Journal of the Chinese
Statistical Association
Vol. 49, (2011) 60–81

三因子 BGM 模型下匯率連動固定期利率交換商品之評價

廖四郎　　楊繡碧　　蔡宏彬

國立政治大學金融所

摘　要

匯率連動固定期利率交換 (Quanto Constant Maturity Swaps, 以下簡稱 Quanto CMS) 商品可做爲管理國外利率交換利差風險的輔助工具。以往對 Quanto CMS 商品的評價通常是利用蒙地卡羅模擬法 (Monte Carlo Simulation) 來模擬進行, 但這樣的評價方式通常較耗時。本文應用國外遠期交換利率近似於國外遠期 LIBOR 利率之線性組合的特徵來設定 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態過程。基於國外遠期交換利率的近似動態, 本文推導出三因子 BGM 模型下評價 Quanto CMS 利差選擇權 (Quanto Constant Maturity Swaps Spread Option) 及 Quanto CMS 輪棘選擇權 (Quanto Constant Maturity Swaps Ratchet Option) 的近似解析公式。數值分析的結果顯示上述兩種商品在不同履約價下近似解析公式解法對應蒙地卡羅模擬法的相對誤差都很小且近似解析公式解法之計算時間遠少於蒙地卡羅模擬法。

關鍵詞: 匯率連動固定期利率交換,Quanto CMS 利差選擇權,Quanto CMS 輪棘選擇權, 三因子 BGM 模型, 蒙地卡羅模擬法。

JEL classification: G13

1. 導論

跨國企業經常透過不同的國內外管道募集資金,也因此涉入不同幣別的匯率及利率風險。由於匯率及利率環境經常波動變化,財務經理人通常將規避匯率及利率風險列爲很重要的工作,同時也面臨越來越複雜的避險挑戰, 因應這樣的需求, 本文將探討匯率連動利率交換商品之評價。

目前市面上已有一些匯率連動利率產品, 如匯率連動利率上限型選擇權 (Quanto Caps Options)、匯率連動利率下限型選擇權 (Quanto Floors Options) 及匯率連動利率交換型選擇權 (Quanto Swaptions)。本文將考慮隱含在風險中立測度內的匯率風險因素後, 將討論 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棟選擇權兩種衍生性商品之定價。

實務上在評價利率衍生性金融商品時, 通常假設標的之遠期利率是無飄浮項的對數常態隨機過程。但在利率衍生性金融商品有效期内所有的遠期利率是有相關的, 所以這些遠期利率不可能同時在同樣的機率平賭測度下服從對數常態分配。Brace, Gatarek and Musiela (1997) 提出的 LIBOR 市場模型 (又稱 BGM 模型) 證明每一個遠期利率在它的遠期機率測度下服從對數常態分配。使用 BGM 模型的優點是它可產生一組在市場上觀察得到且其波動度也可連結至可交易契約的遠期 LIBOR 利率。在此設定下,Musiela and Rutkowski (1997) 提供了近似 Black 利率上限型之定價公式。Jamshidian (1997) 推導出利率交換市場模型下類似 Black 利率交換選擇權之定價公式且證明以年金現值 (Present Value of Basic Point, 以下簡稱 PVBP) 爲計價單位的遠期交換利率過程是機率平賭過程 (Martingales)。但在利率交換市場模型下, 雖然每一期遠期交換利率的波動都可被應用, 但遠期交換利率的相關係數矩陣無法求取且不能找出配適的方法。Rebonato (2004) 提供 BGM 模型下利率交換選擇權波動度的近似公式且建立 BGM 模型與利率交換市場模型之連結。其共變異矩陣是由利率交換選擇權的市場報價來配適。所以 BGM 模型是唯一可融合利率交換市場模型整體特性的利率模型。一個良好的財務模型應具備兩種特點, 一是其狀態變數可由市場資料觀察。另外, 模型内的參數可透過財務工具輕易地計算。基於上述各模型的特質,BGM 模型是最完整的市場模型。Brigo (2006) 以主成份分析的概念表示如果使用三因子架構已足夠解釋 90% 以上之經濟體衝擊, 所以本文將據此評價三因子 BGM 模型下 Quanto CMS 商品。

Quanto CMS 商品要處理的利率是不同年期之交換利率利差, 所以必須考慮以國外遠期利率之機率測度來評價。其評價模型與 Margrabe (1978) 互換選擇權的評價模型相似。國外遠期利率因要以本國貨幣計價, 所以其動態會產生凸性調整項 (Convexity Adjustment), 該凸性調整項是由匯率及國外遠期利率的共變異數所決定。本文是參考 Hunt and Pelssev (1998) 及 Liao, Lin and Tsai (2010) 提出的構想來推導 Quanto CMS 商品之評價公式。傳統定價

Quanto CMS 商品的方法是先模擬交換利率再將其轉換成遠期 LIBOR 利率, 但使用此一模擬方式很費時且較無效率。Liao, Lin and Tsai (2010) 在他們的論文中應用遠期交換利率近似於遠期 LIBOR 利率線性組合的特徵來描繪 BGM 模型下遠期交換利率的近似動態過程。他們假設二遠期交換利率及其布朗運動之瞬間相關係數等於 1 以簡化其模型設定並推導固定期利率交換商品之定價公式。本文考慮隱含在風險中立測度內的匯率風險因素後, 將上述 Liao, Lin and Tsai (2010) 之概念延伸應用於三因子 BGM 模型下之 Quanto CMS 之商品並放寬遠期交換利率及其布朗運動之瞬間相關係數設定以保留瞬間相關係數變化之彈性。

本文在第二節中將介紹在 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態過程, 同時也會介紹 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權的契約及到期支付公式。在第三節中將推導 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權的無套利近似公式解。在第四節中將介紹校準程序並計算近似公式解法與蒙地卡羅模擬法的相對誤差及比較兩種方法之執行效率。最後, 第五節是結論。

2. 模型及契約

2.1 模型

假設存在一機率測度空間 $(\Omega, F, \mathbb{Q})$, 此處 Ω 表示狀態空間, F 代表在 Ω 上的過濾, 而 $\mathbb{Q}$ 是在 (Ω, F) 上的目標機率測度。令評價時點爲 t, 在無套利環境且在 $[T_{k-1}, T_k]$ 期間內無風險借貸下國外遠期 LIBOR 利率 $L_k^f(t)$ 在時間 t 之值可以下列公式表示:

$$L_k^f(t) = \frac{P^f(t, T_{k-1}) - P^f(t, T_k)}{\delta_{T_k} P^f(t, T_k)}, \tag{1}$$

此處 $P^f(t, T_k)$ 是到期日爲時間 T_k 的國外零息債券在時間 t 的價格。δ_{T_k} 是 $[T_{k-1}, T_k]$ 涵蓋的期間。

令 $\mathbb{Q}^{T_0}$ 是在 (Ω, F) 下的 T_0 -遠期測度。在 BGM 模型下,Brigo and Mercurio (2006) 利用測度轉換的技術表達在 $\mathbb{Q}^{T_0}$ 遠期測度下且在 $[T_{k-1}, T_k]$ 期間內無風險借貸下國內遠期 LIBOR 利率 $L_k^d(t)$ 的動態過程如下:

$$dL_k^d(t) = L_k^d(t)\gamma_k^d(t) \cdot \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\delta_{T_j} L_j^d(t)\gamma_j^d(t)}{1 + \delta_{T_j} L_j^d(t)} dt + d\tilde{W}^{T_0}(t)\right], k > 0,\ t \le T_0 \tag{2}$$

此處 $\tilde{W}^{T_0}(t)$ 是定義在 $(\Omega, F, \mathbb{Q}^{T_0})$ 測度空間下的 3 維布朗運動,3 維布朗運動是指布朗運動 $\tilde{W}^{T_0}(t)$ 是 一 3 維向量過程且 $\tilde{W}^{T_0}(t) = \left(\tilde{W}_1^{T_0}(t), \tilde{W}_2^{T_0}(t), \tilde{W}_3^{T_0}(t)\right)$。$\gamma_k^d(t)$ 是國內遠期

LIBOR 利率 L_k^d 動態過程的擴散項, 爲符合布朗運動的設定, $\gamma_k^d(t)$ 亦設定是 3 維向量。點 "·" 代表在 $\mathbb{R}^3$ 上的歐式內積。

國外遠期利率因要以本國貨幣計價, 所以其動態會產生凸性調整項 (Convexity Adjustment), 該凸性調整項是由匯率及國外遠期利率的共變異數所決定。本文參考 Hunt and Pelsser (1998) 的做法推導出在國內的遠期測度下國外遠期 LIBOR 利率 $L_k^f(t)$ 的動態過程如下:

$$dL_k^f(t) = L_k^f(t)\gamma_k^f(t)\cdot\left[-\rho_{XF}\sigma_X dt + \sum_{j=1}^{k}\frac{\delta_{T_j}L_j^f(t)\gamma_j^f(t)}{1+\delta_{T_j}L_j^f(t)}dt + d\tilde{W}^{T_0}(t)\right] \tag{3}$$

此處 $\gamma_k^f(t)$ 是國外遠期 LIBOR 利率 $L_k^f(t)$ 動態過程的擴散項。爲符合布朗運動的設定, $\gamma_k^f(t)$ 亦設定是 3 維向量。ρ_{XF} 表示國外遠期利率 $L_k^f(t)$ 與遠期匯率 F_X 的相關係數。σ_X 是遠期匯率 F_X 的標準差。(3) 式的推導證明請參考附錄1。

令評價時點爲 t, 在無套利環境下, 國外遠期交換利率可以下列公式表達:

$$S_{T_0,T_n}^f(t) = \frac{P^f(t,T_0)-P^f(t,T_n)}{PVBT^f(t)}, \tag{4}$$

此處 $S_{T_0,T_n}^f(t)$ 是在時間 t 的國外遠期交換利率值, 其對應的國外遠期起始利率交換支付時點是固定時間間隔, 其中時間間隔結構是 $\mathbb{T}\triangleq T_0,T_1,\ldots,T_n$ 且 $t\le T_0<T_1<\ldots<T_n$, 以及 $PVBT^f(t)=\Sigma_{k=1}^n\delta_{T_k}P^f(t,T_k)$ 是在時間 t 的國外年金現值。

由 (1) 式及 (4) 式可推導出國外遠期交換利率 $S_{T_0,T_n}^f(t)$ 及國外遠期 LIBOR 利率 $L_k^f(t)$ 的關係式如下:

$$S_{T_0,T_n}^f(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_{T_k}P^f(t,T_k)}{PVBT^f(t)}L_k^f(t) = \sum_{k=1}^{n}w_{0,n}^{k,f}(t)L_k^f(t),\ k=1,\ldots,n, \tag{5}$$

此處 $w_{0,n}^{k,f}(t)$ 是權數且 $w_{0,n}^{k,f}(t)$ 可以下式表示:

$$w_{0,n}^{k,f}(t) = \frac{\delta_{T_k}P^f(t,T_k)}{PVBT^f(t)},\ k=1,\ldots,n.$$

由公式 (5) 可知國外遠期交換利率可由國外遠期 LIBOR 利率經加權平均後組成。再應用 Ito's 定理可推導出國外遠期交換利率的動態過程如下:

$$\frac{dS_{0,n}^f(t)}{S_{0,n}^f(t)} = \frac{\Sigma_{k=1}^n w_{0,n}^{k,f}(t)dL_k^f(t)}{S_{0,n}^f(t)}. \tag{6}$$

將 (3) 式代入 (6) 式可得

$$\frac{dS_{0,n}^f(t)}{S_{0,n}^f(t)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{w_{0,n}^{k,f}(t)L_k^f(t)\gamma_k^f(t)}{S_{0,n}^f(t)}\cdot\left[-\rho_{XF}\sigma_X dt + \sum_{j=1}^{k}\frac{\delta_{T_j}L_j^f(t)\gamma_j^f(t)}{1+\delta_{T_j}L_j^f(t)}dt + d\tilde{W}^{T_0}(t)\right]. \tag{7}$$

實證研究顯示, 權數的變動相對比遠期 LIBOR 利率的變動要小很多 (Brigo and Mercurio, 2006)。所以可以將未來的權數凍結於起始值, 亦即使 $w_{0,n}^{k,f}(t) \approx w_{0,n}^{k,f}(0)$, 此設定將有助於由遠期 LIBOR 利率的絕對波動度估計遠期交換利率的絕對波動度 (Rebonato,2004)。爲獲取 Black-Scholes 類型的過程 (Hunter,2001), 本文進一步凍結遠期 LIBOR 利率於起始值, 亦即使 $L_k^f(t) \approx L_k^f(0)$。Liao, Lin and Tsai (2010) 亦應用此概念推導遠期交換利率的動態過程。經上述設定後,(7) 式的國外遠期交換利率可改寫如下:

$$\begin{aligned}\frac{dS_{0,n}^f(t)}{S_{0,n}^f(t)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{w_{0,n}^{k,f}(t) L_k^f(0)\gamma_k^f(t)}{S_{0,n}^f(t)} \cdot \left[-\rho_{XF}\sigma_X dt + \sum_{j=1}^{k} \frac{\delta_{T_j} L_j^f(0)\gamma_j^f(t)}{1+\delta_{T_j} L_j^f(0)} dt + d\tilde{W}^{T_0}(t)\right] \\ &= \mu_{0,n}^{f,0}(t)dt + \sigma_{0,n}^{f,0}(t) \cdot d\tilde{W}^{T_0}(t). \end{aligned} \tag{8}$$

此處 $\mu_{0,n}^{f,0}(t)$ 是國外遠期交換利率近似動態過程之飄浮項 (瞬間變量期望值)。$\sigma_{0,n}^{f,0}(t)$ 是國外遠期交換利率近似動態過程之擴散項 (瞬間變量標準差)。如此設定後 (8) 式的飄浮項及擴散項將是非隨機的且皆由 γ 決定。

綜上所述, 再參考 Liao, Lin and Tsai (2010) 提出的模型設定, 並定義新的權數 $w_{0,n}^{k,f}(t)^* = \frac{w_{0,n}^{k,f}(0)L_k^f(0)}{S_{0,n}^f(t)}$, 並將其凍結於起始值後得

$$w_{0,n}^{k,f}(0)^* = \frac{w_{0,n}^{k,f}(0)L_k^f(0)}{S_{0,n}^f(0)} = \frac{w_{0,n}^{k,f}(0)L_k^f(0)}{\Sigma_{k=1}^n w_{0,n}^{k,f}(0)L_k^f(0)} = \frac{P(0,T_{k-1})-P(0,T_k)}{P(0,T_0)-P(0,T_n)}.$$

在 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態可以下列二命題表示之。

命題 **1.** *在遠期測度 $\mathbb{Q}^{T_0}$ 下, 當 $t \le T_0$ 時, 在 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態過程如下:*

$$\frac{dS_{0,n}^f(t)}{S_{0,n}^f(t)} = \mu_{0,n}^f(t)dt + \sigma_{0,n}^f(t) \cdot d\tilde{W}^{T_0}(t), \tag{9}$$

此處

$$\begin{aligned}\mu_{0,n}^f(t) &= \sum_{k=1}^{n} w_{0,n}^{k,f}(0)^* \gamma_k^f(t) \cdot \left[-\rho_{XF}\sigma_X + \sum_{j=1}^{k} \frac{\delta_{T_j} L_j^f(0)\gamma_j^f(t)}{1+\delta_{T_j} L_j^f(0)}\right], \\ \sigma_{0,n}^f(t) &= \sum_{k=1}^{n} w_{0,n}^{k,f}(0)^* \gamma_k^f(t).\end{aligned}$$

由 (3) 式的動態可得在遠期測度 $\mathbb{Q}^{T_1}$ 下, 當 $t \le T_0$ 時, 國外遠期 *LIBOR* 利率 $L_1^f(t)$ 之動

態過程如下

$$
\begin{aligned}
&dL_1^f(t) = L_1^f(t)\gamma_1^f(t)d\tilde{W}^{T_1}(t),\\
&dL_k^f(t) = L_k^f(t)\gamma_k^f(t)\cdot\left[-\rho_{XF}\sigma_X dt + \sum_{j=2}^{k}\frac{\delta_{T_j}L_j^f(t)\gamma_j^f(t)}{1+\delta_{T_j}L_j^f(t)}dt + d\tilde{W}^{T_1}(t)\right], k>1, t\le T_0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

可以應用公式 (10) 推導下列命題。

命題 2. *當 $t \le T_0$ 且在遠期測度 $\mathbb{Q}^{T_1}$ 下, 在 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態過程如下:*

$$
\frac{dS_{0,n}^f(t)}{S_{0,n}^f(t)} = \mu_{0,n}^f(t)^{\psi}dt + \sigma_{0,n}^f(t)\cdot d\tilde{W}^{T_1}(t), \tag{11}
$$

此處

$$
\begin{aligned}
\mu_{0,n}^f(t)^{\psi} &= \sum_{k=1}^{n} w_{0,n}^{k,f}(0)^{*}\gamma_k^f(t)\cdot\left[-\rho_{XF}\sigma_X + \sum_{j=2}^{k}\frac{\delta_{T_j}L_j^f(0)\gamma_j^f(t)}{1+\delta_{T_j}L_j^f(0)}\right],\\
\sigma_{0,n}^f(t) &= \sum_{k=2}^{n} w_{0,n}^{k,f}(0)^{*}\gamma_k^f(t).
\end{aligned}
$$

2.2 Quanto CMS 商品之到期支付

Quanto CMS (Quanto Constant Maturity Swaps, 以下簡稱 Quanto CMS) 是一種金融商品, 契約雙方約定在每一期甲方支付乙方以固定利率計算的利息, 在同一期乙方支付甲方以特定國外指標利率 (例如:2 年期外幣交換利率) 計算的利息, 並以甲乙雙方共同的貨幣單位支付。

2.2.1 Quanto CMS 利差選擇權之到期支付

Quanto CMS 利差選擇權的到期支付是根據同一期內不同契約期間國外交換利率的利差決定。本文所提到的 Quanto CMS 利差選擇權是考慮同一起息日兩種不同交換期間之國外即期交換利率的利差選擇權。更精確地說, 若給定一固定起息日 T_0、一履約價 K 及分別交換 n_1 及 n_2 期之交換利率, 則介於兩種參考利率的 Quanto CMS 利差買權到期支付值可定義如下:

$$
V_{Spread}^{c,f}(T_0) = \delta_{T_0}\max(S_{0,n_1}^f(T_0) - S_{0,n_2}^f(T_0) - K, 0), \tag{12}
$$

而介於兩種參考利率的 Quanto CMS 利差賣權到期支付值可定義如下:

$$V^{p,f}_{Spread}(T_0) = \delta_{T_0} \max(K - S^f_{0,n_1}(T_0) + S^f_{0,n_2}(T_0), 0), \tag{13}$$

整合 (12) 及 (13) 式後,Quanto CMS 利差選擇權到期支付值可定義如下:

$$V^{f}_{Spread}(T_0) = \delta_{T_0} \max(aS^f_{0,n_1}(T_0) - aS^f_{0,n_2}(T_0) - aK, 0), \tag{14}$$

此處 $a = 1$ 時代表買權, 而 $a = -1$ 時代表賣權。

2.2.2 Quanto CMS 輪棘選擇權之到期支付

Quanto CMS 輪棘選擇權的到期支付是根據前後兩期相同契約期間國外交換利率的利差決定。本文所提到的 Quanto CMS 輪棘選擇權是考慮相同交換期間兩種不同起息日之國外即期交換利率的利差選擇權。更精確地說, 若給定一固定起息日 T_1 及其前一期起息日 T_0, 及一履約價 K, 則兩種不同起息日、交換 n 期之交換利率的 Quanto CMS 輪棘買權到期支付值可定義如下:

$$V^{c,f}_{Ratchet}(T_1) = \delta_{T_1} \max(S^f_{1,n+1}(T_1) - S^f_{0,n}(T_0) - K, 0), \tag{15}$$

而介於兩種參考利率的 Quanto CMS 輪棘賣權到期支付值可定義如下:

$$V^{p,f}_{Ratchet}(T_1) = \delta_{T_1} \max(K - S^f_{1,n+1}(T_1) + S^f_{0,n}(T_0), 0), \tag{16}$$

整合 (15) 及 (16) 式後,Quanto CMS 利差選擇權到期支付值可定義如下:

$$V^{f}_{Ratchet}(T_1) = \delta_{T_1} \max(aS^f_{1,n+1}(T_1) - aS^f_{0,n}(T_0) - aK, 0), \tag{17}$$

此處 $a = 1$ 時代表買權, 而 $a = -1$ 則代表賣權。

應用命題 1 及命題 2 定義之 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態過程及 Quanto CMS 商品到期支付公式的設定, 本文將在下一節中推導輔助定理來評價 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權兩種商品。

3. Quanto CMS 商品評價

若到期支付日期是 T_0, 則 Quanto CMS 商品在時間 0 期存在之唯一無套利價格如下:

$$V^f_{option}(0) = P^d(0,T_0)\mathbb{E}^{T_0}\left[\frac{V^f_{option}(T_0)}{P^d(T_0,T_0)}\right] = P^d(0,T_0)\mathbb{E}^{T_0}\left[V^f_{option}(T_0)\right], \tag{18}$$

$option = spread, ratchet,$

此處 $V^f_{option}(0)$ 是在時間 0 期 Quanto CMS 商品到期支付之折現值,$P^d(0,T_0)$ 是到期日爲時間 T_0 的國內零息債券在時間 0 期的價格。若 $option = spread$ 表 Quanto CMS 利差選擇權, 而 $option = ratchet$ 表 Quanto CMS 輪棘選擇權。

(18) 式的成立是根據機率平賭測度的存在唯一性。在此設定遠期 LIBOR 利率的共變異矩陣爲 3 因子架構, 接著推導下列輔助定理以協助評價 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權兩種商品。

輔助定理 **3.1.** 假設兩參考利率之動態過程如下*:*

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu_X(t)dt + \sigma_X(t)dW_X(t),$$
$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \mu_Y(t)dt + \sigma_Y(t)dW_Y(t),$$

此處 W_X, W_Y 是某機率測度下的一維布朗運動, $dW_X(t)dW_Y(t) = \rho(t)dt$, $\rho(\cdot)$ 是二布朗運動 W_X, W_Y 的瞬間相關係數, 且 $\mu_X(\cdot)$, $\mu_Y(\cdot)$, $\sigma_X(\cdot)$, $\sigma_Y(\cdot)$ 和 $\rho(\cdot)$ 都是非隨機函數 *(deterministic function)*。令 $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, $K > 0$, $a = \pm 1$, 則

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(aX(T_1) - aY(T_2) - aK)^+\\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{A}(\sigma_2 z)N(d_1(\sigma_2 z)) - \bar{K}(\sigma_2 z)N(d_2(\sigma_2 z))\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,\end{aligned}$$

此處

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$
$$d_1(w) = \frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w)) + 0.5(\sigma_1^2 - m^2)}{\sqrt{(\sigma_1^2 - m^2)}},$$
$$d_2(w) = \frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w)) - 0.5(\sigma_1^2 - m^2)}{\sqrt{(\sigma_1^2 - m^2)}},$$

為簡化表達方式, 結合 $d_1(w)$ 及 $d_2(w)$ 如下式:

$$
\begin{aligned}
d_{1,2}(w) &= \frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w)) \pm 0.5(\sigma_1^2 - m^2)}{\sqrt{(\sigma_1^2 - m^2)}}, \\
\bar{K}(w) &= aY(0)\exp\left(\int_0^{T_2} \mu_Y(t)dt - 0.5{\sigma_2}^2 + w\right) + aK, \\
\bar{A}(w) &= aX(0)\exp\left(\int_0^{T_1} \mu_X(t)dt + \frac{m}{\sigma_2}w - 0.5m^2\right), \\
m &= \frac{\int_0^{min(T_1,T_2)} \sigma_X(t)\sigma_Y(t)\rho(t)dt}{\sigma_2}, \\
\sigma_1 &= \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_X(t)^2 dt}, \\
\sigma_2 &= \sqrt{\int_0^{T_2} \sigma_Y(t)^2 dt}.
\end{aligned}
$$

若 $\mu_X(\cdot)$, $\mu_Y(\cdot)$, $\sigma_X(\cdot)$, $\sigma_Y(\cdot)$ 及 $\rho(\cdot)$ 皆是常數, 則

$$
\begin{aligned}
d_{1,2}(w) &= \frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w)) \pm 0.5{\sigma_X}^2 T_1(1-\tilde{\rho}^2)}{\sqrt{{\sigma_X}^2 T_1(1-\tilde{\rho}^2)}}, \\
\bar{A}(w) &= aX(0)\exp\left(\mu_X T_1 + \frac{\sigma_X\sqrt{T_1}}{\sigma_Y\sqrt{T_2}}\tilde{\rho}w - 0.5\tilde{\rho}^2{\sigma_X}^2 T_1\right), \\
\bar{K}(w) &= aY(0)\exp\left(\mu_Y T_2 - 0.5{\sigma_Y}^2 T_2 + w\right) + aK, \\
\tilde{\rho} &= \rho\sqrt{\frac{min(T_1,T_2)}{max(T_1,T_2)}}.
\end{aligned}
$$

輔助定理 3.1 的推導證明請參考附錄 2。

3.1 Quanto CMS 利差選擇權之評價

根據 (14) 式的到期支付值, 可由輔助定理 3.1 來推導一般 Quanto CMS 利差選擇權的定價公式並定義如下定理。

定理 3.1. 本文採用在命題 1 內之國外遠期交換利率之動態過程並將 n_1 及 n_2 代入 n, 則第 3 節 (18) 式內之 $QuantoCMS$ 利差選擇權的定價公式是

$$
\begin{aligned}
V^f_{spread}(0) &= P^d(0,T_0)\mathbb{E}^{T_0}\left[V^f_{spread}(T_0)\right] \\
&= \delta_{T_0} P^d(0,T_0)\mathbb{E}^{T_0}\left(aS^f_{0,n_1}(T_0) - aS^f_{0,n_2}(T_0) - aK\right)^+, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

則

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{T_0}\left(aS^f_{0,n_1}(T_0)-aS^f_{0,n_2}(T_0)-aK\right)^+\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\bar{A}(\sigma_2 z)N(d_1(\sigma_2 z))-\bar{K}(\sigma_2 z)N(d_2(\sigma_2 z))\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz,
\end{aligned}
$$

此處

$$
\begin{aligned}
&\bar{K}(w)=aS^f_{0,n_2}(0)\exp\left(\int_0^{T_0}\mu^f_{0,n_2}(t)dt-0.5{\sigma_2}^2+w\right)+aK,\\
&\bar{A}(w)=aS^f_{0,n_1}(0)\exp\left(\int_0^{T_0}\mu^f_{0,n_1}(t)dt+\frac{m}{\sigma_2}w-0.5m^2\right),\\
&m=\frac{\int_0^{T_0}\sigma^f_{0,n_1}(t)\sigma^f_{0,n_2}(t)\rho^f_{S_{0,n_1},S_{0,n_2}}(t)dt}{\sigma_2},\\
&\sigma_1=\sqrt{\int_0^{T_0}\sigma^f_{0,n_1}(t)^2dt},\\
&\sigma_2=\sqrt{\int_0^{T_2}\sigma^f_{0,n_2}(t)^2dt},\\
&\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}}(t)=\frac{\Sigma_{k=1}^{n_1}\Sigma_{j=1}^{n_2}w^{k,f}_{0,n_1}(0)^*w^{j,f}_{0,n_2}(0)^*\gamma^f_k(t)\gamma^f_j(t)}{\sigma^f_{0,n_1}(t)\sigma^f_{0,n_2}(t)},
\end{aligned}
$$

$\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}}(\cdot)$ 是二國外遠期交換利率 S^f_{0,n_1} 和 S^f_{0,n_2} 之瞬間相關係數。
若 $\mu^f_{0,n_1}(\cdot)$, $\mu^f_{0,n_2}(\cdot)$, $\sigma^f_{0,n_1}(\cdot)$, $\sigma^f_{0,n_2}(\cdot)$ 及 $\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}}(\cdot)$ 皆是常數, 則

$$
\begin{aligned}
&d_{1,2}(w)=\frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w))\pm 0.5(\sigma^f_{0,n_1})^2T_0(1-(\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}})^2)}{\sqrt{(\sigma^f_{0,n_1})^2T_0(1-(\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}})^2)}},\\
&\bar{A}(w)=aS^f_{0,n_1}(0)\exp\left(\mu^f_{0,n_1}T_0+\frac{\sigma^f_{0,n_1}}{\sigma^f_{0,n_2}}(\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}})w-0.5(\rho_{S^f_{0,n_1},S^f_{0,n_2}})^2(\sigma^f_{0,n_1})^2T_0\right),\\
&\bar{K}(w)=aS^f_{0,n_2}(0)\exp\left(\mu^f_{0,n_2}T_0-0.5(\sigma^f_{0,n_2})^2T_0+w\right)+aK.
\end{aligned}
$$

3.2 Quanto CMS 輪棘選擇權之評價

根據 (17) 式的到期支付值, 可由輔助定理 3.1 來推導一般 Quanto CMS 輪棘選擇權的定價公式並定義如下定理。

定理 **3.2.** 利用在命題 1 及命題 2 已定義之國外遠期交換利率的近似動態及在時間 T_1 和 T_0 重設的 n 期國外遠期交換利率, 則 (18) 式內之 $QuantoCMS$ 輪棘選擇權的定價公式是

$$\begin{aligned}V^f_{ratchet}(0) &= P^d(0,T_1)\mathbb{E}^{T_0}\left[V^f_{ratchet}(T_1)\right]\\ &= \delta_{T_1}P^d(0,T_1)\mathbb{E}^{T_0}\left(aS^f_{1,n+1}(T_1)-aS^f_{0,n}(T_0)-aK\right)^+, \qquad (20)\end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(aS^f_{1,n+1}(T_1)-aS^f_{0,n}(T_0)-aK\right)^+\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\bar{A}(\sigma_2 z)N(d_1(\sigma_2 z))-\bar{K}(\sigma_2 z)N(d_2(\sigma_2 z))\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz,\end{aligned}$$

此處

$$\begin{aligned}\bar{K}(w) &= aS^f_{0,n}(0)\exp\left(\int_0^{T_0}\mu^f_{0,n}(t)^{\psi}dt-0.5{\sigma_2}^2+w\right)+aK,\\ \bar{A}(w) &= aS^f_{1,n+1}(0)\exp\left(\int_0^{T_1}\mu^f_{1,n+1}(t)dt+\frac{m}{\sigma_2}w-0.5m^2\right),\\ m &= \frac{\int_0^{min(T_1,T_0)}\sigma^f_{1,n+1}(t)\sigma^f_{0,n}(t)\rho_{S^f_{1,n+1},S^f_{1,n}}dt}{\sigma_2},\\ \sigma_1 &= \sqrt{\int_0^{T_1}\sigma^f_{1,n+1}(t)^2dt},\\ \sigma_2 &= \sqrt{\int_0^{T_0}\sigma^f_{0,n}(t)^2dt},\\ \rho_{S^f_{1,n+1},S^f_{0,n}}(t) &= \frac{\Sigma_{k=2}^{n+1}\Sigma_{j=1}^{n}w^{k,f}_{1,n+1}(0)^*w^{j,f}_{0,n}(0)^*\gamma^f_k(t)\gamma^f_j(t)}{\sigma^f_{1,n+1}(t)\sigma^f_{0,n}(t)},\end{aligned}$$

$\rho_{S^f_{1,n+1},S^f_{0,n}}(\cdot)$ 是二國外遠期交換利率 $S^f_{1,n+1}$ 和 $S^f_{0,n}$ 之瞬間相關係數。
若 $\mu^f_{1,n+1}(\cdot)$, $\mu^f_{0,n}(\cdot)^{\psi}$, $\sigma^f_{1,n+1}(\cdot)$, $\sigma^f_{0,n}(\cdot)$ 及 $\rho_{S^f_{1,n+1},S^f_{0,n}}(\cdot)$ 皆是常數, 則

$$\begin{aligned}d_{1,2}(w) &= \frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w))\pm 0.5(\sigma^f_{1,n+1})^2T_1(1-\tilde{\rho}^2)}{\sqrt{(\sigma^f_{1,n+1})^2T_1(1-\tilde{\rho}^2)}},\\ \bar{A}(w) &= aS^f_{1,n+1}(0)\exp\left(\mu^f_{1,n+1}T_1+\frac{\sigma^f_{1,n+1}\sqrt{T_1}}{\sigma^f_{0,n}\sqrt{T_0}}\tilde{\rho}w-0.5\tilde{\rho}^2(\sigma^f_{1,n+1})^2T_1\right),\\ \bar{K}(w) &= aS^f_{0,n}(0)\exp\left({\mu^f_{0,n}}^{\psi}T_0-0.5(\sigma^f_{0,n})^2T_0+w\right)+aK,\\ \tilde{\rho} &= \rho_{S^f_{1,n+1},S^f_{0,n}}\sqrt{\frac{min(T_1,T_0)}{max(T_1,T_0)}}.\end{aligned}$$

4. 校準程序及數値分析

在本節中將針對遠期 LIBOR 利率的共變異矩陣進行校準, 並檢視在 BGM 模型下分別以近似公式解法及蒙地卡羅模擬法定價 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權兩種商品模型參數之數値效果。

4.1 參數設定及校準程序

實證上顯示, 三因子架構足夠解釋 90% 以上經濟體衝擊。因此本文考慮下列三因子模型:

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1(t_1)) & \cos(\theta_2(t_1))\sin(\theta_1(t_1)) & \sin(\theta_2(t_1))\sin(\theta_1(t_1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\theta_1(t_M)) & \cos(\theta_2(t_M))\sin(\theta_1(t_M)) & \sin(\theta_2(t_M))\sin(\theta_1(t_M)) \end{bmatrix}$$

其中,$\theta_1(t) = (a_1 t + d_1)e^{-b_1 t} + c_1$, $\theta_2(t) = (a_2 t + d_2)e^{-b_2 t} + c_2$,$t_1 < t_2 < \ldots < t_M$ 為遠期 LIBOR 利率之付息日, 則遠期 LIBOR 利率之相關係數矩陣為 $\rho_L = BB^T$, 如此設定的優點是可得到非負定之相關係數矩陣。

本文的校準程序係參考 Hull and White(1999) 的論文分二階段以市場資料來調整評價: 第一階段是透過拔靴法由交換利率選擇權及利率上限選擇權資料來取得遠期 LIBOR 利率之利率期間結構 (Yield Curve) 及波動結構 (Volatility), 第二階段是由利率交換選擇權市場資料來調整評價, 此做法可配適利率交換選擇之內生相關係數結構。

在配適利率交換選擇權的過程中, 本文採用 Rebonato 利率交換選擇權公式 (Rebonato, 2004) 來配適在 BGM 模型下市場利率交換選擇權之波動度, 應用上述公式將從台灣及美國市場取得的資料轉換成國內外遠期 LIBOR 利率之利率期間結構, 以及波動結構, 並將轉換結果分別置於表 1 至表 4 四個表格: 表 1、2 分別是國外 (美國) 遠期 LIBOR 利率之利率期間結構及波動結構, 表 3、4 則是國內 (台灣) 遠期 LIBOR 利率之利率期間結構及波動結構。

4.2 數値分析

本節比較以近似公式解法與蒙地卡羅模擬法定價 Quanto CMS 利差買權及 Quanto CMS 輪棘買權兩種商品之相對誤差並計算不同履約價下蒙地卡羅模擬法估計値的標準差。在本數値研究中, 假設名目本金是 \$1 元且模擬 100,000 條路徑。本文將數値分析的結果分別置於表 5 及表 6 兩個表格: 表 5 是以近似公式解法及蒙地卡羅模擬法計算 2 年及 5 年 Quanto CMS 利差買權的價値及相對誤差, 表 6 是以近似公式解法及蒙地卡羅模擬法計算 Quanto CMS 輪棘買權的價値及相對誤差。

表 1　國外遠期 LIBOR 利率之利率期間結構

	季數			
年數	第一季	第二季	第三季	第四季
1	2.8100%	3.3931%	3.1839%	3.3095%
2	3.2902%	3.3195%	3.3478%	3.3770%
3	4.0456%	4.2143%	4.3792%	4.5456%
4	4.3337%	4.4406%	4.5457%	4.6519%
5	4.5277%	4.6052%	4.6806%	4.7578%
6	4.8761%	4.9566%	5.0347%	5.1149%
7	4.7157%	4.7565%	4.7957%	4.8368%
8	4.9494%	4.9947%	5.0388%	5.0843%
9	5.0128%	5.0504%	5.0863%	5.1243%
10	5.0593%	5.0909%	5.1209%	5.1531%

表 2　國外遠期 LIBOR 利率之波動結構

	季數			
年數	第一季	第二季	第三季	第四季
1	26.79%	26.79%	30.93%	33.35%
2	37.23%	37.65%	37.39%	36.68%
3	31.27%	30.20%	29.04%	27.90%
4	27.17%	26.02%	24.93%	23.93%
5	25.34%	24.39%	23.53%	22.77%
6	20.26%	19.69%	19.18%	18.74%
7	23.79%	23.33%	22.93%	22.59%
8	16.76%	16.55%	16.38%	16.23%
9	18.14%	18.01%	17.90%	17.80%
10	22.36%	22.27%	22.19%	22.12%

表 5 的數值分析結果顯示許多不同履約價之蒙地卡羅模擬法估計值的標準差都很小, 顯示其變異不大, 所以評價 Quanto CMS 利差買權用蒙地卡羅模擬法作爲指標方法來比較近似公式解法計算之數值與它的差異應是可以接受的。另外, 在表 5 中許多不同履約價之 Quanto CMS 利差選擇權其相對誤差都非常小且近似公式解法之計算效率也優於蒙地卡羅模擬法。此處相對誤差是絕對誤差與蒙地卡羅模擬法估計值之比值。而絕對誤差是指以近似公式解法計算

表 3　國內遠期 LIBOR 利率之利率期間結構

	季數			
年數	第一季	第二季	第三季	第四季
1	2.2150%	2.4459%	2.3375%	2.3425%
2	2.3859%	2.4063%	2.4261%	2.4464%
3	2.5139%	2.5449%	2.5750%	2.6057%
4	2.6041%	2.6300%	2.6554%	2.6812%
5	2.7103%	2.7364%	2.7617%	2.7876%
6	2.7059%	2.7217%	2.7368%	2.7526%
7	2.7683%	2.7840%	2.7992%	2.8150%
8	2.8254%	2.8407%	2.8557%	2.8711%
9	2.8864%	2.9018%	2.9165%	2.9319%
10	2.9473%	2.9626%	2.9773%	2.9928%

表 4　國內遠期 LIBOR 利率之波動結構

	季數			
年數	第一季	第二季	第三季	第四季
1	13.76%	13.76%	14.89%	15.92%
2	13.56%	14.30%	14.99%	15.61%
3	20.68%	21.35%	21.95%	22.47%
4	22.04%	22.41%	22.72%	22.96%
5	23.27%	23.37%	23.41%	23.38%
6	20.06%	19.92%	19.72%	19.46%
7	19.15%	18.77%	18.34%	17.86%
8	20.06%	19.35%	18.58%	17.75%
9	16.84%	15.86%	14.82%	13.74%
10	12.56%	11.31%	9.99%	8.65%

之 Quanto CMS 利差選擇權數值減去以蒙地卡羅模擬法計算之估計值。

表6的數值分結果顯示許多不同履約價之蒙地卡羅模擬法估計值的標準差都是很小, 所以評價匯率連動固定期利率交換輪棘買權用蒙地卡羅模擬法作爲指標方法來比較近似公式解法計算之數值與它的差異應是可以接受的。同樣地, 在表6中顯示許多不同履約價之匯率連動固定期利率交換輪棘買權其相對誤差都非常小且近似公式解法之計算效率同樣也優於蒙地卡羅模擬法。

表 5 以近似解析公式解法及蒙地卡羅模擬法計算 2 年及 5 年 Quanto CMS 利差買權的價值及相對誤差

履約價	近似公式解法	蒙地卡羅模擬法	蒙地卡羅模擬法估計值標準差	相對誤差
10 bp	0.00902624	0.00904252	0.0000320832	-0.18%
20 bp	0.00621370	0.00622382	0.0000354407	-0.16%
30 bp	0.00390701	0.00390585	0.0000263290	0.030%
40 bp	0.00254030	0.00252605	0.0000184535	0.56%
50 bp	0.00152807	0.00150740	0.0000114682	1.37%

註: 以蒙地卡羅模擬法計算 2 年 Quanto CMS 及 5 年 Quanto CMS 利差選擇權數值之次數是 100,000 次。蒙地卡羅模擬法計算時間約 310 秒。近似解析公式解計算時間約 1 秒。

表 6 以近似解析公式解法及蒙地卡羅模擬法計算 Quanto CMS 輪棘買權的價值及相對誤差

履約價	近似公式解法	蒙地卡羅模擬法	蒙地卡羅模擬法估計值標準差	相對誤差
10 bp	0.00474841	0.00476964	0.0000546285	-0.45%
20 bp	0.00360219	0.00361781	0.0000571957	-0.43%
30 bp	0.00269882	0.00273045	0.0000526696	-1.16%
40 bp	0.00200513	0.00203336	0.0000489696	-1.39%
50 bp	0.00148305	0.00149864	0.0000571040	-1.04%

註: 以蒙地卡羅模擬法計算 Quanto CMS 輪棘選擇權平均值之次數是 100,000 次。蒙地卡羅模擬法計算時間約 235 秒。近似解析公式解計算時間約 1 秒。

5. 結論

本文應用國外遠期交換利率近似於國外遠期 LIBOR 利率之線性組合的特徵來設定 BGM 模型下國外遠期交換利率的近似動態過程。基於國外遠期交換利率的近似動態, 推導出三因子 BGM 模型下評價 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權的無套利解析公式。本文係延伸 Liao, Lin and Tsai (2010) 推導固定期利率交換商品之概念並考慮隱含在風險中立測度內的匯率風險因素後, 將其應用於三因子 BGM 模型下 Quanto CMS 商品之評價且放寬國外遠期交換利率及其布朗運動之瞬間相關係數設定以保留瞬間相關係數變化之彈性。數值分析的結果顯示不同履約價下蒙地卡羅模擬法估計值的標準差都很小, 表示其變異不大, 所以用蒙地卡羅模擬法作爲指標方法 (Benchmark) 來比較近似公式解法計算之數值與它的差異應是可以接受的。最後, 數值分析的結果亦顯示上述兩種商品在不同履約價下無套利解析公式解

法對應蒙地卡羅模擬法的相對誤差都很小, 而且無套利解析公式解法之計算效率亦優於蒙地卡羅模擬法, 所以可解決以往用蒙地卡羅模擬法評價較耗時的缺點, 建議可在實務上應用近似公式解法來評價 Quanto CMS 利差選擇權及 Quanto CMS 輪棘選擇權兩種商品。

在未來研究方面, 近似公式解評價公式亦可應用於其他 Quanto CMS 衍生性產品。Quanto CMS 產品可做爲國外利率交換的輔助工具以提高交換利差的利潤或鎖住現行利差以管理利率風險。在避險方面, 未來若能找出可透過現貨資產來進行選擇權避險之 Delta 避險公式則期望可降低等待的避險成本並提高執行效率。

附錄 1: 公式 (3) 之證明

令 $X(t)$ = 本國貨幣/外國貨幣 = 匯率, 因 $L_k^f(t)$ 在本文中是以本國貨幣計價, 所以將 (A.1) 式的分子及分母各乘以匯率 $X(t)$。將分子及分母再除以計價單位 $P^d(t,T_k)$ 後得 $L_k^f(t)$ 如下:

$$L_k^f(t) = \frac{X(t)(P^f(t,T_{k-1}) - P^f(t,T_k))/P^d(t,T_k)}{\delta_{T_k} Y(t) P^f(t,T_k)/P^d(t,T_k)} = \frac{Z_1(t)}{Z_2(t)}, \tag{A.1}$$

此處 $Z_1(t) = X(t)(P^f(t,T_{k-1}) - P^f(t,T_k))/P^d(t,T_k)$ 是以 $P^d(t,T_k)$ 計價的本國資產, $Z_2(t) = \delta_{T_k} X(t) P^f(t,T_k)/P^d(t,T_k) = \delta_{T_k} F_x(t,T_k)$, 其中 $F_x(t,T_k)$ 是遠期匯率, 且根據利率均衡論 $F_x(t,T_k)/X(t) = P^f(t,T_k)/P^d(t,T_k)$, 且 $Z_1(t)$、$Z_2(t)$ 均是 Q^k-Martingale。

因此,$Z_1(t)$ 及 $Z_2(t)$ 具有對數常態隨機過程且無飄浮項, 其動態隨機過程可表示如下:

$$dZ_1(t) = Z_1(t)\gamma_1 \cdot d\tilde{W}_1^k(t), \tag{A.2}$$

$$dZ_2(t) = Z_2(t)\gamma_2 \cdot d\tilde{W}_2^k(t), \tag{A.3}$$

此處 $\gamma_i = Var(dZ_i(t)/Z_i(t))$, 且 $\tilde{W}_i^k$, 是 Q^k 測度下的標準布朗運動, $i = 1, 2$。

應用 Ito's 定理及 (A.1) 至 (A.3) 式可求出 $L_k^f(t)$ 的隨機過程如下:

$$dL_k^f(t) = d(\frac{Z_1(t)}{Z_2(t)}) = Z_1(t)d(\frac{1}{Z_2(t)}) + \frac{1}{Z_2(t)}dZ_1(t) + d \prec Z_1(t), \frac{1}{Z_2(t)} \succ,$$

此處

$$d(\frac{1}{Z_2(t)}) = (\frac{1}{Z_2(t)})(\gamma_2^2 dt - \gamma_2 dw_2(t)),$$

$$d \prec Z_1(t), \frac{1}{Z_2(t)} \succ = \prec dZ_1(t), d\frac{1}{Z_2(t)} \succ = (-\frac{Z_1(t)}{Z_2(t)})\rho_{12}\gamma_1\gamma_2 dt.$$

所以

$$\begin{aligned} dL_k^f(t) &= (\frac{Z_1(t)}{Z_2(t)})(\gamma_2^2 dt - \gamma_2 dw_2(t)) + (\frac{Z_1(t)}{Z_2(t)})(\gamma_1 dw_1(t)) + (-\frac{Z_1(t)}{Z_2(t)})\rho_{12}\gamma_1\gamma 2dt \\ &= L_k^f(t)\left[(\gamma_2^2 - \rho_{12}\gamma_1\gamma 2)dt + \gamma_1 dw_1(t) - \gamma_2 dw_2(t)\right], \end{aligned}$$

則

$$dL_k^f(t) = L_k^f(t)\left[(\mu_k^f dt + \gamma_k^f dw^k(t)\right], \tag{A.4}$$

此處 $\mu_k^f = (\gamma_2^2 - \sigma_{12}\gamma_1\gamma_2)$, $\gamma_k^f = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\sigma_{12}\gamma_1\gamma_2}$, 且 $\rho_{12} = Corr(dZ_1/Z_1, dZ_2/Z_2)$。

令 ρ_{XF} 表遠期匯率 $F_X(t,T_k)$ 與 $L_k^f(t)$ 之相關係數,σ_X^2 表遠期匯率變異數, 則 μ_k^f 可改寫爲 $\mu_k^f = -\rho_{XF}\sigma_X\gamma_k^f$, 所以參數 μ_k^f 可經由 ρ_{XF}、σ_X 及 γ_k^f 的相關市場資料求算估計之。

將 (A.4) 式經測度轉換後可得在遠期測度 Q^{T_0} 下遠期 LIBOR 利率之動態過程如下式所示:

$$dL_k^f(t) = L_k^f(t)\gamma_k^f(t)\cdot\left[-\rho_{XF}\sigma_X dt + \sum_{j=1}^{k}\frac{\delta_{T_j}\gamma_j^f(t)L_j^f(t)}{1+\delta_{T_j}L_j^f(t)}dt + d\tilde{W}^{T_0}(t)\right],\ k>0,\ t\le T_0,$$

故 (3) 式得證之。

附錄 2: 輔助定理 3.1 之證明

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(aX(T_1) - aY(T_2) - aK)^+ \\ &= \mathbb{E}\left(aX(0)\exp(\int_0^{T_1}(\mu_X(t) - 0.5\sigma_X(t)^2)dt) + \int_0^{T_1}\sigma_X dW_X(t)\right) \\ &\quad - aY(0)\exp\left(\int_0^{T_2}(\mu_Y(t) - 0.5\sigma_Y(t)^2)dt + \int_0^{T_2}\sigma_Y dW_Y(t)) - aK\right)^+. \end{aligned} \tag{B.1}$$

令

$$\begin{aligned} A &= X(0)\exp(\int_0^{T_1}(\mu_X(t) - 0.5\sigma_X(t)^2)dt), \\ Z_1 &= \int_0^{T_1}\sigma_X dW_X(t), \\ B &= Y(0)\exp(\int_0^{T_2}(\mu_Y(t) - 0.5\sigma_Y(t)^2)dt), \\ Z_2 &= \int_0^{T_2}\sigma_Y(t)dW_Y(t), \end{aligned}$$

則 Z_1 及 Z_2 是二變量常態分配之隨機變數, 其平均數分別爲 μ_1 、μ_2, 變異數分別爲 σ_1^2 、σ_2^2, 且相關係數爲 $\bar{\rho}$ 。令

$$\mu_1 = \mu_2 = 0,$$
$$\sigma_1{}^2 = \int_0^{T_1} \sigma_X(t)^2 dt,\ \sigma_2{}^2 = \int_0^{T_2} \sigma_Y(t)^2 dt,$$
$$\bar{\rho} = \frac{\int_0^{min(T_1,T_2)} \sigma_X(t)\sigma_Y(t)\rho(t)dt}{\sigma_1\sigma_2}.$$

因此 Z_1 及 Z_2 的聯合機率密度函數爲 $f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = f_{Z_1|Z_2}(z_1|z_2)f_{z_2}(z_2)$,
此處

$$f_{Z_1|Z_2}(z_1|z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\bar{\rho}^2)\sigma_1{}^2}} \exp\left(-\frac{(z_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2)^2}{2(1-\bar{\rho}^2)\sigma_1{}^2}\right),$$
$$f_{z_2}(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2{}^2}} \exp\left(-\frac{z_2{}^2}{2\sigma_2{}^2}\right),$$

則

$$\begin{aligned}(B.1) &= \mathbb{E}(aA\exp(Z_1) - aB\exp(Z_2) - aK)^+ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} (aA\exp(z_1) - aB\exp(z_2) - aK)^+ f_{Z_1|Z_2}(z_1|z_2)dz_1\right] f_{z_2}(z_2)dz_2.\end{aligned}$$

爲計算上述中括號內積分的值, 令 $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1\sqrt{(1-\bar{\rho}^2)}}{\sqrt{T_1}}$, 並重寫 $f_{Z_1|Z_2}(z_1|z_2)$ 如下:

$$f_{Z_1|Z_2}(z_1|z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T_1\bar{\sigma}^2}} \exp\left(-\frac{(z_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2)^2}{2T_1\bar{\sigma}^2}\right),$$

上述 $(B.1)$ 式內中括號之值可計算如下:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} (aA\exp(z_1) - aB\exp(z_2) - aK)^+ f_{Z_1|Z_2}(z_1|z_2)dz_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (aA\exp(z_1) - aB\exp(z_2) - aK)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T_1\bar{\sigma}^2}}\left(-\frac{(z_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2)^2}{2T_1\bar{\sigma}^2}\right)dz_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(aA\exp(\bar{\sigma}u + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2) - \bar{K}(z_2)\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T_1}}\exp\left(-\frac{u^2}{2T_1}\right)du \\ &= \mathbb{E}\left(aA\exp(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2 + \bar{\sigma}U(T_1)) - \bar{K}(z_2)\right),\end{aligned} \tag{B.2}$$

此處 $U(t)$ 是一維布朗運動, 且

$$\begin{aligned}\bar{K}(z_2) &= aB\exp(z_2) + aK \\ &= aY(0)\exp\left(\int_0^{T_2}\mu_Y(t)dt - 0.5\sigma_2(t)^2 + z_2\right) + aK.\end{aligned}$$

令 $\bar{A}(z_2) = aA\exp(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2 + 0.5T_1\bar{\sigma}^2)$, 應用類似 Black 公式, 得到

$$\begin{aligned}(B.2) &= \mathbb{E}\big(\bar{A}(z_2)\exp(\bar{\sigma}U(T_1) - 0.5T_1\bar{\sigma}^2) - \bar{K}(z_2)\big)^+ \\ &= \bar{A}(z_2)N(d_1(z_2)) - \bar{K}(z_2)N(d_2(z_2)),\end{aligned}$$

此處

$$\begin{aligned}d_1(z_2) &= \frac{\ln(\bar{A}(z_2)/\bar{K}(z_2)) + 0.5T_1\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}\sqrt{T_1}}, \\ d_2(z_2) &= \frac{\ln(\bar{A}(z_2)/\bar{K}(z_2)) - 0.5T_1\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}\sqrt{T_1}},\end{aligned}$$

整合 $d_1(z_2)$ 及 $d_2(z_2)$ 得

$$\begin{aligned}d_1(z_2) &= \frac{\ln(\bar{A}(z_2)/\bar{K}(z_2)) \pm 0.5T_1\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}\sqrt{T_1}}, \\ m &= \bar{\rho}\sigma_1, \\ \bar{A}(z_2) &= aA\exp(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\bar{\rho}z_2 + 0.5T_1\bar{\sigma}^2) \\ &= aX(0)\exp(\int_0^{T_1}(\mu_X(t) - 0.5\sigma_X(t)^2)dt)\exp(\frac{m}{\sigma_2}z_2 + 0.5T_1(\frac{\sigma_1\sqrt{(1-\bar{\rho}^2)}}{\sqrt{T_1}})^2) \\ &= aX(0)\exp(\int_0^{T_1}(\mu_X(t) - 0.5\sigma_X(t)^2)dt)\exp(\frac{m}{\sigma_2}z_2 + 0.5{\sigma_1}^2(1-\bar{\rho}^2)) \\ &= aX(0)\exp(\int_0^{T_1}(\mu_X(t)dt + \frac{m}{\sigma_2}z_2 - 0.5{\sigma_1}^2\bar{\rho}^2) \\ &= aX(0)\exp(\int_0^{T_1}\mu_X(t)dt + \frac{m}{\sigma_2}z_2 - 0.5m^2), \\ d_{1,2}(z_2) &= \frac{\ln(\bar{A}(z_2)/\bar{K}(z_2)) \pm 0.5T_1\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}\sqrt{T_1}} \\ &= \frac{\ln(\bar{A}(z_2)/\bar{K}(z_2)) \pm 0.5({\sigma_1}^2 - {\sigma_1}^2\bar{\rho}^2)}{\sqrt{({\sigma_1}^2 - {\sigma_1}^2\bar{\rho}^2)}} \\ &= \frac{\ln(\bar{A}(z_2)/\bar{K}(z_2)) \pm 0.5({\sigma_1}^2 - m^2)}{\sqrt{({\sigma_1}^2 - m^2)}},\end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned}(B.1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\bar{A}(z_2)N(d_1(z_2)) - \bar{K}(z_2)N(d_1(z_2))\big)\frac{1}{\sqrt{2\pi{\sigma_2}^2}}\exp\left(-\frac{{z_2}^2}{2{\sigma_2}^2}\right)dz_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\bar{A}(\sigma_2 z)N(d_1(\sigma_2 z)) - \bar{K}(\sigma_2 z)N(d_2(\sigma_2 z))\big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz.\end{aligned}$$

若 $\mu_X(\cdot)$, $\mu_Y(\cdot)$, $\sigma_X(\cdot)$, $\sigma_X(\cdot)$, 及 $\rho(\cdot)$ 皆是常數, 則

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{min(T_1,T_2)\sigma_X\sigma_Y\rho}{\sigma_Y\sqrt{T_2}} = \frac{min(T_1,T_2)\sigma_X\sigma_Y\rho}{\sigma_Y\sqrt{T_2}\sigma_X\sqrt{T_1}}\sigma_X\sqrt{T_1} \\
&= \rho\sqrt{\frac{min(T_1,T_2)}{max(T_1,T_2)}}\sigma_X\sqrt{T_1} = \tilde{\rho}\sigma_X\sqrt{T_1}, \\
\frac{m}{\sigma_2} &= \frac{\sigma_X\sqrt{T_1}}{\sigma_Y\sqrt{T_2}}\tilde{\rho}, \\
m^2 &= \tilde{\rho}^2{\sigma_X}^2T_1, \\
{\sigma_1}^2 - m^2 &= {\sigma_X}^2T_1 - \tilde{\rho}^2{\sigma_X}^2T_1 = {\sigma_X}^2T_1(1-\tilde{\rho}^2), \\
\tilde{\rho} &= \rho\sqrt{\frac{min(T_1,T_2)}{max(T_1,T_2)}}, \\
\bar{A}(w) &= aX(0)\exp(\mu_XT_1 + \frac{\sigma_X\sqrt{T_1}}{\sigma_Y\sqrt{T_2}}\tilde{\rho}w - 0.5\tilde{\rho}^2{\sigma_X}^2T_1), \\
\bar{K}(w) &= aY(0)\exp(\mu_YT_2 - 0.5{\sigma_Y}^2T_2 + w) + aK, \\
d_{1,2}(w) &= \frac{\ln(\bar{A}(w)/\bar{K}(w)) \pm 0.5{\sigma_X}^2T_1(1-\tilde{\rho}^2)}{\sqrt{{\sigma_X}^2T_1(1-\tilde{\rho}^2)}}.
\end{aligned}
$$

誌謝

作者非常感謝學報編輯委員及審查委員們的寶貴意見, 在此表達由衷的謝意。文中若有任何錯誤或疏漏, 當屬作者之責。

參考文獻

Brace, A., Gatarek, D., and Musiela, M. (1997). The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, **7**, 127–155.

Brigo, D. and Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models: Theory and Practice.* New York: Springer Verlag.

Hunt, P. and Pelsser, A. (1998). Arbitrage-free pricing of quanto-swaptions. *The Journal of Financial Engineering*, **7**, 25–33.

Hunter, C. J., Jackel, P., and Joshi, M. S. (2001). Drift approximations in a forward-rate-based LIBOR market model. *Risk Magazine*, **14**, 1–10.

Hull, J. and White, A. (1999). Forward rate volatilities, Swap rate volatilities, and the implementation of the LIBOR market model. *Journal of Fixed Income*, **10**, 46–62.

Jamshidian, F. (1997). LIBOR and swap market model and measure. *Finance and Stochastics*, **1**, 293–330.

Liao, S. L., Lin, S. K., and Tsai, H. P. (2010). An efficient valuation and hedging of constant maturity swap products under BGM model. *Journal of the Chinese Statistical Association*, **48**, 161–189.

Margrabe, W. (1978). The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, **33**, 177–286.

Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997). Continuous-time term structure models: a forward measure approach. *Finance and Stochastics*, **1**, 261–291.

Rebonato, R. (2004). *Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox.* New York: John Wiley & Sons.

[Received March 2011; accepted July 2011.]

A VALUATION OF QUANTO CONSTANT MATURITY SWAP PRODUCTS UNDER THE THREE-FACTOR BGM MODEL

SZU-LANG LIAO, HSIU-PI YANG, and HUNG-PIN TSAI

Department of Money and Banking, Nation Chengchi University

ABSTRACT

Quanto constant maturity swaps (Quanto CMS) products can be used to manage the spread risk of foreign interest rate swap. Monte Carlo simulation is usually used to evaluate Quanto CMS products, but it's often time consuming to use Monte Carlo simulation method. In this paper we derive an approximated dynamic process of the foreign forward swap rate under the three-factor BGM model with the characteristic which the foreign forward swap rate is approximated to the linear combination of the foreign forward LIBOR rate. We use no-arbitrage analytical formula to evaluate Quanto CMS products under the three-factor BGM model. Then we apply this approximated formula to evaluate Quanto CMS Spread option and Quanto CMS Ratchet option. The numerical analysis shows that the relative errors between the Monte Carlo simulations and the approximated analytic formulas are very small for the both examined option products. Moreover, the calculation time of the analytic formulas method is much smaller than the Monte Carlo simulation method for both products.

Key words and phrases: Quanto CMS, Quanto CMS Spread option, Quanto CMS ratchet option, three-factor BGM model, Monte Carlo simulation.

JEL classifications: G13.