一般化的F分布

Generalized F Distribution

李 朝 元

政治大學統計系助教

大多數的作者採用下列的定義及定理介紹F分布：

〔定義一〕F分布：若隨機變數X之分布具有下列機率密度函數，則稱其為自由度等於m及n的F分布，以F(m, n)表示之，

$$f_x(x;m,n)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{1}{2}(m+n)}, & x>0\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

式中m及n為正整數，係此分布之特徵數。

〔定理一〕設U及V為互相獨立的隨機變數，其分布各為χ^2_m及χ^2_n。令X＝(U／m)／(V／n)，則X之分布為F(m, n)。(註1)

筆者欲將F分布的定義及定理一般化如下：

〔定義二〕(同上〔定義一〕)，唯式中m及n為正數(positive real numbers)，係此分布之特徵數。

〔定理二〕設U及V為互相獨立的隨機變數，其分布各為$\Gamma(\alpha_1,\beta_1)$及$\Gamma(\alpha_2,\beta_2)$，且在EU＝EV。令X＝U／V，則X之分布為F$(2\alpha_1, 2\alpha_2)$。

〔證〕令 $x=u/v$ ，$y=v$

則 $u=xy$ ，$v=y$ ，$|J|=|y|=y$

$$f(x,y)=g_1(u)g_2(v)|J|$$

$$=\frac{(xy)^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}}e^{-\frac{xy}{\beta_1}}e^{-\frac{y}{\beta_2}}y,\quad x,y>0$$

其中 $e^{-\frac{xy}{\beta_1}}e^{-\frac{y}{\beta_2}}=e^{-\frac{y(\beta_1+\beta_2X)}{\beta_1\beta_2}}$

∴當X＞0時

$$f_1(x)=\frac{x^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1\beta_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\beta_1+\beta_2x)^{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot$$

$$\int_0^\infty\frac{(\beta_1+\beta_2x)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1\beta_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}e^{-\frac{y(\beta_1+\beta_2x)}{\beta_1+\beta_2}}y^{\alpha_1+\alpha_2-1}dy$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\frac{x^{\alpha_1-1}}{(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}x)^{\alpha_1+\alpha_2}}\quad\text{(註2)}$$

又當 $EU=\alpha_1\beta_1=\alpha_2\beta_2=EV$

$\Rightarrow\beta_2/\beta_1=\alpha_1/\alpha_2$

代入 $f_1(x)$，得

$$f_1(x)=\frac{\Gamma(\frac{2\alpha_1+2\alpha_2}{2})}{\Gamma(\frac{2\alpha_1}{2})\Gamma(\frac{2\alpha_2}{2})}\left(\frac{2\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^{\frac{2\alpha_1}{2}}\frac{x^{\frac{2\alpha_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{2\alpha_1}{2\alpha_2}x\right)^{\frac{1}{2}(2\alpha_1+2\alpha_2)}}$$

〔系一〕（同上〔定理一〕）

〔證〕$U\sim X_m^2 \Rightarrow U/m\sim\Gamma(\frac{m}{2},\frac{2}{m})$

$V\sim X_n^2 \Rightarrow V/n\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{2}{n})$

$E(U/m)=1=E(V/n)$

〔例〕分由$N_1(\mu_1,\sigma_1^2)$及$N_2(\mu_1,\sigma_2^2)$抽出的兩樣本

$O_1:(X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n_1}),\ n_1\geq 2$

$O_2:(X_{21},X_{22},\cdots,X_{2n_2}),\ n_2\geq 2$

計算出不偏變異數$S_1'^2$及$S_2'^2$

$S_1'^2\sim\Gamma(\frac{n_1-1}{2},\frac{2\sigma_1^2}{n_1-1})$

$S_2'^2\sim\Gamma(\frac{n_2-1}{2},\frac{2\sigma_2^2}{n_2-1})$

當$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$為眞時，

$ES_1'^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2=ES_2'^2$

$S_1'^2/S_2'^2\sim F(n_1-1,n_2-1)$

若定義未經一般化，則〔定理二〕須加一條件：$2\alpha_1$及$2\alpha_2$為正整數。如此的〔定義一〕，加條件的〔定理二〕及〔系一〕，仍可成一體系。F分布經此一般化是否有其價值，敬祈諸先進指教。

註1：抄自：魏慶澤先生，數理統計學，第一冊，機率分布論，第373頁之〔定義7.7〕及第374頁之〔定理7.12〕。

註2：若$\beta_1=\beta_2$則為皮爾森第四型（Pearson Type Ⅳ）的標準型分布，其特徵數為α_1及α_2。