國立政治大學應用數學系

數學教學碩士在職專班

碩士學位論文

離散型熱帶黎曼 -羅赫理論

Discrete Tropical Riemann-Roch Theory

碩專班學生：白瓊如

指導教授：蔡炎龍博士

中華民國 102 年 8 月 26 日

中文摘要

本篇論文主要是在討論熱帶曲線上離散型的因子的秩，我們發現直接由定義計算因子的秩時非常繁複，因此利用代數幾何中的“黎曼 -羅赫定理”(The Riemann-Roch Theorem)，藉由圖形的虧格計算熱帶曲線因子的秩，大幅的簡化了我們在離散型熱帶曲線因子秩的計算。

Abstract

This paper mainly discussed how to calculate the rank of discrete divisors on tropical curve. We find it is too complicated to calculate it by definition so we use “The Riemann-Roch Theorem” on calculating the rank of divisors on tropical curves. This paper proved that we can apply the genus of the graph by “The Riemann-Roch Theorem” to simplify the caculation effectively.

目錄

圖目錄

第 1 章　緒論

熱帶幾何是由巴西數學家兼計算機科學家 Imre Simon 於 1980 年代提出，是代數幾何的一支。熱帶數學是以熱帶半環為基礎，定義其運算方式發展出來的。

熱帶幾何是近幾年來熱門的研究議題之一，我們將代數幾何中所發展出來的性質與結果應用於熱帶幾何中，本篇論文一開始先敘明熱帶幾何的定義及其運算方式，利用熱帶曲線的對偶圖形，證明運可將代數幾何中的" 黎曼 -羅赫定理"(圖形的虧格 (gens) 與次數 (degree) 用在熱帶曲線中證明代 The Riemann-Roch Theorem) 可應用於熱帶數學中，利用此定理的結果討論熱帶區線圖形中的因子的特性，藉此增加對於曲線的認識。

第 2 章　熱帶幾何

在這個章節中，我們將介紹熱帶幾何的基本定義及其運算：

定義 2.1. 我們稱一個具有結合律的二元運算非空集合 S 為半群 (semigroup); 另外集合中假如存在一個元素 e , 使得對於每一個 $x \in S$, $e \cdot x = x \cdot e = x$, 我們稱這個元素 e 為單位元素, 此集合 S 稱為具單位元半群 (monoid)。

定義 2.2. 一個具有加法和乘法兩種運算元的集合 $S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, 具有兩種運算時, 我們稱這個集合為熱帶半環，其定義如下 [5][3][4]：

$$x \oplus y = \max\{x, y\}$$

$$x \odot y = x + y$$

例 **2.1.**

$$3 \oplus 8 = 8$$

$$5 \oplus 2 = 5$$

例 **2.2.**

$$3 \odot 8 = 11$$

$$11 \oplus 8 = 19$$

例 **2.3.** 交換律 (commutative)

$$5 \oplus 7 = 7 \oplus 5 = 7$$

$$2 \odot 4 = 4 \odot 2 = 6$$

例 **2.4.** 結合律 (associative)

$$((3 \odot 4) \oplus 5) = 4 \odot 5 = 5$$

$$(3 \odot (4 \oplus 5) = 3 \odot 5 = 5$$

例 **2.5.** 乘法對加法的分配律 (distributive)

$$(3 \odot (4 \oplus 5)) = 3 \odot 5 = 8$$

$$(3 \odot 4) \oplus (3 \odot 5) = 7 \oplus 8 = 8$$

例 **2.6.** 一元一次熱帶方程式：

(1) 若 $3 \oplus x = 3$, 則 x 的解集合為 $\{x | x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

(2) 若 $3 \oplus x = 5$, 則 $x = 5$.

(3) 若 $3 \oplus x = 1$, 則 x 的解集合為 ϕ.

(4) 若 $3 \odot x = 3$, 則 $x = 0$.

(5) 若 $3 \odot x = 10$, 則 $x = 7$.

例 **2.7.** 一元二次熱帶多項式：

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \oplus (a \odot x) \oplus b \\
&= \max\{2x, x+a, b\} \\
&= \begin{cases} (x \oplus a) \odot (x \oplus (b-a)), & 2a \geq b \\ (x \oplus \frac{b}{2})^2, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \oplus (4 \odot x) \oplus 3 \\
&= \max\{2x, x+4, 3\} \\
&= (x \oplus 4) \odot (x \oplus (-1))
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \oplus (1 \odot x) \oplus 4 \\
&= \max\{2x, x+1, 4\} \\
&= (x \oplus 2)^2 \\
&= x^2 \oplus 4
\end{aligned}
$$

例 2.8. 在熱帶數學中，"Freshman's Dreams" 成立.[5]

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \oplus 3x^2y \oplus 3xy^2 + y^3 \\
&= \max\{3x, 2x+y, x+2y, 3y\} \\
&= (x+y)^3 \\
&= x^3 \oplus y^3
\end{aligned}
$$

定義 2.3. 在熱帶數學中，單變數多項函數

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \cdots \oplus a_1 x \oplus a_0 \\
&= \max\{a_n + nx, a_{n-1} + (n-1)x, \cdots, a_1 + x, a_0\}
\end{aligned}
$$

是一個 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的函數。[5]

例 **2.9.** 若 $f(x) = x^3 \oplus 5$ 是一個熱帶多項式，則 x^3 的係數是 0, x^2 的係數是 -∞。

定義 **2.4.** 如果兩個多項式 $f(x), g(x)$ 對所有 $c \in \mathbb{R}, f(c) = g(c)$, 則我們稱 $f(x)$ 與 $g(x)$ 等價。

一般來說，兩多項式如果相等，其各項係數均相等，但在熱帶數學中，兩多項式等價，不一定各項係數均相等。

例 **2.10.** $f(x) = x^2 \oplus 2x \oplus 4, g(x) = x^2 \oplus 1x \oplus 4, f(x) \neq g(x)$. 但是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是等價的。

定義 **2.5.** 令 a_i 是多項式 $f(x)$ 的係數，對所有的 $b > a_i$ 而言，如果將多項式中的係數 a_i 代換成 b, 則 $f(x)$ 就不會與 $g(x)$ 等價，我們稱 a_i 是 $f(x)$ 的最大係數。

定義 **2.6.** 如果一個多項式的所有係數均為最大係數，我們稱此多項式為最大係數多項式。

定理 **2.1.** 若熱帶多項式 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \cdots \oplus a_r x^r$, 則存在一個最大係數多項式 $g(x) = b_n x^n \oplus b_{n-1} x^{n-1} \cdots \oplus b_r x^r$, 其中

$b_i = \max\{a_i \cup \frac{a_j(k-i)+a_k(i-j)}{k-j} \mid r \leq j < i < k \leq n\}$

定理 2.2. 令熱帶多項式 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \cdots \oplus a_r x^r$, 對所有

$i = r, r+1, \cdots, n-1, n, a_i \neq -\infty$, 則 $f(x)$ 是一個最大係數多項式, 若且唯若

$d_i = a_{i-1} - a_i, d_n \geq d_{n-1} \geq \cdots \geq d_{n+1}$

定理 2.3. (熱帶代數基本定理)

古典幾何、代數中的定理可應用於熱帶幾何中，若

$$f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \cdots \oplus a_r x^r$$

則 $f(x)$ 可被唯一分解為

$a_n x^r (x \oplus d_n)(x \oplus d_{n-1}) \cdots (x \oplus d_{r+1}), d_i = a_{i-1} - a_i, r+1 \leq i \leq n$。[5]

定理 2.4. 若熱帶多項式 $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \cdots \oplus a_r x^r =$

$a_n x^r (x \oplus d_n)(x \oplus d_{n-1}) \cdots (x \oplus d_{r+1}) d_i = a_{i-1} - a_i, r+1 \leq i \leq n$ 則 $d_n, d_{n-1} \cdots d_{r+1}$

是 $f(x)$ 函數圖形中的 corner locus, 也是多項方程式 $f(x) = 0$ 的根。

根據定理 2.1及定理 2.2 每一個熱帶多項式均等價於一個最大係數多項式。

根據定理 2.3 每一個熱帶多項式均可被因式分解。

根據定理 2.4, 從其因式分解的結果中，找出此多項函數圖形的 corner locus 及此多項方程式的根。

例 **2.11.** $f(x) = 3x^4 \oplus x^2 \oplus 1 = \max\{3+4x, 1+2x, 1\}$, 根據定理 2.1及定理 2.2, $f(x)$ 等價於最大係數多項式,$g(x) = 3x^4 \oplus \frac{5}{2}x^3 \oplus 2x^2 \oplus \frac{3}{2}x \oplus 1$, 根據定理 2.3,$g(x) = 3x^0(x \oplus (-\frac{1}{2}))^4 = 3(x \oplus (-\frac{1}{2}))^4$, 且 f(x)=0 的根為 $-\frac{1}{2}$

二次雙變數熱帶多項函數及其圖形

$f(x) = a_{20}x^2 \oplus a_{11}xy \oplus a_{02}y^2 \oplus a_{10}x \oplus a_{01}y \oplus a_{00}$

$= \max\{a_{20}+2x, a_{11}+x+y, a_{02}+2y, a_{10}+x, a_{01}+y, a_{00}\}$[2]

以下是幾個二次雙變數熱帶多項函數的圖形，

例 **2.12.** $f(x,y) = x^2 \oplus 2xy \oplus 3 = \max\{1+2x, 2+x+y, 3\}$, 根據定義畫出函數圖形 2.1

熱帶曲線的對偶圖形：我們利用代數性質將熱帶多項式的圖形作轉換：

定義 **2.7.** 令 $\mathbb{S} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，我們定義加法 $\oplus : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 和乘法 $\odot : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 為

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$
$$x \odot y := x + y$$

這裡所定義的運算 $\oplus$ 即為熱帶幾何的加法，而運算 $\odot$ 即為熱帶幾何的乘法。

而對於每一個 $a \in \mathbb{S}, a \oplus (-\infty) = a, \forall x \in \mathbb{S}, x \odot 0 = x$，所以 $\mathbb{S}$ 有加法單位元素 $-\infty$，以及乘法單位元素 0。

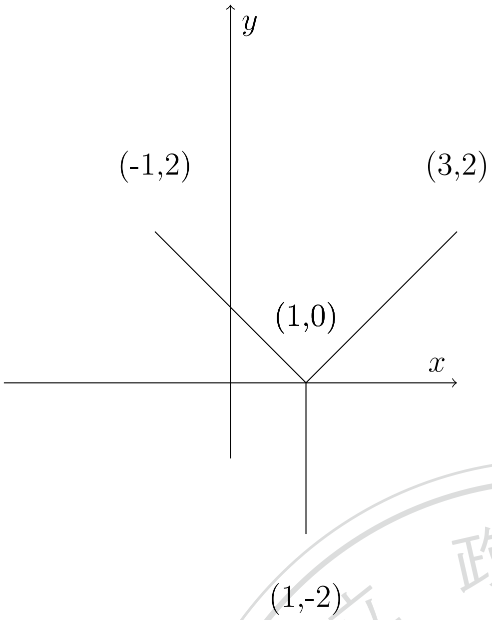

Figure 2.1: 熱帶多項式 $f(x, y) = x^2 \oplus 2xy \oplus 3$ 的圖形

定義 2.8. 若一個代數結構 $(R, +, \cdot)$ 符合以下的條件，那麼我們稱他為一個半環 (semiring)

(i) $(R, +)$ 是一個交換半群，並且有單位元素 0

(ii) $(R, \cdot)$ 是一個半群，並且有單位元素 1

(iii) 乘法運算對加法運算有分配律

(iv) R 中的任何元素對 0 做乘法運算皆為 0。

根據半環的定義可以得到：$(\mathbb{S}.\oplus, \odot) = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ 是一個半環。

定義 2.9. 對於所有的 $a_n \in \mathbb{S}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

定義熱帶幾何的指數

$$a_n^{\odot k} := a_n \times k$$

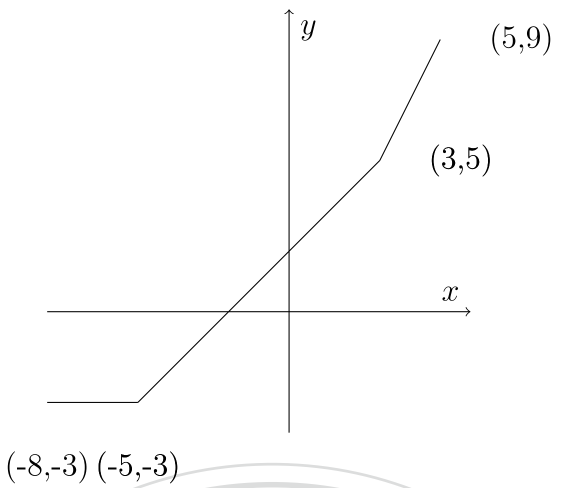

Figure 2.2: 熱帶多項式 $f(x) = -x^2 \oplus 2x \oplus 3$ 的圖形

定義連加

$$\bigoplus_{i=1}^{n} a_i := \max\{a_1, ..., a_n\}$$

定義連乘

$$\bigodot_{i=1}^{n} a_i := a_1 + ... + a_n$$

由此可知，$(\mathbb{S}.\oplus, \odot)$ $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ 擁有相同的代數結構，因此我們可以找到熱帶曲線的對偶圖形。

例 **2.13.** (1)$f(x) = -x^2 \oplus 2x \oplus 3 = \max\{2x-1, 2+x, 3\}$, 根據定義畫出函數圖形 2.2

(2)$f(x,y) = 3x^2 \oplus 4xy \oplus 5y^2 = \max\{3+2x, 4+x+y, 5+2y\}$, 沒有函數圖形。

(3)$f(x,y) = y^2 \oplus 2xy \oplus 3y = \max\{2y, 2+x+y, 3+y\}$, 根據定義畫出函數圖形 2.3

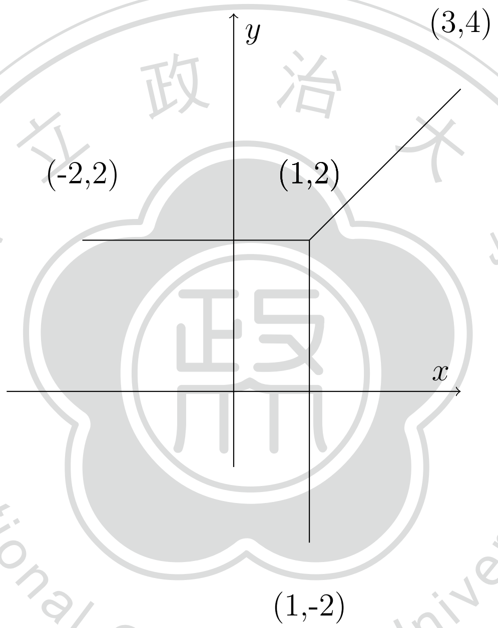

Figure 2.3: 熱帶多項式 $f(x,y) = y^2 \oplus 2xy \oplus 3y$ 的圖形

第 3 章　圖形中的因子

在這個章節中我們將介紹有關圖形因子 (divisor) 的定義及性質，首先介紹一些圖型的相關定義：

定義 3.1. 若 G 是一個圖，則我們定義 $V(G)$ 為這個圖形 G 中所有頂點 (vertex) 所成的集合，$E(G)$ 為這個圖形 G 中所有邊 (edge) 所成的集合。

圖形中的每個頂點都連結著若干個邊，因此我們想計算邊的個數，並將同一個頂點所連結的邊集合起來，構成一個集合。

定義 3.2.

若 $v \in V(G)$，則我們把 v 所連結的邊的個數記為 $val(v)$，而所有連接 v 這個點的邊所成的集合記為 $E_v(G)$。

例 3.1.

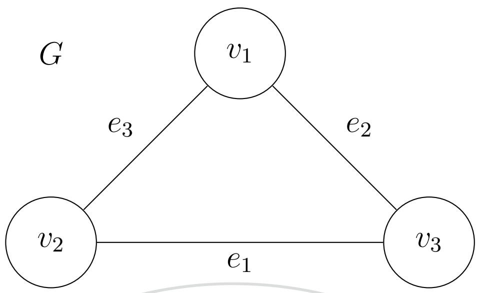

Figure 3.1: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$

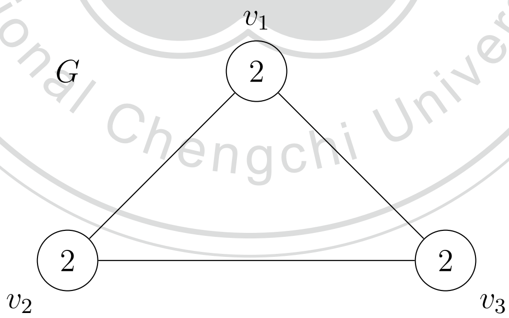

Figure 3.2: $val(v_1) = 2, val(v_2) = 2, val(v_3) = 2, E_{v_1}(G) = \{e_2, e_3\}, E_{v_2}(G) = \{e_1, e_2\}, E_{v_3}(G) = \{e_1, e_2\}$

從圖 3.2中可得

$$val(v_1) = 2, val(v_2) = 2, val(v_3) = 2$$

$$E_{v_1}(G) = \{e_2, e_3\}, E_{v_2}(G) = \{e_1, e_2\}, E_{v_3}(G) = \{e_1, e_2\}$$

定義 3.3. 因子 (divisor)

令 G 是一個擁有有限個頂點的圖，函數

$D : V(G) \to \mathbb{Z}, D = \sum_{v \in V(G)} D(v) \cdot v, D(v) \in \mathbb{Z}$ 是整數, 我們稱 Div(G) 為 G 的所有因子所成的集合。

因子的性質：

若將圖 G 的因子 (v) 的係數以 D(v) 表示. 則

(1)$D \geq D'$ 的充要條件為對所有 $v \in V(G), D(v) \geq D'(v)$.

(2) 若一個因子的所有係數均為非負整數，則此因子為有效因子 (effective divisor)，並以 $Div_+(G)$ 表示之。[1]

例 3.2. 若一個圖 G 的頂點以 $V(G)$ 表示,

$$D_1 = 3(v_1) + 2(v_2) + (-4)(v_3) + 2(v_4) - 5(v_5),$$

$$D_2 = 4(v_1) + 5(v_2) + (-3)(v_3) + 3(v_4) + 2(v_5),$$

$$D_3 = 2(v_1) + 1(v_2) + 3(v_3) + 2(v_4) + 3(v_5),$$

D_1, D_2, D_3 均為圖 G 的因子, 且 $D_2 \geq D_1$, 但只有 $D_3 \geq 0$，因此只有 D_3 是一個有效因子。

定義 3.4. 次數 (degree)

在圖 G 的因子中，我們將次數 (degree) 定義為每個頂點的係數的總和，也就是說，若

$$D = \sum_{v \in V(G)} D(v)(v), D \in \mathrm{Div}(G)$$

$$\deg(D) = \sum_{v \in V(G)} D(v)$$

定義 3.5. 拉普拉斯算子 (Laplacian operator)

若 V(G) 是圖 G 上的頂點所成的集合，$M(G) = \hom(V(G), \mathbb{Z}), f \in M(G)$，我們定義拉普拉斯算子 $\Delta(f)$ 如下：

$$\Delta : M(G) \to \mathrm{Div}(G), f : V(G) \to \mathbb{Z}$$

$$\Delta_v(f) = \deg(v) f(v) - \sum_{vw \in E_v(G)} f(w)$$

$$= \sum_{vw \in E_v} (f(v) - f(w))$$

$$\Delta(f) = \sum_{v \in V(G)} \Delta_v(f)(v), v \in V(G)$$

引理 **3.1.** 拉普拉斯算子的次數必為 0，也就是說，$deg(f) = 0$

定義 **3.6.** 等價 (equivalent)

若圖 G 中任兩個因子 D, E 等價 $(D \sim E)$，則一定存在一個拉普拉斯算子 f，使得 $D - E = f$. 我們將所有與 D 等價的有效因子所成的集合用 $|D|$ 表示. 也就是說，$|D| = \{E \in \mathrm{Div}(G) | E \geq 0, E \sim D\}$ 即 $|D|$ 表示所有與 D 等價的有效因子。

若圖形 G 上的兩個因子 D, E 等價，則這兩個因子的係數和必定相等, 也就是說 $\deg(D) = \deg(E)$。

定義 **3.7.** Chip-firing game

Chip-firing game 需滿足以下規則：

(1) 初始狀態中，每個頂點代表一個整數值，可表示成因子的形式

$$D(v) = \sum_{v \in V(G)} D(v)(v), D(v) \in \mathbb{Z}, D \in \mathrm{Div}(G)$$

(2) 負值表示負債。

(3) 每次移動以一個頂點為主，每次可向所有相鄰的點同時借一元或同時還一元，因此，不論經過多少次的移動，所有點所代表的整數值的和維持不變。

(4) 當所有點所代表的值均為非負整數時，則贏得此遊戲。[1]

定理 **3.1.** 令 $N = deg(D)$, 則 $f(x)$ 表示在 Chip-firing game 中所代表數值的總和，

(1) 若 $N \geq g$，則必獲勝。

(2) 若 $N \leq g-1$，則可能找不到獲勝的策略。

我們可以藉由 Chip-Firing game 的搬移，找出圖形中等價的因子，也可從這樣的搬移中發現以下的性質：

引理 **3.2.** D, E 均為圖 G 上的因子

(1) 若 D, E 等價 $(D \sim E)$, 則 $deg(D) = deg(E)$ 。

(2) 若 $deg(D) = deg(E) = 0$，則 $D \sim E$

定義 **3.8.** 虧格 (genus)

若圖 G 的的頂點數為 $|V(G)|$, 邊的個數為 $|E(G)|$，則圖 G 的虧格,

$g = |E(G)| - |V(G)| + 1$。

定理 **3.2.** (1) 若圖形 G 的虧格數等於 0 時，G 上兩個次數相等的因子必等價.

(2) 若圖形 G 的虧格數大於 0 時，則必存在次數相等但不等價的兩個因子。

例 **3.3.** 如圖 3.3

$$D_1 = 2(v_1) - 3(v_2) + 4(v_3)$$

$$D_2 = -2(v_1) + 8(v_2) - 3(v_3)$$

$$D_1 - D_2 = 4(v_1) - 11(v_2) + 7(v_3)$$

則存在一個函數 (f),

$$f(v_1) = 3, f(v_2) = -2, f(v_3) = 4,$$

$$\Delta_{v1}(f) = (3+2) + (3-4) = 4,$$

$$\Delta_{v2}(f) = (-2-3) + (-2-4) = -11,$$

$$\Delta_{v3}(f) = (4-3) + (4+2) = 7,$$

$$\Delta(f) = (f) = 4v_1 - 11v_2 + 7v_3,$$

即存在 f, 使得 $D_1 - D_2 = (f)$, 因此 D_1 與 D_2 等價 $(D_1 \sim D_2)$，且 $\deg(D_1) = \deg(D_2) = 3$。

例 **3.4.** 如圖 3.4

$$D_1 = 3v_1 + 2v_2 - 4v_3$$

$$D_2 = 2v_1 + 3v_2 - 4v$$

$$D_1 - D_2 = v_1 - v_2 + 0v_3$$

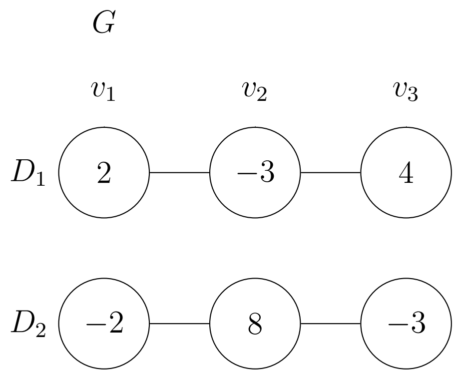

Figure 3.3: 圖 G(虧格為 1) 上等價的兩個因子

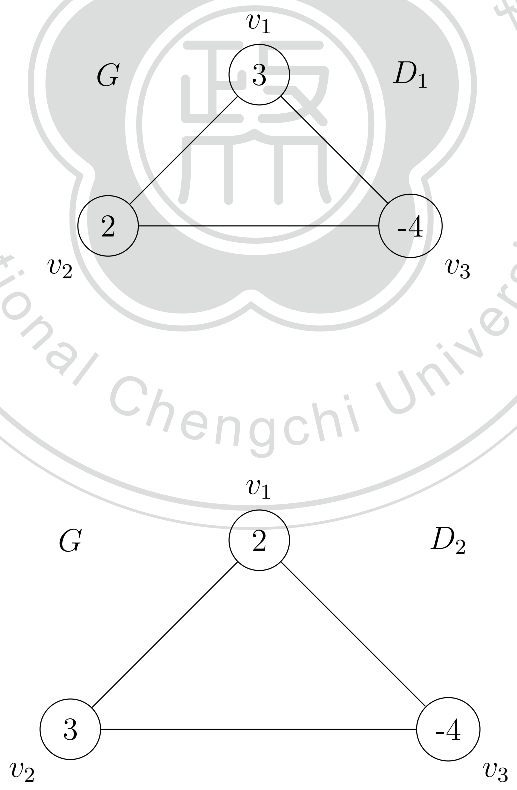

Figure 3.4: 圖 G(虧格為 1) 上兩個次數相等但不等價的因子

若 $D_1 \sim D_2$ ，則必存在一個函數 f，使得 $D_1 - D_2 = f$, 設

$f = (f_1)v_1 - (f_2)v_2 + (f_3)v_3 = v_1 - v_2 + 0v_3$, 其中 f_1, f_2, f_3 須滿足下列三個方程式：

$$2f_1 - f_2 - f_3 = 1 \tag{3.1}$$

$$-f_1 + 2f_2 - f_3 = -1 \tag{3.2}$$

$$-f_1 - f_2 + 2f_3 = 0 \tag{3.3}$$

由 (3.1)(3.2)(3.3) 可得,$3f(v_1) - 3f(v_2) = 2$, 但 $f(v_1), f(v_2)$ 均須為整數，因此找不到這樣的函數 f，所以 D_1,D_2 不等價。

定義 3.9. 秩 (rank)

我們將圖 G 上因子 D 的秩 (rank) 用 $r(D)$ 來表示，

(1) 若 $|D| = \phi$，則 $r(D) = -1$,

(2) 若 $|D| \neq \phi$，則

$$r(D) = \max\{n| \text{ 對於所有 E }, deg(E) = n, E \geq 0, \text{ 我們都有 } |D - E| \neq \phi \ \}$$

或

$$r(D) = \min\{m - 1| \text{ 存在一個 E }, \deg(E) = m, E \geq 0, \text{ 我們有 } |D - E| = \phi\}$$

定理 3.3. 若 D 為圖形 G 上的因子，且 $\deg(D) = d < 0$，則 $r(D) = -1$.

證明：

設 $deg(E) = 0$ ，則 $\deg(D - E) = d < 0, |D - E| = \phi$, 因此，$r(D) = -1$

例 **3.5.** 如圖 3.5

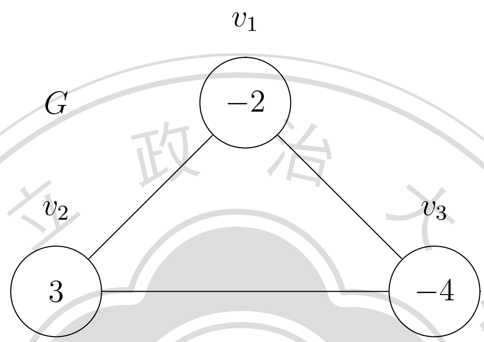

Figure 3.5: 次數為負的的因子

若 $D = -2v_1 + 3v_2 - 4v_3, \deg(D) = -3$, 因為 $|D| = \phi$，所以，$r(D) = -1$

如果我們利用這樣的方法找一個因子的秩 (rank)，有些困難，因此我們試圖利用 “The Riemann-Roch formula” 來找因子的秩。

第 4 章　黎曼 -羅赫定理

黎曼 -羅赫定理（The Riemann-Roch Theorem）是數學中，特別是複分析和代數幾何，一個重要工具，它可計算函數空間的維數。它將具有純拓撲虧格 g 的連通緊黎曼曲面上的複分析以某種方式可轉換為純代數設置。我們發現在計算離散型熱帶曲線因子秩時，如果經由定義來找非常繁複，因此，我們希望能將黎曼 – 羅赫定理推廣至熱帶曲線上，以簡化計算的程序。

定義 4.1. 典型因子 (canonical divisor)

若 $K \in \mathrm{Div}(G), K = \sum_{v\in V(G)}(\deg(v)-2)(v)$, 我們稱 K 為圖 G 的典型因子。

定理 4.1. (1) 若 K 為圖 G 的典型因子，且 g 為圖 G 的虧格，則

$\deg(K) = 2g - 2$。

(2) 若 f 為圖 G 的拉普拉斯算子, 則 $\deg(f) = 0$。

定義 4.2. 若圖 G 的虧格為 g，我們定義

$$N = \{D \in \operatorname{Div}(G) | \deg(D) = g - 1, |D| = \phi\}$$

。

定義 4.3. $\epsilon(D)$

對所有 $D \in \operatorname{Div} G$, 我們定義函數 $\epsilon(D) : \operatorname{Div}(G) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

若 $|D| \neq \phi$, 則 $\epsilon(D) = 0$,

若 $|D| = \phi$, 則 $\epsilon(D) = 1$。

定理 4.2. 黎曼 -羅赫定理

若 $D \in Div(G)$,K 是圖 G 的典型因子，g 是虧格，則

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g \tag{4.1}$$

若且唯若，下列兩個性質必成立：

(性質 1) 若 $D \in DivG$ 且 $\deg(D) = g - 1$，則 $\epsilon(D) + \epsilon(K - D) = 0$，其中 K 是圖 G 的典型因子。

(性質 2) 若 $D \in DivG$，則存在 $\nu \in N$, 使得 $\epsilon(D) + \epsilon(\nu - D) = 1$。[1]

首先我們先證明：若黎曼 -羅赫定理成立，則 (性質 1) 及 (性質 2) 成立.

證明：

(一) 由黎曼 -羅赫定理證明 (性質 1)

若黎曼 -羅赫定理成立，$r(D)-r(K-D)=\deg(D)+1-g$，若 $\deg(D)=g-1$ ，代入 4.1可得 $r(D)-r(K-D)=\deg(D)+1-g=0$，則 $r(D)=r(K-D)$。

(1) 若 $r(D)=r(K-D)=-1$，則 $|D|=\phi$, 且 $|K-D|=\phi$, 即 $\epsilon(D)=1, \epsilon(K-D)=1$, 可知 $\epsilon(D)+\epsilon(K-D)=1+1=0(\mod 2)$。

(2) 若 $r(D)=r(K-D)\geq 0$，則 $|D|\neq\phi$, 且 $|K-D|\neq\phi, \epsilon(D)=0, \epsilon(K-D)=0$, 則 $\epsilon(D)+\epsilon(K-D)=0+0=0(\mod 2)$, 故 (性質 1) 可得證。

引理 4.1. 若 $D, D'\in \operatorname{Div} G$, 且 $D\geq 0, D'\geq 0$, 則 $r(D+D')\geq r(D)+r(D')$。

證明：若 E_0 是圖 G 中任意一個有效的因子, $\deg(E_0)=r(D)+r'(D)$, 設 $E_0=(x_1)+(x_2)+\cdot+(x_{x_{r(D)+r(D')}})$, 令 $E=(x_1)+(x_2)+\cdot+(x_{x_{r(D)}}), E'=(x_{r(D)+1})+(x_{r(D)+2})+\cdot+(x_{x_{r(D)+r(D')}})$, 則 $|D-E|\neq\phi$ 且 $|D-E'|\neq\phi$, 令 $D-E\sim F, D-E'\sim F', F\geq 0, F\geq 0$ 可以得知, $(D+D')-(E+E')\sim F+F'\geq 0$, 所以, $r(D+D')\geq r(D)+r(D')$。

(二) 由黎曼 -羅赫定理證明 (性質 2)

根據引理 4.1 可知，$r(D+(\nu-D))\geq r(D)+r(\nu-D)$, 即 $r(\nu)\geq r(D)+r(\nu-D)$, 因為 $\nu\in N, r(\nu)=-1, r(D)\geq -1, r(\nu-D)\geq -1$, 所以 $r(D)\geq 0$ 及 $r(\nu-D)\geq 0$ 不可能同時存在, 因此所有可能情況有下列兩種：

(1) $r(D)\geq 0, r(\nu-D)=-1$, 則 $|D|\neq\phi, |\nu-D|=\phi$, 即 $\epsilon(D)=0, \epsilon(\nu-D)=1$, 因此, $\epsilon(D)+\epsilon(\nu-D)=0+1=1.$

(2) $r(D)=-1$, 設 $\deg(D)=d\leq 0$, 存在有效因子

$E\in \mathrm{Div}(G), \deg(E)=g-1-d\geq 0, E\geq 0$, 使得 $r(D+E)=-1$. 因為

$\deg(D+E)=g-1, r(D+E)=-1$, 所以,$D+E\in N$,

令 $\nu=D+E$, 因此, 存在 $\nu\in N$, 使得 $r(\nu-D)\geq 0$, 所以存在 $\nu\in N$, 使得

$\epsilon(D)+\epsilon(\nu-D)=1$

故 (性質 2) 得證。

引理 **4.2.** 設 $g:A\to A'$, 是一個一對一且映成的函數, $f:A\to\mathbb{Z}, f':A'\to\mathbb{Z}$ 是兩個有下界的函數, 若存在一個整數 c 使得對所有 A 中的元素 a ,$f(a)-f'(g(a))=c$, 則

$$\lim_{a\in A} f(a)-\lim_{a'\in A} f'(a')=c$$

證明：因為 $g:A\to A'$, 是一個一對一且映成的函數, 對所有 A 中的元素 a , 存在唯一一個 A' 中的元素 b , 使得 $g(a)=b$, 又因為 $f(a)-f'(g(a))=c$, 即 $f(a)=f'(b)+c$ 且 f,f' 均有下界, 所以, 對所有 A 中的元素 a ,

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\in A} f(a)-\lim_{a'\in A} f'(a')\\
&=\lim_{b\in A'}[f'(b)+c)]-\lim_{a'\in A} f'(a')\\
&=\lim_{b\in A'} f'(b)-\lim_{a'\in A} f'(a')+c\\
&=c
\end{aligned}$$

因此, 對所有 A 中的元素 a ,$\lim_{a\in A} f(a)-\lim_{a'\in A} f'(a')=c$。

定義 **4.4.** 若 $D = \sum_i a_i(x_i) \in \mathrm{Div}(G)$, 我們定義

$$deg^+(D) = \sum_{a_i \geq 0} a_i$$

引理 **4.3.** 若 (性質 2) 成立, 則對所有 $D \in DivG$,

$$r(D) = (\min_{D' \sim D, \nu \in N} \deg^+(D' - \nu)) - 1$$

.

證明：

令

$$r'(D) = (\min_{D' \sim D, \nu \in N} \deg^+(D' - \nu)) - 1$$

(1) 設 $r(D) < r'(D)$, 根據秩 (rank) 的定義可知, 存在有效因子 $E, \deg(E) = r'(D)$ 使得 $|D - E| = \phi$, 即 $r(D - E) = -1$。

根據 (性質 2), 存在 $\nu \in N, E' \geq 0, |D - E| = \phi, |\nu - (D - E)| \neq \phi$

即存在有效因子 E' 使得 $(\nu - (D - E)) \sim E'$, 則存在 $D' \sim D, D' - \nu = E - E'$,

因此 $\deg^+(D' - \nu) - 1 \leq \deg(E) - 1 = r'(D) - 1$, 這個結果與 $r'(D)$ 的定義矛盾。

因此,$r(D) \geq r'(D)$。

(2) 若 $D \in \mathrm{Div}\, G, \nu \in N$, 存在有效因子 $E, E', \deg(E) = r'(D) + 1$, 使得 $D' - \nu = E - E'$. 因為 $D - E \sim \nu - E'$, 且根據 (性質 2), 若 $|E'| \neq \phi$, 則存在 $\nu \in N$ 使得 $|\nu - E'| = \phi$, 所以 $|D - E| = \phi$. 根據秩的定義可知

$r(D) \leq \deg(E) = r'(D) + 1 - 1 = r'(D)$,

由上述結果我們可以知道 $r(D) = r'(D)$。

(三) 由 (性質 1)(性質 2) 證明黎曼 -羅赫定理

若 $\nu \in N, deg(\nu) = g-1$, 根據 (性質 1) 可知 $\epsilon(\nu)+\epsilon(K-\nu)=0$, 即 $|\nu| = \phi, |K-\nu| = \phi.$

令 $\bar{\nu} = K-\nu$, 因為 $|\nu| = \phi, \deg(\nu) = g-1, \deg(K) = 2g-2, \deg(\bar{\nu}) = \deg(K-\nu) = g-1, |K-\bar{\nu}| = |\nu| = \phi$, 因此 $\bar{\nu} \in N$。

對任意 $D' \in DivG, D' \sim D, deg(D) = d, \nu \in N$, 令 $\nu - D' = K - D' - \bar{\nu}$

$$
\begin{aligned}
& deg^{+}(D'-\nu) - deg^{+}((K-D')-\bar{\nu}) \\
&= deg^{+}(D'-\nu) - deg^{+}(\nu - D') \\
&= deg(D'-\nu) \\
&= deg(D) - (g-1) \\
&= deg(D) + 1 - g
\end{aligned}
$$

因此，對所有 D' 及 ν 可得 $\deg^{+}(D'-\nu) - \deg^{+}((K-D')-\bar{\nu}) = deg(D)+1-g$ 是一個常數，

根據引理 4.2及引理 4.3可知，

$r(D) - r(K-D) = \deg^{+}(D'-\nu) - \deg^{+}((K-D')-\bar{\nu}) = \deg(D)+1-g$, 故黎曼 -羅赫定理可得證。

若 $N_1 = \{u \in N | \epsilon(D)+\epsilon(u-D) = 1\} \subseteq N$

$, N_2 = \{\bar{u} \in N | \epsilon(D)+\epsilon(\bar{u}-D) = 1\} \subseteq N,$

$f : N_1 \to \mathbb{Z}, f' : N_2 \to \mathbb{Z},\ g : N_1 \to N_2, D \in \mathrm{Div}(G), D' \sim D$

對所有 $u \in N_1, \bar{u} \in N_2$,

我們定義：$f(u) - f'(\bar{u}) = \deg^+(D' - u)$,

$f'(\bar{u}) = \deg^+((k - D') - \bar{u})$, $g(u) = k - u = \bar{u}$, 若 $u_1 \neq u_2$, 則 $f(u_1) \neq f(u_2)$, 即 $\bar{u_1} \neq \bar{u_2}$(well-defined) 若 $\bar{u_1} \neq \bar{u_2}$ 即 $f(u_1) \neq f(u_2)$, 則 $u_1 \neq u_2$, (1-1) 對所有 $\bar{u} \in N_2$,, 存在 $u \in N_1$, 使得 $\bar{u} = k - u$ (onto) 因此，f 是一個 1-1 且映成的函數.

根據引理 4.2 $f(u) - f'(\bar{u}) = c$, c 是一個常數

$$
\begin{aligned}
& f(u) - f'(\bar{u}) \\
& = \deg^+(D' - u) - \deg^+((K - D') - \bar{u}) \\
& = \deg(D) + 1 - g
\end{aligned}
$$

根據上述證明我們可以得知，我們將圖形的虧格、典型因子運用於”黎曼 -羅赫” 定理中，很快的就可以計算出圖形的秩，藉以增進認識對圖形的認識，在以下例題中，可以利用此定理快速的將圖形的秩計算出來。

例 **4.1.** 如圖 4.1 若 $D = v_1 - v_2 + v_3, \deg(D) = 1$,

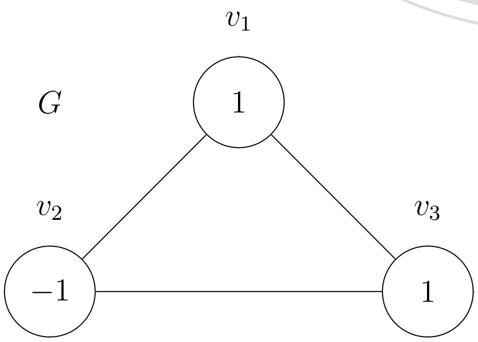

Figure 4.1: 虧格是 1 且次數為 1 的一個因子

(1) 設 $\deg(E) = 1$, 則 E 可能的情況有下列三種：

$$E_1 = v_1 + 0v_2 + 0v_3,$$

$$E_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3,$$

$$E_3 = 0v_1 + 0v_2 + v_3,$$

$$D - E_1 = -v_2 + v_3,\ |D - E_1| = \phi,$$

而 E_2, E_3 與 E_1 也有類似情形, 因此 $r(D) \leq 1$

.[2cm] (2) 設 $\deg(E) = 0$, 則 $E = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$, $|D - E| \neq \phi$, 因此 $r(D) = 0$.

例 **4.2.** 如圖 4.2

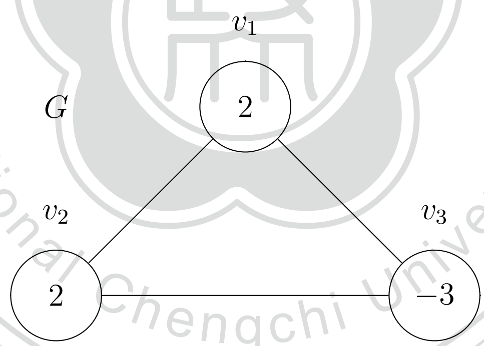

Figure 4.2: 虧格是 1 且次數是 1 的一個因子

$D = 2v_1 + 2v_2 - 3v_3, \deg(D) = 1, g = 1$

(1) 設 $\deg(E) = 0$, 則 $E = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$, $|D - E| = |D| \neq \phi$, 因此 $r(D) \geq 0$.

(2) 設 $\deg(E)=1$, 則 E 可能的情況有下列三種：

$$E_1 = v_1 + 0v_2 + 0v_3, E_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3, E_3 = 0v_1 + 0v_2 + v_3,$$

$$D - E_1 = 2v_1 + v_2 - 2v_3, |D - E_1| \neq \phi, (1v_1 + 0v_2 + 0v_3)$$

$$D - E_2 = 3v_1 + 0v_2 - 2v_3, |D - E_2| \neq \phi, (0v_1 + 0v_2 + 1v_3)$$

$$D - E_3 = 3v_1 + v_2 - 3v_3, |D - E_3| \neq \phi, (0v_1 + 1v_2 + 0v_3)$$

因此 $r(D) \geq 1$

(3) 設 $\deg(E)=2$, 令 $E_4 = 3v_1 + 1v_2 - 2v_3$, $|D - E| = \phi$.

因此，$r(D) = 1$

第 5 章　結論

經由以上證明及此例子我們可以看得出來，如果要找一個熱帶曲線上因子的秩時，我們可以藉由圖形的典型因子、虧格數，在應用黎曼 – 羅赫定理很快的就可以將秩計算出來，大幅的減低計算秩的複雜度。

在本篇論文中我們僅僅對於離散型因子做討論，將來仍可嘗試將黎曼 -羅赫定理運用於連續型的熱帶因子中，做更深入的研究。

參 考 文 獻

[1] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-roch and abel-jacobi theory on a finite graph. pages 1–11, 2007.

[2] Andreas Gathmann. Tropical algebraic geometry. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 108(1):3–32, 2006.

[3] Thorsten Theobald Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels. First steps in tropical geometry. 2003.

[4] Diane Maclagan. Introduction to tropical algebraic geometry. pages 1–13, 2012.

[5] David Speyer and Bernd Sturmfels. Tropical mathematics. *Math. Mag.*, 82(3):163–173, 2009.