

國立政治大學應用數學系
數學教學碩士在職專班
碩士學位論文

The Chip-Firing Game and
Equivalence of Discrete Tropical Divisors

搬硬幣遊戲與離散型熱帶因子等價關係

碩專班學生：王珮紋 撰

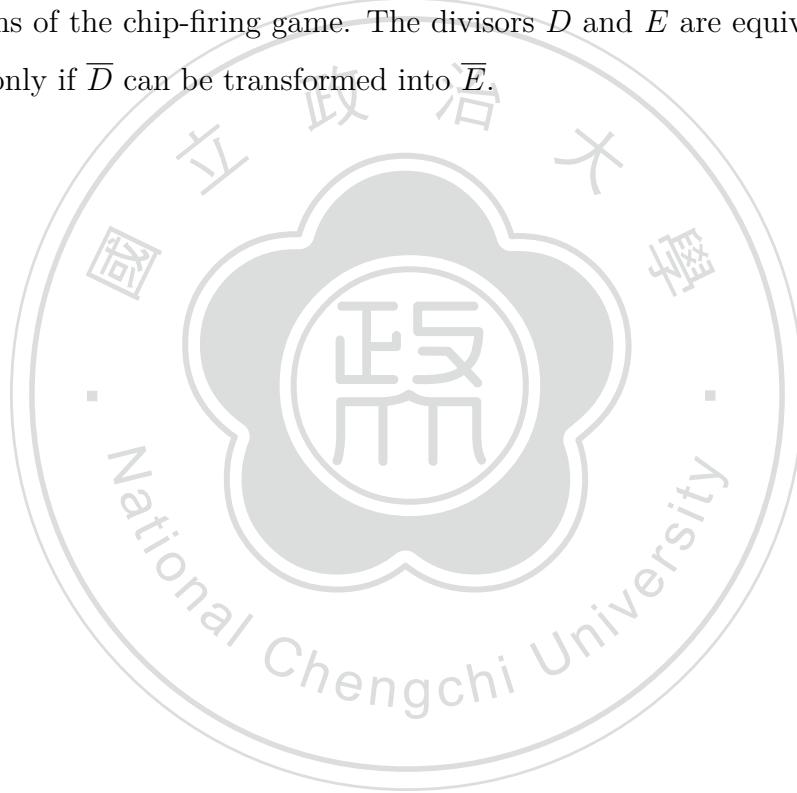
指導教授：蔡炎龍 博士

中華民國 103 年 1 月 10 日

Abstract

In this thesis, we study Baker-Norine's chip-firing game, and apply it to discrete tropical divisors. In particular, we discuss the relationship between this game and the equivalence of divisors.

Finally, we give a proof of the theorem: Let D and E be discrete tropical divisors of tropical curve Γ , and let \overline{D} and \overline{E} be corresponding configurations of the chip-firing game. The divisors D and E are equivalent if and only if \overline{D} can be transformed into \overline{E} .



中文摘要

在這篇論文裡，我們研究 Baker-Norine 的搬硬幣遊戲，並且把這個遊戲應用在離散型的熱帶因子上。特別地，我們去探討這個遊戲與等價熱帶因子之間的關係。最後我們證明了下面的定理：若 D, E 為熱帶曲線 Γ 上的離散型熱帶因子，而 $\overline{D}, \overline{E}$ 分別代表因子 D, E 在搬硬幣遊戲時的狀態，因子 D 與 E 等價，若且為若 \overline{D} 可經搬硬幣遊戲變成 \overline{E} 。



目 錄

Abstract	i
中文摘要	ii
目錄	iv
1 緒論	1
2 热帶幾何简介	3
2.1 热帶代數的基本介紹	3
2.2 热帶多項式	5
2.3 热帶曲線	8
3 圖的因素理論	15
3.1 圖形中的因子	15
3.2 The Chip-Firing Game	19
3.2.1 Björner-Lovász-Shor 的發射碎片遊戲	19
3.2.2 N.Biggs 的發射硬幣遊戲	21
3.2.3 Baker-Norine 的搬硬幣遊戲	24

4 热带几何的因子理论	27
4.1 热带几何中的因子	27
4.2 搬硬币遊戲與因子等價的關係	33
5 應用：秩的計算	43
5.1 利用搬硬币遊戲找因子的秩	43
5.2 利用黎曼 - 羅赫理論計算因子的秩	46
6 結論	49
參考文獻	51



第一章 緒論

熱帶幾何 (tropical geometry) 是數學的一個分支，最初是由一個巴西數學家兼電腦科學家 Imre Simon 於 1980 年代發展，而“熱帶”這個名詞的由來，是因為源於巴西。熱帶幾何開始被引起注意，因為有時候它可以簡化在代數幾何上較繁複的計算。而熱帶幾何也被發現一些重要的應用，就如同在古典的計數幾何及代數幾何上的應用。

我們將在第二章對“熱帶幾何”的數學定義及性質作一些基本介紹，關於更多詳細的內容與定理證明在 [8] [7] [9] [10] 有詳盡的介紹，包含熱帶曲線 (tropical curve) 的建立過程（將一個複數平面的曲線透過一個函數對應到實數平面上）、其他著名的定理（如熱帶代數基本定理、Bezout theorem）等。

接著我們想將“古典幾何圖的理論”推展到“熱帶幾何圖的理論”，其中特別要探討關於圖中的離散型因子 (discrete divisor)：將圖中的頂點賦予整係數，然後帶有整係數的頂點作線性組合，產生的因子 [1]。在第三章先介紹“古典幾何裡圖的因子理論”，然後仿造同樣的方法去建構出第四章“熱帶幾何裡圖的因子理論” [5] [6]。其中，因子理論中的“等價關係 (equivalence)”，是本篇論文要探討的一個重點。

第三章第二節，會介紹圖論中一個重要的遊戲 “chip-firing game”，它的發展已有二十多年，中間歷經許多數學家修改，本篇論文介紹了三種在無向圖

(undirected graph) 的玩法，分別是 1991 年 Anders Björner, László Lovász, Peter Shor [4] 的“發射碎片遊戲”、1999 年 Norman Biggs [3] 的“發射硬幣遊戲”、2007 年 Matthew Baker, Serguei Norine [2] 的“搬硬幣遊戲”。

第四章第二節我們將 Baker-Norine 的搬硬幣遊戲應用到熱帶曲線的離散型因子上，並且探討遊戲與等價因子之間的關係。最後我們證明：若一個因子經搬硬幣遊戲後產生了另一個因子，則兩因子等價。

反之，若兩因子等價，則其中一因子可透過搬硬幣遊戲得到另一因子。

最後在第五章，我們舉一個利用搬硬幣遊戲找等價因子的應用：秩 (rank) 的計算。並且介紹一個快速計算秩的公式：黎曼 - 羅赫定理 (Riemann-Roch Theory)，來彼此呼應驗證。



第二章 热帶幾何简介

2.1 热帶代數的基本介紹

热帶代數是考慮在 $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 裡的元素，賦予兩個運算“ \oplus ”及“ \odot ”，並分別稱之為“热帶加法”及“热帶乘法”。

定義 2.1.1. 热帶半環 (The max-plus tropical semiring)

考慮 $x, y \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ，定義“ \oplus ”及“ \odot ”如下：

$$\begin{cases} x \oplus y = \max\{x, y\}, \\ x \odot y = x + y, \end{cases}$$

$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ 會形成一個半環。

範例 2.1.2.

$$3 \oplus 8 = \max\{3, 8\} = 8$$

$$3 \odot 8 = 3 + 8 = 11,$$

這兩個運算有以下性質：

性質 2.1.3. 加法及乘法皆有交換律，即：

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$x \odot y = y \odot x,$$

範例 2.1.4.

$$\begin{aligned}3 \oplus 8 &= \max\{3, 8\} = 8 \\3 \odot 8 &= 3 + 8 = 11,\end{aligned}$$

性質 2.1.5. 加法及乘法皆有結合律，即：

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z) \\(x \odot y) \odot z &= x \odot (y \odot z)\end{aligned}$$

範例 2.1.6.

$$\begin{aligned}3 \oplus 8 &= \max\{3, 8\} = 8 \\3 \odot 8 &= 3 + 8 = 11,\end{aligned}$$

性質 2.1.7. 乘法對加法有分配律，即：

$$\begin{aligned}x \odot (y \oplus z) &= (x \odot y) \oplus (x \odot z) \\(x \oplus y) \odot z &= (x \odot z) \oplus (y \odot z)\end{aligned}$$

範例 2.1.8.

$$2 \odot (6 \oplus 9) = (2 \odot 6) \oplus (2 \odot 9)$$

性質 2.1.9. 加法單位元素為 $-\infty$ ，乘法單位元素為 0。即：

$$\begin{aligned}x \oplus (-\infty) &= (-\infty) \oplus x = x \\x \odot 1 &= 1 \odot x = x\end{aligned}$$

性質 2.1.10. 若 $x \neq -\infty$ ，則乘法反元素存在且唯一。即：

$$x \odot (-x) = (-x) \odot x = 0$$

另外，並非每個元素都有加法反元素。例如： $x \oplus 8 = 3$ ，則 x 不存在。

如同古典代數裡的指數式， $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$ ，也可定義熱帶數學的指數式。

定義 2.1.11. $x \in \mathbb{T}$ ，熱帶乘法運算中， x 的 k 個連乘積

$$x \odot x \odot x \odot \dots \odot x = x^{\odot k} \text{, 即: } x^{\odot k} = k \times x$$

例如： $x^{\odot 4} = 4x$

2.2 热帶多項式

在古典數學，單一變數 x 的多項式，型如 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ，其中 a_i 為係數 ($i = 1, 2, \dots, n$)，例如： $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 0$ 。熱帶數學也可定義多項式，例如： $p(x) = 2 \odot x^{\odot 3} \oplus (-1) \odot x^{\odot 2} \oplus 1 \odot x \oplus 0$ 我們稱之為“熱帶多項式”。以下，為方便起見，我們將熱帶多項式中，單項式的次方 \odot 省略，例如：

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 \odot x^{\odot 3} \oplus (-1) \odot x^{\odot 2} \oplus 1 \odot x \oplus 0 \\ &= 2 \odot x^3 \oplus (-1) \odot x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 0 \end{aligned}$$

定義 2.2.1. 由有限個熱帶單項式 “ $x_n^{\odot m}$ ” 所構成的線性組合，稱為熱帶多項式。

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a \odot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \oplus b \odot x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \oplus \cdots \\ &= \max\{a + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n, b + j_1 x_1 + \dots + j_n x_n, \dots\} \end{aligned}$$

其中，係數 a, b, \dots 為實數，指數 i_1, j_1, \dots 為整數。

記作： $p(x) \in \mathbb{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

範例 2.2.2. (單變數的熱帶多項式)

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 \odot x^3 \oplus (-1) \odot x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 0 \\ &= \max\{3x + 2, 2x - 1, x + 1, 0\} \end{aligned}$$

範例 2.2.3. (單變數的熱帶多項式)

$$p(x) = 1 \odot x^3 \oplus x^2 \oplus -5$$

其中 x^3 的係數為 1， x^2 的係數為 0， x 的係數為 $-\infty$ ，且

$$p(x) = \max\{3x + 1, 2x, -5\}$$

範例 2.2.4. (二元一次熱帶多項式)

$$\begin{aligned} p(x, y) &= (-2) \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 1 \\ &= \max\{x - 2, y + 3, 1\} \end{aligned}$$

每一個熱帶多項式其實是一個從 \mathbb{R}^n 打到 \mathbb{R} 的函數，下面我們來觀察幾個熱帶多項式所代表的函數圖形。

範例 2.2.5. (一元二次熱帶多項式)

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 \\ &= \max\{2x + 1, x + 4, 2\} \end{aligned}$$

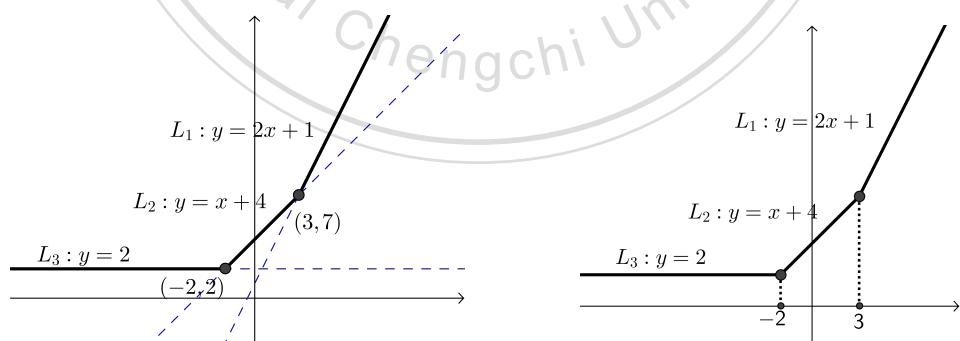


圖 2.1: 一元二次熱帶多項式 $p(x) = 1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2$ 函數圖形

如圖 2.1， $p(x)$ 是“當 x 為某一實數，代入三條直線中，所得到最大的 y 值”。即三條直線中，取出較高的線段或射線：

- (i) 當 $x \geq 3$ ，則取 $L_1 : y = 2x + 1$ 這條線。
- (ii) 當 $-2 \leq x \leq 3$ ，則取 $L_2 : y = x + 4$ 這條線。
- (iii) 當 $x \leq -2$ ，則取 $L_3 : y = 2$ 這條線。

這樣的函數圖形，也可寫成 $1 \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus -2)$ ，型如多項式的因式分解。

在熱帶數學裡，我們可以把熱帶多項式 $p(x)$ 分解成一次因式的乘積

$$1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 = 1 \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus -2)$$

範例 2.2.6. (一元三次熱帶多項式)

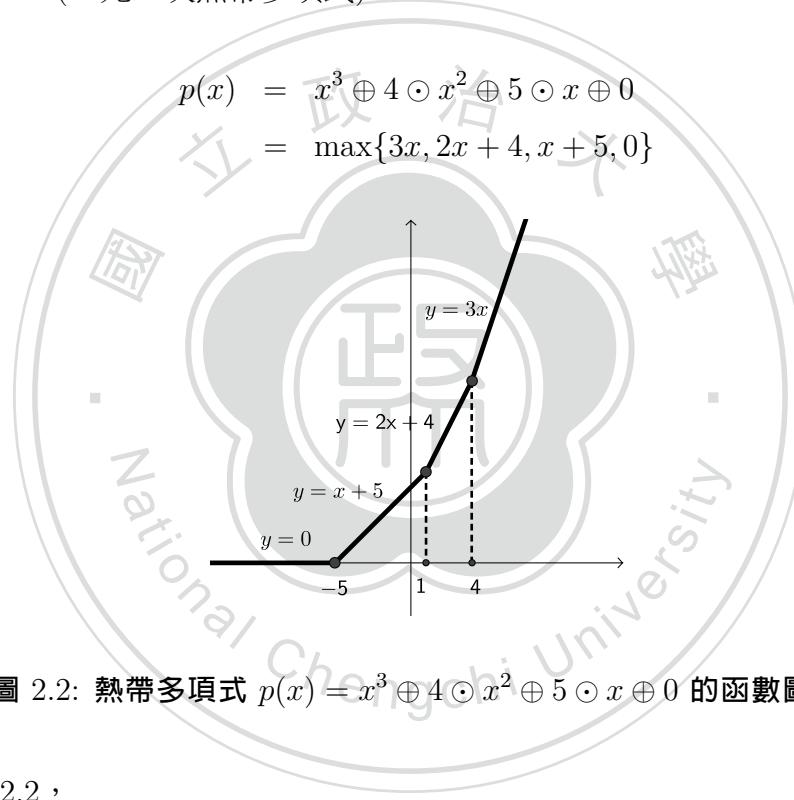


圖 2.2: 热帶多项式 $p(x) = x^3 \oplus 4 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 0$ 的函数图形

如圖 2.2，

$$p(x) = (x \oplus 4) \odot (x \oplus 1) \odot (x \oplus -5)$$

範例 2.2.7. (不同的热帶多项式可能表示成相同多项式乘积)

如圖 2.3，

$$x^2 \oplus -1 \odot x \oplus 2 = x^2 \oplus -3 \odot x \oplus 2 = (x \oplus 1)^2$$

热帶多项式函数有下面重要的性质。

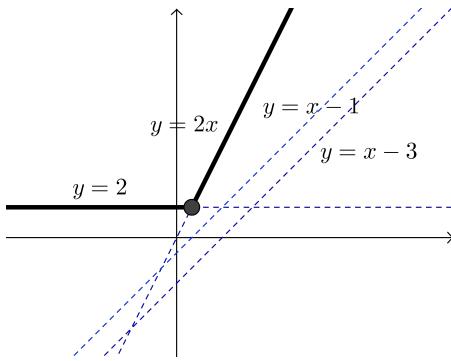


圖 2.3: $x^2 \oplus -1 \odot x \oplus 2$ 與 $x^2 \oplus -3 \odot x \oplus 2$ 的函數圖形

性質 2.2.8. 热帶多項式函數 $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

- p 是連續的。
- p 是分段線性的，且分段的個數是有限的。
- p 是凸函數，即：對所有 \mathbb{R}^n 中的元素 x, y ， $p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(p(x) + p(y))$ 恒成立。

2.3 热帶曲線

在前一章，我們提到热帶多項式分解，範例 2.2.5與範例 2.2.6中的

$$\begin{aligned} 1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 &= 1 \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus -2) \\ x^3 \oplus 4 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 0 &= (x \oplus 4) \odot (x \oplus 1) \odot (x \oplus -5) \end{aligned}$$

仿照古典數學裡多項式“根”的概念，我們說热帶多項式 $1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2$ 的根為 3 和 -2，而 $x^3 \oplus 4 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 0$ 的根為 4, 1, -5。觀察單變數热帶多項式 $p(x)$ 的“根”正是發生在函數圖形 $p(x)$ 的折點處，而這些折點也正是將 x 逐一代入每條線時，至少在兩條線同時發生最大值的地方。下面我們更具體定義有上述特色的元素所構成的集合 $\mathcal{H}(p)$ 。

定義 2.3.1. 超曲面 (hypersurface)

考慮熱帶多項式 $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ，將所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 代入有限個線性函數中，使得最大值至少出現兩次的 x 集合起來，令作 $\mathcal{H}(p)$ ，並稱作“超曲面”。

即：

$$\mathcal{H}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{代入有限個線性函數中，使得最大值至少出現兩次}\}$$

也可以說: $x \in \mathcal{H}(p) \Leftrightarrow$ 函數 p 的圖形在 x 處不是線性的。

若考慮單變數的熱帶多項式 $p(x)$ 中， $\mathcal{H}(p)$ 即是 $p(x)$ 的根所形成的集合。

範例 2.3.2. (單變數熱帶多項式 $p(x)$ 的 $\mathcal{H}(p)$)

考慮 $p(x) = 1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 = 1 \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus -2)$ ，則 $\mathcal{H}(p) = \{4, 1, -5\}$

接著，我們來考慮兩個變數的熱帶多項式，型如

$$p(x_1, x_2) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} \odot x_1^{\odot i} \odot x_2^{\odot j}, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}$$

範例 2.3.3. (二元一次熱帶多項式的 $\mathcal{H}(p)$)

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 1 \\ &= \max\{2 + x, 3 + y, 1\} \end{aligned}$$

考慮產生最大值的地方:

(i) 若最大值為 $2 + x = 3 + y \geq 1$ ，則 $x - y = 1$ 且 $x > -1, y > -2$ 。畫得射線 L_1

(ii) 若最大值為 $2 + x = 1 \geq 3 + y$ ，則 $x = -1$ 且 $y < -2$ 。畫得射線 L_2

(iii) 若最大值為 $3 + y = 1 \geq 2 + x$ ，則 $y = -2$ 且 $x < -1$ 。畫得射線 L_3

$\mathcal{H}(p)$ 即為三條射線上的點 (x, y) 所構成的集合。如圖 2.4。

定義 2.3.4. 热帶曲線 (tropical curve)

考慮兩個變數的熱帶多項式

$$p(x_1, x_2) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} \odot x_1^{\odot i} \odot x_2^{\odot j}$$

其 $\mathcal{H}(p)$ 是在 \mathbb{R}^2 上的曲線，稱之為平面上的“熱帶曲線”。

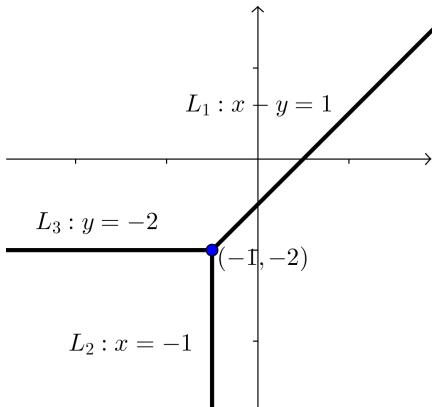


圖 2.4: $p(x, y) = 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 1$ 的 $\mathcal{H}(p)$ 在 \mathbb{R}^2 的曲線圖形

範例 2.3.5. 热帶直線 (tropical line)

二元一次热帶多項式

$$p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \max(a + x, b + y, c)$$

其 $\mathcal{H}(p)$ 為“函數 p 中，不是線性的所有點 (x, y) ”所形成的集合，在 \mathbb{R}^2 的熱帶曲線圖形包含了一點 $(c - a, c - b)$ ，以及往 $(1, 1)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(0, -1)$ 三個方向的射線（以點 $(c - a, c - b)$ 為中心），如圖 2.5。我們稱 $p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$ 的熱帶曲線為“一次熱帶曲線”，又稱“熱帶直線”。

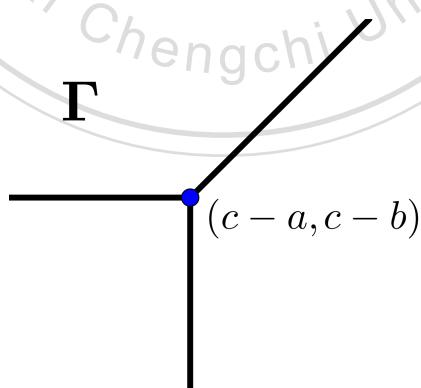


圖 2.5: 热帶直線 Γ

範例 2.3.6. 热帶圓錐曲線 (tropical conic)

考慮二元二次熱帶多項式

$$p(x, y) = 1 \odot x^2 \oplus 1 \odot xy \oplus -3 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2,$$

利用 $\mathcal{H}(p)$ 的定義去討論產生最大值的項，進而可畫出在 \mathbb{R}^2 的熱帶曲線圖形，如圖 2.6。

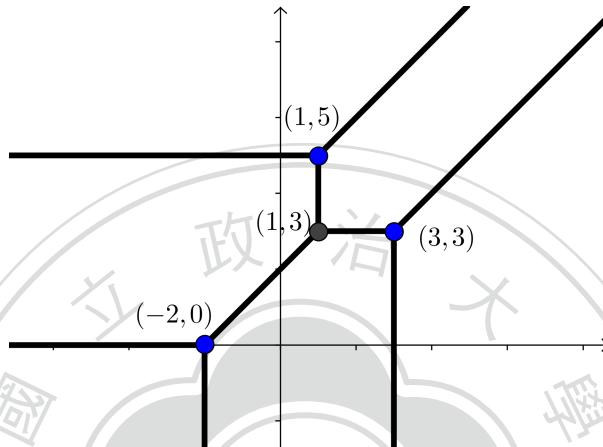


圖 2.6: $p(x, y) = 1 \odot x^2 \oplus 1 \odot xy \oplus -3 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2$ 的熱帶曲線

二元二次熱帶多項式

$$p(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot xy \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f,$$

我們稱其熱帶曲線圖形為“二次熱帶曲線”，又稱“熱帶圓錐曲線”。上述例子 2.3.6 只是熱帶圓錐曲線的一種形式，隨著係數 a, b, c, d, e, f 不同，其熱帶曲線也不同，尚有其他形式。以下將介紹另一種畫法，利用對偶的方式畫出熱帶曲線。

定義 2.3.7. 對偶圖形 (the dual graph)

考慮含兩個變數的熱帶多項式

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \bigoplus_{i=1, \dots, n} b^{(i)} \odot x_1^{a_1^{(i)}} \odot x_2^{a_2^{(i)}} \quad a_1^{(i)}, a_2^{(i)} \in \mathbb{N} \\ &= \max\{a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + b^{(i)}\} \end{aligned}$$

令 $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ ，將這些點 $a^{(i)}$ 連起來的凸集合為 Δ ，在 Δ 中任取一點，再對 Δ 的邊分別做垂線，得到曲線 Γ ，我們稱此曲線 Γ 為 Δ 的對偶圖形。

特別，當 $a_1^{(i)} + a_2^{(i)} = d$ 時，我們稱 $p(x_1, x_2)$ 為一個 d 次熱帶多項式，其點 $a^{(i)}$ 連起來的凸集合，以 Δ_d 表示。

定義 2.3.8. 牛頓子分割 (Newton subdivision), 平滑熱帶曲線 (smooth tropical curve)

一個 d 次熱帶多項式在 \mathbb{R}^2 上的 Δ_d ，若再進行分割使得每個子分割都呈現面積為 $\frac{1}{2}$ 的三角形，我們稱這樣的分割為“牛頓子分割”，而在這樣分割下的對偶圖形，稱為“平滑的熱帶曲線”。

範例 2.3.9. (利用對偶畫一次熱帶曲線)

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a \odot x \oplus b \odot y \oplus c \\ &= a \odot x^1 y^0 \oplus b \odot x^0 y^1 \oplus c \odot x^0 y^0 \end{aligned}$$

取 $a^{(1)} = (1, 0)$, $a^{(2)} = (0, 1)$, $a^{(3)} = (0, 0)$ ，連接三點得面積為 $\frac{1}{2}$ 的三角形 Δ_1 ，其對偶圖形 Γ 即為一次熱帶曲線，如圖 2.7。

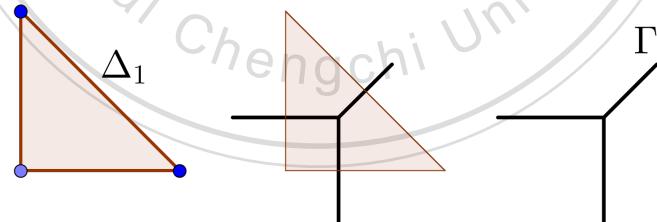


圖 2.7: Δ_1 的對偶圖形為一次熱帶曲線

範例 2.3.10. (利用對偶畫二次熱帶平滑曲線)

二次熱帶曲線，在牛頓子分割下生成的平滑曲線只有四種形式，如圖 2.8。

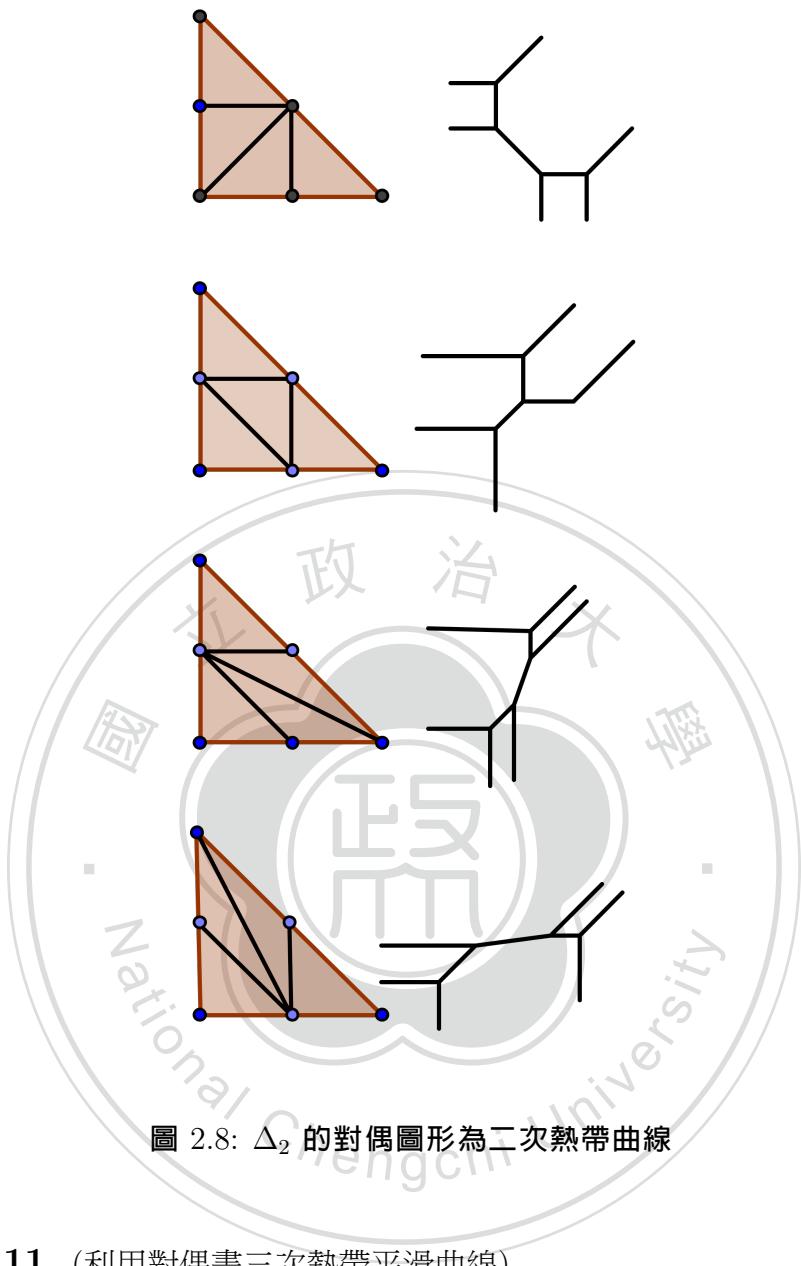


圖 2.8: Δ_2 的對偶圖形為二次熱帶曲線

範例 2.3.11. (利用對偶畫三次熱帶平滑曲線)

三次熱帶曲線 (tropical cubic) 的一種子分割方式，如圖 2.9



圖 2.9: Δ_3 的對偶圖形為三次熱帶曲線

第三章 圖的因子理論

3.1 圖形中的因子

本文所討論的圖形為沒有迴圈、沒有重複線段、且為連通的有限圖。

定義 3.1.1. G 為一個沒有無窮遠線條的圖形：

- (1) G 中所有頂點構成的集合，記作 $V(G)$ 。 G 中所有頂點數，記作 $|V(G)|$ 。
- (2) G 中所有線段構成的集合，記作 $E(G)$ 。 G 中所有線段數，記作 $|E(G)|$ 。

定義 3.1.2. 若 $v \in V(G)$ ，則

- (1) 與頂點 v 相鄰的所有線段形成的集合為 $E_v(G)$ 。
- (2) 與頂點 v 相鄰的所有線段數，記作 $\text{val}(v)$ 。

範例 3.1.3. 如圖 3.1.3，考慮圖形 G ，

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$\text{val}(v_1) = 3, E_{v_1}(G) = \{e_2, e_3, e_4\}$$

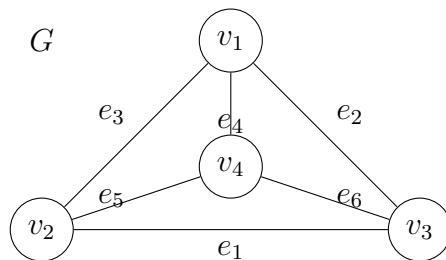


圖 3.1: 圖形 G

定義 3.1.4. 圖形中的因子 (divisor)

將圖形 G 中的每個頂點 v ，賦予整係數 a_v ，並作線性組合後，

$$D = \sum_{v \in V(G)} a_v \cdot v, \quad a_v \in \mathbb{Z}$$

稱 D 為 G 的因子。而 G 上所有因子所形成的集合，我們以 $\text{Div}(G)$ 表示。

因子 D 中，對應頂點 v 的係數 a_v 也可記作 $D(v)$ 。 $D(v)$ 將 G 中頂點對應到整數，是一個函數，將 $V(G)$ 打到 \mathbb{Z} 的函數。

我們也可這樣表示因子 D ，

$$D = \sum_{v \in V(G)} D(v) \cdot v, \quad D(v) \in \mathbb{Z}$$

。

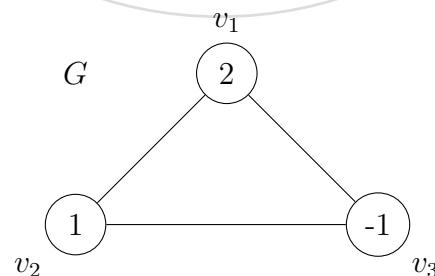
定義 3.1.5. 因子的次數 (degree)

因子 D 中，所有頂點的係數和，稱為因子 D 的次數，記作 $\deg(D)$ 。

亦即：若 $D \in \text{Div}(G)$ ， $D = \sum_{v \in V(G)} D(v) \cdot v$ ，則 $\deg(D) = \sum_{v \in V(G)} D(v)$ 。

範例 3.1.6. (圖形 G 上的因子 D)

如圖，將圖形 G 每個頂點賦予整係數，得到一個因子 D ，



$$D = 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3, \text{且 } \deg(D) = 2 + 1 + (-1) = 2$$

定義 3.1.7. 有效因子 (effective divisor)

若因子 D 的每個係數皆為非負的整數，我們稱這樣的非負因子為有效因子。

記作： $D \geq 0 \Leftrightarrow D(v) \geq 0, \forall v \in V(G)$ 。

範例 3.1.8. (有效因子)



因子 D 與因子 E 皆為有效因子。

我們把賦予每個頂點整係數的函數 $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ 蔊集成一個集合，叫它作 $\mathcal{M}(G)$ 。再來定義一個新的轉換 $\Delta : \mathcal{M}(G) \rightarrow \text{Div}(G)$ ，將 f 轉換成圖形上的因子 $\Delta(f)$ 。

定義 3.1.9. 拉普拉斯轉換 (Laplacian operator)

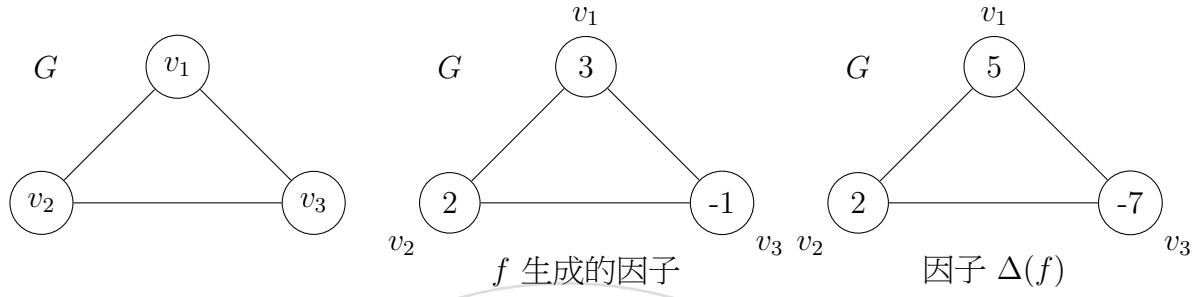
$\Delta : \mathcal{M}(G) \rightarrow \text{Div}(G)$, $f \in \mathcal{M}(G)$ 透過 Δ 轉換得到一個新的因子：

$$\Delta(f) = \sum_{v \in V(G)} \Delta_v(f) \cdot v$$

其中頂點 v 的係數

$$\begin{aligned} \Delta_v(f) &= \text{val}(v) \cdot f(v) - \sum_{e=\overline{wv} \in E_v(G)} f(w) \\ &= \sum_{e=\overline{wv} \in E_v(G)} (f(v) - f(w)) \end{aligned}$$

範例 3.1.10. (拉普拉斯轉換後的因子)



考慮上圖中的圖 G ，若 $f(v_1) = 3, f(v_2) = 2, f(v_3) = -1$ ，由這樣的函數 f 生成的因子為 $3v_1 + 2v_2 - v_3$ 。經拉普拉斯轉換後的係數：

$$\begin{aligned}\Delta_{v_1}(f) &= (3 - 2) + (3 - (-1)) = 5 \\ \Delta_{v_2}(f) &= (2 - 3) + (2 - (-1)) = 2 \\ \Delta_{v_3}(f) &= (-1 - 3) + (-1 - 2) = -7\end{aligned}$$

得因子 $\Delta(f) = 5v_1 + 2v_2 - 7v_3$ 。

接下來我們要利用 $\Delta(f)$ 這種因子，來定義 $\text{Div}(G)$ 中因子的等價關係。

定義 3.1.11. 等價關係 (equivalence relation)

D, E 為圖 G 中的兩個因子，若存在一個函數 f ，使得 $D - E = \Delta(f)$ ，則我們稱 D, E 兩個因子等價，記作 $D \sim E$ 。

也就是說：若 D, E 兩個因子等價，則一定存在一個函數 f ，使得 $D - E = \Delta(f)$ 。

範例 3.1.12. (等價因子)

考慮圖 G 中的兩個因子 D, E ，

$$\begin{aligned}D &= 6v_1 + 2v_2 - 5v_3, \\ E &= v_1 + 0v_2 + 2v_3, \\ \Rightarrow D - E &= 5v_1 + 2v_2 - 7v_3\end{aligned}$$

由上例 3.1.10，可知存在一個 $f(v_1) = 3, f(v_2) = 2, f(v_3) = -1$ 的函數 f 使得 $D - E = \Delta(f)$ 。

3.2 The Chip-Firing Game

這個小節，我們要介紹一個在圖論上的遊戲“chip-firing game”，這個遊戲的發展已有二十幾年，中間經過許多數學家對規則的修改與研究，使其能夠應用在自然科學、金融、經濟上。以下將介紹在無向圖 (undirected graph) 上 chip-firing 的三種玩法：

- Anders Björner, László Lovász, Peter Shor(1991) 的“發射碎片遊戲” [4]
- Norman Biggs(1999) 的“發射硬幣遊戲” [3]
- Matthew Baker, Serguei Norine(2007) 的“搬硬幣遊戲” [2]

3.2.1 Björner-Lovász-Shor 的發射碎片遊戲

Björner-Lovász-Shor(1991) 的 chip-firing 規則如下：

在一個“有限、連通、無向”的圖上，一開始每個頂點上都放有一些碎片，零個或正整數個。若有某個頂點 v_i ，其上面的碎片數 $D(v_i)$ ，大於或等於該頂點所連接的邊數 $\text{val}(v_i)$ 時，則移動它身上的碎片到相鄰的頂點，給每個鄰居各一個碎片。我們稱該頂點“發射”(the vertex fires)。當圖上的每個頂點身上碎片數都小於它所連接的邊數時，沒有頂點可以發射，則達穩定狀態 (stable)，結束遊戲。

我們不妨稱這個 chip-firing 為“發射碎片遊戲”。

範例 3.2.1. (發射碎片遊戲)

如圖 3.2。

- (i) 圖的初始狀態 D_0 ，因為 v_1 上的碎片數 $D(v_1) = 2$ ， $\text{val}(v_1) = 2$ ， $D(v_1) \geq \text{val}(v_1)$ ，所以 v_1 發射，搬移身上碎片給鄰居，每個鄰居各一個，變成狀態 D_1 。
- (ii) 狀態 D_1 ，因為 v_2 上的碎片數 $D(v_2) \geq \text{val}(v_2)$ ，所以 v_2 發射，變成狀態 D_2 。
- (iii) 狀態 D_2 ，每個頂點上的碎片數皆小於它的鄰邊數，達穩定狀態，遊戲結束。

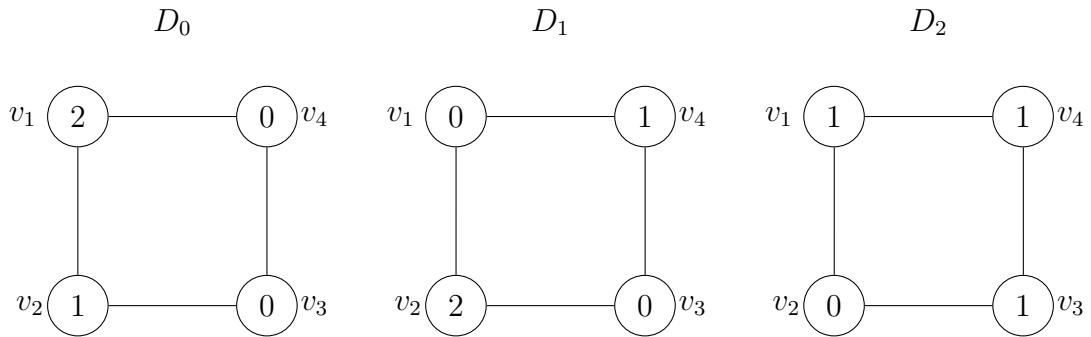


圖 3.2: 發射碎片: $D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2$

這個遊戲可能不會達穩定狀態，而無限次地進行下去。

範例 3.2.2. (發射碎片遊戲可能會無限次進行)

如圖 3.3。狀態 E_0 , v_1 發射

\Rightarrow 狀態 E_1 , v_2 發射

\Rightarrow 狀態 E_2 , v_3 發射

\Rightarrow 狀態 E_3 , v_4 發射

\Rightarrow 狀態 E_4 (同 E_0)

這個玩法的結果，有下面定理 [4] :

定理 3.2.3. 令 N 為碎片總數 ($N = \sum D(v)$, $v \in V(G)$)，

(1) 如果 $N > 2|E(G)| - |V(G)|$ ，遊戲會無限次地玩下去 (無法達穩定狀態)。

(2) 如果 $N < |E(G)|$ ，會在有限次步驟後結束遊戲 (達穩定狀態)。

(3) 如果 $|E(G)| \leq N \leq 2|E(G)| - |V(G)|$ ，則結果不一定。

定理 3.2.4. 若發射碎片遊戲可達穩定狀態，則不論頂點發射的順序如何，都會達到唯一的穩定狀態 (即結束遊戲時，會有相同的碎片分佈)。

範例 3.2.5. ($N = |E(G)|$ 時，遊戲可經有限步驟後結束，也可能無限次進行)

如圖 3.4。狀態 D 可以達穩定，狀態 E 則不會達穩定狀態。

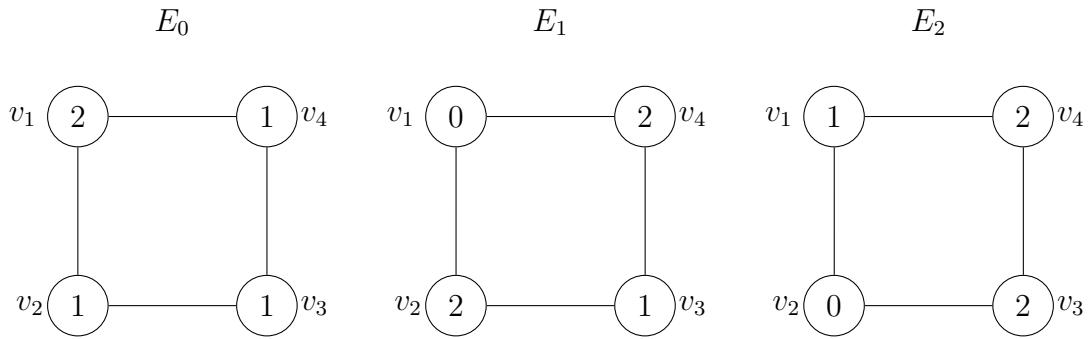


圖 3.3: 發射碎片: $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4$ (同 E_0)

3.2.2 N.Biggs 的發射硬幣遊戲

接下來，我們介紹 Norman Biggs(1999) 在“有限、無向、無迴圈、連通”的圖上進行的 chip-firing game，又稱 dollar game。

N.Biggs 的遊戲規則為：在一個圖 G 中先選取一個頂點 v_0 當特殊點 (a sink vertex)。除了特殊點外，每個頂點 v_i 一開始都放有一些硬幣 (零個或正整數個)， v_0 則擁有無限多個硬幣。如果 v_0 外的其他頂點 v_i ，硬幣數大於或等於它所連接的邊數時，則發射身上的硬幣，給與它相鄰的每個頂點各一個硬幣。

當這些頂點都不必發射時，我們稱為 v_0 穩定狀態 (v_0 -stable)，此時則由特殊點 v_0 發射，一直到圖 G 又出現其他可發射的點。這個遊戲可以一直無限地玩下去。

我們不妨稱 N.Biggs 的 chip-firing 為發射硬幣遊戲。

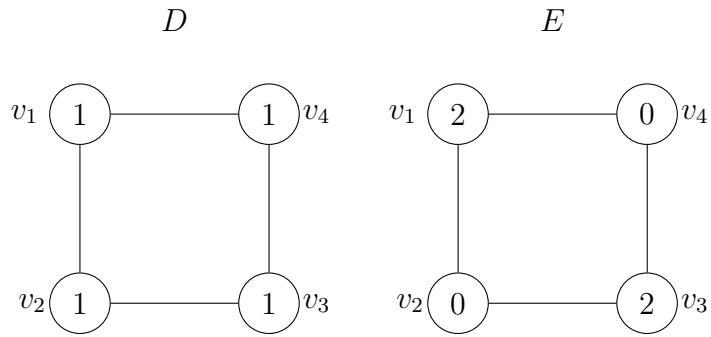


圖 3.4: 發射碎片, $N = 4, |E(G)| = 4$

範例 3.2.6. (發射硬幣遊戲)

見圖 3.5 與圖 3.6。

- (i) 在圖 G , 選擇 v_1 為特殊點, 其他頂點上有一些硬幣, 如狀態 D_0 。
- (ii) 狀態 D_0 中, v_2 上的硬幣數大於它的鄰邊數, 所以發射硬幣, 得狀態 D_1 。
- (iii) 狀態 D_1 中, v_3 發射, 得狀態 D_2 。
- (iv) 狀態 D_2 中, 達 v_1 穩定狀態。由 v_1 發射, 得狀態 D_3 。
- (v) 狀態 D_3 中, v_2 或 v_4 發射, 我們選擇 v_4 發射, 得狀態 D_4 。

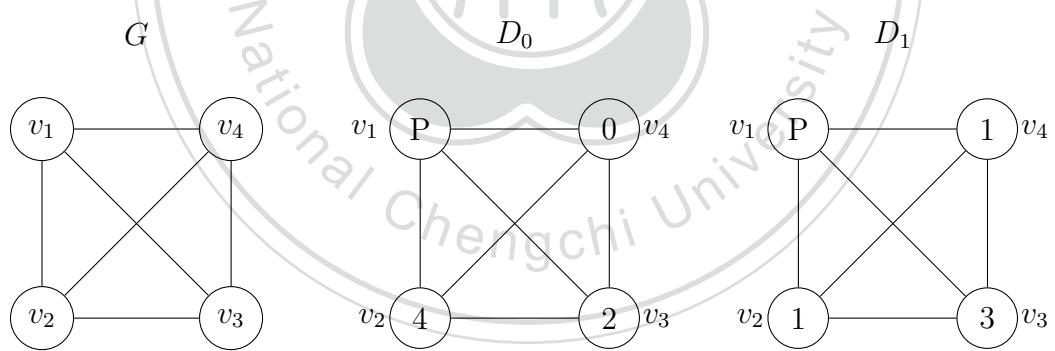


圖 3.5: 發射硬幣: $D_0 \rightarrow D_1$

這個發射硬幣遊戲從某個狀態 D 開始, 發射幾次後, 如果又回到原來狀態 D , 我們稱狀態 D 為循環狀態 (recurrent), 如範例 4.2.1 中的 $D_4 = D_0$ 為一個循環狀態。

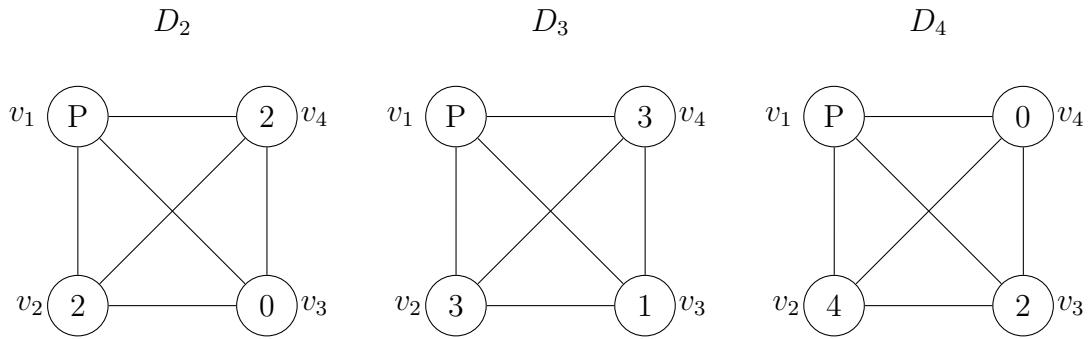


圖 3.6: 發射硬幣: $D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow D_4$

如果狀態 D 是一個 v_0 穩定狀態，又發射幾次後，如果又回到狀態 D 我們稱狀態 D 為臨界狀態 (critical)。

範例 3.2.7. (臨界狀態)

見圖 3.7 與圖 3.8。

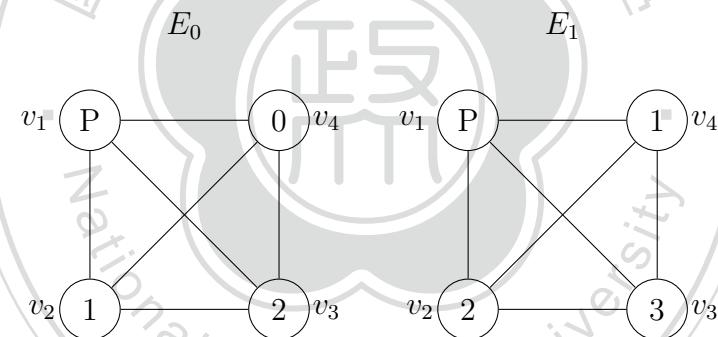


圖 3.7: 特殊點發射硬幣: $E_0 \rightarrow E_1$

- (i) 狀態 E_0 為 v_1 穩定狀態， v_1 發射，得狀態 E_1 。
- (ii) 狀態 E_1 ， v_3 發射，得狀態 E_2 。
- (iii) 狀態 E_2 ， v_2 發射，得狀態 E_3 。
- (iv) 狀態 E_3 ， v_4 發射，又回到狀態 E_0 。

所以 E_0 是一個臨界狀態。

定理 3.2.8. 紿定一個初始狀態，經一連串的發射硬幣後，都會導致到一個臨界狀態。每個初始狀態都有唯一的臨界狀態。

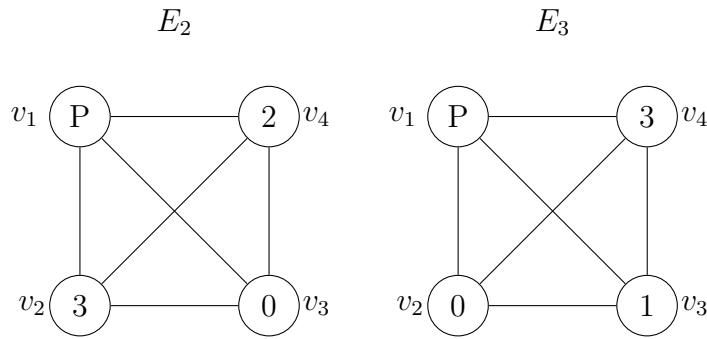


圖 3.8: 發射硬幣的循環狀態: $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_0$

3.2.3 Baker-Norine 的搬硬幣遊戲

在 2007 年，Baker-Norine 修改的遊戲規則如下：

起初每個頂點上都會有一些硬幣，可能正整數、可能零、可能負整數。若為負整數，稱該頂點“負債”。可任意選擇一個頂點為中心，然後搬入或搬出硬幣，也就是可以移動身上的硬幣給鄰居（相鄰的每個頂點各一個硬幣），或是從每個鄰居身上各得一個硬幣。

因為所有的硬幣，只是在頂點間移動，所以硬幣總數不會改變。這個遊戲的目的，是希望經過一連串的搬動硬幣後，使得沒有頂點是負債的狀態，即當所有頂點上的硬幣數大於或等於零，就成功地結束遊戲。我們不妨稱 Baker-Norine 的 chip-firing 為搬硬幣遊戲。

範例 3.2.9. 見圖 3.9。初始狀態 D_0

- (i) 在狀態 D_0 中，選擇 v_4 ，從每個鄰居身上各得到一個硬幣，變成狀態 D_1 。
 - (ii) 在狀態 D_1 中，選擇 v_3 ，分給每個鄰居各一個硬幣，變成狀態 D_2 。
- 狀態 D_2 上的沒有頂點是負債，結束遊戲。

這個玩法有以下的性質與定理。

性質 3.2.10. [2]

- (1) 若這個遊戲是可成功的，則可以只經過一連串的搬入硬幣，而結束遊戲。

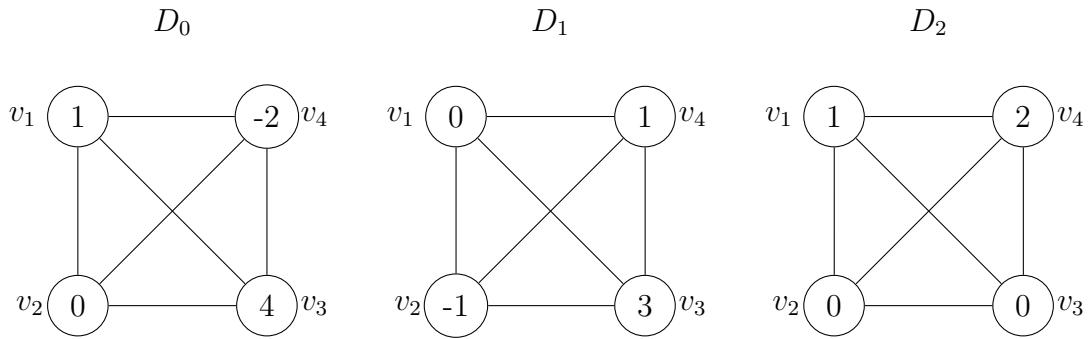


圖 3.9: 搬硬幣遊戲: $D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2$

(2) 當我們只透過搬入硬幣來達到成功時，與選擇哪一個頂點來操作的順序無關。

圖 G 本身的型態以及硬幣總數 N 會關係搬硬幣遊戲是否可以成功結束。

定理 3.2.11. (圖 G 的型態與硬幣總數 N 影響遊戲)

圖 G 上的狀態 D ， $N = \deg(D)$ ，且令 $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$ ，則

- (1) 若 $N \geq g$ ，這個遊戲一定可在有限次操作後成功結束。
- (2) 若 $N < g$ ，則不一定可以成功。

範例 3.2.12. ($N = 3, g = 3$)

如圖 3.10。因為 $N \geq g$ ，這個遊戲可經有限次操作後成功結束。我們可以只利

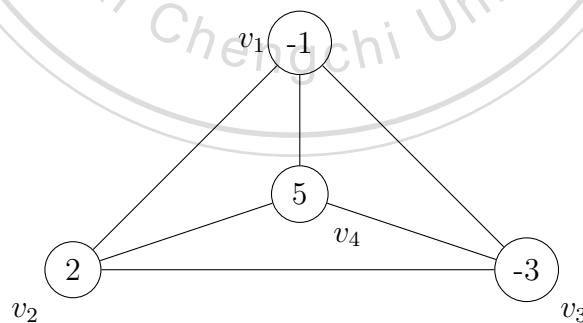


圖 3.10: $N = 3, g = 3$

用搬入硬幣的動作，成功結束遊戲。依序以下面頂點為中心操作 (搬入硬幣)：
 v_3, v_1, v_3, v_2, v_1 °

範例 3.2.13. ($N = 1, g = 1$)

如圖 3.11，因為 $N \geq g$ ，這個遊戲可經有限次操作後成功結束。依序以下面頂點

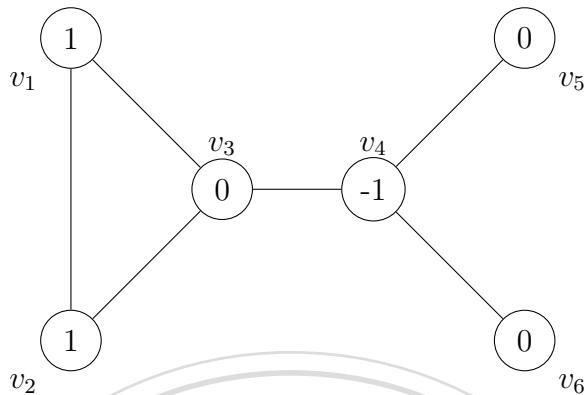


圖 3.11: $N = 1, g = 1$

為中心操作 (搬入硬幣)： $v_3, v_3, v_5, v_6, v_4, v_5, v_6$ 。

範例 3.2.14. ($N = 0, g = 1$)

如圖 3.12。狀態 D 時，遊戲會無限進行。狀態 E 時，遊戲可以成功結束。



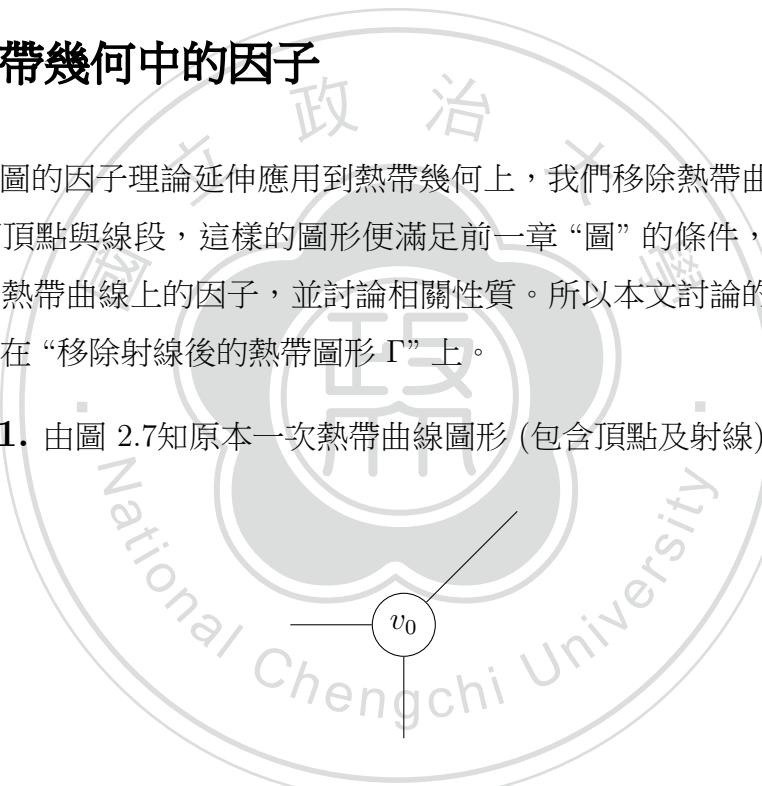
圖 3.12: $N = 0, g = 1$

第四章 热帶幾何的因子理論

4.1 热帶幾何中的因子

為了將圖的因子理論延伸應用到热帶幾何上，我們移除热帶曲線中的射線部分，只留下頂點與線段，這樣的圖形便滿足前一章“圖”的條件，便可用同樣的方法來定義热帶曲線上的因子，並討論相關性質。所以本文討論的热帶幾何因子理論是建立在“移除射線後的热帶圖形 Γ ”上。

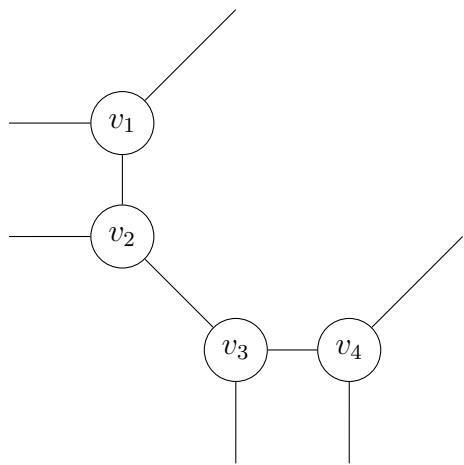
範例 4.1.1. 由圖 2.7 知原本一次热帶曲線圖形（包含頂點及射線）為



移除射線後的一次热帶曲線圖形 Γ 便只剩下一個點



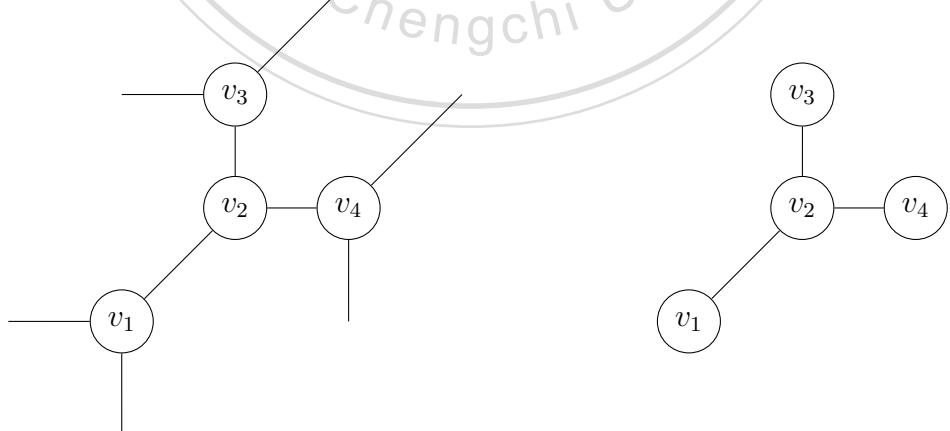
範例 4.1.2. 由圖 2.8 知四種二次热帶曲線中有一種形式為



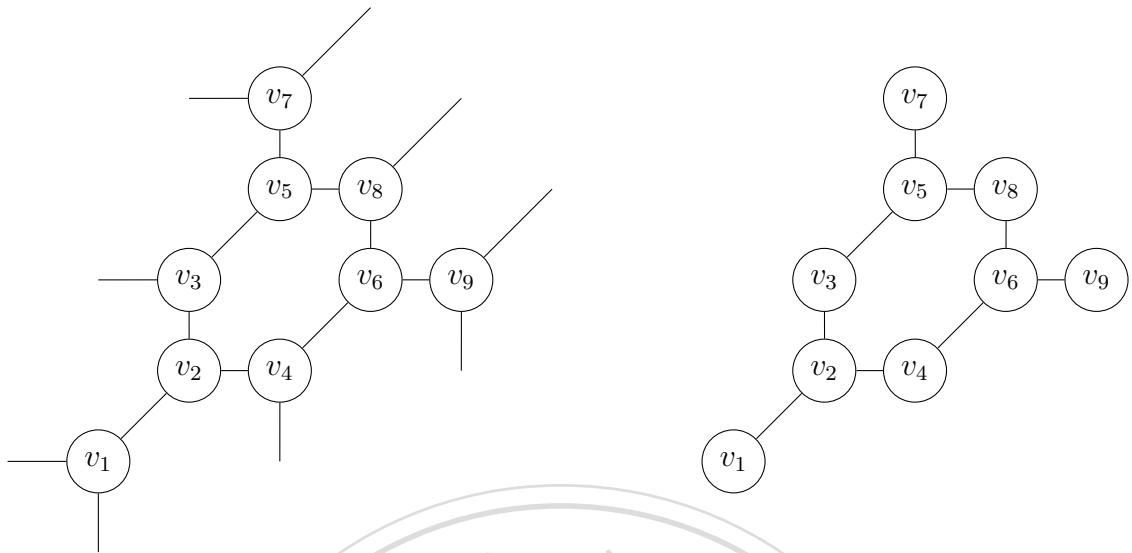
移除射線後的二次熱帶曲線為



範例 4.1.3. 另一種二次熱帶曲線移除射線後



範例 4.1.4. (一個三次熱帶曲線移除射線後)



定義 4.1.5. Γ 為移除射線後的熱帶曲線圖形：

- (1) Γ 中所有頂點構成的集合，記作 $V(\Gamma)$ 。 Γ 中所有頂點數，記作 $|V(\Gamma)|$ 。
- (2) Γ 中所有線段構成的的集合，記作 $E(\Gamma)$ 。 Γ 中所有線段數，記作 $|E(\Gamma)|$ 。

定義 4.1.6. 若 $v \in V(\Gamma)$ ，則

- (1) 與頂點 v 相鄰的所有線段形成的集合為 $E_v(\Gamma)$ 。
- (2) 與頂點 v 相鄰的所有線段數，記作 $\text{val}(v)$ 。

定義 4.1.7. 離散型的熱帶因子 (discrete tropical divisor)

將熱帶圖形 Γ 中的每個頂點，賦予整係數，並作線性組合後，

$$D = \sum_{v \in V(\Gamma)} D(v) \cdot v, \quad D(v) \in \mathbb{Z}$$

稱 D 為 Γ 的離散型因子。而 Γ 上所有因子所形成的集合，我們以 $\text{Div}(\Gamma)$ 表示。

本文接下來討論的皆為離散型熱帶因子，便直接簡稱熱帶因子。

定義 4.1.8. 热帶因子的次數 (degree)

因子 D 中，所有頂點的係數和，稱為因子 D 的次數，記作 $\deg(D)$ 。

亦即：若 $D \in \text{Div}(\Gamma)$ ， $D = \sum_{v \in V(\Gamma)} D(v) \cdot v$ ，則 $\deg(D) = \sum_{v \in V(\Gamma)} D(v)$ 。

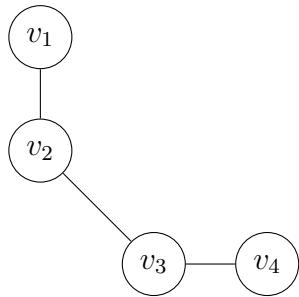


圖 4.1: 二次熱帶曲線 Γ

前一章在圖形的因子中，我們曾介紹一種轉換：拉普拉斯轉換。接著也將用同樣方法在熱帶因子上定義這種轉換，得到一個新的因子。

首先把賦予每個頂點整係數的函數 $f : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ 蒐集成一個集合，叫它作 $\mathcal{M}(\Gamma)$ 。再來定義一個新的轉換 $\Delta : \mathcal{M}(\Gamma) \rightarrow \text{Div}(\Gamma)$ ，將 f 轉換成圖形上的因子 $\Delta(f)$ 。

定義 4.1.9. 熱帶因子的拉普拉斯轉換 (Laplacian operator)

$\Delta : \mathcal{M}(\Gamma) \rightarrow \text{Div}(\Gamma)$ ， $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$ 透過 Δ 轉換得到一個新的因子：

$$\Delta(f) = \sum_{v \in V(\Gamma)} \Delta_v(f) \cdot v$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_v(f) &= \text{val}(v) \cdot f(v) - \sum_{e=\overrightarrow{wv} \in E_v(\Gamma)} f(w) \\ &= \sum_{e=\overrightarrow{wv} \in E_v(\Gamma)} (f(v) - f(w)) \end{aligned}$$

範例 4.1.10. 考慮圖 4.1 的二次熱帶曲線 Γ 。

若 $f(v_1) = 3, f(v_2) = 1, f(v_3) = 0, f(v_4) = -2$ ，這樣的函數 f 會生成一個因子，如圖 4.2。這個因子經拉普拉斯轉換的係數：

$$\Delta_{v_1}(f) = (3 - 1) = 2$$

$$\Delta_{v_2}(f) = (1 - 3) + (1 - 0) = -1$$

$$\Delta_{v_3}(f) = (0 - 1) + (0 - (-2)) = 1$$

$$\Delta_{v_4}(f) = (-2 - 0) = -2$$

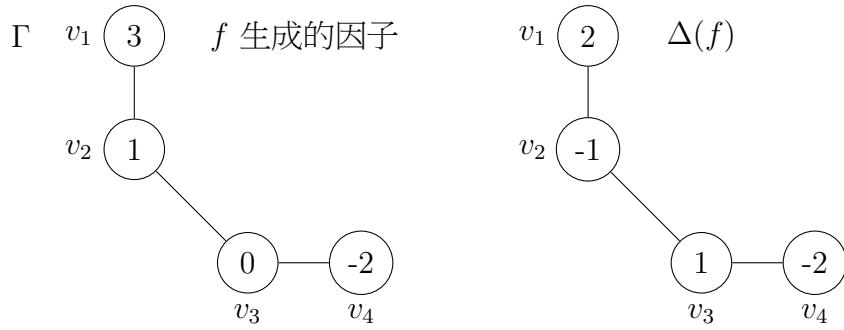


圖 4.2: $\Delta(f) = 2 \cdot v_0 - 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3$

因此轉換後的新因子為

$$\Delta(f) = 2 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 - 2 \cdot v_4.$$

範例 4.1.11. 如圖 4.3。考慮二次熱帶曲線 Γ , $f(v_1) = a, f(v_2) = b, f(v_3) = c, f(v_4) = d$, 這樣的函數 f 經拉普拉斯轉換：

$$\begin{aligned} v_1 \text{的係數 } \Delta_{v_1}(f) &= a - b \\ v_2 \text{的係數 } \Delta_{v_2}(f) &= (b - a) + (b - c) = 2b - a - c \\ v_3 \text{的係數 } \Delta_{v_3}(f) &= (c - b) + (c - d) = 2c - b - d \\ v_4 \text{的係數 } \Delta_{v_4}(f) &= d - c \end{aligned}$$

因此

$$\Delta(f) = (a - b)(v_1) + (2b - a - c)(v_2) + (2c - b - d)(v_3) + (d - c)(v_4)$$

附註 4.1.12. 若我們想要找到一個函數 f 使得 $\Delta(f)$ 其四個頂點係數分別為 $\Delta_{v_1}(f) = a', \Delta_{v_2}(f) = b', \Delta_{v_3}(f) = c', \Delta_{v_4}(f) = d'$, 則利用上例 4.1.11逆推得 $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$ 關係如下：

$$\begin{cases} f(v_1) = a = d + (3a' + 2b' + c') \\ f(v_2) = b = d + (2a' + 2b' + c') \\ f(v_3) = c = d + (a' + b' + c') \\ f(v_4) = d \end{cases}$$

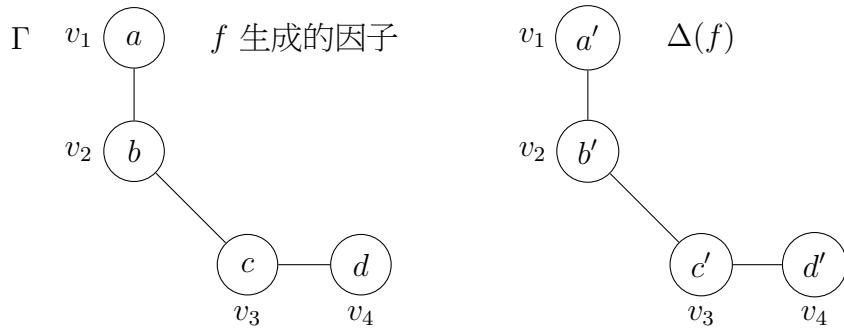


圖 4.3: 係數 a, b, c, d 與 a', b', c', d' 的關係

性質 4.1.13. 若 $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\Gamma)$ ，則 $\Delta(f_1) + \Delta(f_2) = \Delta(f_1 + f_2)$

定理 4.1.14. 若 $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$ ，則 $\deg(\Delta(f)) = 0$

證明.

$$\begin{aligned}\deg(\Delta(f)) &= \sum_{v \in V(\Gamma)} \Delta_v(f) \\ &= \sum_{v \in V(\Gamma)} \sum_{e=\overline{vw} \in E_v(\Gamma)} (f(v) - f(w))\end{aligned}$$

就每個頂點 v_i 而言，相鄰了幾個邊，它的係數 $f(v_i)$ 就會加幾次；而相鄰了幾個邊，就會被減掉幾次。

$$\begin{aligned}\deg(\Delta(f)) &= \sum_{v \in V(\Gamma)} (\text{val}(v)f(v) - \text{val}(v)f(v)) \\ &= \sum_{v \in V(\Gamma)} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

□

仿照前一章，我們定義在熱帶曲線上兩因子的等價關係。

定義 4.1.15. 熱帶因子的等價 (equivalence)

D, E 為熱帶曲線上的兩因子，若存在一個函數 f ，使得 $D - E = \Delta(f)$ ，則我們稱 D, E 兩個因子等價，記作 $D \sim E$ 。

也就是說：若 D, E 兩個因子等價，則一定存在一個函數 f ，使得 $D - E = \Delta(f)$ 。

範例 4.1.16. 考慮圖 4.1的二次熱帶曲線。若有兩因子 D, E 分別為：

$$\begin{aligned} D &= -1v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 2v_4, \\ E &= 1v_1 - 1v_2 + 2v_3 + 0v_4, \\ \Rightarrow E - D &= 2v_1 - 1v_2 + 1v_3 - 2v_4 \end{aligned}$$

由附註 4.1.12知道，存在一個 $f(v_1) = 3, f(v_2) = 1, f(v_3) = 0, f(v_4) = -2$ 的函數 f ，使得 $E - D = \Delta(f)$ 。所以 D 與 E 等價。

性質 4.1.17. D_1, D_2, E_1, E_2 皆為熱帶曲線上的因子。

若 D_1 與 E_1 等價， D_2 與 E_2 等價，則因子 $D_1 + D_2$ 也會與因子 $E_1 + E_2$ 等價。即：

$$D_1 \sim E_1, D_2 \sim E_2 \Rightarrow (D_1 + D_2) \sim (E_1 + E_2)$$

定理 4.1.18. 若熱帶曲線上的兩個因子等價，則這兩個因子的係數和會相等。即：

$$D \sim E \Rightarrow \deg(D) = \deg(E)$$

證明. 因為兩因子 D, E 等價，所以存在一個函數 $f : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ ，使得

$$D - E = \Delta(f) \Rightarrow D = E + \Delta(f)$$

所以

$$\deg(D) = \deg(E + \Delta(f)) = \deg(E) + \deg(\Delta(f))$$

由定理 4.1.14知 $\deg(\Delta(f)) = 0$ ，所以 $\deg(D) = \deg(E)$

□

4.2 搬硬幣遊戲與因子等價的關係

前一章我們介紹過 chip-firing game 的三種玩法。我們將應用 Baker-Norine 的搬硬幣遊戲在離散型熱帶曲線的因子上：在圖形上，可以任選一頂點，搬入硬幣（從每個鄰居身上得到一個硬幣）或搬出硬幣（給每個鄰居各一個硬幣）。

範例 4.2.1. (在熱帶曲線因子上的搬硬幣遊戲)

如圖 4.4，考慮二次熱帶曲線 Γ 上的一個因子

$$D_0 = -1v_1 + 0v_2 - 1v_3 + 3v_4$$

- (i) 在 D_0 上選擇 v_1 ，搬入硬幣。從相鄰的頂點 v_2 上得到一元，則 v_2 少一元，變成因子 D_1 。如圖 4.5。
- (ii) 在 D_1 上選擇 v_2 ，搬入硬幣兩次。從相鄰頂點 v_1, v_3 上各拿得兩元，變成因子 D_2 。如圖 4.6。
- (iii) 在 D_2 上選擇 v_3 ，搬出硬幣。相鄰頂點 v_2, v_4 上各得到一元， v_3 損失兩元，變成因子 D_3 。如圖 4.7。
- (iv) 在 D_3 上選擇 v_4 ，搬出硬幣兩次。相鄰頂點 v_3 得到兩元，變成因子 D_4 。如圖 4.8。

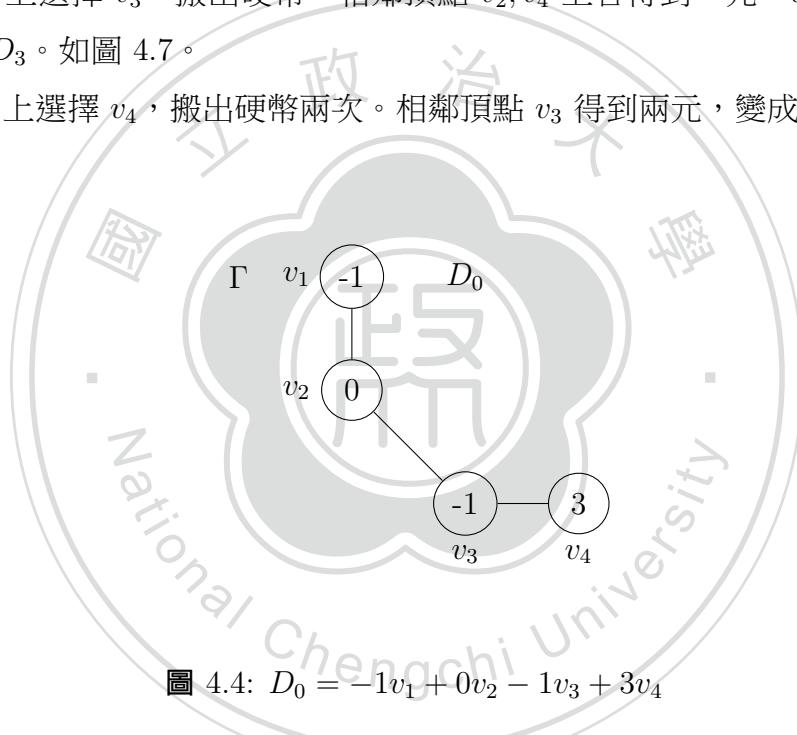


圖 4.4: $D_0 = -1v_1 + 0v_2 - 1v_3 + 3v_4$

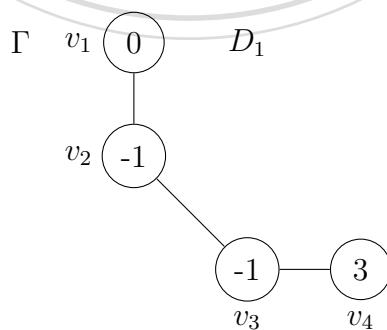


圖 4.5: $D_1 = 0v_1 - 1v_2 - 1v_3 + 3v_4$

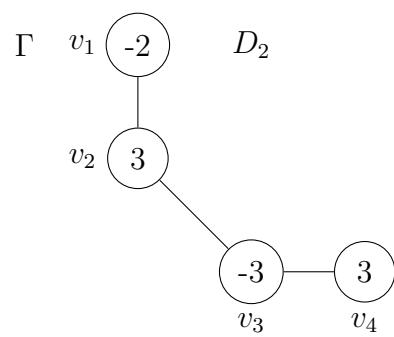


圖 4.6: $D_2 = -2v_1 + 3v_2 - 3v_3 + 3v_4$

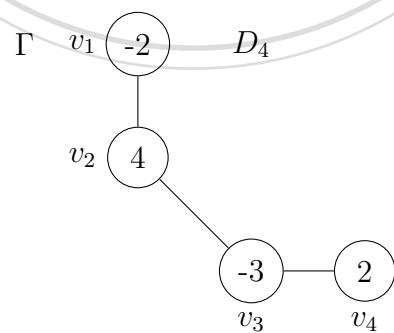
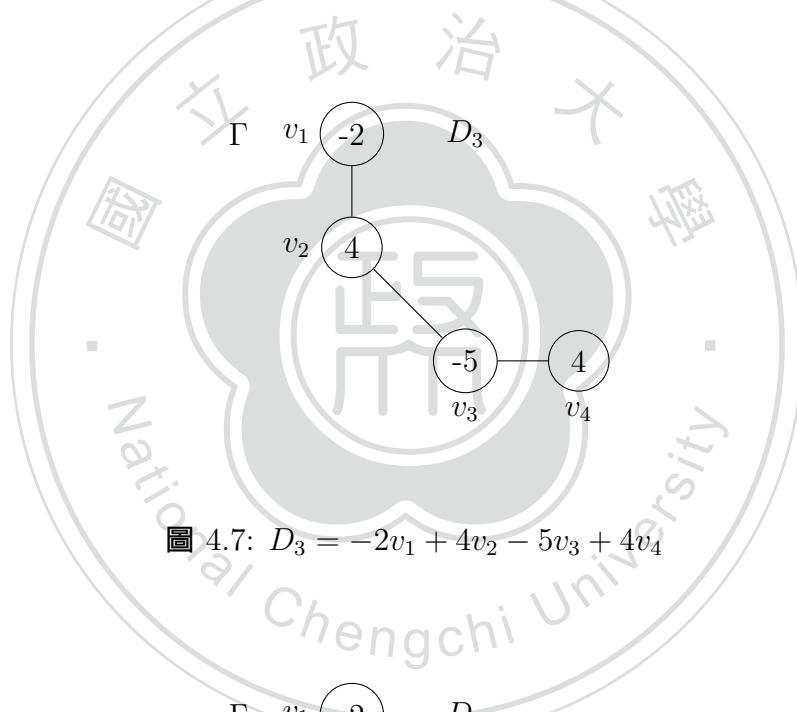


圖 4.8: $D_4 = -2v_1 + 4v_2 - 3v_3 + 2v_4$

範例 4.2.2. 承上例 4.2.1，因子 D_0 經搬硬幣遊戲變成因子 D_4 ，此時

$$D_4 - D_0 = -1v_1 + 4v_2 - 2v_3 - 1v_4$$

由附註 4.1.12，我們取

$$f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = -1, f(v_4) = -2$$

會使得 $\Delta(f) = -1v_1 + 4v_2 - 2v_3 - 1v_4$ 。因此 D_0 與 D_4 等價。

附註 4.2.3. 實際上，函數 f 不唯一。

若 $f(v_1) = a, f(v_2) = b, f(v_3) = c, f(v_4) = d$ ，當 $a = d + 3, b = d + 4, c = d + 1$ 時，都可得到 $\Delta(f) = -1v_1 + 4v_2 - 2v_3 - 1v_4$ 。例如： $f(v_1) = 3, f(v_2) = 4, f(v_3) = 1, f(v_4) = 0$ 。

以下為了簡潔表示搬入或搬出硬幣，我們以“操作 1 次”表示“搬入硬幣一次”，以“操作 -1 次”表示“搬出硬幣一次”。

範例 4.2.4. (若 D, E 兩因子等價， D 是否可經過搬硬幣後變成 E)

二次曲線 Γ 上的兩因子

$$D = -1v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 2v_4,$$

$$E = 1v_1 - 1v_2 + 2v_3 + 0v_4,$$

由範例 4.1.16 知， D, E 等價。我們可嘗試利用搬硬幣遊戲將因子 D 變成因子 E ，操作如下：

對 v_1 操作 3 次，對 v_2 操作 1 次，對 v_3 操作 2 次，對 v_4 操作 -2 次

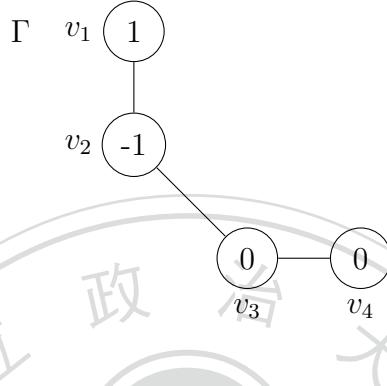
事實上，操作不唯一，也可以是

對 v_1 操作 5 次，對 v_2 操作 3 次，對 v_3 操作 2 次，對 v_4 操作 0 次

(我們將於範例 4.2.8 說明如何找到這樣的動作。)

以上兩個例子，其實不是偶然。接下來我們用另一個方式來看搬硬幣遊戲與等價之間的關係。

在二次熱帶曲線 Γ 上搬硬幣，以 v_1 為中心，操作 1 次 (搬入硬幣一次)，其硬幣流動情形如圖。



是否存在 f_1 使得 $\Delta(f_1) = 1v_1 - 1v_2 + 0v_3 + 0v_4$?

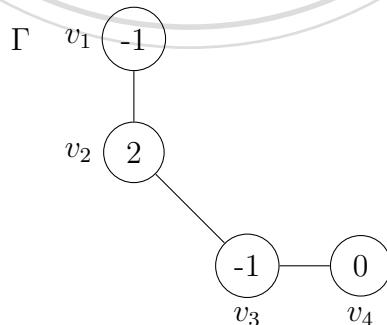
利用附註 4.1.12 的代數運算，可以取 $f_1(v_1) = 1, f_1(v_2) = 0, f_1(v_3) = 0, f_1(v_4) = 0$ 的函數 f_1 ，滿足所求。

附註 4.2.5. 事實上， f 不唯一。

若 $f(v_1) = a, f(v_2) = b, f(v_3) = c, f(v_4) = d$ ，當 $a = d + 1, b = c = d$ 時，都可得到 $\Delta(f_1) = 1v_1 - 1v_2 + 0v_3 + 0v_4$ 。

例如： $f(v_1) = 0, f(v_2) = -1, f(v_3) = -1, f(v_4) = -1$ 。

同理，以 v_2 為中心，操作 1 次 (搬入硬幣一次)，其硬幣流動情形如圖。



利用附註 4.1.12，可以取 $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0$ ，即找到一個 $f_2(v_1) = 0, f_2(v_2) = 1, f_2(v_3) = 0, f_2(v_4) = 0$ 的函數 f_2 ，使得 $\Delta(f_2) = -1v_1 + 2v_2 - 1v_3 + 0v_4$ 。

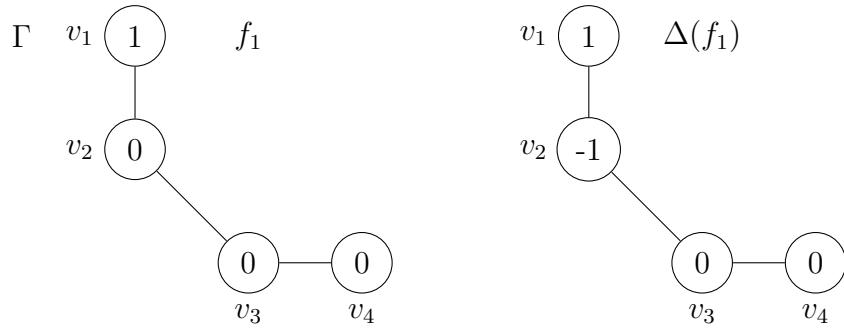


圖 4.9: f_1 與 $\Delta(f_1) = 1v_1 - 1v_2 + 0v_3 + 0v_4$

附註 4.2.6. 事實上， f 不唯一。 a, b, c, d 滿足 $a = d, b = d + 1, c = d$ 時，
 $\Delta(f_2) = -1v_1 + 2v_2 - 1v_3 + 0v_4$
 例如： $f_2(v_1) = -1, f_2(v_2) = 0, f_2(v_3) = -1, f_2(v_4) = -1$ 。

由上述方法，我們可取下面四個函數

$$f_1(v) = \begin{cases} 1, & v = v_1 \\ 0, & v \neq v_1 \end{cases}$$

$$f_2(v) = \begin{cases} 1, & v = v_2 \\ 0, & v \neq v_2 \end{cases}$$

$$f_3(v) = \begin{cases} 1, & v = v_3 \\ 0, & v \neq v_3 \end{cases}$$

$$f_4(v) = \begin{cases} 1, & v = v_4 \\ 0, & v \neq v_4 \end{cases}$$

當 $i = 1, 2, 3, 4$ 時， f_i 與因子 $\Delta(f_i)$ 的對應如圖 4.9至圖 4.12。

f_i 這個函數代表意義的是“以 v_i 為中心，操作 1 次 (搬入硬幣一次)”；以 $-f_i$ 表示“以 v_i 為中心，操作 -1 次 (搬出硬幣一次)”。搬硬幣的每次操作就是 $\pm f_i$ ，多次操作則是 f_1, f_2, f_3, f_4 的線性組合，令為 f ，而硬幣流向情形，則是 $\Delta(f_1), \Delta(f_2), \Delta(f_3), \Delta(f_4)$ 的線性組合，即 $\Delta(f)$ 。原本因子 D ，經搬入或搬出硬幣，係數改變了，後來的狀態即因子 $E = D + \Delta(f)$ 。

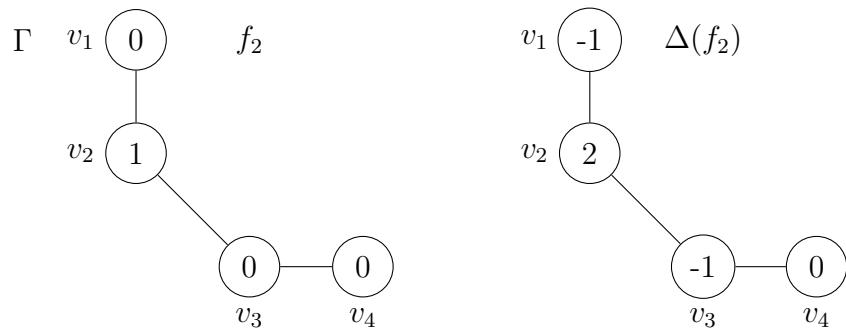


圖 4.10: f_2 與 $\Delta(f_2) = -1v_1 + 2v_2 - 1v_3 + 0v_4$

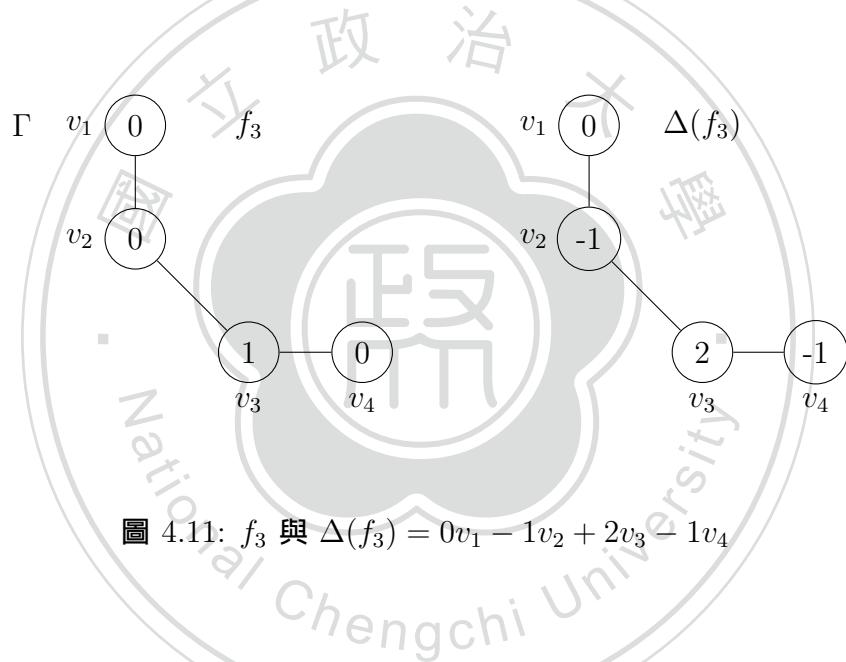


圖 4.11: f_3 與 $\Delta(f_3) = 0v_1 - 1v_2 + 2v_3 - 1v_4$

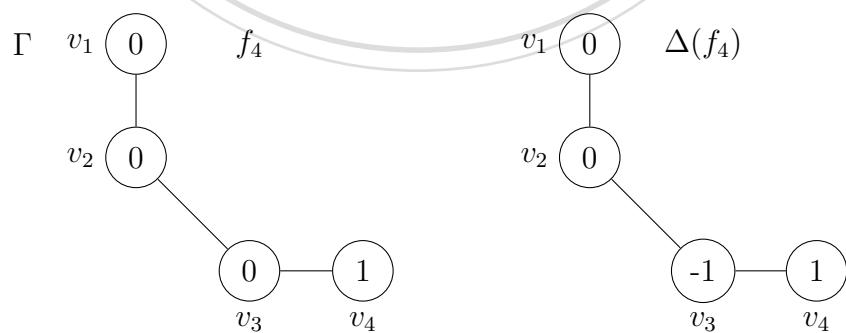


圖 4.12: f_4 與 $\Delta(f_4) = 0v_1 + 0v_2 - 1v_3 + 1v_4$

範例 4.2.7. 考慮二次熱帶曲線 Γ ， $D = 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 + 1v_4$
進行以下操作：

以 v_1 為中心，操作 -2 次 (搬出硬幣 2 次)，
以 v_2 為中心，操作 -1 次 (搬出硬幣 1 次)，
以 v_3 為中心，操作 3 次 (搬入硬幣 3 次)，
以 v_4 為中心，操作 3 次 (搬入硬幣 3 次)。

得到 $E = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 1v_4$ 。

硬幣流動情形 $E - D$ 為

$$\Delta(f) = -2 \cdot \Delta(f_1) - 1 \cdot \Delta(f_2) + 3 \cdot \Delta(f_3) + 3 \cdot \Delta(f_4),$$

其中

$$f = -2f_1 - f_2 + 3f_3 + 3f_4.$$

所以 D 與 E 等價。

反之，兩個等價的因子 D, E 間，相差 $\Delta(f)$ ，可利用附註 4.1.12，找到函數 f ，其中 f 是 f_1, f_2, f_3, f_4 的線性組合，便可知道如何在各頂點上利用搬入或搬出硬幣幾次，因子 D 可變成因子 E 。

範例 4.2.8. (續範例 4.2.4)

因為存在一個滿足 $f(v_1) = 3, f(v_2) = 1, f(v_3) = 0, f(v_4) = -2$ 的函數 f 使得 $E - D = \Delta(f) = 2v_1 - 1v_2 + 1v_3 - 2v_4$ ，所以 D 與 E 等價。由函數 f 可知，我們對因子 D 進行以下操作便可得到因子 E ：

以 v_1 為中心操作 3 次，以 v_2 為中心操作 1 次，
以 v_3 為中心操作 0 次，以 v_4 為中心操作 -2 次

事實上，方法不唯一。利用附註 4.1.12也可找其他函數 f 使得 $\Delta(f) = 2v_1 - 1v_2 + 1v_3 - 2v_4$ ，例如： $f(v_1) = 5, f(v_2) = 3, f(v_3) = 2, f(v_4) = 0$ 。此時的操作為

以 v_1 為中心操作 5 次，以 v_2 為中心操作 4 次，
以 v_3 為中心操作 2 次，以 v_4 為中心操作 0 次。

範例 4.2.9. 考慮二次熱帶曲線的兩因子

$$\begin{aligned} D &= 1v_1 - 1v_2 + 0v_3 + 1v_4 \\ E &= 2v_1 + 0v_2 - 3v_3 + 2v_4 \\ \Rightarrow E - D &= 1v_1 + 1v_2 - 3v_3 + 1v_4 \end{aligned}$$

因為存在 $f(v_1) = 3, f(v_2) = 2, f(v_3) = 0, f(v_4) = 1$ 的函數 f ，其 $\Delta(f) = 1v_1 + 1v_2 - 3v_3 + 1v_4$ ，所以 D 與 E 等價，且 D 可經由搬硬幣變成 E ：

以 v_1 為中心操作 3 次，以 v_2 為中心操作 2 次，
以 v_3 為中心操作 0 次，以 v_4 為中心操作 1 次。

由上面例子的討論過程，我們有下面的定理。

定理 4.2.10. 若 D, E 為熱帶曲線 Γ 上的離散型熱帶因子，而 \bar{D}, \bar{E} 分別代表因子 D, E 在搬硬幣遊戲時的狀態，因子 D 與 E 等價，若且為若 \bar{D} 可經搬硬幣遊戲變成 \bar{E} 。

證明. 我們可以給一個函數來代表搬硬幣的每次操作：

對頂點 v_i 操作一次 (即以 v_i 為中心，從相鄰頂點各得係數 1)，用下列函數表之：

$$f_i(v) = \begin{cases} 1, & v = v_i \\ 0, & v \neq v_i \end{cases}$$

而這個函數 f_i 生成的因子，經拉普拉斯轉換後的 $\Delta(f_i)$ ，即為搬硬幣遊戲中頂點係數流動的情形。假設圖形中有 n 個頂點 v_1, v_2, \dots, v_n ，在各頂點上進行搬硬幣的多次操作，其代表的函數即為 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ 的線性組合，而頂點係數流動的情形即為 $\Delta(f_1), \Delta(f_2), \Delta(f_3), \dots, \Delta(f_n)$ 的線性組合，令為 $\Delta(f)$ 。因此多次操作後的因子 $E = D + \Delta(f)$ ，所以兩因子 D 與 E 會等價。

反之，若兩因子 D 與 E 等價，則存在函數 f 使得 $E - D = \Delta(f)$ 。也就是 $E = D + \Delta(f)$ ，其中 $\Delta(f)$ 可找到是由怎樣的函數 f 轉換來的因子，而函數 f 會是 f_i 的線性組合，由 f_i 的係數便可知道如何在各頂點上進行搬硬幣遊戲，使得因子 D 變成因子 E 。

□



第五章 應用：秩的計算

5.1 利用搬硬幣遊戲找因子的秩

定義 5.1.1. 因子的線性系統 (linear system)

對於熱帶曲線 Γ 的因子 D ，我們將所有與 D 等價的有效因子（非負因子），蒐集起來的集合，稱為因子 D 的“線性系統”，記作 $|D|$ 。即：

$$|D| = \{E \in \text{Div}(\Gamma) | E \geq 0, E \sim D\}$$

若 $|D|$ 不是空集合，則可利用搬硬幣遊戲，得到係數為非負整數的有效因子 E 。因子 D 會有多少有效因子呢？我們用維度來表示，也就是因子 $|D|$ 的維度 (the dimension of the linear system $|D|$) 有多大呢？下面定義因子的維度，也稱為因子的秩。

定義 5.1.2. 因子的秩 (rank)

對於熱帶曲線 Γ 的因子 D ，定義因子 D 的“秩” $\text{rank}(D)$ （或縮寫成 $r(D)$ ）如下：

- 若 $|D|$ 是空集合，則 $r(D) = -1$ 。
- 若 $|D|$ 不是空集合，
則 $r(D) = \max\{n | \text{對於所有次數為 } n \text{ 的有效因子 } E, \text{都使得 } |D - E| \neq \phi\}$
或 $r(D) = \min\{m - 1 | \text{存在一個次數為 } m \text{ 的有效因子 } E, \text{使得 } |D - E| = \phi\}$

範例 5.1.3. (若 $\deg(D) < 0$ ，則 $|D| = \phi$)

如圖，一個二次熱帶曲線 Γ_1 上的因子

$$D = -1v_1 + 2v_2 - 3v_3 - 1v_4$$

此時 $\deg(D) = -3 < 0$ 。由定理 4.1.18 知兩個等價因子的係數和會相同，而有效因子的係數和必大於等於 0，所以 D 不會有等價的有效因子， $|D| = \phi$ ，則 $r(D) = -1$ 。



範例 5.1.4. 一次熱帶曲線上的一個因子 $D = 5v_0$ ，欲找它的 $r(D)$ 。考慮下面四個非負因子 E_1, E_2, E_3, E_4

$$\begin{aligned} E_1 &= 4v_0 \Rightarrow D - E_1 = 1 \cdot v_0 \Rightarrow |D - E_1| \neq \phi, \\ E_2 &= 5v_0 \Rightarrow D - E_2 = 0 \cdot v_0 \Rightarrow |D - E_2| \neq \phi, \\ E_3 &= 6v_0 \Rightarrow D - E_3 = -1 \cdot v_0 \Rightarrow |D - E_3| = \phi, \\ E_4 &= 7v_0 \Rightarrow D - E_4 = -2 \cdot v_0 \Rightarrow |D - E_4| = \phi, \end{aligned}$$

所以 $r(D) = 5$

範例 5.1.5. (利用搬硬幣遊戲找等價因子)

如圖 5.2，一個二次曲線 Γ_2 上的因子 $D = 0v_1 + 1v_2 + 2v_3 - 2v_4$ ，其 $\deg(D) = 1$ 。

- 考慮 $\deg(E) = 0$ 的有效因子 $E = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$ ，使得 $D - E = D$ 。因為 D 可經搬硬幣遊戲得到等價的有效因子。例如：對 v_3 操作 -1 次，再對 v_4 操作 2 次。因此 $r(D) \geq 0$ 。

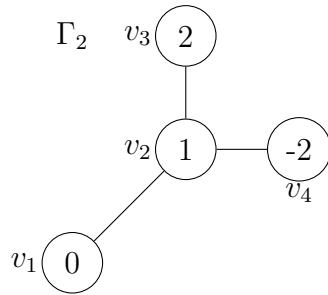


圖 5.2: 二次曲線 Γ_2 上的一個因子 $D = 0v_1 + 1v_2 + 2v_3 - 2v_4$

- 考慮 $\deg(E) = 1$ 的有效因子 E ，有四種可能

$$E_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$$

$$E_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4$$

$$E_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4$$

$$E_4 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 1v_4$$

而 $D - E_1, D - E_2, D - E_3, D - E_4$ 的因子如圖 5.3 到 圖 5.6。於是得知，對所有次數為 1 的有效因子 E ，都使得 $|D - E| \neq \phi$ ，因此 $r(D) \geq 1$ 。

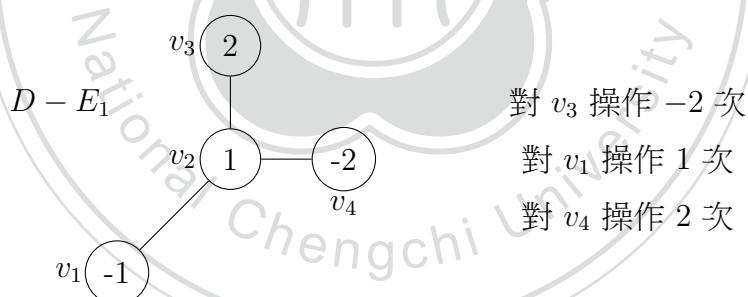


圖 5.3: $D - E_1$ 可經搬硬幣得到等價的有效因子

- 若 $\deg(E) = 2$ ，此時 $\deg(D - E) = \deg(D) - \deg(E) = 1 - 2 = -1$ ，因為 $\deg(D - E) < 0$ ，所以 $|D - E| = \phi$ 。

因此 $r(D) = 1$ 。

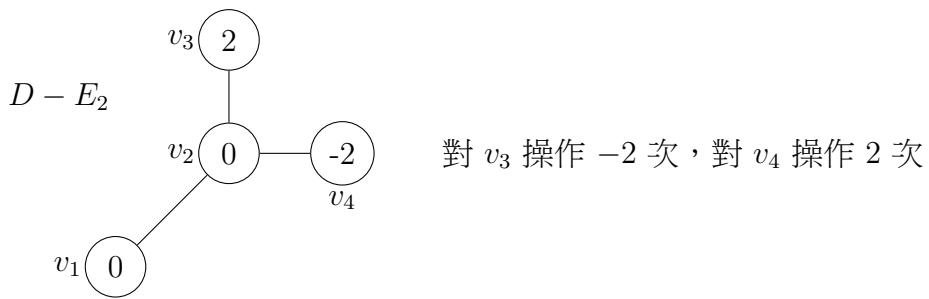


圖 5.4: $D - E_2$ 可經搬硬幣得到等價的有效因子



圖 5.5: $D - E_3$ 可經搬硬幣得到等價的有效因子

5.2 利用黎曼 - 羅赫理論計算因子的秩

“黎曼 - 羅赫理論”是一個可以快速計算出秩的公式，本小節將利用此公式來驗證上一小節利用搬硬幣遊戲找出來的秩。在介紹這個理論前，必須先認識圖形上的幾個定義。

首先利用圖形本身的結構來定義一個因子：典型因子。

定義 5.2.1. 典型因子 (canononical divisor)

熱帶曲線 Γ 上，我們利用頂點所連接的邊數來定義一個因子 K ，

$$K = \sum_{v \in V(\Gamma)} (\text{val}(v) - 2) \cdot v,$$

稱因子 K 為典型因子。

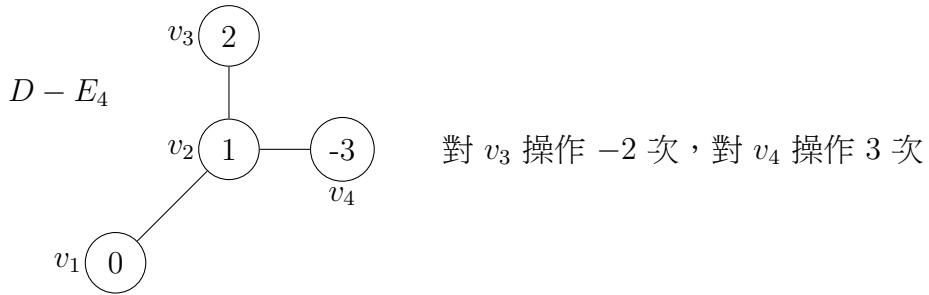


圖 5.6: $D - E_4$ 可經搬硬幣得到等價的有效因子

範例 5.2.2. (一個二次熱帶曲線的典型因子)

如圖 5.7，考慮二次熱帶曲線 Γ_1 ，由頂點連接邊數所決定的典型因子

$$\begin{aligned} K &= (\text{val}(v_1) - 2) \cdot v_1 + (\text{val}(v_2) - 2) \cdot v_2 + (\text{val}(v_3) - 2) \cdot v_3 + (\text{val}(v_4) - 2) \cdot v_4 \\ &= -1v_1 + 0v_2 + 0v_3 - 1v_4 \end{aligned}$$

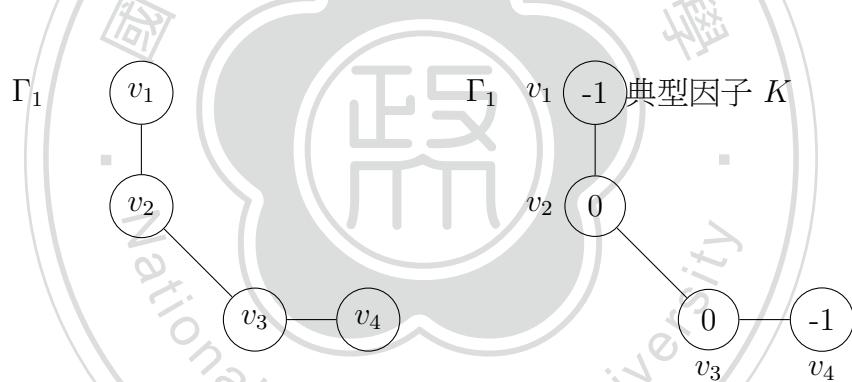


圖 5.7: 热带曲线 Γ_1 的典型因子 K

定義 5.2.3. 虧格 (genus)

热帶曲線 Γ 上的虧格為“邊數 - 頂點數 +1”，並以符號 g 表示，即：

$$g = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1$$

定理 5.2.4. 热帶黎曼 - 羅赫理論 (Tropical Riemann-Roch Theory)

热帶曲線 Γ ，若其虧格為 g ，且 K 為 Γ 的典型因子，考慮 Γ 上的一個因子 D ，則

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

範例 5.2.5. (承範例 5.1.5)

如圖 5.2，二次曲線 Γ_2 的一個因子

$$D = 0v_1 + 1v_2 + 2v_3 - 2v_4.$$

且 Γ_2 的典型因子

$$K = -1v_1 + 1v_2 - 1v_3 - 1v_4,$$

此時

$$K - D = -1v_1 + 0v_2 - 3v_3 + 1v_4,$$

因為 $\deg(K - D) < 0$ ，所以 $r(K - D) = -1$ 。

又 Γ_2 的虧格 $g = 0$ ，由黎曼 - 羅赫定理

$$\begin{aligned} r(D) &= r(K - D) + \deg(D) + 1 - g \\ &= -1 + 1 + 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

上例，我們用黎曼 - 羅赫定理驗證了前一小節用搬硬幣遊戲所找出來的秩。

第六章 結論

本篇論文是在熱帶曲線上的離散型因子上進行搬硬幣遊戲，並討論遊戲與等價因子之間的關係。其實也可以繼續去討論，如何在連續型的因子上進行搬硬幣遊戲，其中連續型因子指的是：在圖上“任意”取“有限”個點 p_i ，每個點 p_i 都賦予整係數 c_i 後，作線性組合所產生的因子

$$D = \sum c_i \cdot p_i \text{ 其中 } c_i \in \mathbb{Z}, p_i \in \Gamma$$

例如：一個二次熱帶曲線 Γ ，如圖 6.1。

在三個邊上分別取 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 共五個點，再個別賦予整係數後，形成一個

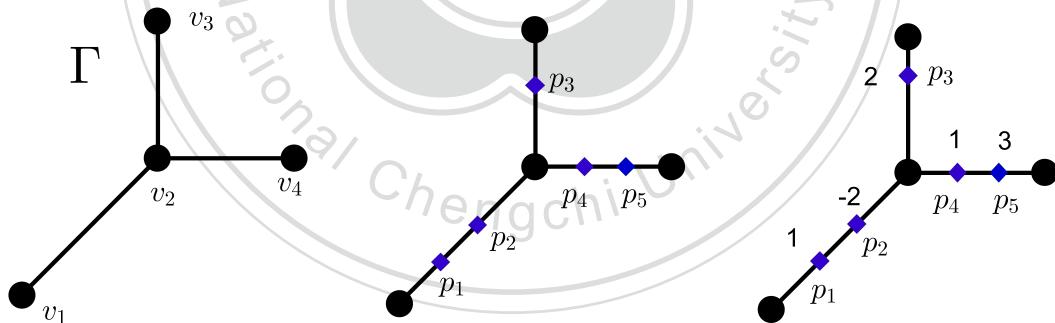


圖 6.1: 二次熱帶曲線 Γ 上的連續型因子

連續型因子

$$D = 1p_1 - 2p_2 + 2p_3 + 1p_4 + 3p_5.$$

在 [5] [6] 的文章裡有仔細介紹連續型因子的性質、等價關係，以及應用黎曼 - 羅赫定理在連續型因子上。其實也可以繼續研究在連續型因子上的 chip-firing

game 是如何進行，並且與等價因子的關係 [6]。我們可以發現很多在離散型因子的性質仍然在連續型因子上適用。



參 考 文 獻

- [1] Matthew Baker. Specialization of linear systems from curves to graphs. *Algebra Number Theory*, 2(6):613–653, 2008. With an appendix by Brian Conrad.
- [2] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.
- [3] N. L. Biggs. Chip-firing and the critical group of a graph. *J. Algebraic Combin.*, 9(1):25–45, 1999.
- [4] Anders Björner, László Lovász, and Peter W. Shor. Chip-firing games on graphs. *European J. Combin.*, 12(4):283–291, 1991.
- [5] Andreas Gathmann and Michael Kerber. A Riemann-Roch theorem in tropical geometry. *Math. Z.*, 259(1):217–230, 2008.
- [6] Christian Haase, Gregg Musiker, and Josephine Yu. Linear systems on tropical curves. *Math. Z.*, 270(3-4):1111–1140, 2012.
- [7] Shinsuke Odagiri. Tropical algebraic geometry. *Hokkaido Math. J.*, 38(4):771–795, 2009.
- [8] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [9] David Speyer and Bernd Sturmfels. Tropical mathematics. *Math. Mag.*, 82(3):163–173, 2009.
- [10] Yen-Lung Tsai. Working with tropical meromorphic functions of one variable. *Taiwanese J. Math.*, 16(2):691–712, 2012.

