塊區域，所以我們可以知道每一塊在直線 $L_k=0$ 的上方，也就是 $L_k>0$ 為多出來的區域，我們以不等式的觀念標記這多出來的 k 塊區域。

多出的 k 塊區域，最下面一塊切割 ϕ 的區域則標為 $L_k>0$ ，其他分別為 $\begin{cases} L_1>0 \\ L_k>0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} L_2>0 \\ L_k>0 \end{cases} \dots \begin{cases} L_{k-1}>0 \\ L_k>0 \end{cases}$ 兩條直線大於 0 來標記，則我們可得到：



我們不改變原本由前面(k-1)條所切割出區域的標記方式，由假設可知每一塊區域可用最多兩條直線大 0 的不等式來標記，其中最下面那一塊區域則根據定義用 ϕ 表示，多出來的區域則標記為 $L_k>0$ 、 $\begin{cases} L_1>0 \\ L_k>0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} L_2>0 \\ L_k>0 \end{cases} \dots \begin{cases} L_{k-1}>0 \\ L_k>0 \end{cases}$ 。

則我們可以得到下列結果：

$$\boxed{L_k > 0} \qquad \boxed{\begin{cases} L_k > 0 \\ L_1 > 0 \end{cases}、\begin{cases} L_k > 0 \\ L_2 > 0 \end{cases} \cdots \begin{cases} L_k > 0 \\ L_{k-1} > 0 \end{cases}}$$

$$C_0^{k-1} + C_1^{k-1} + C_2^{k-1} + \{ \ C_0^{k-1} + C_1^{k-1} \ \}$$

$$||$$

$$C_0^k$$

我們根據巴斯卡遞迴性質(*Pascal Formula*) 詳見[3]

$$C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} = C_k^n$$

可以得到 $C_1^{k-1} + C_0^{k-1} = C_1^k$

$$C_2^{k-1} + C_1^{k-1} = C_2^k$$

最後我們們得到 $C_0^k + C_1^k + C_2^k$

由此可知，n=k 時成立!由數學歸納法知道，定裡 3.2 得證。

3.3 以不等式觀點重新探討 Question 3

由上二節中我們從另一個角度重新推導 Question 1、Question 2，於是我們想也可以用這樣的觀念來推導平面切割問題，並了解相異 k 個平面在三維度空間中將平面切割出最多幾塊區域的公式。

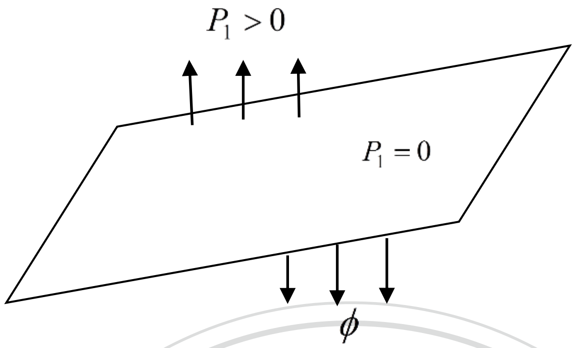
Question 3：假設有 k 個平面在一個三維度空間中，則這 k 個平面可將此空間最多切割出幾塊區域?

【定義 3.5】空間中有 n 個平面，這邊我們定義 $P_n = a_n x + b_n y + cz_n + d_n$，n=1、2、**...**、k，其中任一個平面 $P_k = 0$ 皆可將空間分為兩塊區域，分別標記為 $P_k < 0$、$P_k > 0$，k=1、2⋯，將 $\bigcap_{n=1}^{n=k} \{(x,y,z) | ax_n + by_n + cz_n + d_n < 0\}$ 的區域標記為 ϕ。

k=1 時：

一個三維度空間中有一個平面 $ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1 = 0$，明顯的可將此空間切割成兩塊

區域，一塊在平面的上方，一塊在平面的下方，我們可以根據定義 3.5，並且只用”大於”的觀點來標記這兩塊區域，這邊我們定義 $P_n = a_n x + b_n y + cz_n + d_n$ ，n=1、2、. . . 、k，所以此平面為 $P_1 = 0$ ，則我們一樣可以將這兩塊區域標記為 $P_1 > 0$ 、 ϕ ，表示如下：

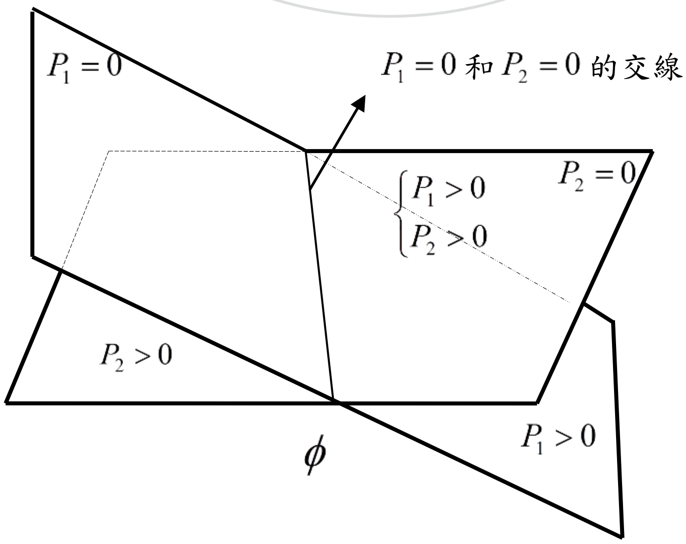


k=2 時：

在空間中多插入一個平面 $ax_2 + by_2 + cz_2 + d_2 = 0$ ，為 $P_2 = 0$ 我們發現原本的兩塊區域皆被切割，而多出了兩塊區域，所以空間中有四塊區域，為了讓這些區域有規律而不混淆，所以我們跟上述的 Question 1、Question 2 一樣將空間分成原本的區域和多出來的區域，並多出來的區域加以定義。

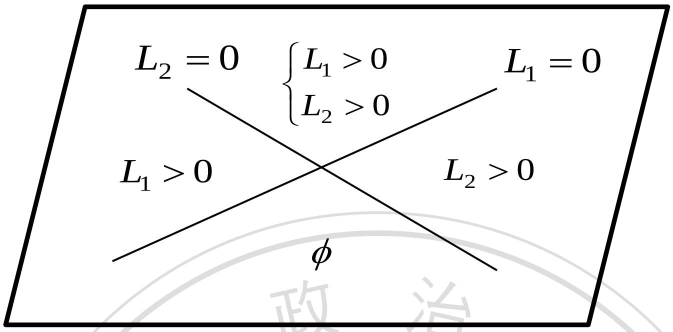
【定義 3.6】在一個三維度空間中，有(k-1)個相異平面，插入第 k 個平面 $P_k = 0$ 後，原有的區域則被切割，多出來的區域為 P_k 的上方，也就是 $P_k > 0$ 的區域。

則我們根據定義 3.6，將在 $P_2 = 0$ 上方的兩塊區域定為多出來的區域，在其下方則定為原本的區域，我們一樣不改變原本區域的標記方式，並利用不等式觀念標記多出來的兩塊區域，分別標記為 $\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_2 > 0 \end{cases}$ 、 $P_2 > 0$ ，如下圖示：



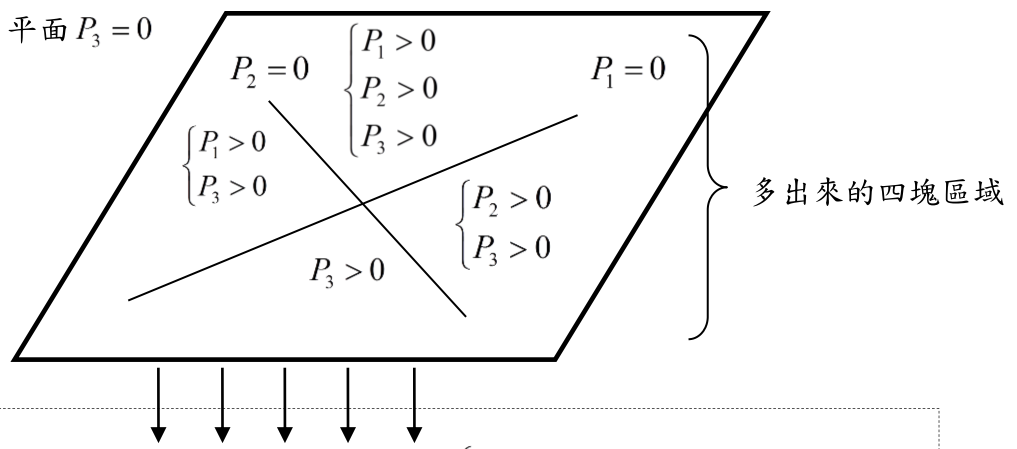
k=3 時，在空間中再插入一個平面 $P_3=0$，因為要將平面切割出最多塊區域，所以兩兩平面必相交於一條新的直線，則平面 $P_3=0$ 與其他兩平面 $P_1=0$、$P_3=0$ 分別相交出兩條直線，因此分別令為 $L_1=0$、$L_2=0$ 根據前面 Question 2 得到的結果，平面上有兩條相異直線可將此平面切割成四塊區域，分別標記為：

平面 $P_3=0$



我們可以知道插入平面 $P_3=0$ 後，空間中原本的區域被切割，由平面 $P_3=0$ 上相異兩直線所相交出的四塊區域，可知道在三維度空間中為八塊空間區域，我們根據定義 3.3，將在 $P_3=0$ 上面的四塊區域定為多出來的區域，其下方定為原本的區域。

跟上述標記方式一樣並不改變原本區域的標記方式，而在平面 $P_3=0$ 上，$L_1=0$ 為 $P_1=0$ 和 $P_3=0$ 的交線，$L_2=0$ 為 $P_2=0$ 和 $P_3=0$ 的交線，所以平面 $P_3=0$ 上標記為 $\begin{cases} L_1>0 \\ L_2>0 \end{cases}$、$L_1>0$、$L_2>0$、$\phi$，在三維度空間中我們把交線直接換成平面，則標記為 $\begin{cases} P_1>0 \\ P_2>0 \end{cases}$、$P_1>0$、$P_2>0$、$\phi$，在 $P_3=0$ 的下方為原本的區域，而多出來的四塊區域皆在 $P_3=0$ 的上方，根據不等式的觀念和大於的觀點，所以分別標記為 $\begin{cases} P_1>0 \\ P_2>0 \\ P_3>0 \end{cases}$、$\begin{cases} P_1>0 \\ P_3>0 \end{cases}$、$\begin{cases} P_2>0 \\ P_3>0 \end{cases}$、$P_3>0$，如下圖示。



平面 $P_3=0$ 下方為原本的區域：$\begin{cases}P_1>0\\P_2>0\end{cases}$ 、$P_1>0$ 、$P_2>0$ 、ϕ

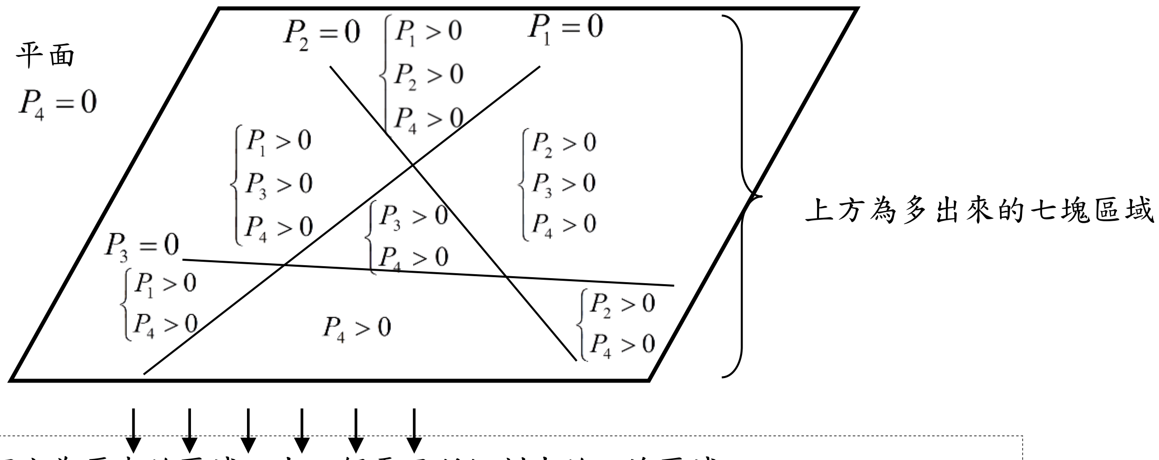
由上述k=3可以知道，我們發現到在三維度空間中，因為要將空間切割出最多區域，所以最後插入的 $P_3=0$ 一定與其他兩平面各相交於一條新的直線，如果 $P_3=0$ 通過原本區域的 ϕ ，且與其他兩個平面分別交於兩條直線，再根據定義 3.3，這樣多出來的區域標記方式則非常清楚有規律。

而且根據 Question 2 的結果知道，我們知道在二維度平面中有兩條直線，可將此平面最多切割出 $C_0^2+C_1^2+C_2^2$ 塊區域，所以在平面 $P_3=0$ 上的兩條直線則形成 4 塊區域，每一塊區域在三維度空間中可延伸為一塊空間區域，所以由此可知，如果依序插入的 $P_4=0$ 、$P_5=0$ ...我們可以快速算出會讓空間多切割出幾塊區域並標記。

更重要的是我們也發現到三個平面在三維度空間中所切割出來的最多區域，根據不等式觀念，每一塊可用最多三個平面大於 0 的不等式來表示，其中最下面那一塊區域無法用任何平面大於 0 表示的，則永遠用 ϕ 來標記。

我們在討論 k=4 時會不會也如同上述 k=3 所發現的結果一樣：

k=4 時，在空間中再插入平面 $P_4=0$ ，我們將平面 $P_4=0$ 通過 ϕ 區域，$P_4=0$ 上則有與其他三個平面所相交出的三條直線：



下方為原本的區域，由三個平面所切割出的八塊區域：

$$\begin{cases}P_1>0\\P_2>0\\P_3>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_2>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_3>0\end{cases}、\begin{cases}P_2>0\\P_3>0\end{cases}、P_1>0、P_2>0、P_3>0、\phi$$

那麼由上圖示，我們可以清楚知道 k=4 時，可以將空間最多切割出 15 塊區域，且如上列所述，每一塊可用最多三個平面大於 0 的不等式來表示，其中最下面那一塊區域在最下方，則根據定義用ϕ表示。

$$\begin{cases}C_3^4：\begin{cases}P_1>0\\P_2>0\\P_3>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_2>0\\P_4>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_3>0\\P_4>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_3>0\\P_4>0\end{cases}\\ C_2^4：\begin{cases}P_1>0\\P_2>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_3>0\end{cases}、\begin{cases}P_1>0\\P_4>0\end{cases}、\begin{cases}P_2>0\\P_3>0\end{cases}、\begin{cases}P_2>0\\P_4>0\end{cases}、\begin{cases}P_3>0\\P_4>0\end{cases}\\ C_1^4：P_1>0、P_2>0、P_3>0、P_4>0\\ C_0^4：\phi\end{cases}$$

所以我們如果我們再插入$P_5=0$、$P_6=0\ldots P_{k-1}=0$，到空間中有 k 個平面是否也可以跟上述一樣?我們用數學歸納法來證明。

這邊我們先證明一個引理。

【引理 3.2】空間中有 n 個平面(n>1)切割出最多塊區域，一定能找到一個平面通過其中任意(n-1)個平面所切割出來標記為ϕ的區域。

證明：利用數學歸納法(*Induction*)證明

n=2，空間中有兩個平面相交於一直線，必定成立!

假設 n=k-1 時成立，則 n=k 時：空間中有 k 個平面，我們先移開其中一個平面，只剩(k-1)個平面在空間中，根據假設，任意(k-2)個平面所切割出來標記為ϕ的區域，一定有一個平面通過此ϕ，令此平面為$P_{k-1}=0$。

接著我們再將移開的平面放回，如果此平面已通過此ϕ，則令為$P_k=0$，則 n=k 成立!如果此平面不通過此ϕ，則我們將剛才平面$P_{k-1}=0$再令為$P_k=0$，則 n=k 成立。則此引理由數學歸納法得證!

【定理 3.3】假設有 k 個二維度直線在一個三維度平面上，則這 k 個平面可將此空間最多切割出$C_0^k+C_1^k+C_2^k+C_3^k$塊區域。

證明:

我們想要證明證明每一塊區域可用最多三個平面大於 0 的不等式來標記，其中最下面那一塊區域則用ϕ表示，利用數學歸納法(*Induction*)來證明。

首先我們知道，因為要將空間切割出最多塊區域，所以這 k 個平面皆兩兩相交於一直線，所以第 k 個平面上必有(k-1)條相交直線，這邊我們定義$P_n=ax_n+by_n+cz_n+d_n$，n=1、2、**...**、k。

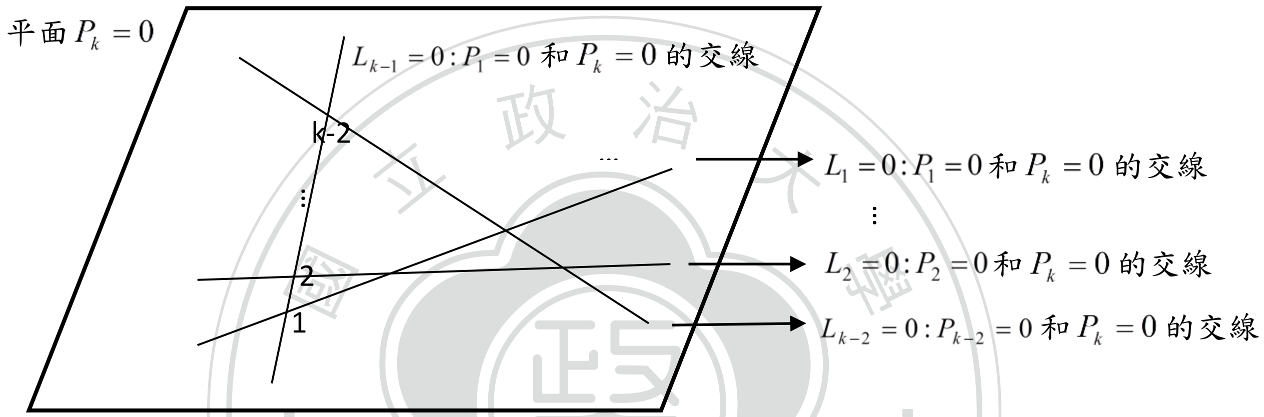
則 n=1 時，一個平面$P_1=0$可將空間最多切割出兩塊區域，分別標記為$P_1>0$、ϕ，所以成立。

接著我們假設(k-1)平面時也成立；空間中有(k-1)個平面可將此空間切割最多($C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-1}+C_3^{k-1}$)塊區域，且每一塊可用最多三個平面大於 0 來標記，其中最下方的區域無法用任何平面大於 0 表示，則標記為ϕ。

則 n=k 時，空間中有 k 個平面，$P_1=0$、$P_2=0\ldots P_k=0$，且兩兩相交於一條直線，先任意移開一個平面，使得空間中剩下(k-1)個平面，則根據假設，這(k-1)個平面所切割出的區域每一塊區域可用最多三個平面大 0 的不等式來標記，其中最下面那一塊區域則

用 ϕ 表示。

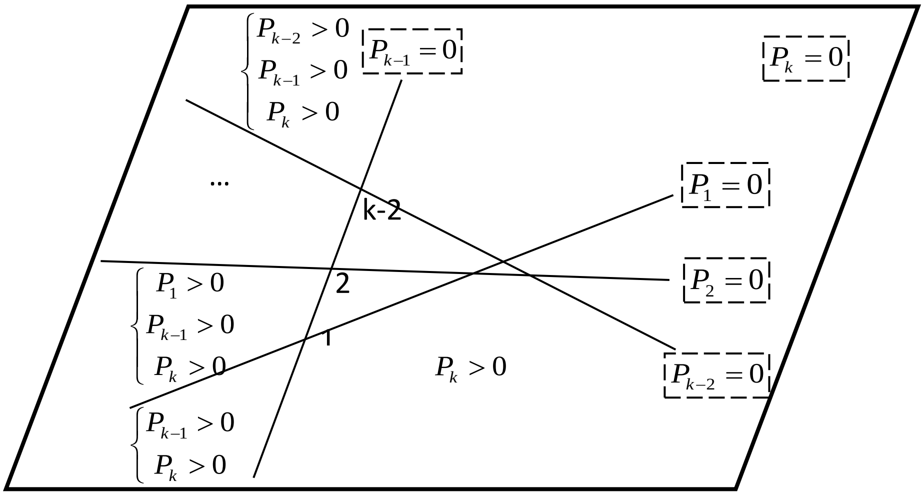
我們再把移開的平面放回空間中，則空間中有 k 個平面，根據引理 3.2，上述(k-1)個平面所切割形成的區域 ϕ ，我們一定會找到一個平面通過此 ϕ ，我們將此平面令為 $p_k=0$ ，且平面 $p_k=0$ 與其他(k-1)個平面皆相交於一條新的直線，則平面 $p_k=0$ 上有(k-1)條直線，$L_1=0$、$L_2=0$、…. $L_{k-1}=0$，兩兩相交於一點，則 $L_{k-1}=0$ 有(k-2)個交點，仿照 Question 2，我們將第一個相交點令 $L_1=0$ 和 $L_{k-1}=0$ 相交，第二個相交點令 $L_2=0$ 和 $L_{k-1}=0$ 相交，以此類推下去。



由 Question 2 我們已經可以快速清楚算出平面上有(k-1)條直線最多可將此平面切割成 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-1}$ 塊區域，每一塊可用最多兩條直線大於 0 來標記。

根據定義 3.3，我們知道大於平面 $P_k=0$ 的區域也就是說在此平面上方的區域為多出來的區域，上述平面 $P_k=0$ 上(k-1)條直線，切割出 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-1}$ 塊區域，每一塊在平面上的區域在三維度空間中可延伸為一塊區域，所以表示空間中 k 個平面時會多出 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-1}$ 塊。

在平面上，這 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-1}$ 可用最多兩條直線大於 0 標記；現在在三維度空間中我們直接將相交直線改為平面來標記，如 $L_1>0 \rightarrow P_1>0$ ， $\begin{cases} L_1>0 \\ L_2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1>0 \\ P_2>0 \end{cases}$ ，我們不改變原本區域的標記方式，且根據定義 3.3 和不等式的觀念將此平面 $P_k=0$ 上方多出來的區域標記，如下圖所示：



整理如下：

C_0^{k-1}：$P_k = 0$ 切過 ϕ 區域，在 $P_k = 0$ 的上方 $\longrightarrow$ $P_k > 0$

C_1^{k-1}：這些區域在二維度平面上用一條直線大於 0 標記區域，在空間中 $P_k = 0$ 的上方，則用兩個平面大於 0 標記，$\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_k > 0 \end{cases}$、$\begin{cases} P_2 > 0 \\ P_k > 0 \end{cases}$、…$\begin{cases} P_{k-1} > 0 \\ P_k > 0 \end{cases}$。

C_2^{k-1}：這些區域在二維度平面上用二條直線大於 0 標記區域，在空間中 $P_k = 0$ 的上方，則用三個平面大於 0 標記，$\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_2 > 0 \\ P_k > 0 \end{cases}$、$\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_3 > 0 \\ P_k > 0 \end{cases}$、…$\begin{cases} P_{k-2} > 0 \\ P_{k-1} > 0 \\ P_k > 0 \end{cases}$。

由此清楚知道多出來的區域最多用三個平面大於 0 標記。

在平面 $P_k = 0$ 下方為原本的區域，就是前(k-1)塊平面所切割的出的區域，根據假設可用最多三個平面大於 0 標記，而多出來的區域，根據上述，一樣可用最多三個平面大於 0 標記，如下列所示：

$P_k > 0$	在空間中 $P_k = 0$ 上方，用兩個平面大於 0 標記的區域。	在空間中 $P_k = 0$ 上方，用三個平面大於 0 標記的區域。

$$\underset{\substack{\| \\ C_0^k}}{C_0^{k-1}} + C_1^{k-1} + C_2^{k-1} + C_3^{k-1} + \{\ C_0^{k-1} \quad + \quad C_1^{k-1} \quad + \quad C_2^{k-1}\ \}$$

我們由巴斯卡遞迴性質(*Pascal Formula*)　　　詳見[3]

$$C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} = C_k^n$$

可以得到： $C_1^{k-1} + C_0^{k-1} = C_1^k$ ， $C_2^{k-1} + C_1^{k-1} = C_2^k$ ， $C_3^{k-1} + C_2^{k-1} = C_3^k$

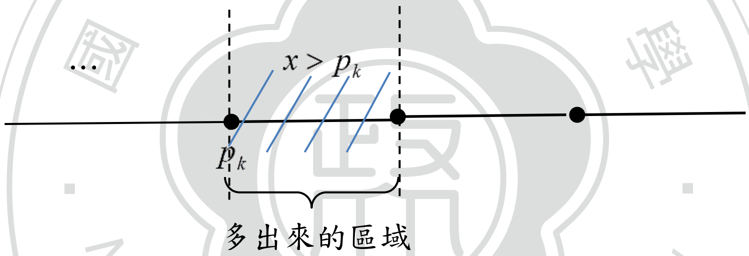
最後我們得到 $C_0^k + C_1^k + C_2^k + C_3^k$

所以 n=k 時成立。

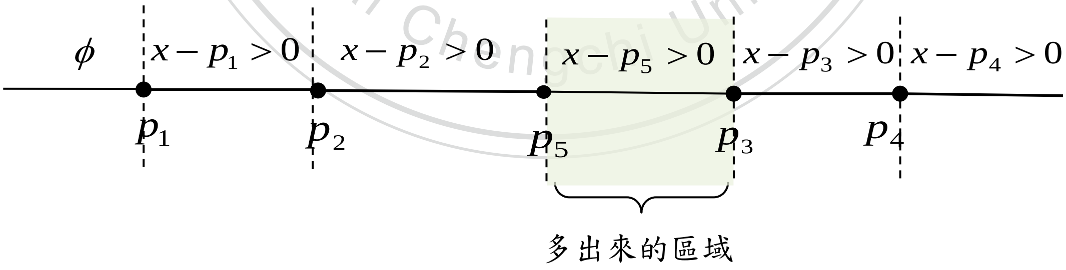
4. 點線面切割問題的探討與實例

由上一章節我們用比較簡單、容易了解的不等式觀念驗證出點線面切割問題的公式，並由定理可以知道一維度直線、二維度平面、三維度空間，皆可以利用這樣的方式推導，更重要的是我們也發現到這個論證方式更容易了解推導，國中的學生可以利用所學的代數、幾何知識了解此切割問題，。

這邊進一步說明，在一維度直線上，有一點(k-1)個點，可將此直線最多出切割成 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}$ 段區域，根據上章節，我們知道可以標記為 $x>p_1$、$x>p_2$、…$x>p_{k-1}$、ϕ，如果我們再隨意插入一點 p_k，雖然不知道這 k 個點的大小，我們一樣可以依照上述 3.1 定義找到多出來的區域，並以不等式的觀念標記。



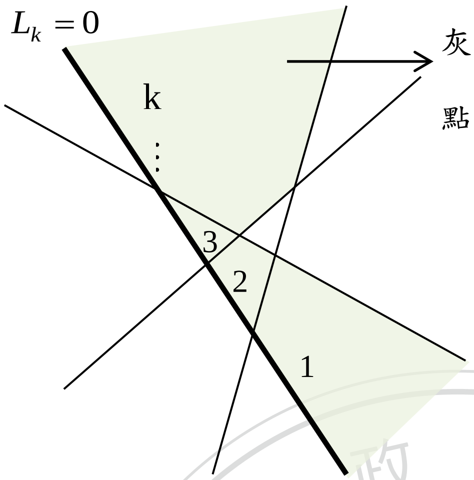
例 1：k=5，平面上有 5 個相異點，標記方式如下：



同樣想法，進一步說明，在二維度平面上，有(k-1)條直線可將此平面最多切割出 $C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-2}$ 塊區域，每一塊區域可用最多兩條直線大於 0 標記我，並且一定有一塊區域標記為 ϕ。

我們如果再任意插入一條直線，根據上述的引理，我們必然能找到一條直線通過 ϕ，

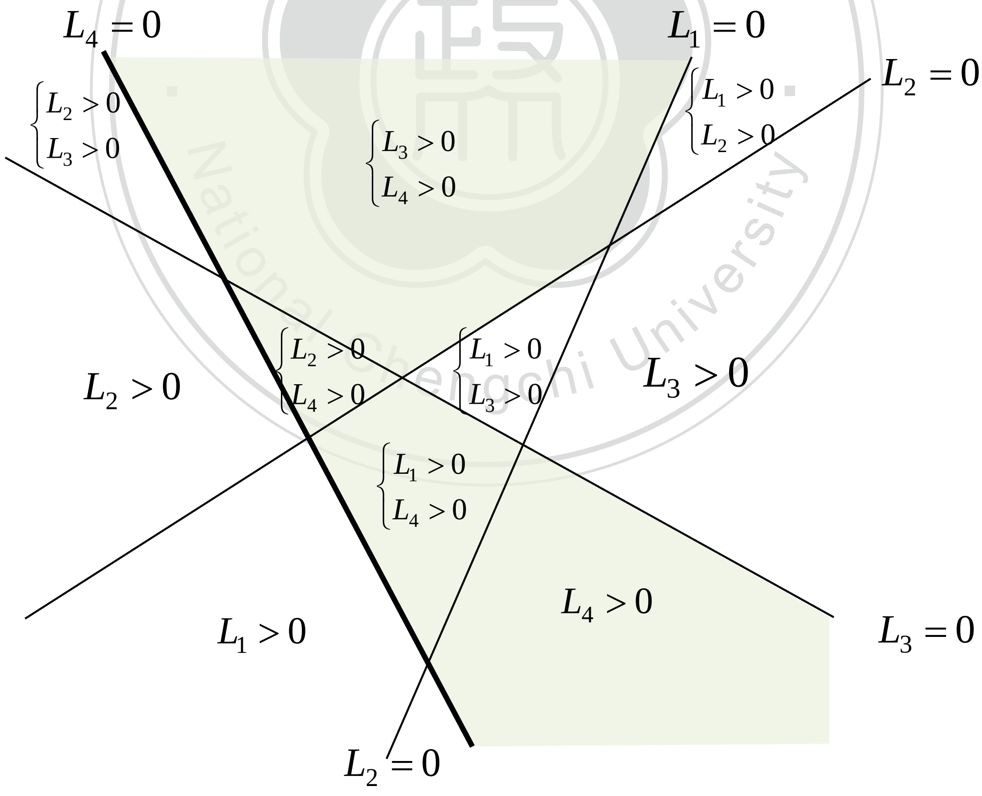
令為$L_k=0$，雖我們並不知道這 k 條直線的斜率大小，但一樣可以依照上述 3.2 定義找到多出來的區域，並以不等式的觀念標記，而原本的區域標記方式則不改變。



灰色區域為多出來的區域，有(k-1)個交點，所以多出來 k 塊區域。

例 2：k=4，平面上有 4 條直線切割出最多塊區域，標記方式如下：

($L_4=0$為通過ϕ的直線，下圖虛線色部份的 4 塊區域為插入$L_4=0$多出來的區域)

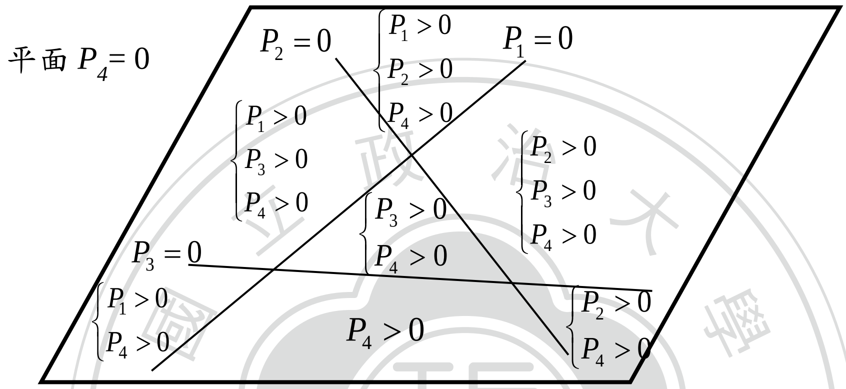


同樣想法，進一步說明，在三維度空間中，有(k-1)個平面可將此空間最多切割出$C_0^{k-1}+C_1^{k-1}+C_2^{k-2}+C_3^{k-1}$塊區域，每一塊區域我們可用最多三個平面大於 0 去標記，並有

一塊標記為ϕ，我們如果再任意插入一個平面，根據上述的引理，我們必然能找到一條平面通過ϕ，令為$P_k=0$，雖我們並不知道這 k 個平面的截距高低，但一樣可以依照上述 3.1 定義找到多出來的區域，並以不等式的觀念標記，而原本的區域標記方式則不改變。

例 3：k=4，空間中有 4 個平面所切割出最多塊區域。

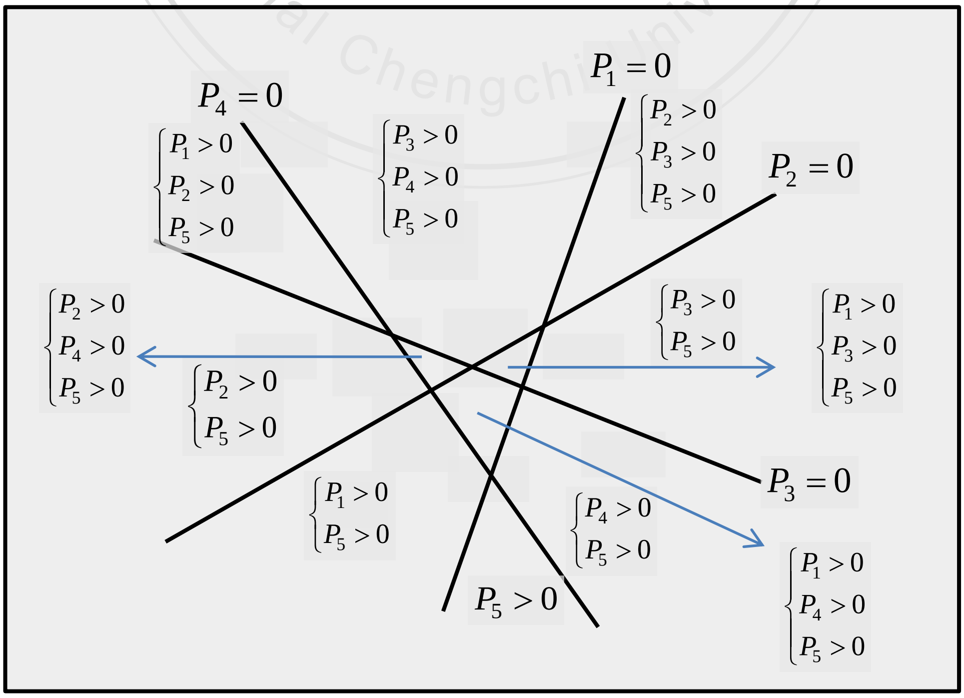
（原本的 8 塊區域在$P_4=0$下方，圖中只標示在$P_4=0$上方的多出來的 7 塊區域。）



例 3：k=5，空間中有 5 個平面所切割出最多塊區域。

（原本的 15 塊區域在$P_5=0$下方，圖中只標示在$P_5=0$上方的多出來的 11 塊區域。）

平面$P_5=0$



5. 結論與未來展望

由上列章節的推導過程可下列結果：

1. 一維度直線有 k 個點，可切割出最多 $C_0^k + C_1^k$ 塊區域，其中一塊標記為 ϕ，其餘每段區域可用一個 $x - p_K > 0$ 的標記方式。
2. 二維度平面上有 k 條直線，可切割出最多 $C_0^k + C_1^k + C_2^k$ 塊區域，其中一塊標記為 ϕ，其餘每塊區域可用最多兩條一維度直線大於 0 標記方式。
3. 三維度空間中有 k 個平面，可切割出最多 $C_0^k + C_1^k + C_2^k + C_3^k$ 塊區域，其中一塊標記為 ϕ，其餘每塊區域可用最多三個二維度平面大於 0 標記方式。

綜合所收集到的文獻，點線面切割最多區域這個古典的數學題目已經由許多的數學方法驗證出來，雖然這些方法都漂亮驗證出此問題，並找到公式，但其中的過程對於中學學生來說卻是艱難複雜的數學觀念及計算過程，所以在這篇論文中，我用另一個更淺顯易懂的數學觀念驗證此公式，不僅可以讓更多學生了解，而且能理解此問題的公式及推論過程。

在教學現場中，我們都知道推導出一道數學問題的答案，可以由不同的觀點切入得到不同解題方法，但不管是哪一種方法都要真正深入了解，融會貫通，而不是只是囫圇吞棗的背一堆公式；在生活中能實際運用，解決問題，這才是真正學習數學的本質。

【未來展望】

那麼如果延伸上述點線面切割問題如果為：

在 n 維度空間中，有 k 個相異(n-1)維度超平面，可將此超平面空間最多切割出 $C_0^k + C_1^k + \ldots + C_{n-1}^k + C_n^k$ 塊區域，是否也可以證明出其中一塊可標記為 ϕ，其餘每塊區域可用最多 n 個(n-1)維度超平面大於 0 標記方式。

我相信這個延伸問題勢必也可以用這麼淺顯易懂的方式推論出來，希望之後還有時間能從這個方向再去努力。

參考文獻

[1]Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawerence E. Spence, Linear Algebra, 3^{rd} ed.,Prentice-Hall,1997,47-48.

[2]Alan Tucker (2007, 5^{th} edition). Applied Combinatorics. John Wiley & Sons Inc.

[3] Grimaldi, R. P., Recurrence relations. In Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics by Rosen, K. H. (Editor). Boca Raton, Florida: CRC, 1999.

[4]王佑欣，民國 91 年(2002)，Combinatorial Argument of Partition with Point ,Line and Space，政大應數所碩士論文。

[5]何景國，差分法及其在組合學上的應用，數學傳播第 10 卷第一期，頁 49-51。

[6]宋秉信，從尤拉公式到空間的平面分割，數學傳播，第 22 卷第三期，頁 54-60。

[7]游森棚，披薩與西瓜，科學月刊第 477 期，頁 60-62。

[8]游森棚，談談九十五學年度高中數學新課程大綱的“遞迴”。2008 February 25。 Available from:http://umath.nuk.edu.tw/_senpengeu/HighSchool/recurr.pdf