國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

有關錯排列的探討
A Study about Derangements

碩士班學生：王思堯撰

指導教授：李陽明博士

中華民國 一零二年 十一月 四日

有關錯排列的探討

學生： 王思堯　　　　　　　　　　　指導教授： 李陽明博士

國立政治大學應用數學研究所

摘　　要

在本論文中，令D_n是$\{1, 2, \cdots, n\}$的錯排列所形成的集合，而讓d_n代表D_n的個數。我們討論一個常用的遞迴關係式：$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$。針對這個公式，我們將會先給一個組合論證；而本文將提供一個更為簡潔的方式來證明這個遞迴關係式，就是構造出兩個函數，分別從類D_{n-1}和D_{n-2}的集合映射到D_n上，並且證明這兩個函數是對射的函數。

本文第一章先對錯排列作一個簡單的介紹，第二章則說明我們錯排列之間的映射是如何製造出來的，並且證明這樣的映射是沒有問題的，第三章則提供其他錯排列遞迴關係式的資訊，讓其他有興趣的夥伴們能一起探討。

ABSTRACT

Let D_n be the set of derangement of $\{1,\ 2,\cdots,n\}$, and let d_n be the number of D_n. In this disseration, we will discuss the well-knowen derangement formula $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$. We first give a proof by combinatorial argument. Then we provide another simpler proof by defining two functions from certain sets derived from D_{n-1} and D_{n-2} into this set D_n. We will show that this two functions are bijective, and this will finish the proof of the derangement formula.

First, in chapter one, we will introduce the necessary background of derangements. In chapter two, we will show how the derangement and the two functions mentioned above are constructed. We will also show that these two functions are bijective and finish the proof. Finally, in chapter three we provide more information on the derangement formula derangement which may lead to further discussion for those who are interested in this issue.

誌　　謝

這篇論文能夠完成，我感覺很光榮。首先要感謝指導教授李陽明老師，如果沒有老師課堂上的教導，我不會對於錯排列產生興趣。另外，老師花了很多額外的時間，教導我課業以及待人接物的道理，也常常為了我一大早就跑來學校，不厭其煩的指導我，因此，我要向老師致上最真誠的感謝。

感謝洪聰於學長的論文提供我靈感。感謝許雲峰、羅文隆、涂健晏同學以及其他的好朋友們，常常會適時的給我建議，提醒我有什麼地方需要加强。感謝李沛承學長和王偉名同學，在電腦程式上的指導，在我需要協助時適時的伸出援手，感謝曾經指導我、鼓勵我的老師們，讓我一點一點的進步，如今才能完成這篇論文。

要做好一篇論文其實需要很多的時間以及專注的能力，感謝高彗娟小姐，在過程中給我的支持與陪伴，也感謝我的家人，無時無刻的照顧，讓我可以毫無顧忌的完成學業。

目　　　　錄

第 一 章　錯排列的簡介

1.1 關於錯排列

錯排列的問題，最早是由Nikolaus I. Bernoulli和Leonhard Euler所研究。這個問題有許多版本，例如：

聖誕節的時候，許多人都喜歡玩交換禮物的遊戲，也就是每個人準備一份禮物和其他人交換，這時候每個人都會希望拿到的禮物不會是自己帶來的，因此，這樣交換禮物的過程，沒有人拿到自己禮物的方法數，就是錯排列的個數。

或者：

古代26個英文字母的加密，就是將某個字母用另外一個字母取代，例如apple就用bqqmf取代，只要將所有字母的順序往前一個單位就可以還原。那麼如果要求所有字母都不得出現在原來的位置上，則有幾種方法？

或者：

某班老師希望幫學生配對，每個人皆是另一位同學的小天使，也是另一位同學的小主人，當然老師不希望有同學自己是自己的小天使與小主人，因此，這種分配學生的方法數，也是錯排列的計算。

1.2 錯排列的計算方式

我們為了方便表達錯排列，之後就用數字1, 2, 3, 4,$\cdots$, n的排列，並且不允許1出現在第一個位置，2出現在第二個位置，$\cdots$，n出現在第n個位置，我們假設D_n是$\{1, 2, \cdots, n\}$的錯排列所形成的集合，其中d_n代表D_n的個數。當數字比較少的時候，就可以用窮舉法。

$d_1 = 0$

$d_2 = 1$

$d_3 = 2$

$d_4 = 9$

$d_5 = 44$

$d_6 = 265$

表格如下：

$d_1 = 0$

因為1自己做排列，一定只有第一個位置可以選，所以不可能有錯排列

$d_2 = 1$

D_2：(2 1)

$d_3 = 2$

D_3：(2 3 1) , (3 1 2)

$d_4 = 9$

$$D_4: \begin{cases} (2\ 3\ 4\ 1) \\ (3\ 4\ 2\ 1) \end{cases} \quad \begin{cases} (4\ 3\ 1\ 2) \\ (3\ 1\ 4\ 2) \end{cases} \quad \begin{cases} (2\ 4\ 1\ 3) \\ (4\ 1\ 2\ 3) \end{cases} \quad \begin{cases} (4\ 3\ 2\ 1) \\ (3\ 4\ 1\ 2) \\ (2\ 1\ 4\ 3) \end{cases}$$

$d_5 = 44$

$$
D_5: \begin{cases} (2\ 3\ 4\ 5\ 1) \\ (3\ 4\ 2\ 5\ 1) \\ (4\ 3\ 5\ 2\ 1) \\ (3\ 5\ 4\ 2\ 1) \\ (2\ 4\ 5\ 3\ 1) \\ (4\ 5\ 2\ 3\ 1) \\ (4\ 3\ 2\ 5\ 1) \\ (3\ 4\ 5\ 2\ 1) \\ (2\ 5\ 4\ 3\ 1) \end{cases}
\quad \begin{cases} (5\ 3\ 4\ 1\ 2) \\ (3\ 4\ 5\ 1\ 2) \\ (4\ 3\ 1\ 5\ 2) \\ (3\ 1\ 4\ 5\ 2) \\ (5\ 4\ 1\ 3\ 2) \\ (4\ 1\ 5\ 3\ 2) \\ (4\ 3\ 5\ 1\ 2) \\ (3\ 4\ 1\ 5\ 2) \\ (5\ 1\ 4\ 3\ 2) \end{cases}
\quad \begin{cases} (2\ 5\ 4\ 1\ 3) \\ (5\ 4\ 2\ 1\ 3) \\ (4\ 5\ 1\ 2\ 3) \\ (5\ 1\ 4\ 2\ 3) \\ (2\ 4\ 1\ 5\ 3) \\ (4\ 1\ 2\ 5\ 3) \\ (4\ 5\ 2\ 1\ 3) \\ (5\ 4\ 1\ 2\ 3) \\ (2\ 1\ 4\ 5\ 3) \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} (2\ 3\ 5\ 1\ 4) \\ (3\ 5\ 2\ 1\ 4) \\ (5\ 3\ 1\ 2\ 4) \\ (3\ 1\ 5\ 2\ 4) \\ (2\ 5\ 1\ 3\ 4) \\ (5\ 1\ 2\ 3\ 4) \\ (5\ 3\ 2\ 1\ 4) \\ (3\ 5\ 1\ 2\ 4) \\ (2\ 1\ 5\ 3\ 4) \end{cases}
\quad \begin{cases} (5\ 3\ 4\ 2\ 1) \\ (5\ 4\ 2\ 3\ 1) \\ (3\ 5\ 4\ 1\ 2) \\ (4\ 5\ 1\ 3\ 2) \\ (2\ 4\ 5\ 1\ 3) \\ (4\ 1\ 5\ 2\ 3) \\ (2\ 3\ 1\ 5\ 4) \\ (3\ 1\ 2\ 5\ 4) \end{cases}
$$

隨著數字越來越大，用窮舉的方式變得沒有效率，因此我們利用公式：

定理：$d_1 = 0, d_2 = 1$, $\forall n \geq 3$, $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$

證明：

假設n個數字作排列，因為1號不能在第一個位置，所以如果2號在第一個位置，而1號又恰好在第二個位置，則我們可以把1號2號遮住不看，剩下的數字作排列會有d_{n-2}種方法。如果3號在第一個位置，而1號又恰好在第三個位置，則我們可以把1號和3號遮住不看，剩下的數字作排列也會有d_{n-2}種方法，以此類推，如果n號在第一個位置，而1號又恰好在第n個位置，則我們可以把1號和n號遮住不看，剩下的數字作排列會有d_{n-2}種方法，所以共有$n-1$個d_{n-2}。

而另外一種情況是，如果2號在第一個位置，而1號不在第二個位置的時候，則1號不能在第二個位置，3號不能在第三個位置，$\cdots$，n號不能在第n個位置，所以共有d_{n-1}種方法。如果3號在第一個位置，而1號不在第三個位置的時候，則2號不能在第二個位置，1號不能在第三個位置，$\cdots$，n號不能在第n個位置，所以也有d_{n-1}種方法。以此類推，如果n號在第一個位置，而1號不在第n個位置的時候，則2號不能在第二個位置，3號不能在第三個位置，$\cdots$，1號不能在第n個位置，所以共有$n-1$個d_{n-1}。 ■

例如：

$$\begin{aligned}
d_5 &= 4(d_4 + d_3) \\
&= 4[3(d_3 + d_2) + 2(d_2 + d_1)] \\
&= 4\{3[2(d_2 + d_1) + d_2] + 2(d_2 + d_1)\} \\
&= 4[3(3d_2 + 2d_1) + 2d_2 + 2d_1] \\
&= 4(9d_2 + 6d_1 + 2d_2 + 2d_1) \\
&= 4(11d_2 + 8d_1) = 44
\end{aligned}$$

由這樣的過程，我們不難發現只要我們知道後面兩項，就可以得到新的一項。因此這個遞迴式可以計算出錯排列的個數，但是這樣的方法，或許並不是這麼淺顯易懂，尤其是對於遞迴不太熟悉的人來說，更是一頭霧水。所以，希望有一個簡單的對應，能夠讓大眾都能明瞭，讓錯排列的問題，有更多人能了解。

第 二 章　錯排列的研究

2.1　製造錯排列的方式

定義一：

令$(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in D_n$

若$\forall\, i = 1, 2, \cdots, n$, $a_i = b_i$, 則稱兩錯排列$(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)$相等

符號為$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ ■

定義二：

給定$1 \le k \le n-1$.

讓$D_{n-1}^{(k)} = \{(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, k) \,|\, (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) \in D_{n-1}\}$.

則定義函數$f_k : D_{n-1}^{(k)} \to D_n$如下

$f_k(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, k) = (a_1, \cdots, a_{j-1}, n, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1}, k)$ 對於某個$a_j = k$. ■

例如：$(n = 5, k = 3)$

$$D_4^{(3)} : \begin{cases} (2\ 3\ 4\ 1\ 3) & \Rightarrow & f_3(2\ \underline{3}\ 4\ 1\ 3) = (2\ \underline{5}\ 4\ 1\ 3) \\ (3\ 4\ 2\ 1\ 3) & \Rightarrow & f_3(\underline{3}\ 4\ 2\ 1\ 3) = (\underline{5}\ 4\ 2\ 1\ 3) \\ (4\ 3\ 1\ 2\ 3) & \Rightarrow & f_3(4\ \underline{3}\ 1\ 2\ 3) = (4\ \underline{5}\ 1\ 2\ 3) \\ (3\ 1\ 4\ 2\ 3) & \Rightarrow & f_3(\underline{3}\ 1\ 4\ 2\ 3) = (\underline{5}\ 1\ 4\ 2\ 3) \\ (2\ 4\ 1\ 3\ 3) & \Rightarrow & f_3(2\ 4\ 1\ \underline{3}\ 3) = (2\ 4\ 1\ \underline{5}\ 3) \\ (4\ 1\ 2\ 3\ 3) & \Rightarrow & f_3(4\ 1\ 2\ \underline{3}\ 3) = (4\ 1\ 2\ \underline{5}\ 3) \\ (4\ 3\ 2\ 1\ 3) & \Rightarrow & f_3(4\ \underline{3}\ 2\ 1\ 3) = (4\ \underline{5}\ 2\ 1\ 3) \\ (3\ 4\ 1\ 2\ 3) & \Rightarrow & f_3(\underline{3}\ 4\ 1\ 2\ 3) = (\underline{5}\ 4\ 1\ 2\ 3) \\ (2\ 1\ 4\ 3\ 3) & \Rightarrow & f_3(2\ 1\ 4\ \underline{3}\ 3) = (2\ 1\ 4\ \underline{5}\ 3) \end{cases}$$

f_k表示一個函數，當k固定之後，定義域是一個很像D_{n-1}的集合，把定義域映射到D_n這個集合，後面我們會說明，這個函數是一對一的。因此，利用f_k這個函數的作用方式，我們就能創造出D_n的一部分。

定義三：

給定$1 \le k \le n-1.$

讓$\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)} = \{(a_1, \cdots, a_{k-1}, k, a_k, \cdots, a_{n-2}, n) \,|\, (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}) \in D_{n-2}\}.$

則定義函數$g_k : \mathfrak{D}_{n-2}^{(k)} \to D_n$如下

$$g_k(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, k, a_k, \cdots, a_{n-2}, n) = (a'_1, a'_2, \cdots, a'_{k-1}, n, a'_k, \cdots, a'_{n-2}, k)$$

$$a'_i = \begin{cases} a_i & \text{當 } a_i < k \\ a_i + 1 & \text{當 } a_i \ge k \end{cases} \quad \blacksquare$$

例如：$(n = 6, k = 3)$

$$\mathfrak{D}_4^{(3)}: \begin{cases} (2\ 3\ 3\ 4\ 1\ 6) & \Rightarrow & g_3(2\ \mathbf{3}\ \underline{3}\ \mathbf{4}\ 1\ \underline{6}) = (2\ \mathbf{4}\ \underline{6}\ \mathbf{5}\ 1\ \underline{3}) \\ (3\ 4\ 3\ 2\ 1\ 6) & \Rightarrow & g_3(\mathbf{3}\ \mathbf{4}\ \underline{3}\ 2\ 1\ \underline{6}) = (\mathbf{4}\ \mathbf{5}\ \underline{6}\ 2\ 1\ \underline{3}) \\ (4\ 3\ 3\ 1\ 2\ 6) & \Rightarrow & g_3(\mathbf{4}\ \mathbf{3}\ \underline{3}\ 1\ 2\ \underline{6}) = (\mathbf{5}\ \mathbf{4}\ \underline{6}\ 1\ 2\ \underline{3}) \\ (3\ 1\ 3\ 4\ 2\ 6) & \Rightarrow & g_3(\mathbf{3}\ 1\ \underline{3}\ \mathbf{4}\ 2\ \underline{6}) = (\mathbf{4}\ 1\ \underline{6}\ \mathbf{5}\ 2\ \underline{3}) \\ (2\ 4\ 3\ 1\ 3\ 6) & \Rightarrow & g_3(2\ \mathbf{4}\ \underline{3}\ 1\ \mathbf{3}\ \underline{6}) = (2\ \mathbf{5}\ \underline{6}\ 1\ \mathbf{4}\ \underline{3}) \\ (4\ 1\ 3\ 2\ 3\ 6) & \Rightarrow & g_3(\mathbf{4}\ 1\ \underline{3}\ 2\ \mathbf{3}\ \underline{6}) = (\mathbf{5}\ 1\ \underline{6}\ 2\ \mathbf{4}\ \underline{3}) \\ (4\ 3\ 3\ 2\ 1\ 6) & \Rightarrow & g_3(\mathbf{4}\ \mathbf{3}\ \underline{3}\ 2\ 1\ \underline{6}) = (\mathbf{5}\ \mathbf{4}\ \underline{6}\ 2\ 1\ \underline{3}) \\ (3\ 4\ 3\ 1\ 2\ 6) & \Rightarrow & g_3(\mathbf{3}\ \mathbf{4}\ \underline{3}\ 1\ 2\ \underline{6}) = (\mathbf{4}\ \mathbf{5}\ \underline{6}\ 1\ 2\ \underline{3}) \\ (2\ 1\ 3\ 4\ 3\ 6) & \Rightarrow & g_3(2\ 1\ \underline{3}\ \mathbf{4}\ \mathbf{3}\ \underline{6}) = (2\ 1\ \underline{6}\ \mathbf{5}\ \mathbf{4}\ \underline{3}) \end{cases}$$

g_k表示一個函數，當k固定之後，定義域是一個很像D_{n-2}的集合，把定義域映射到D_n這個集合，後面我們會說明，這個函數是一對一的。因此，利用g_k這個函數的作用方式，我們就能創造出D_n的另外一部分。利用這兩個函數，我們希望能夠把D_n內的全部元素都找出來。但是要完成這個期望，我們必須先證明他們是一對一函數。

2.2 製造方式的證明

定理一：$\forall k = 1, 2, \cdots, n-1$，$f_k$ 是一對一函數

證明：

$$給定\begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, k) \\ \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, k) \end{cases} \quad \vec{x}, \vec{y} \in D_{n-1}^{(k)}$$

若$f_k(\vec{x}) = f_k(\vec{y})$

則 $\exists x_i = k$，$\exists y_j = k$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, n, x_{i+1}, \cdots, x_{n-1}, k) = (y_1, y_2, \cdots, y_{j-1}, n, y_{j+1}, \cdots, y_{n-1}, k)$

如果 $i < j$, 則$\exists y_i = n \Rightarrow (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) \notin D_{n-1}$

如果 $i > j$, 則$\exists x_j = n \Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \notin D_{n-1}$

$\therefore i = j$ 且 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_{n-1} = y_{n-1}$

$\therefore \vec{x} = \vec{y}$ ∎

例如：$(n = 5, k = 2)$

$$D_4^{(2)}：\begin{cases} (2\ 3\ 4\ 1\ 2) \\ (3\ 4\ 2\ 1\ 2) \\ (4\ 3\ 1\ 2\ 2) \\ (3\ 1\ 4\ 2\ 2) \\ (2\ 4\ 1\ 3\ 2) \\ (4\ 1\ 2\ 3\ 2) \\ (4\ 3\ 2\ 1\ 2) \\ (3\ 4\ 1\ 2\ 2) \\ (2\ 1\ 4\ 3\ 2) \end{cases} \Rightarrow \quad f_2(D_4^{(2)})：\begin{cases} f_2(2\ 3\ 4\ 1\ 2) = (5\ 3\ 4\ 1\ 2) \\ f_2(3\ 4\ 2\ 1\ 2) = (3\ 4\ 5\ 1\ 2) \\ f_2(4\ 3\ 1\ 2\ 2) = (4\ 3\ 1\ 5\ 2) \\ f_2(3\ 1\ 4\ 2\ 2) = (3\ 1\ 4\ 5\ 2) \\ f_2(2\ 4\ 1\ 3\ 2) = (5\ 4\ 1\ 3\ 2) \\ f_2(4\ 1\ 2\ 3\ 2) = (4\ 1\ 5\ 3\ 2) \\ f_2(4\ 3\ 2\ 1\ 2) = (4\ 3\ 5\ 1\ 2) \\ f_2(3\ 4\ 1\ 2\ 2) = (3\ 4\ 1\ 5\ 2) \\ f_2(2\ 1\ 4\ 3\ 2) = (5\ 1\ 4\ 3\ 2) \end{cases}$$

由上例子可以發現上述9種結果皆相異。

定理二：$\forall k = 1, 2, \cdots, n-1$, g_k 是一對一函數

證明：

$$\text{給定} \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, k, x_k, \cdots, x_{n-2}, n) \\ \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}, k, y_k, \cdots, y_{n-2}, n) \end{cases} \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathfrak{D}_{n-2}^{(k)}$$

如果 $g_k(\vec{x}) = g_k(\vec{y})$

則 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{k-1}, n, x'_k, \cdots, x'_{n-2}, k) = (y'_1, y'_2, \cdots, y'_{k-1}, n, y'_k, \cdots, y'_{n-2}, k)$

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{當 } x_i < k \\ x_i + 1 & \text{當 } x_i \geq k \end{cases}, \quad y'_i = \begin{cases} y_i & \text{當 } y_i < k \\ y_i + 1 & \text{當 } y_i \geq k \end{cases}$$

$\Rightarrow x'_1 = y'_1, x'_2 = y'_2, \cdots, x'_{n-2} = y'_{n-2}$

$$\text{如果 } \exists p > 0 \ni \begin{cases} x'_p = x_p \\ y'_p = y_p + 1 \end{cases} \Rightarrow k < y_p + 1 = x_p \leq k \text{ 矛盾}$$

$$\text{如果 } \exists q > 0 \ni \begin{cases} x'_q = x_q + 1 \\ y'_q = y_q \end{cases} \Rightarrow k < x_q + 1 = y_q \leq k \text{ 矛盾}$$

$\therefore \forall j = 1, 2, \cdots, n-2$, $x_j = y_j$ 或 $x_j + 1 = y_j + 1 \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$ ∎

例如：$(n = 6, k = 2)$

$$\mathfrak{D}_4^{(2)}: \begin{cases} (2\ 2\ 3\ 4\ 1\ 6) \\ (3\ 2\ 4\ 2\ 1\ 6) \\ (4\ 2\ 3\ 1\ 2\ 6) \\ (3\ 2\ 1\ 4\ 2\ 6) \\ (2\ 2\ 4\ 1\ 3\ 6) \\ (4\ 2\ 1\ 2\ 3\ 6) \\ (4\ 2\ 3\ 2\ 1\ 6) \\ (3\ 2\ 4\ 1\ 2\ 6) \\ (2\ 2\ 1\ 4\ 3\ 6) \end{cases} \Rightarrow \quad g_2(\mathfrak{D}_4^{(2)}): \begin{cases} g_2(2\ 2\ 3\ 4\ 1\ 6) = (3\ 6\ 4\ 5\ 1\ 2) \\ g_2(3\ 2\ 4\ 2\ 1\ 6) = (4\ 6\ 5\ 3\ 1\ 2) \\ g_2(4\ 2\ 3\ 1\ 2\ 6) = (5\ 6\ 4\ 1\ 3\ 2) \\ g_2(3\ 2\ 1\ 4\ 2\ 6) = (4\ 6\ 1\ 5\ 3\ 2) \\ g_2(2\ 2\ 4\ 1\ 3\ 6) = (3\ 6\ 5\ 1\ 4\ 2) \\ g_2(4\ 2\ 1\ 2\ 3\ 6) = (5\ 6\ 1\ 3\ 4\ 2) \\ g_2(4\ 2\ 3\ 2\ 1\ 6) = (5\ 6\ 4\ 3\ 1\ 2) \\ g_2(3\ 2\ 4\ 1\ 2\ 6) = (4\ 6\ 5\ 1\ 3\ 2) \\ g_2(2\ 2\ 1\ 4\ 3\ 6) = (3\ 6\ 1\ 5\ 4\ 2) \end{cases}$$

由上例子可以發現上述9種結果皆相異。

我們知道這兩個函數都是一對一後

定義h：$\bigcup_{k=1}^{n-1} D_{n-1}^{(k)} \cup \mathfrak{D}_{n-2}^{(k)} \to D_n$，其中 $h|_{D_{n-1}^{(k)}} = f_k$，$h|_{\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)}} = g_k$

之後我們要去說明，他們的定義域是沒有重疊的，否則如果有的話，同一個元素被作用兩次，這樣h可能連函數都不成了！

定理三：給定$1 \leq k_1, k_2 \leq n-1$， $D_{n-1}^{(k_1)} \cap \mathfrak{D}_{n-2}^{(k_2)} = \emptyset$

證明：

若 $\exists\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D_{n-1}^{(k_1)} \cap \mathfrak{D}_{n-2}^{(k_2)}$

則$\begin{cases} (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, k_1) \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, k, b_k, \cdots, b_{n-2}, n) \end{cases}$

$\Rightarrow k_1 = n$ 矛盾

$\therefore D_{n-1}^{(k_1)} \cap \mathfrak{D}_{n-2}^{(k_2)} = \emptyset$ ■

例如：$(n = 5, k_1 = 4, k_2 = 1)$

$$D_4^{(4)}: \begin{cases} (2\ 3\ 4\ 1\ 4) \\ (3\ 4\ 2\ 1\ 4) \\ (4\ 3\ 1\ 2\ 4) \\ (3\ 1\ 4\ 2\ 4) \\ (2\ 4\ 1\ 3\ 4) \\ (4\ 1\ 2\ 3\ 4) \\ (4\ 3\ 2\ 1\ 4) \\ (3\ 4\ 1\ 2\ 4) \\ (2\ 1\ 4\ 3\ 4) \end{cases} \qquad \mathfrak{D}_3^{(1)}: \begin{cases} (1\ 2\ 3\ 1\ 5) \\ (1\ 3\ 1\ 2\ 5) \end{cases}$$

由上例子可以發現$D_4^{(4)}$和$\mathfrak{D}_3^{(1)}$沒有重複。

接下來，值域內的集合，如果有重複，我們就必須知道重複的部分是哪些，才能知道我找出來D_n內的元素究竟有多少個。由下面的證明，我們發現對應域不會重複。

定理四：給定$1\leq k_1, k_2 \leq n-1$， $f_{k_1}(D_{n-1}^{(k_1)}) \cap g_{k_2}(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k_2)}) = \emptyset$

證明：

若 $\exists (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in f_{k_1}(D_{n-1}^{(k_1)}) \cap g_{k_2}(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k_2)})$

$$\text{則}\begin{cases}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}, n, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1}, k_1) \\ (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_{k_2-1}, n, b'_{k_2}, \cdots, b'_{n-2}, k_2)\end{cases}$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) \in D_{n-1}$ 對於某個 $a_j = k_1$, $j \neq k_1$

$$b'_i = \begin{cases} b_i & \text{當 } b_i < k_2 \\ b_i + 1 & \text{當 } b_i \geq k_2 \end{cases} \quad \text{以及 } (b_1, b_1, \cdots, b_{n-2}) \in D_{n-2}$$

$\Rightarrow k_1 = k_2$

$$\text{如果 } j \neq k_2 \Rightarrow \begin{cases} j > k_2 & \exists\, a_{k_2} = n \text{ 矛盾} \\ j < k_2 & \exists\, b'_j = n \Rightarrow b_j = n-1 \text{ 或 } b_j = n \text{ 矛盾} \end{cases}$$

如果 $j = k_2 \Rightarrow j = k_1$ 矛盾 $(\because a_j = k_1)$

$\therefore f_{k_1}(D_{n-1}^{(k_1)}) \cap g_{k_2}(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k_2)}) = \emptyset$ ■

例如：$(n=5,k_1=1,k_2=4)$

$$f_1(D_4^{(1)}):\begin{cases} f_1(2\ 3\ 4\ 1\ 1)=(2\ 3\ 4\ 5\ 1)\\ f_1(3\ 4\ 2\ 1\ 1)=(3\ 4\ 2\ 5\ 1)\\ f_1(4\ 3\ 1\ 2\ 1)=(4\ 3\ 5\ 2\ 1)\\ f_1(3\ 1\ 4\ 2\ 1)=(3\ 5\ 4\ 2\ 1)\\ f_1(2\ 4\ 1\ 3\ 1)=(2\ 4\ 5\ 3\ 1)\\ f_1(4\ 1\ 2\ 3\ 1)=(4\ 5\ 2\ 3\ 1)\\ f_1(4\ 3\ 2\ 1\ 1)=(4\ 3\ 2\ 5\ 1)\\ f_1(3\ 4\ 1\ 2\ 1)=(3\ 4\ 5\ 2\ 1)\\ f_1(2\ 1\ 4\ 3\ 1)=(2\ 5\ 4\ 3\ 1)\end{cases}\quad g_4(\mathfrak{D}_3^{(4)}):\begin{cases} g_4(2\ 3\ 1\ 4\ 5)=(2\ 3\ 1\ 5\ 4)\\ g_4(3\ 1\ 2\ 4\ 5)=(3\ 1\ 2\ 5\ 4)\end{cases}$$

由上例子可以發現$f_1(D_4^{(1)})$和$g_4(\mathfrak{D}_3^{(4)})$沒有重複。

最後我們想證明，其實這兩個函數的值域全部聯集起來，就是我們想要找的D_n。

引理五：給定$1\le k\le n-1$

讓$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},k,x_k,\cdots,x_{n-2},n)$

$$若i<k\ ,\begin{cases} x_i=y_i & 當\ x_i<k\\ x_i=y_i-1 & 當\ x_i\ge k\end{cases}$$

$$若i\ge k\ ,\begin{cases} x_i=y_{i+1} & 當\ x_i<k\\ x_i=y_{i+1}-1 & 當\ x_i\ge k\end{cases}$$

其中$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in D_n$

我們會得到$\vec{x}\in\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)}$

$i.e.(x_1,x_2,\cdots,x_{n-2})\in D_{n-2}$

證明：

求證：$\forall i = 1, 2, \cdots, n-2$，$x_i \neq i$

如果$\exists j > 0 \ni x_j = j$，若$j < k \Rightarrow x_j < k \Rightarrow x_j = y_j = j$ 矛盾

若$j \geq k \Rightarrow x_j \geq k \Rightarrow x_j = y_{j+1} - 1 = j$

$\Rightarrow y_{j+1} = j + 1$ 矛盾

$\therefore \forall i = 1, 2, \cdots, n-2$，$x_j \neq i$

求證：$\forall i = 1, 2, \cdots, n-2$，$1 \leq x_i \leq n-2$

給定$1 \leq l \leq n-2$

如果$x_l = n > k$，若$l < k \Rightarrow x_l = y_l - 1 = n$

$\Rightarrow y_l = n + 1$ 矛盾

若$l \geq k \Rightarrow x_l = y_{l+1} - 1 = n$

$\Rightarrow y_{l+1} = n + 1$ 矛盾

如果$x_l = n - 1 \geq k$，若$l < k \Rightarrow x_l = y_l - 1 = n - 1$

$\Rightarrow y_l = n$

$\Rightarrow l = k$ 矛盾

若$l \geq k \Rightarrow x_l = y_{l+1} - 1 = n - 1$

$\Rightarrow y_{l+1} = n$

$\Rightarrow l + 1 = k$

$\Rightarrow k - 1 = l \geq k$ 矛盾

$\therefore \forall i = 1, 2, \cdots, n-2$，$1 \leq x_i \leq n-2$

求證：$\forall p \neq q$，$x_p \neq x_q$

給定$1 \leq p < q \leq n-2$

如果$x_p = x_q \geq k$

1. $q > p \geq k$，$x_q = y_{q+1} - 1 = y_{p+1} - 1 = x_p$

$\Rightarrow y_{q+1} = y_{p+1}$

$\Rightarrow q = p$ 矛盾

2. $q \geq k > p$，$x_q = y_{q+1} - 1 = y_p - 1 = x_p$

$\Rightarrow y_{q+1} = y_p$

$\Rightarrow q + 1 = p \leq q$ 矛盾

3. $k > q > p$，$x_q = y_q - 1 = y_p - 1 = x_p$

$\Rightarrow y_q = y_p$

$\Rightarrow q = p$ 矛盾

如果$k > x_p = x_q$

1. $q > p \geq k$，$x_q = y_{q+1} = y_{p+1} = x_p$

$\Rightarrow y_{q+1} = y_{p+1}$

$\Rightarrow q = p$ 矛盾

2. $q \geq k > p$，$x_q = y_{q+1} = y_p = x_p$

$\Rightarrow q + 1 = p \leq q$ 矛盾

3. $k > q > p$，$x_q = y_q = y_p = x_p$

$\Rightarrow q = p$ 矛盾

$\therefore \forall p \neq q$，$x_p \neq x_q$ ■

定理六： $D_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} [f_k(D_{n-1}^{(k)}) \cup g_k(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)})]$

證明：

給定$\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in D_n$，讓$y_n = k, 1 \le k \le n-1$

狀況一： $y_k \ne n$

$\Rightarrow \exists 1 \le h \le n-1$，$h \ne k$，$y_h = n$

$\Rightarrow \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{h-1}, n, y_{h+1}, \cdots, y_{n-1}, k)$

讓$\vec{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, k)$，其中$z_i = y_i$，$\forall i \ne h$ 且 $z_h = k$

$\Rightarrow (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \in D_{n-1}$

$\Rightarrow \vec{z} \in D_{n-1}^{(k)}$ 且 $f_k(\vec{z}) = (z_1, z_2, \cdots, z_{h-1}, n, z_{h+1}, \cdots, z_{n-1}, k)$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_{h-1}, y_h, y_{h+1}, \cdots, y_{n-1}, k) = \vec{y}$$

狀況二： $y_k = n$

讓$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, k, x_k, \cdots, x_{n-2}, n)$

其中 若$i < k$，$\begin{cases} x_i = y_i & 當\ x_i < k \\ x_i = y_i - 1 & 當\ x_i \ge k \end{cases}$

若$i \ge k$，$\begin{cases} x_i = y_{i+1} & 當\ x_i < k \\ x_i = y_{i+1} - 1 & 當\ x_i \ge k \end{cases}$

$\because \vec{x} \in \mathfrak{D}_{n-2}^{(k)}$(由引理五)

$\Rightarrow g_k(\vec{x}) = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_{k-1}, n, x'_k, \cdots, x'_{n-2}, k)$ 其中$x'_i = \begin{cases} x_i & 當\ x_i < k \\ x_i + 1 & 當\ x_i \ge k \end{cases}$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}, n, y_{k+1}, \cdots, y_{n-1}, k) = \vec{y}$$

$\therefore \vec{y} \in \bigcup_{k=1}^{n-1} [f_k(D_{n-1}^{(k)}) \cup g_k(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)})]$

$\Rightarrow D_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} [f_k(D_{n-1}^{(k)}) \cup g_k(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)})]$

且$\forall k=1,2,\cdots,n-1$，$f_k(D_{n-1}^{(k)})\subseteq D_n$，$g_k(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)})\subseteq D_n$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n-1}[f_k(D_{n-1}^{(k)})\cup g_k(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)})]\subseteq D_n$$

$$\therefore \bigcup_{k=1}^{n-1}[f_k(D_{n-1}^{(k)})\cup g_k(\mathfrak{D}_{n-2}^{(k)})]= D_n \quad \blacksquare$$

例如：$(n=4)$

$$D_4:\begin{cases}(2\ 3\ 4\ 1)\\(3\ 4\ 2\ 1)\end{cases}\longleftrightarrow D_3^{(1)}:\begin{cases}(2\ 3\ 1\ 1)\Rightarrow f_1(2\ 3\ 1\ 1)=(2\ 3\ 4\ 1)\\(3\ 1\ 2\ 1)\Rightarrow f_1(3\ 1\ 2\ 1)=(3\ 4\ 2\ 1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4\ 3\ 1\ 2)\\(3\ 1\ 4\ 2)\end{cases}\longleftrightarrow D_3^{(2)}:\begin{cases}(2\ 3\ 1\ 2)\Rightarrow f_2(2\ 3\ 1\ 2)=(4\ 3\ 1\ 2)\\(3\ 1\ 2\ 2)\Rightarrow f_2(3\ 1\ 2\ 2)=(3\ 1\ 4\ 2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\ 4\ 1\ 3)\\(4\ 1\ 2\ 3)\end{cases}\longleftrightarrow D_3^{(3)}:\begin{cases}(2\ 3\ 1\ 3)\Rightarrow f_3(2\ 3\ 1\ 3)=(2\ 4\ 1\ 3)\\(3\ 1\ 2\ 3)\Rightarrow f_3(3\ 1\ 2\ 3)=(4\ 1\ 2\ 3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4\ 3\ 2\ 1)\longleftrightarrow \mathfrak{D}_2^{(1)}:(1\ 2\ 1\ 4)\Rightarrow g_1(1\ 2\ 1\ 4)=(4\ 3\ 2\ 1)\\(3\ 4\ 1\ 2)\longleftrightarrow \mathfrak{D}_2^{(2)}:(2\ 2\ 1\ 4)\Rightarrow g_2(2\ 2\ 1\ 4)=(3\ 4\ 1\ 2)\\(2\ 1\ 4\ 3)\longleftrightarrow \mathfrak{D}_2^{(3)}:(2\ 1\ 3\ 4)\Rightarrow g_3(2\ 1\ 3\ 4)=(2\ 1\ 4\ 3)\end{cases}$$

由上例子可以發現D_4所有元素皆可被對應。

於是完成了證明之後，現在不論我們想要找什麼樣的錯排列，我們都可以用對應的方式去找出來，回到我們第一章舉的幾個錯排列的例子中，假設某次的交換禮物，突然增加了一個人，我們利用原先預備好的交換模式，做些微的調整，就可以讓增加的人，也能參與這樣的活動。

例如：六人交換禮物的錯排列 (4 1 6 3 2 5)代表1號拿4號的禮物，2號拿1號的禮物，3號拿6號的禮物，4號拿3號的禮物，5號拿2號的禮物，6號拿5號的禮物。如果突然多1人，則我們可以安排那個人拿3號的禮物 (4 1 6 3 2 5 3)經由f_3的作用得到 (4 1 6 7 2 5 3)，便得到一個7人的錯排列。當然那個人也可以拿4號的禮物(4 1 6 3 2 5 4)經由f_4的作用得到 (7 1 6 3 2 5 4)。

第 三 章　更多關於錯排列的探討

前面提到遞迴式：$d_1 = 0, d_2 = 1$, $\forall n \geq 3$, $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$，我們可以進一步的化簡為：$d_1 = 0$, $\forall n \geq 2$, $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ 證明如下：

$$
\begin{aligned}
d_n &= (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \ \forall n \geq 3 \\
&= (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} \\
\Rightarrow d_n - nd_{n-1} &= -[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}] \\
&= (-1)^2[d_{n-2} - (n-2)d_{n-2}] \\
&= (-1)^3[d_{n-3} - (n-3)d_{n-4}] \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n-2}[d_2 - 2d_1] \\
&= (-1)^{n-2}[1 - 2 \times 0] = (-1)^{n-2} \\
\therefore \forall n \geq 2 \text{ , } d_n &= nd_{n-1} + (-1)^n \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

如此一來，只需要前一項就能知道新的一項。並且當n是奇數時，會多一項出來，n是偶數時，會少一項。既然 $\forall n \geq 3$, $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$我們找到了簡單的方式去對應，因此我們也認為$\forall n \geq 2$, $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$這樣的數學式應該也會有一個簡單的對應。由於時間的關係，希望將來有機會繼續研究，當然也希望其他對於錯排列有興趣的夥伴們，能一起努力將對應給找出來。

參 考 文 獻

1. Claude Berge. *Principles of Combinatorics*. Academic Press, New York, 1971.

2. Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. North-Holland, New York, 1977.

3. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1989.

4. Selmer M. Johnson, Generation of permutations by adjacent transposition. *Math. Comp*., 17:282-285, 1963.

5. C. L. Liu. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.

6. John Riordan. *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. Reprint of the 1958 edition.

7. Fred S. Roberts. *Applied Combinatorics.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.

8. Alan Tucker. *Applied Combinatorics.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1980.

9. 洪聰於，錯排列的對射證明，國立政治大學應用數學系碩士論文.，1994。