

國立政治大學金融研究所

碩士論文

指導教授：江彌修 博士

馬可夫狀態轉換下最低條件風險值集中度投資

組合之建構

**On the Construction of Minimum CVaR
Concentration Portfolios under Markovian
Regime Shifts**

研究生：賴韋志 撰

中華民國一零三年六月

摘 要

本文主要研究的投資組合策略為 Boudt et al. (2013)所提出的最低條件風險值集中度(Minimum CVaR Concentration, 簡稱 MCC)投資組合, 並且延伸 Kritzman et al. (2012)以及 Wang et al. (2012)將馬可夫狀態轉換模型應用於資產配置的方法, 在市場狀態為狀態一(熊市)之下, 將 MCC 投資組合下方風險控制在 3.00% 之下, 建構一狀態相關(regime-dependent)MCC 投資組合。

綜合本研究之實證結果, 發現 MCC 投資組合在市場狀態為狀態一(熊市)之下, 表現較狀態二(正常市場)差, 主要原因為 MCC 投資組合在狀態一(熊市)時仍以達到均衡風險分散為主要目標, 卻忽略了投資組合下方風險上升。而本研究所建構的狀態相關 MCC 投資組合, 在熊市時的確能提升平均報酬率, 而且降低平均報酬率的標準差、95% 平均下方風險(CVaR)以及每月最大損失等風險。

關鍵字：等值風險權重投資組合、最低條件風險值集中度投資組合、馬可夫狀態轉換模型。

Abstract

The main portfolio strategy exploited in this paper is the Minimum CVaR Concentration (MCC) introduced by Boudt et al. (2013). Our paper is closely related to recent literature on drawing inference of asset allocation strategy from Markov regime-switching model, for instance, Kritzman et al. (2012) and Wang et al. (2012). We built a regime-dependent MCC portfolio under a bearish market condition by fixing the downside risk at a maximum of 3.00%.

From the empirical evidence, we conclude that the main reason MCC portfolio performs better under normal market condition (condition 2) than under bearish market condition (condition 1) is because under condition 1, MCC portfolio strives to achieve risk diversification and ignores the increase of downside risk. While the regime-dependent MCC we propose can effectively increase average return, and lower average standard deviation, CVaR (95%), and biggest monthly loss.

Keywords : Risk Parity Portfolios · Minimum CVaR Concentration Portfolios · Markov regime-switching model

目 錄

| | |
|------------------------------------|----|
| 第壹章、研究背景與動機..... | 1 |
| 第貳章、文獻回顧..... | 4 |
| 一、資產配置..... | 4 |
| 二、下方風險資產配置..... | 5 |
| 三、投資組合風險分散..... | 6 |
| 四、馬可夫狀態轉換模型於資產配置上的應用..... | 7 |
| 第參章、研究方法..... | 10 |
| 一、風險預算投資組合..... | 10 |
| (一)定義邊際以及總風險貢獻..... | 10 |
| (二)等值風險權重策略的理論特性..... | 11 |
| (三)等值風險權重策略數值解法..... | 12 |
| 二、下方風險預算投資組合..... | 14 |
| (一)風險值..... | 14 |
| (二)定義投資組合下方風險與資產下方風險貢獻..... | 15 |
| (三)建構 MCC 投資組合..... | 18 |
| 三、馬可夫狀態轉換模型..... | 19 |
| (一)馬氏距離(Mahalanobis distance)..... | 19 |
| (二)馬可夫狀態轉換模型參數校正..... | 20 |
| 四、實證方法..... | 22 |
| 第肆章、實證結果..... | 24 |
| 一、資料描述..... | 24 |
| 二、MCC 投資組合實證結果分析..... | 26 |
| (一)不同市場之下的 MCC 投資組合表現..... | 26 |
| (二)MCC 投資組合下方風險與資產下方風險貢獻集中度分析..... | 28 |
| 三、馬可夫狀態轉換結果分析..... | 29 |
| (一)馬氏距離..... | 29 |
| (二)馬可夫狀態轉換判斷結果..... | 30 |
| 四、投資組合結果比較與分析..... | 32 |
| (一)投資組合績效比較..... | 32 |
| (二)下方風險、權重以及資產下方風險貢獻集中度分析..... | 36 |
| (三)投資組合權重分配以及資產下方風險分配分析..... | 38 |
| (四)投資組合累積報酬率比較..... | 41 |
| 參考文獻..... | 45 |

圖目錄

| | |
|----------------------------------|----|
| 圖一 標的資產累積報酬率走勢圖..... | 26 |
| 圖二 MCC 投資組合下方風險與資產下方風險貢獻集中度..... | 29 |
| 圖三 S&P500 指數與月平均馬氏距離比較..... | 30 |
| 圖四 S&P500 指數與馬可夫狀態轉換比較..... | 32 |
| 圖五 投資組合下方風險比較..... | 37 |
| 圖六 投資組合權重集中度比較..... | 37 |
| 圖七 投資組合下方風險貢獻集中度比較..... | 38 |
| 圖八 MCC 投資組合權重分配..... | 39 |
| 圖九 MCC+馬可夫投資組合權重分配..... | 39 |
| 圖十 MCC 投資組合資產下方風險分配..... | 40 |
| 圖十一 MCC+馬可夫投資組合資產下方風險分配..... | 41 |
| 圖十二 投資組合累積報酬率比較..... | 42 |

表目錄

| | |
|--|----|
| 表一 1996/02/01-2013/12/31 標的資產每日報酬敘述統計..... | 25 |
| 表二 MCC 投資組合在不同市場之下的績效比較..... | 27 |
| 表三 馬可夫狀態轉換模型結果..... | 31 |
| 表四 標的資產在所有期間與狀態一(熊市)之下的比較..... | 33 |
| 表五 兩投資組合在不同期間下之比較..... | 35 |

第壹章、研究背景與動機

本文係以 MCC 投資組合策略為主要研究目標，並運用馬可夫狀態轉換模型來判斷市場狀態，改善 MCC 投資組合在熊市時的表現。MCC 資產配置策略為 Boudt et al. (2013)所建構的最低條件風險值集中度(Minimum CVaR Concentration，簡稱 MCC)投資組合，且為一均衡風險分散策略。但 Boudt et al. (2013)實證上以一不考慮風險分散的最低條件風險值(Minimum CVaR)策略與 MCC 投資組合作比較，發現 MCC 投資組合在正常市場的狀態下平均年化報酬率較最低條件風險值投資組合高，但在熊市時，平均年化報酬率卻大幅下滑，也較最低條件風險值投資組合低，顯示出 MCC 投資組合策略在熊市時仍以均衡下方風險分散為主要目標是有問題的，且 Ang and Chen (2002)及 Hess (2010)對於投資組合風險分散提出論證，他們認為當金融市場處於動盪不安(turbulent market)或者熊市時，資產報酬率的波動度以及資產間相關性會大幅上升，較正常市場(normal market)或者是牛市(bull market)來的高，使得風險分散的效益大打折扣，例如 2008 年全球金融危機，造成全球投資環境動盪，近八成的資產價格大幅下滑，資產間的相關性也大幅上升，而這個論證也代表了 MCC 投資組合雖然達到了均衡下方風險分散的目的，但並未充分的沖銷掉投資組合下方風險，忽略了投資組合下方風險上升。

近年來風險意識增長，以風險為衡量指標的資產配置方式也應運而生，Qian (2005)以報酬的標準差作為風險衡量指標，提出了等值風險權重(Risk Parity)的資產配置方法，強調將投資組合的風險等值分散在各個資產上，達到平均風險分散，而這個資產配置策略在實務上也被廣泛地運用，例如避險基金或者是退休基金。

隨著金融市場的發展，風險管理在金融體系越顯重要，衡量風險的方法也跟著推陳出新，Jorion (1996)提出風險值(Value-at-Risk，簡稱 VaR)的觀念，作為衡量投資組合在 α %信賴水準下的最大損失，隨後 Rockafellar et al. (2000)提出條件風險值(Conditional Value-at-Risk，簡稱 CVaR)，作為衡量投資組合下方風險的指

標。而這些新的風險衡量概念很快地被後期的學者應用在風險預算(Risk Budget)的資產配置方法中，運用不同的風險衡量方法以確切掌握投資組合的風險，增進投資的效率性。Boudt et al. (2013)提出以條件風險值為下方風險衡量指標，將投資組合條件風險值分解成各資產的下方風險貢獻總和，建構一最低條件風險值集中度的投資組合，將下方風險均衡分散在各標的資產上。

但在全球經濟環境變遷加快的情勢下，使得傳統的靜態資產配置策略(buy and hold)不再適用，而極端事件發生的頻率增加，也讓投資人不得不隨市場狀態的改變作投資組合策略調整，因此，對於投資組合經理人或一般投資人而言，如何因應市場狀態來做投資組合策略的調整是一大挑戰。

而在探討狀態轉換的文獻中，Kritzman et al. (2012)認為在不同的市場狀態之下應做不同的資產配置，因此，Kritzman et al. (2012)運用馬可夫狀態轉換模型(Markov regime-switching model)來判斷每一期的市場狀態為正常市場或熊市，藉此來調整投資組合的權重配置。此外，Wang et al. (2012)也利用馬可夫狀態轉換模型判斷市場狀態，並以 Markowitz (1952)平均數-變異數模型做動態的資產配置，在正常市場時將投資組合下方風險控制在 7.00% 之下，而在熊市時則將投資組合下方風險控制在 3.00% 之下。

綜合以上的背景與動機，本研究擬利用 Boudt et al. (2013)所提出的方法來建構 MCC 投資組合，並且延伸 Kritzman et al. (2012)以及 Wang et al. (2012)的方法，利用 S&P500 的 10 個類別指數計算馬氏距離(Mahalanobis distance，簡稱 MD)，作為衡量熊市的指標，再利用馬可夫狀態轉換模型來判斷市場狀態，若判斷結果為正常市場的機率大於 50%，則以原本的 MCC 均衡下方風險分散策略來進行資產配置；若判斷結果為熊市的機率大於 50%，則以降低下方風險為優先考量，將 MCC 投資組合的下方風險控制在 3.00% 之下。

此外，本研究主要有三點貢獻，第一，本研究在實證上發現，MCC 投資組合在熊市時仍以下方風險均衡分散為主要目標，卻忽略了投資組合整體下方風險

大幅上升，與 Ang and Chen (2002)及 Hess (2010)的論證不符，為 MCC 投資組合在熊市時表現不好的主因。第二，本研究利用馬可夫狀態轉換模型來判斷市場狀態，若判斷為熊市，則以降低投資組合下方風險為優先考量，將投資組合下方風險控制在 3.00%之下，建構一狀態相關(regime-dependent)的 MCC 投資組合。第三，在實證上發現，本研究利用馬可夫狀態轉換模型所建構的狀態相關 MCC 投資組合，的確能提升 MCC 投資組合的累積報酬率，且降低 MCC 投資組合在熊市時的報酬率波動度，讓 MCC 投資組合能穩定成長。

本研究共分五章，首先在第壹章介紹本研究的研究背景與動機；其次第貳章為文獻回顧，分為資產配置、下方風險資產配置、投資組合風險分散以及馬可夫狀態轉換模型應用等文獻探討；在第參章的研究方法中將詳述本研究所討論的投資組合策略、風險值的應用、馬可夫狀態轉換模型架構以及實證方法；而在第肆章的實證結果中將針對 MCC 投資組合以及經由馬可夫狀態轉換調整的 MCC 投資組合做比較；最後第伍章提出本研究之結論。

第貳章、文獻回顧

本章文獻回顧共分四節來探討不同主題的文獻，首先為資產配置文獻；其次為以條件風險值為衡量指標的下方風險資產配置文獻；接著為投資組合風險分散文獻，最後為可夫狀態轉換模型文獻。

一、資產配置

Markowitz (1952) 提出平均數-變異數模型(Mean-Variance model)，開創了現代投資組合理論，為投資大眾廣為使用。而此模型是假設在資產過去報酬率為未來預期報酬率之不偏估計值下，利用歷史報酬率資料求得的平均數與變異數-共變異數做為模型參數，推導出最適資產配置權重，建構投資組合效率前緣線，以達到單一風險下最大報酬，且固定報酬下極小化風險的效果。

隨著風險意識增長，以風險為衡量指標的資產配置方式也應運而生，Denault (2001)推導出以個別資產風險貢獻為風險分配的原則，且為該資產權重的函數，將資產風險貢獻定義為該資產權重乘上該資產權重對投資組合風險的一階偏微分，並且適用於標準差、風險值以及條件風險值等權重的線性齊次(linear-homogeneous)函數，為風險預算配置方法奠定良好基礎。

Qian (2005)提出了利用風險預算來做資產配置的概念，並且提出了等值風險權重資產配置策略，強調應以資產風險貢獻為風險分散的目標，將風險等值分散在各個資產上，達到真正的風險分散。此外，風險預算投資組合並不需要對資產報酬率做任何假設，也不用估計資產的報酬率期望值，因而被廣泛使用；Qian (2006)對資產風險貢獻的意涵做更深入的解釋，從理論或實證上來看，不管是以變異數或風險值來衡量每個資產的風險貢獻，都與該資產的預期貢獻損失很相近，因此，他認為以資產風險貢獻來做為風險預算投資組合的指標是可行的。

Maillard et al. (2010)更深入探討等值風險權重策略的性質，並與相等權重(Equal Weight)策略以及最小化風險(Minimum Variance)策略做比較，在實證上發現，等值風險權重策略不管是運用在美國股票、農產品或者全球風險分散投資組

合上，其標準差皆會介於兩策略之間，小於相等權重策略，大於最小化風險策略。此外，Maillard et al. (2010)也針對這三種投資組合的權重集中度以及資產風險貢獻集中度做比較，發現在權重集中度部分，最小化風險策略最大，其次為等值風險權重策略，而相等權重策略的權重集中度為 0；在資產風險貢獻集中度部分，最下化風險策略仍最大，其次為相等權重策略，而等值風險權重策略的資產風險貢獻集中度為 0，可見，等值風險權重策略為一介於相等權重策略以及最小化風險策略的投資組合。

二、下方風險資產配置

近年來極端事件發生的頻率增加，例如 2000 年到 2002 年的科技泡沫以及 2008 年的金融危機等，都讓資產價格大幅下跌，使投資人遭受極大的損失，也因此，對於資產報酬分配非常態的假設、負偏態、超額峰態以及胖尾現象等，都成了現代資產配置最關注的要點，下方風險意識也因此增加。

Rockafellar et al. (2000)提出另一種衡量下方風險的方法為條件風險值(Conditional Value-at-Risk，簡稱 CVaR)，做為風險值的輔助方法，並將條件風險值運用在投資組合最適化過程，而條件風險值又稱尾部風險值(tail VaR)或期望差額(expected shortfall)。此外，Artzner et al. (1999)以及 Pflug (2000)證明條件風險值(CVaR)具有風險衡量指標的連貫性(coherent)且為權重的凸性(convex)函數，而這些都是風險值(VaR)所沒有的，因此，以條件風險值來衡量投資組合下方風險較風險值更具指標性。

Boudt et al. (2008)在資產報酬率非常態的假設下，推導出以條件風險值為投資組合下方風險以及資產下方風險貢獻的明確估計式，稱為修正條件風險值(modified CVaR)，並證明投資組合下方風險為各資產的下方風險貢獻總和。此外，Boudt et al. (2008)所推導出的明確估計式為 Boudt et al. (2013)建構最低條件風險值集中度投資組合(Minimum CVaR Concentration，簡稱 MCC)的基礎。

Alankar et al. (2012)利用選擇權市場的資訊來計算隱含的條件風險值

(implied expected tail loss, 簡稱 ETL), 以此隱含條件風險值作為風險預算的衡量指標, 建構等值下方風險權重(Tail-Risk Parity)投資組合, 並以股票及債券兩標的資產做實證, 發現等值下方風險權重投資組合較原本的等值風險權重策略降低尾部損失, 也能保有更多上漲的獲利, 此外, 也發現這個方法對於下方風險的保護較選擇權來的便宜。

Boudt et al. (2013)提出了以條件風險值為下方風險衡量指標, 建構一最低條件風險值集中度投資組合, 並以不同類別的資產標的做投資組合實證, 發現 MCC 投資組合在熊市時的平均報酬率並不理想, 且較最小化下方風險策略(Minimum CVaR)來的低。

三、投資組合風險分散

然而, 儘管以條件風險值作為資產配置的衡量指標, 實證上 Boudt et al. (2013)提出的 MCC 投資組合或者 Alankar et al. (2012)提出的等值下方風險權重投資組合仍無法逃過 2008 年金融危機的魔掌, 使投資人遭受極大的損失, 因此, 本節主要針對投資組合風險分散效益作探討。

Ang and Chen (2002)以狀態轉換模型(regime-switching model)來捕捉相關性的不對稱, 並且以美國股票與美國整體市場之間的相關性做驗證, 發現在下跌市場(downturn market)或更極端的下跌走勢時, 相關性會大幅上升, 且較上升市場(upside market)來的大, 而且在相關性條件於下跌的情況下, 會較條件於常態分配的相關性高11.6%, 也因此, Ang et al. (2002)認為當所有資產在熊市都一起下跌時, 風險分散的效益會被高估。

Butler et al. (2002)以常態分配來捕捉熊市(bear market)時國際間股票市場的相關性, 發現當市場狀態為熊市或動亂市場(turbulent market)時, 所觀察到的國際間股票市場相關性會高於常態分配假設下的預期, 此外, 在熊市或動亂市場時, 相等權重國際風險分散投資組合的報酬會較常態分配所預期的低超過2.00%, 因此, 當熊市時的相關性大於常態分配的假設下, 國際風險分散投資組合並無法得

到風險分散帶來的好處。

Hess (2010)利用馬可夫狀態轉換模型區分兩種不同的狀態，分別為高報酬率、低報酬率標準差狀態以及低報酬、高報酬率標準差狀態，並以瑞士股票市場的18個類別指數標的做實證，將投資組合分為兩種，第一種為Markowitz (1952)平均數-變異數模型所得的資產配置，第二種為在平均數-變異數模型資產配置下，限制這18個標的資產權重的變動要在原本所佔指數的平均權重上下10%內，意即分散權重到各個類別指數上達到風險分散，實證發現，在高報酬、低報酬率標準差狀態下，第二種投資組合的平均報酬率較高，且標準差較低；在低報酬率、高報酬率標準差狀態下，第一種投資組合平均報酬率較高，因此，Hess (2010)認為投資人應該在高報酬率、低報酬率標準差的市場情況下時進行風險分散，而在低報酬率、高報酬率標準差的市場情況下降低風險分散。

四、馬可夫狀態轉換模型於資產配置上的應用

經由上述文獻對於風險分散的論證，說明了風險分散並非在所有市場狀態之下都有效，也因此，風險分散的投資組合策略如MCC投資組合以及等值下方風險權重投資組合，不能一直以最大化風險分散為優先考量，而是應該在不同市場狀態下做不同的調整。本節將針對馬可夫狀態轉換模型應用在資產配置上的文獻作探討。

首先，Hamilton (1989)將Goldfeld et al. (1973)所提出的馬可夫轉換回歸模型(Markov switching regression)運用到時間序列上，發展出單變量(univariate)馬可夫狀態轉換模型(Markov regime-switching model)，企圖捕捉參數平均在自我迴歸(autoregression)過程中的特性改變。實證上，Hamilton(1989)利用美國戰後的實質國民生產總值(Gross national product，簡稱GNP)成長率，企圖捕捉美國的景氣循環現象，並分為經濟成長與經濟衰退兩狀態，發現在經濟成長狀態之下，平均實質GNP成長率為1.522%，且有90%的機率下季仍為經濟成長狀態，存續期間約為10季；在經濟衰退狀態之下，平均實質GNP成長率為-0.358%，且有75%的機率

下季仍為經濟率退狀態，存續期間約為4年。而Hamilton (1989)所提出的馬可夫狀態轉換模型也成了後期學者廣泛使用的狀態轉換模型。

Ang and Bekaert (2002)利用Hamilton (1989)所提出的馬可夫狀態轉換模型來判斷市場是處於狀態一：高資產相關性及高波動度，還是狀態二：低資產相關性及低波動度，並利用美國、英國及德國的股票市場建構國際風險分散投資組合，而在實證上發現，當市場處於狀態一時，應將資產配置在較低風險的標的上，例如現金、美國或德國股票；此外，Ang et al. (2002)也提出當無風險資產存在時，則忽略了狀態轉換之下的資產配置會遭受較大的損失，意即在高資產相關性及高波動度的市場狀態下，應將資產配置在無風險資產上。

Ang and Bekaert (2004)將馬可夫狀態轉換模型用來判斷市場時機(market timing)，建構狀態相關投資組合策略(regime-dependent strategy)，當市場狀態為高報酬率波動度時，將資金配置在低風險的標的上。而在實證上也發現，狀態相關投資組合策略比狀態不相關投資組合策略(non-regime-dependent strategy)的累積報酬率高出許多，因此，Ang et al. (2004)也建議積極型投資組合經理人，應使用此模型來判斷市場狀態是處於高報酬率波動度還是低報酬率波動度，藉此來增加投資組合價值。

Wang et al. (2012)利用 AR(1)-GJR-GARCH(1,1)-EVT-COPULA 模型來捕捉資產報酬的特性，包括報酬率的自我迴歸、報酬率波動度的不對稱以及叢聚性、厚尾現象以及資產池間的相關性等，並以蒙地卡羅模擬法模擬出資產連續 21 天的報酬，在模擬 10000 次的情況之下，即可預期未來一個月投資組合的條件風險值，並以此條件風險值時間序列作為馬可夫狀態轉換模型的變數，判斷市場為正常風險市場(低報酬率波動度、低資產相關性)還是高風險市場(高報酬率波動度、高資產相關性)。在實證上，Wang et al. (2012)建構一全球多資產類別投資組合，並以 Markowitz (1952)平均數-變異數模型做資產配置，將高風險狀態下的投資組合 CVaR 控制在 3.00% 之下，而在低風險狀態下，投資組合 CVaR 控制在 7.00%

之下，發現這樣不僅增加投資組合的報酬，報酬的波動度也會降低，讓投資組合穩定成長。

Kritzman et al. (2012)利用三種不同的變數來判斷市場狀態，分別為以 S&P500 的 10 個類別指數來計算馬氏距離，並用此指標來衡量熊市；以美國每月經季節調整的消費者物價指數(Consumer price index)成長率來衡量通貨膨脹；以美國每季經季節調整的實質國民生產總值(GNP)成長率來衡量經濟衰退。實證上，Kritzman et al. (2012)建議在熊市時應減持股票、外匯以及與新市場債券等風險較高的資產，若同時為經濟衰退期間與通貨膨脹期間，則應再減持股票資產與美國公債，且增加非景氣循環股、抗通膨債券及黃金商品的持有，並發現，這樣的投資組合策略績效較靜態資產配置來的好，報酬的波動度以及每月最大損失也能因為市場狀態的判別而大幅降低。

綜合以上文獻回顧，本研究認為以風險分散為目標的資產配置策略忽略了市場狀態的改變，在熊市甚至是金融危機期間，仍以最大風險分散或均衡風險分散為資產配置目標，但這樣的資產配置方法並無法充分的沖銷掉投資組合下方風險，因此，本研究係以 MCC 投資組合為主要資產配置策略，並利用馬可夫狀態轉換模型來判斷市場狀態，將熊市時的 MCC 投資組合下方風險控制在 3.00% 之下，建構一狀態相關(regime-dependent)的 MCC 投資組合。

第參章、研究方法

本章共分四個部分，首先定義並介紹風險預算(Risk Budget)的資產配置方法，並介紹其中的一個特例—等值風險權重(Risk Parity)策略，其次以相同的概念，將風險衡量指標從原本的變異數更換為條件風險值(CVaR)，建構一最低條件風險值集中度(Minimum CVaR Concentration，簡稱 MCC)投資組合，接著介紹馬可夫狀態轉換模型的意涵，最後講解本研究所採用的標的資產與實證計算方法。

一、風險預算投資組合

Denault (2001)推導出以個別資產風險貢獻為資產分配的原則，且為該資產權重的函數，將資產風險貢獻定義為該資產權重乘上該資產權重對投資組合風險的一階偏微分，而 Qian (2005)則以 Denault (2001)提出的資產風險貢獻定義，建構風險預算投資組合，並且提出了等值風險權重資產配置的概念。本節首先定義資產風險貢獻與投資組合總風險之間的關係，且定義何為等值風險權重投資組合，接著討論等值風險權重的理論特性，最後提出兩種數值求解法來尋找等值風險權重投資組合的最適權重。

(一)定義邊際以及總風險貢獻

首先假設投資組合有 n 個風險性資產，投資組合權重 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ， σ_i 為 i 資產的變異數， σ_{ij} 為資產 i 與資產 j 之間的共變異數， Ω 為所有資產間共變異數矩陣，投資組合風險(標準差)為 $\sigma(w) = \sqrt{w^T \Omega w} = \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij}$ ，則 i 資產的邊際風險貢獻如下：

$$\partial_{w_i} \sigma(w) = \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_i} = \frac{w_i \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}}{\sigma(w)} = \frac{(\Omega w)_i}{\sigma(w)} \quad (1)$$

邊際風險貢獻代表 i 資產權重變動一單位，投資組合風險的變動，因此，我們可以將個別資產風險總共貢獻定義如下：

$$\sigma_i(w) = w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w) \quad (2)$$

則根據第(1)式第(2)式可將投資組合標準差分解如下：

$$\sigma(w) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(w) \quad (3)$$

因此，我們可以將投資組合風險視為個別資產風險貢獻的總和。

有了上述個別資產的風險貢獻定義後，等值風險權重策略的概念即為尋找一投資組合權重 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ，使投資組合內所有標的資產的風險貢獻都相同，再加上不能放空 ($0 \leq w \leq 1$) 以及權重加總等於 1 ($\sum_{i=1}^n w_i$) 的限制，則等值風險權重可以一簡單的數學式表示如下：

$$w^* = \left\{ w \in [0,1]^n : \sum w_i = 1, w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w) = w_j \times \partial_{w_j} \sigma(w) \text{ for all } i, j \right\} \quad (4)$$

(二)等值風險權重策略的理論特性

本小節將分為兩部分來探討，第一部分為資產數 $n=2$ 的情況下，等值風險權重投資組合特性，第二部分為資產數 $n>2$ 且在所有資產間相關係數固定以及各資產報酬標準差固定的兩種情況下，探討等值風險權重投資組合特性。

首先我們假設等值風險權重投資組合只有兩種風險性資產， ρ 為兩資產的關聯係數，且 $w = (w_1, 1 - w_1)$ ，則兩資產的風險貢獻分別表示如下：

$$\sigma_1(w) = \frac{w_1^2 \sigma_1^2 + w_1(1 - w_1) \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma(w)} \quad (5)$$

$$\sigma_2(w) = \frac{(1 - w_1)^2 \sigma_2^2 + w_1(1 - w_1) \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma(w)} \quad (6)$$

而等值風險權重策略即為尋找一權重 w^* ，使兩資產的風險貢獻相等，即 $\sigma_1(w) = \sigma_2(w)$ ，而權重 w^* 可表示如下：

$$w^* = \left(\frac{\sigma_1^{-1}}{\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}}, \frac{\sigma_2^{-1}}{\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}} \right) \quad (7)$$

由上第(7)式我們可以發現投資組合的權重解 w^* 與兩資產的相關係數無關，且資產所分配到的權重與該資產的報酬標準差成反比。

接著，當資產數增加為 n 時，參數的數目會快速增加，共有 n 個個別資產變異數以及 $n \times (n-1)/2$ 個資產間相關係數，因此，我們分為固定相關係數以及固定變異數兩部分來討論等值風險權重策略的特性。

首先，我們假設所有資產的相關係數都固定為 ρ ，則 i 資產的風險貢獻為 $\sigma_i(w) = w_i \sigma_i ((1-\rho)w_i \sigma_i + \rho \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j) / \sigma(w)$ ，而等值風險權重策略即為讓所有資產的風險貢獻都相等 $\sigma_i(w) = \sigma_j(w)$ ，可得 i 資產的權重如下：

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}} \quad (8)$$

由上第(8)式可以發現每個資產的權重都只與自己的報酬標準差有關，而且報酬標準差越大，所分配到的權重越小。

接著，我們假設所有資產的報酬標準差皆固定為 σ ，但資產間相關係數不同，則可得 i 資產的權重如下：

$$w_i = \frac{(\sum_{k=1}^n w_k \rho_{jk})^{-1}}{\sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n w_k \rho_{jk})^{-1}} \quad (9)$$

由上第(9)式我們可以發現，每個資產的權重與資產間相關係數的權重平均呈現反向關係，而且權重為內生變數，因此，最適權重並不存在封閉解，必須用數值方法來求解。同樣的，當我們不固定這兩項變數時，權重為自己的內生變數，因此，最適權重並不存在封閉解，必須由數值方法來求得，因此，在下小節 3.1.3 我們將探討兩種不同的等值風險權重數值求解法。

(三)等值風險權重策略數值解法

首先本研究介紹第一種求解法為尋找個資產間風險貢獻差異平方和最小的權重解，數學式如下：

$$w^* = \operatorname{argmin} f(w) \quad (10)$$

$$\text{u. c. } \begin{cases} 1^T w = 1 \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

$$f(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i(\Omega w)_i - w_j(\Omega w)_j)^2$$

其中， $f(w)$ 為衡量資產間風險貢獻的差異，而當 $f(w^*) = 0$ ，即為等值風險權重投資組合。

第二種數值求解法為在投資組合權重充分分配限制下，尋找最小化投資組合風險的權重解，數學式如下：

$$w^* = \operatorname{argmin} \sqrt{w^T \Omega w} \quad (11)$$

$$\text{u. c. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln w_i \geq c \\ 1^T w = 1 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

其中， c 為任意常數，而第一條限制式可解釋為限制投資組合權重必須達到充分分散。此外，我們也可以發現上述第(11)式若不考慮第一條限制式的話，即為最小化風險(Minimum Variance)投資組合，因此，等值風險權重投資組合其實就是除了最小化風險之外，還考量了權重的充分分散。

但是在上述的限制式中，加入第二條 $1^T w = 1$ 的限制式會較難求解，因此，可以先刪除這條限制式來求解，數學式如下：

$$x^* = \operatorname{argmin} \sqrt{x^T \Omega x} \quad (12)$$

$$\text{u. c. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln x_i \geq c \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中， x^* 為第(12)式求得的投資組合權重，再以 $w_i^* = x_i^* / \sum_{i=1}^n x_i^*$ 求得投資組合

最式權重 w^* 。

二、下方風險預算投資組合

Boudt et al. (2013)認為以變異數作為風險衡量指標並無法捕捉到資產的偏態與厚尾現象而忽略了下方風險，因此，提出以條件風險值作為風險衡量指標的下方風險預算策略，建構一最低條件風險值集中度(Minimum CVaR Concentration，簡稱 MCC)投資組合。以下，本節將先介紹風險值以及條件風險值的意涵，接著定義投資組合下方風險與資產下方風險貢獻，最後建構 MCC 投資組合。

(一)風險值

Jorion (1996)提出風險值(Value-at-Risk，簡稱VaR)的觀念，即「在一特定期間之內以及既定的信賴水準下(α)，預期會有 $\alpha\%$ 的機率損失小於 $VaR(\alpha)$ 」；舉例來說，若一投資組合在95%之信賴水準下，其每天之VaR為1000萬元，則表示有95%的機率，投資部位未來一天所損失的金額不會超過1000萬元，但有5%的機率在未來一天該投資部位的最大損失金額會超過1000萬元。其可用數學式表達如下：

$$\Pr(y \leq -VaR) = \alpha \quad (13)$$

其中， y 為投資組合損益； α 為信賴水準，介於0和1之間。此外，若想計算未來 N 天的VaR，則可將每日的VaR值乘以 \sqrt{N} 即可，數學式如下：

$$VaR_N(\alpha) = VaR_1(\alpha) \times \sqrt{N} \quad (14)$$

然而 VaR 假設各資產報酬率為常態分配且在未來仍持續不變，但近年來極端事件的發生，如 2008 年的金融危機，使 VaR 嚴重低估，此外，許多實證上都發現標的資產的報酬分配具有厚尾(fat tails)及高峰(highpeaks)等現象，因此在常態分配假設下所計算出的 VaR 將不符合實際的損失情況。

基於改善 VaR 之缺失，Rockafellar et al. (2000)發展出另一種衡量風險的方法，即條件風險值(Conditional Value-at-Risk，簡稱 CVaR)，做為風險值的輔助方法。

而條件風險值又稱尾部風險值(tail VaR)或期望差額(expected shortfall)。

若信賴水準 $\alpha\%$ 下的風險值， $VaR_\alpha(y) = \min\{\alpha \in R : \varphi(y, \theta) \geq \alpha\}$ ，則信賴水準 $\alpha\%$ 下的條件風險值，我們將以符號 $CVaR_\alpha(y)$ 表示，其數學式表達如下：

$$CVaR_\alpha(y) = \int_{y \leq VaR_\alpha(y)} y \times f(y) dy \quad (15)$$

其中， y 為投資組合損益； α 為信賴水準，介於0和1之間； $VaR_\alpha(y)$ 為投資組合損益在信賴水準 $1 - \alpha\%$ 之最大損失。此外，我們可將第(15)式的條件風險值解釋為「在給定投資組合損失超過 $VaR_\alpha(y)$ 下，投資組合的期望損失」。

(二) 定義投資組合下方風險與資產下方風險貢獻

首先，我們將 r_w 定義為投資組合在 w 權重下的報酬，且 r_w 為一連續的密度函數，則在 $\alpha\%$ 信賴水準之下，投資組合下方風險可定義為 $CVaR_w(\alpha)$ ，其數學式表示如下：

$$CVaR_w(\alpha) = -E[r_w | r_w \leq -VaR_w(\alpha)] \quad (16)$$

有了投資組合下方風險後，根據第(1)式對資產風險貢獻的定義，我們可將個別資產的下方風險貢獻定義為 $C_{(i)} CVaR_w(\alpha)$ ，其數學式表示如下：

$$\begin{aligned} C_{(i)} CVaR_w(\alpha) &= w_{(i)} \frac{\partial CVaR_w(\alpha)}{\partial w_{(i)}} \\ &= -E[w_{(i)} r_{(i)} | r_w \leq -VaR_w(\alpha)] \end{aligned} \quad (17)$$

其中， $w_{(i)}$ 與 $r_{(i)}$ 分別為 i 資產的權重與報酬率。此外，我們也可將個別資產的下方風險貢獻以百分比表示如下：

$$\%C_{(i)} CVaR_w(\alpha) = \frac{C_{(i)} CVaR_w(\alpha)}{CVaR_w(\alpha)} \quad (18)$$

由於上述第(16)式與第(17)式的投資組合下方風險及資產下方風險貢獻均為期望值，使投資組合最適化的過程較為困難，因此，我們將利用 Boudt et al. (2008) 所導出的明確估計式做為本研究投資組合下方風險以及資產下方風險貢獻的計算

依據。

首先，我們假設資產報酬為常態分配，可導出投資組合下方風險及資產下方風險貢獻的估計式分別如下：

$$CVaR_w(\alpha) = -w'\mu_t + \sqrt{w'\Omega_t w} \times \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha} \quad (19)$$

$$C_{(i)}CVaR_w(\alpha) = w_{(i)} \left[-\mu_{(i)t} + \frac{(\Omega_t w)_{(i)}}{\sqrt{w'\Omega_t w}} \times \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha} \right] \quad (20)$$

其中， μ_t 為在t時間點之下，所有標的資產的條件常態分配報酬向量； Ω_t 為在t時間點之下，資產間的條件常態分配共變異數矩陣； z_α 為信賴水準 $\alpha\%$ 下的標準常態值； $\phi(\cdot)$ 為標準常態密度函數； $\mu_{(i)t}$ 為在t時間點之下，i資產的條件常態分配報酬。此外，本研究對於 μ_t 與 Ω_t 的計算方法為在t時間點內且給定投資組合報酬率小於 $-VaR_w(\alpha)$ 之下，個別資產的歷史平均報酬與資產間的共變異數矩陣。

但是在實證上，金融資產的報酬率並非常態分配，因此，Boudt et al. (2008) 利用考爾希-費歇爾展開式(Cornish-Fisher expansions)方法，推導出修正的下方風險(modified CVaR)估計式，也是本研究在實證上所採用的方法。在推導投資組合下方風險及資產下方風險貢獻的估計式之前，我們必須先計算一些參數如下：

1. 標的資產間的偏態係數(co-skewness) M_{3t} ，為一 $N \times N^2$ 矩陣。

$$M_{3t} = E[(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' \odot (r_t - \mu_t)'] \quad (21)$$

2. 標的資產間的峰態係數(co-kurtosis) M_{4t} ，為一 $N \times N^3$ 矩陣。

$$M_{4t} = E[(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' \odot (r_t - \mu_t)' \odot (r_t - \mu_t)'] \quad (22)$$

其中， r_t 為在t時間點且給定投資組合報酬小於 $-VaR_w(\alpha)$ 之下，資產的報酬率； μ_t 為在t時間點且給定投資組合報酬小於 $-VaR_w(\alpha)$ 之下，資產的歷史平均報酬率； \odot 為可羅內克乘積(Kronecker product)。

3. 投資組合的二至四階動差如下所示

$$m_{2t} = w' \Omega_t w \quad (23)$$

$$m_{3t} = w' M_{3t} (w \odot w) \quad (24)$$

$$m_{4t} = w' M_{4t} (w \odot w \odot w) \quad (25)$$

4. 投資組合偏態係數 $S_{pt} = m_{3t}/m_{2t}^{3/2}$ 。
5. 投資組合超額峰態 $K_{pt} = m_{4t}/m_{2t}^2 - 3$ 。
6. 二階考爾希-費歇爾展開式-高斯分位函數 g_{at} (Guanssian quantile function)。

$$g_{at} = z_\alpha + \frac{1}{6(z_\alpha^2 - 1)S_{pt}} + \frac{1}{24(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)K_{pt}} - \frac{1}{36(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)S_{pt}^2} \quad (26)$$

有了以上的第(21)式到第(26)式參數定義後，即可將投資組下方風險及資產下方風險貢獻的估計式分別以數學式表示如下：

$$CVaR_w(\alpha) = -w' \mu_t + \sqrt{w' \Omega_t w} \times d_t(\alpha) \quad (27)$$

$$C_{(i)} CVaR_w(\alpha) = w_{(i)} \left[-\mu_{(i)t} + \frac{(\Omega_t w)_{(i)}}{\sqrt{w' \Omega_t w}} \times d_t(\alpha) \right] \quad (28)$$

$$\text{其中， } d_t(\alpha) = 1/\alpha \left\{ \begin{aligned} & \phi(g_{at}) + \frac{1}{24[I^4 - 6I^2 + 3\phi(g_{at})]K_{pt}} + \frac{1}{6[I^3 - 3I^1]S_{pt}} \\ & + \frac{1}{72[I^6 - 15I^4 + 45I^2 - 15\phi(g_{at})]S_{pt}^2} \end{aligned} \right\}$$

$\phi(\bullet)$ ：標準常態密度函數。

$$I^q = \begin{cases} \sum_{i=1}^{q/2} \left(\frac{\prod_{j=1}^{q/2} 2j}{\prod_{j=1}^i 2j} \right) g_{at}^{2i} \phi(g_{at}) + \left(\sum_{j=1}^{q/2} 2j \right) \phi(g_{at}), & q \text{ 為奇數。} \\ \sum_{i=0}^{q^*} \left(\frac{\prod_{j=0}^{q^*} (2j+1)}{\prod_{j=0}^i (2j+1)} \right) g_{at}^{2i+1} \phi(g_{at}) - \left(\sum_{j=0}^{q^*} (2j+1) \right) \Phi(g_{at}), & q \text{ 為偶數。} \\ q^* = (q-1)/2 \end{cases}$$

$\Phi(\bullet)$ ：標準常態累積機率分配函數。

(三)建構 MCC 投資組合

有了前兩小節對於條件風險值、投資組合下方風險以及資產下方風險貢獻等定義後，Boudt et al. (2013)對於投資組合集中度定義如下：

$$C_w(\alpha) = \max_i (C_{(i)} CVaR_w(\alpha)) \quad (29)$$

代表投資組合的集中度為所有標的資產內下方風險貢獻最大者，而MCC投資組合即以最小化 $C_w(\alpha)$ 為目標函數，直接最適化下方風險分散，建構一最低下方風險集中度投資組合，其數學式可表示如下：

$$w^{MCC} = \arg \min C_w(\alpha) \quad (30)$$

此外，我們可以將 $C_w(\alpha)$ 拆解如下所示：

$$C_w(\alpha) = CVaR_w(\alpha) \times \max\{\%C_{(1)} CVaR_w(\alpha), \dots, \%C_{(N)} CVaR_w(\alpha)\} \quad (31)$$

因此，我們可以清楚的看到MCC投資組合最小化的兩個目標分別如下：

1. 投資組合下方風險($CVaR_w(\alpha)$)。
2. 資產風險貢獻集中度($\max\{\%C_{(1)} CVaR_w(\alpha), \dots, \%C_{(N)} CVaR_w(\alpha)\}$)，也可解釋為最大化下方風險分散。

以上的兩個特點，代表MCC投資組合試著在投資組合下方風險以及下方風險分散之間取得平衡，也清楚地描述了MCC投資組合的特性。

除此之外，若我們將MCC投資組合的最適化過程中，加入一條限制式如下：

$$w^{MCC} = \arg \min C_w(\alpha) \quad (32)$$

$$\text{u. c. } \%C_{(1)} CVaR_w(\alpha) = \dots = \%C_{(N)} CVaR_w(\alpha) = 1/N$$

得由第(32)式求得的MCC投資組合即為等值下方風險權重投資組合。

三、馬可夫狀態轉換模型

隨著全球經濟環境的變遷，單一的資產配置策略並無法適用於所有經濟情況，因此，如何判斷經濟環境狀態的改變，成了資產配置不可或缺的一環。本研究利用 Hamilton (1989)所提出的馬可夫狀態轉換模型(Markov regime-switching model)來判斷市場狀態的轉換，並以 Kritzman et al. (2010)所提出的馬氏距離作為馬可夫模型的變數，校正參數。本節共分兩個部分，首先介紹馬氏距離的定義與意涵，接著介紹馬可夫狀態轉換模型的架構。

(一)馬氏距離(Mahalanobis distance)

Kritzman et al. (2010)提出以馬氏距離來衡量財務市場動盪，而馬氏距離與我們熟悉的歐式距離的差異性在於，馬氏距離為考量了資產間相關性後的標準化距離，因此較能準確地捕捉標的指數下跌的情況。此外，Kritzman et al. (2010)也證明了馬氏距離與許多歷史上的財務危機事件相吻合，例如 2000 年的科技泡沫以及 2008 年的金融危機等，馬氏距離都會大幅上升，代表資產價格出現極端的走勢、資產間報酬率相關性大幅上升(由不相關變正相關)以及報酬率的波動度變大等現象，因此，本文將沿用 Kritzman et al. (2012)，以 S&P500 指數漲跌作為市場狀態的轉換依據，並利用 S&P500 指數的十個類別指數，在相等權重之下計算馬氏距離，依此作為判斷 S&P500 指數下跌的指標，並將馬氏距離作為馬可夫狀態轉換模型的變數，校正馬可夫模型參數，判斷市場狀態。其數學式表示如下：

$$d_t = (y_t - \mu)\Omega^{-1}(y_t - \mu)' \quad (33)$$

其中， d_t 為 t 時間點所有標的資產的馬氏距離總和； y_t 為 t 時間點各標的資產的報酬率，為一向量； μ 為 t 期間內投資組合的簡單歷史平均； Ω 為 t 時間點內資產間共變異數矩陣。上述第(33)式可解讀為投資組合內所有標的資產在考量了資產間相關性後，與投資組合平均報酬的馬氏距離總和，而在 Kritzman et al. (2010)的實證也發現，馬氏距離越大，代表該標的指數處於下跌期間，但在指數上升期

間，馬氏距離並不會上升，而是維持穩定的走勢。

(二)馬可夫狀態轉換模型參數校正

馬可夫狀態轉換模型透過馬可夫鏈(Markov Chain)的轉換機制，利用狀態變數 S_t 反映結構性的改變，控制模型的參數在不同的狀態空間轉換。首先我們假設變數 x_t 服從常態分配如下所示：

$$x_t \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), j = 1, 2 \quad (34)$$

第(34)式可解釋為，若第 t 期為狀態一，則變數 x_t 屬於標準常態分配 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ；若第 t 期為狀態二，則變數 x_t 屬於標準常態分配 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

此外，根據馬可夫轉換鏈，若當期為狀態一，則下一期會有 P_{11} 的機率停留在狀態一，有 $1 - P_{11} = P_{12}$ 的機率會轉換至狀態二；同理，若當期為狀態二，則下一期會有 P_{22} 的機率停留在狀態二，則有 $1 - P_{22} = P_{21}$ 的機率會轉換至狀態一，可以數學式表示如下：

$$P_r(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = P_{11} \quad (35)$$

$$P_r(S_t = 2 | S_{t-1} = 1) = 1 - P_{11} = P_{12} \quad (36)$$

$$P_r(S_t = 1 | S_{t-1} = 2) = 1 - P_{22} = P_{21} \quad (37)$$

$$P_r(S_t = 2 | S_{t-1} = 2) = P_{22} \quad (38)$$

因此，由上第(35)式到第(38)式可將馬可夫轉換機率矩陣(transition probability matrix)定義為：

$$M = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (39)$$

此外，我們定義狀態一與狀態二的恆定機率(invariant probability)為 θ_1 與 θ_2 ，由於需滿足 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ ，因此可以推得數學式如下：

$$P_r(S_t = 1) = \theta_1 = \frac{P_{21}}{P_{12} + P_{21}} \quad (40)$$

$$P_r(S_t = 2) = \theta_2 = \frac{P_{12}}{P_{12} + P_{21}} \quad (41)$$

接著，整合所有參數為一向量矩陣： $\pi = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \theta_1, \theta_2)$ ，可觀察變數 x_t 的非條件密度函數為：

$$f(x_t; \pi) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(\frac{-(x_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{\theta_2}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(\frac{-(x_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (42)$$

則對數概似函數(log likelihood function)為：

$$L(\pi) = \sum_{t=1}^T \log f(x_t; \pi) \quad (43)$$

有了上述第(42)及第(43)式後，即可利用 Hamilton (1994)最大概似法則(maximum likelihood estimation，簡稱 MLE)，求出母體參數的非線性等式，如下所示：

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{t=1}^T x_t \times P(S_t = j | x_1, \dots, x_T; \hat{\pi})}{\sum_{t=1}^T P(S_t = j | x_1, \dots, x_T; \hat{\pi})}, \quad j = 1, 2 \quad (44)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_j)^2 \times P(S_t = j | x_1, \dots, x_T; \hat{\pi})}{\sum_{t=1}^T P(S_t = j | x_1, \dots, x_T; \hat{\pi})}, \quad j = 1, 2 \quad (45)$$

$$\hat{\theta}_j = T^{-1} \sum_{t=1}^T P(S_t = j | x_1, \dots, x_T; \hat{\pi}), \quad j = 1, 2 \quad (46)$$

此外，當計算上述第(44)式到第(46)式的最大概似估計量時，在某特定時間點的狀態仍未知，因此，我們必須先利用平滑推論(smoothed inference)方法計算各時間點狀態的後驗分配(posterior distribution) $P(S_t = j | x_1, \dots, x_T; \hat{\pi})$ ，才能求得最大概似估計量，而平滑推論是在所有樣本期間的資訊下($x_1 \dots x_T$)所得到的條件狀態機率，可得到每個時間點的狀態機率，即 $\hat{P}(S_t = j) = P_r(S_t = j | x_1 \dots x_T; \pi)$ ，更進一步說明可參考Hamilton (1994)。

四、資料描述與實證計算方法

本節將詳細說明本研究的標的資產與實證計算方法，首先介紹每月動態調整的MCC投資組合，接著利用馬可夫狀態轉換模型，判斷市場狀態，將熊市下的MCC投資組下方風險控制在3.00%之下。

首先，本研究共有五種標的資產分別為全球性股票(Morgan Stanley Capital Investment ACWI Index)、商品(Goldman Sachs Commodity Index)、美國房地產(Dow-Jones Wilshire REIT Total Return Index)、美國高收益債券(Merrill Lynch High Yield Master II Total Return Index)以及美國投資等級債券(Barclays Capital Aggregate Bond Index)，為一多資產類別的投資組合。資料期間為1996/02/01-2013/12/30，共有4511筆日報酬資料，資料來源為彭博資訊(Bloomberg)，並以1996/02/01-1999/12/31的990筆日報酬資料，在2000/01/01建構第一次MCC投資組合，每月調整一次，並且以移動資料區間的方式(rolling data)每次都往後移動一個月，重新調整資產的權重，總共調整167次。

其次，本文沿用Kritzman et al(2012)的方法，利用S&P500指數的十個類別指數，計算月平均馬氏距離，作為馬可夫狀態轉換模型的變數，並以此來判斷市場狀況。

S&P500指數的10個類別指數分別為標準普爾500資訊科技類指數(S&P 500 INFO TECH INDEX)、標準普爾500金融類指數(S&P 500 FINANCIALS INDEX)、標準普爾500保健類指數(S&P 500 HEALTH CARE IDX)、標準普爾500非核心消費類指數(S&P 500 CONS DISCRET IDX)、標準普爾500工業類指數(S&P 500 INDUSTRIALS IDX)、標準普爾500能源類指數(S&P 500 ENERGY INDEX)、標準普爾500核心消費類指數(S&P 500 CONS STAPLES IDX)、標準普爾500原材料類指數(S&P 500 MATERIALS INDEX)、標準普爾500公用事業類指數(S&P 500 UTILITIES INDEX)以及標準普爾500通訊服務類指數(S&P 500 TELECOM SERV IDX)，資料期間為1990/01/12-2013/12/31，樣本數共6041筆日報酬資料，

資料來源為彭博資訊(Bloomberg)，接著利用 1990/01/12- 1999/12/31 這 2520 筆日報酬計算每日的馬氏距離，並且每個月取平均，作為每月的平均馬氏距離，再以移動資料的方式，將資料區間往後移動一個月，即可得到 2000 年 1 月的平均馬氏距離，以此類推，共有 287 筆月平均馬氏距離。

接著，我們以前 120 筆月平均馬氏距離當作變數，校正馬可夫狀態轉換模型參數，並利用第四節介紹的平滑推論法，計算每一筆樣本內資料為狀態一或狀態二的機率，即狀態機率 $\hat{P}(S_t = j) = P_r(S_t = j | x_1 \dots x_T; \pi)$ ，並將最後一筆樣本內資料所得的狀態機率作為本期市場狀況的依據，舉例來說，在 2000 年 1 月要進行第一次資產配置時，以 1999 年 12 月的月平均馬氏距離來推論為狀態一或狀態二的機率；在 2000 年 2 月要進行調整時，則取 1999 年 2 月到 2000 年 1 月的 120 筆月平均馬氏距離當作變數，重新校正馬可夫狀態轉換模型參數，接著以 2000 年 1 月的月平均馬氏距離推論為狀態一或狀態二的機率，以此類推，共校正 167 次馬可夫狀態轉換模型參數。

當判斷出來為狀態一(熊市)的機率大於 50% 時，則將原本 MCC 資產配置加入投資組合下方風險限制式如下：

$$w^{MCC} = \arg \min C_w(\alpha) \quad (47)$$

$$\text{u. c. } CVaR_w(\alpha) \leq 3\%$$

其中，本研究在信賴水準 $(1 - \alpha\%)$ 以 95% 為計算準則。上述第(47)式即為經馬可夫狀態轉換調整的 MCC 投資組合。

第肆章、實證結果

本章實證結果主要分為四個部分，首先為投資組合標的資產的敘述統計，其次為 MCC 投資組合在不同市場下的實證結果分析，接著為月平均馬氏距離與馬可夫狀態轉換模型的市場判斷結果，最後為兩投資組合績效的比較分析。

一、標的資產敘述統計

本研究投資組合標的採用 Wang et al(2012)所提出的全球風險分散投資組合，包含五種不同類別的指數，分別為全球性股票(Morgan Stanley Capital Investment ACWI Index)、商品(Goldman Sachs Commodity Index)、美國房地產(Dow-Jones Wilshire REIT Total Return Index)、美國高收益債券(Merrill Lynch High Yield Master II Total Return Index)以及美國投資等級債券(Barclays Capital Aggregate Bond Index)，為一多資產類別的投資組合。資料期間為 1996/02/01-2013/12/31，樣本數共有 4511 筆日報酬，資料來源為彭博資訊(Bloomberg)。

由下表一可清楚發現，所有標的資產都呈現負偏態、超額峰態(尤其是房地產指數以及高收益債券)，顯示出各個資產標的並非常態分配，而且有明顯的厚尾(fat tail)現象，也因此，本研究擬延伸 Boudt et al (2013)的方法，以條件風險值(CVaR)為下方風險衡量指標，建構最低條件風險值集中度投資組合，捕捉標的資產下方風險。

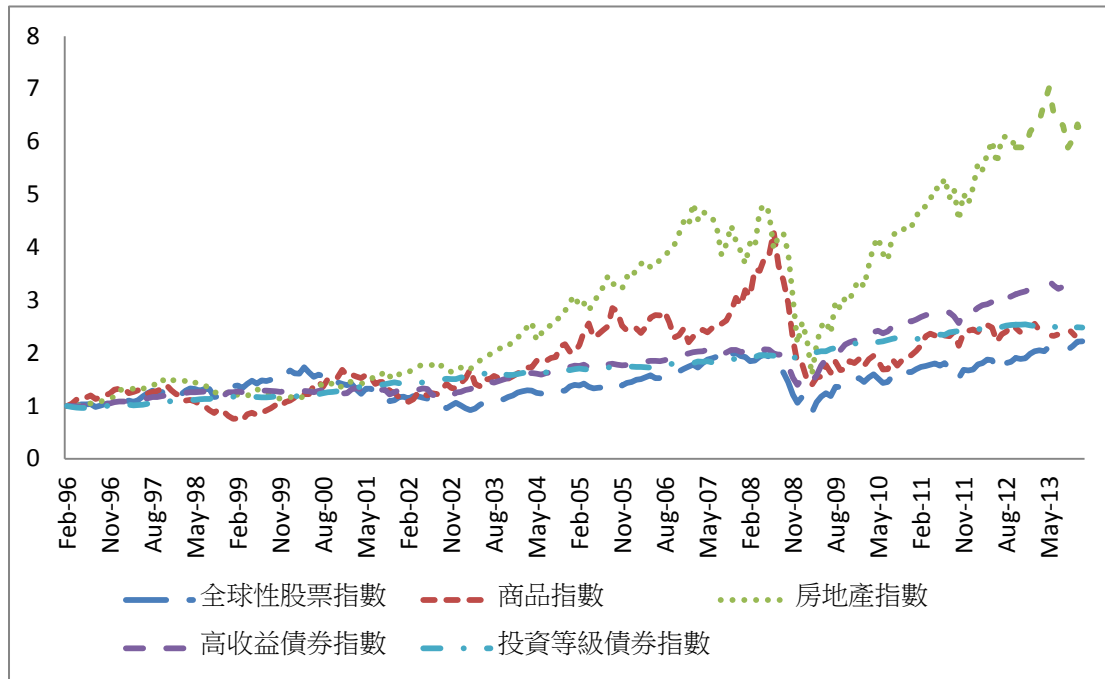
此外，房地產指數的每日平均標準差以及 95%歷史下方風險(CVaR)最大，分別為 1.85%以及 4.59%；而高收益債券指數與投資等級債券指數的標準差以及 95%歷史下方風險較小，分別為 0.29%與 0.74%以及 0.24%與 0.55%，因此，以 MCC 投資組合來說，我們可以預測 MCC 投資組合的權重會較集中在高收益債券指數與投資等級債券指數，房地產指數的權重則較小，使資產間的下方風險分配較為平均，達到均衡風險分散的目標。

而由下圖一資產標的累積報酬率走勢圖來看，房地產指數的累積報酬率最大，高達六倍，但波動度也是最大的，屬於高報酬高風險的資產標的；商品指數

的累積報酬率為 2.38 倍，較高收益債券以及投資等級債券低，但波動度卻比較大，可見債券指數雖然報酬率不高，但在金融危機期間，受的傷害並不大，仍能維持穩定成長，是投資組合不可或缺的資產標的；全球性股票指數的累積報酬率為 2.28 倍，是五個資產標的裡最低的，但也因為屬於全球性的股票指數，受單一市場波動的影響較小，以因此波動度較房地產指數以及商品指數小；投資等級債券的累積報酬率走勢圖幾乎為斜直線，在 2008 年金融危機時的波動也不大。此外，我們可以發現在 2008 年 4 月到 2009 年 2 月這段期間，所有資產的走勢都是向下，因此，在這段期間內的資產配置抉擇相當重要。

表一 1996/02/01-2013/12/31 標的資產每日報酬敘述統計

| 指數 | 全球性股票 (MSCI ACWI) | 商品 (SPGSCI) | 房地產 (DW REITs) | 高收益債券 (MLHY) | 投資等級債券 (Barclay Agg.) |
|------------|----------------------|----------------|-------------------|-----------------|--------------------------|
| 平均數 | 0.02% | 0.01% | 0.04% | 0.03% | 0.02% |
| 中位數 | 0.08% | 0.03% | 0.06% | 0.05% | 0.03% |
| 最小值 | -7.37% | -9.17% | -22.02% | -4.84% | -1.57% |
| 最大值 | 8.90% | 7.22% | 17.38% | 2.74% | 1.33% |
| 標準差 | 1.04% | 1.44% | 1.85% | 0.29% | 0.24% |
| 偏態係數 | -0.38 | -0.26 | -0.24 | -3.12 | -0.25 |
| 超額峰態 | 7.15 | 2.74 | 21.72 | 48.08 | 2.00 |
| 95 歷史 CVaR | 2.53% | 3.37% | 4.59% | 0.74% | 0.55% |
| 5%分位數 | -1.63% | -2.33% | -2.30% | -0.36% | -0.39% |
| 95%分位數 | 1.52% | 2.29% | 2.13% | 0.37% | 0.40% |



圖一標的資產累積報酬率走勢圖

二、MCC 投資組合實證結果分析

本節共分為兩部分，第一部分為動態調整的 MCC 投資組合結果在不同市場之下的比較，第二部分則針對 MCC 投資組合的兩項目標函數：下方風險以及資產下方風險貢獻集中度做深入分析。

(一)不同市場之下的 MCC 投資組合表現

在 Boudt et al (2013)的文章中，引用了 Ellis(2005)對於熊市的定義，將 MCC 投資組合在不同市場之下的表現作比較，發現 MCC 投資組合在熊市時的表現並不理想，因此，本節將沿用 Ellis(2005)以 S&P500 指數作為衡量熊市的指標，討論 MCC 投資組合在不同市場環境下的表現。熊市定義為 S&P500 指數下跌超過 12%，期間如下分別為 2000/04/01-2001/10/01、2002/01/01-2002/10/01 以及 2007/10/01-2009/03/01，共 45 個月。而正常市場為所有期間扣除熊市期間，金融危機期間則為 2007 年 10 月到 2009 年 3 月。

由下表二可以發現 MCC 投資組合在正常市場表現較好，平均年化報酬率以及平均年化標準差分別為 9.32% 及 3.93%，95% 年化下方風險則為 13.56%，夏普

指數更高達 1.86，但是相較於正常市場，MCC 投資組合在熊市以及金融危機期間的表現並不理想，在熊市時，平均年化報酬率以及平均年化標準差分別為 0.08% 及 8.87%，夏普指數為-0.22，95% 年化下方風險也較正常市場高，為 14.61%；在金融危機期間，平均年化報酬率以及平均年化標準差分別為-6.08% 及 12.77%，夏普指數為-0.63，21 天的最大損失更高達 13.81%，95% 年化下方風險也較正常市場高，為 15.55%。

此外，在熊市或金融危機期間，MCC 投資組合的左偏現象更為明顯，超額峰態也較正常市場高，而 MCC 投資組合的下方風險貢獻集中度都維持在 0%，權重集中度在不同市場之下的變化也不大，代表 MCC 投資組合在任何市場都是以均衡下方風險分散為目標。

本小節所討論的結果與 Boudt et al (2013) 相同，MCC 投資組合在熊市的表現的確不理想，因此在下一小節，我們將針對 MCC 投資組合的兩項目標式：投資組合下方風險以及資產下方風險貢獻集中度做分析，找出 MCC 資產配置策略的問題所在。

表二 MCC 投資組合在不同市場之下的績效比較

| 期間 | 所有期間 | 正常市場 | 熊市 | 金融危機 |
|------------|---------|--------|---------|---------|
| 平均年化報酬率 | 6.67% | 9.32% | 0.08% | -6.08% |
| 平均年化標準差 | 5.78% | 3.93% | 8.87% | 12.77% |
| 95% 年化下方風險 | 14.05% | 13.56% | 14.61% | 15.55% |
| 每月最大損失 | -13.81% | -2.66% | -13.81% | -13.81% |
| 夏普指數 | 0.81 | 1.86 | -0.22 | -0.63 |
| 偏態係數 | -4.00 | -0.64 | -3.10 | -2.72 |
| 超額峰態 | 34.16 | 3.76 | 14.25 | 10.67 |
| 權重集中度 | 0.26 | 0.29 | 0.18 | 0.26 |
| 下方風險貢獻集中度 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |

註：假設 1 年期無風險利率為 2%。

(二) MCC 投資組合下方風險與資產下方風險貢獻集中度分析

本小節將 MCC 投資組合在所有期間內，動態調整過程的下方風險以及資產下方風險貢獻集中度以折線圖的方式呈現，而在資產下方風險貢獻集中度指標方面，本研究以赫芬達爾—赫希曼指數(Herfindahl-Hirschman Index，簡稱 *HHI*)來衡量，其數學式如下：

$$h_t = \sum_{i=1}^n RC_i^2$$

$$HHI - RC = \frac{h_t - 1/n}{1 - 1/n}$$

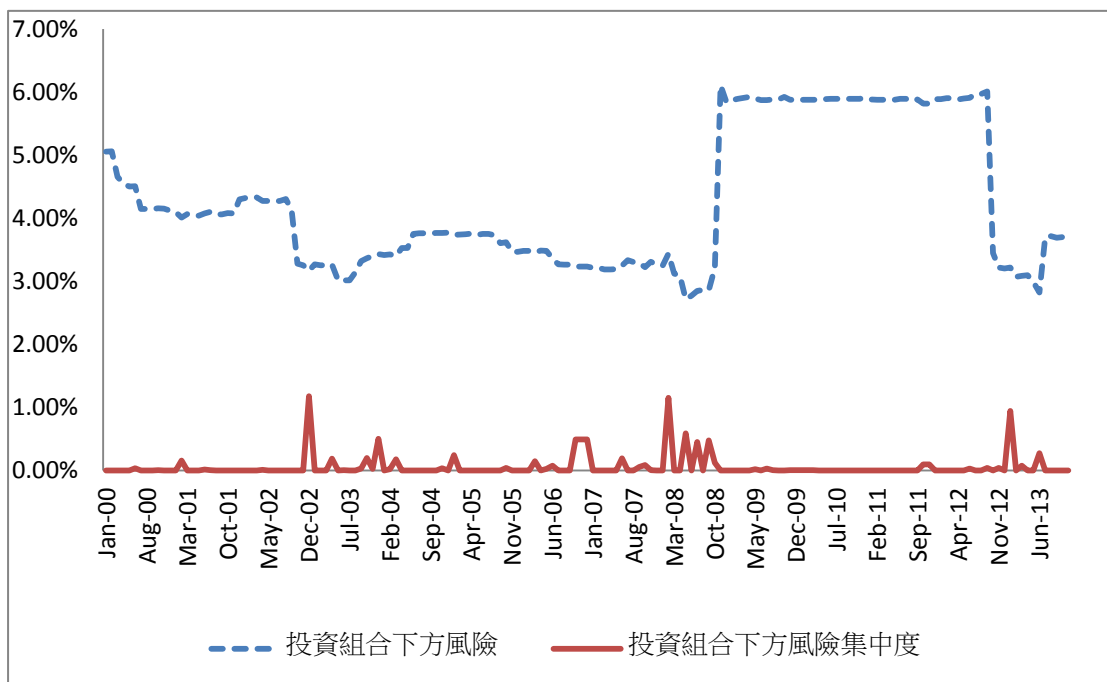
其中， RC_i 為 i 資產的下方風險貢獻。當所有資產的下方風險貢獻都相同時， $HHI - RC$ 為 0%。

下圖二的兩項因子，下方風險(CVaR)以及資產下方風險貢獻集中度(HHI risk contribution)為 MCC 投資組合所追求的最小化目標，從下圖二我們可以看到 MCC 投資組合下方風險在 2000 年到 2002 年科技泡沫期間較高，維持在 4.00% 以上，之後則維持在 3.00% 到 4.00% 之間；在 2008 年 10 月爆發金融危機後，投資組合下方風險大約上升了 3.00% (3.21% -6.11%)，但相較於下方風險，資產下方風險貢獻集中度漲幅較小，還是維持在 0% 左右，顯示出 MCC 投資組合在熊市時，仍以達到均衡下方風險分散為目標，但 Ang and Chen (2002)認為，當所有資產在熊市(bear market)都一起下跌時，風險分散的效益會被高估，因此，MCC 投資組合雖然達到了均衡下方風險分散的目標，但並未充分的沖銷掉投資組合的下方風險，使投資組合下方風險仍然維持在高檔。

因此，本研究認為 MCC 投資組合策略應先將市場狀態做區分，在不同的市場狀態下做下方風險動態調整，而不是一直以平均下方風險分散為目標，在熊市時應以降低投資組合的下方風險為優先考量，而非將下方風險均衡分散在各資產上，讓資產下方風險貢獻集中度維持在 0%，而這個論證也與 Hess(2010)相符合，

即在熊市時(低報酬率、高報酬率波動度)投資組合應降低風險分散。

因此，本研究將在下節利用 Kritzman et al(2012)的方法，以 10 個 S&P500 類別指數計算月平均馬氏距離，作為衡量 S&P500 指數下跌的指標，並藉由馬可夫狀態轉換模型來判斷每一期的市場狀態，且若市場狀態判斷為熊市的機率大於 50%，則將 MCC 投資組合的目標函數加入下方風險限制式，將下方風險控制在 3.00% 之下。



圖二 MCC 投資組合下方風險與資產下方風險貢獻集中度

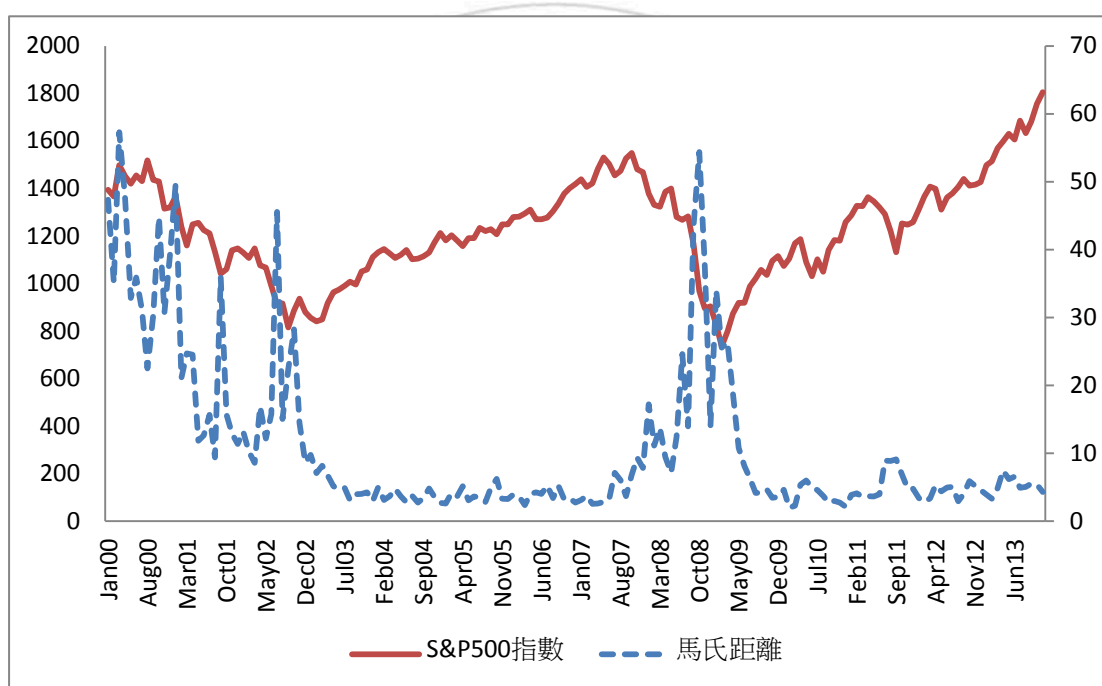
三、馬可夫狀態轉換結果分析

本節共分兩個部分，第一部分為以 10 個 S&P500 類別指數計算出的月平均馬氏距離與 S&P500 指數的比較，第二部分則以月平均馬氏距離作為馬可夫狀態轉換模型的變數，校正馬可夫參數，並證明馬可夫狀態轉換模型的確能將 S&P500 指數的下跌期間判斷為熊市。

(一)馬氏距離

本小節將以第三章研究方法所述，利用 10 個 S&P500 的類別指數計算月平

均馬氏距離，作為衡量 S&P500 指數下跌的指標。從下圖三可以看出月平均馬氏距離能捕捉到 S&P500 指數的下跌，例如 2000 年到 2002 年的科技泡沫以及 2008 年金融危機期間，S&P500 都從 1500 的高點往下跌，同樣的，月平均馬氏距離則大幅上升，2000 年 3 月與 2008 年 10 月分別上升到 57.28 以及 54.38。此外，在 2003 年到 2007 年以及 2010 到 2013 為 S&P500 指數的上升階段，但月平均馬氏距離都維持在 10 左右的低檔，顯示出月平均馬氏距離對於 S&P500 指數下跌的敏感度大於指數上升，能準確的作為判斷熊市的指標。



圖三 S&P500 指數與月平均馬氏距離比較

(二)馬可夫狀態轉換判斷結果

本小節將分析馬可夫狀態轉換模型的參數校正結果，並以狀態一與 S&P500 指數做比較，以及比較資產標的在狀態一與所有期間的表現，可以證明馬可夫狀態轉換模型判斷市場狀態的有效性。

首先我們定義馬可夫狀態轉換的兩個市場狀態，狀態一為高月平均馬氏距離、高波動度；狀態二為低月平均馬氏距離、低波動度。在了解馬氏距離與 S&P500

之間的關係後，我們將月平均馬氏距離作為馬可夫狀態轉換模型的變數，每月校正馬可夫模型的參數，平均結果如下表三。我們可以發現狀態一(熊市)的月平均馬氏距離平均值為 22.57 大於狀態二(正常市場)的 5.87，標準差則為 12.12，大於狀態二的 2.06，與我們對狀態一(熊市)及狀態二(正常市場)的定義相符合。

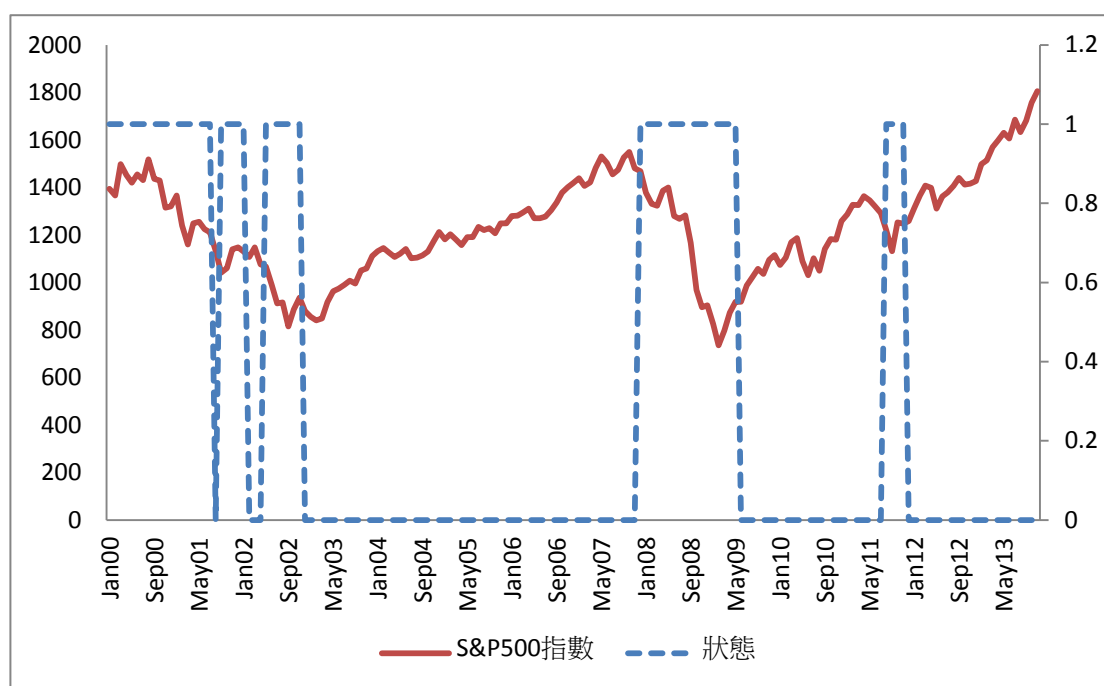
表三馬可夫狀態轉換模型結果

| | 狀態一 | | | 狀態二 | | |
|------|----------|-------|-------|----------|------|------|
| | P_{11} | 熊市 | | P_{22} | 正常市場 | |
| | | 平均數 | 標準差 | | 平均數 | 標準差 |
| 馬氏距離 | 94.98% | 22.57 | 12.12 | 96.81% | 5.87 | 2.06 |

接著，我們將以圖四與表四來分析馬可夫狀態轉換模型的判斷結果，首先，我們以下圖四為馬可夫狀態轉換模型判斷的結果與 S&P500 指數做比較，從下圖四我們可以看到虛線若為 1，代表該月屬於狀態一(熊市)，為 0 則代表該月屬於狀態二(正常市場)，而在 167 次的市場狀態判斷中，馬可夫狀態轉換模型將 53 個月的市場狀態判斷為熊市，另外我們也可以看到在 2000 年到 2002 年科技泡沫以及 2008 年金融危機期間，馬可夫狀態轉換模型都能準確的捕捉到 S&P500 指數大波段的下滑，判斷為熊市。

此外，下表四的標的資產在狀態一(熊市)與所有期間的比較，可以清楚的看到在狀態一(熊市)之下，除了投資等級債券之外，所有資產的平均日報酬都變為負報酬，日報酬中位數也較所有期間的平均低，而標準差以及 95% 歷史條件風險值也都上升，較所有期間的平均高；此外，所有資產的 5% 分位數與 95% 分位數的值差也變大，顯示出在狀態一(熊市)之下，資產報酬的走勢較為極端，波動度較大。除此之外，較特別的是投資等級債券指數，在狀態一(熊市)的平均日報酬較所有期間高，顯示出投資等級債券與 S&P500 指數為負相關，也讓投資等級債券指數成為熊市時的良好投資標的。

由以上的兩種比較結果，說明了馬可狀態轉換模型的確能有效的判斷市場情況，因此，本研究將以本節的馬可夫狀態轉換模型結果，作為 MCC 投資組合動態調整的依據，將熊市時的 MCC 投資組合，加入下方風險限制式，將下方風險控制在 3.00% 之下。



圖四 S&P500 指數與馬可夫狀態轉換比較

四、投資組合結果比較與分析

本節主要分為四個部分，第一小節將比較兩投資組合在不同市場之下的績效，第二小節將分析兩投資組合的下方風險、權重集中度以及資產下方風險貢獻集中度的差異性，第三小節將分析兩投資組合在權重分配以及資產下方風險分配的差異性，最後，第四小節將比較兩投資組合的累積報酬率。

(一) 投資組合績效比較

本小節將以原始的 MCC 投資組合與經由馬可夫狀態轉換模型調整的 MCC 投資組合做比較，並將期間分為所有期間、狀態一(熊市)以及金融危機期間，深入分析在不同期間之下，兩投資組合的差異性。

表四標的資產在所有期間與狀態一(熊市)之下的比較

| 指數 | 全球性股票(MSCI ACWI) | | 商品(SPGSCI) | | 房地產(DW REITs) | | 高收益債券(MLHY) | | 投資等級債券(Barclay Agg.) | |
|---------------|------------------|--------|------------|--------|---------------|---------|-------------|--------|----------------------|--------|
| | 所有期間 | 狀態一 | 所有期間 | 狀態一 | 所有期間 | 狀態一 | 所有期間 | 狀態一 | 所有期間 | 狀態一 |
| 平均數 | 0.02% | -0.09% | 0.01% | -0.03% | 0.04% | -0.02% | 0.03% | -0.01% | 0.02% | 0.03% |
| 中位數 | 0.08% | -0.05% | 0.03% | 0.01% | 0.06% | 0.02% | 0.05% | 0.02% | 0.03% | 0.05% |
| 最小值 | -7.37% | -7.37% | -9.17% | -9.17% | -22.02% | -22.02% | -4.84% | -4.84% | -1.57% | -1.57% |
| 最大值 | 8.90% | 8.90% | 7.22% | 7.22% | 17.38% | 17.38% | 2.74% | 2.74% | 1.33% | 1.33% |
| 標準差 | 1.04% | 1.54% | 1.44% | 1.87% | 1.85% | 3.13% | 0.29% | 0.48% | 0.24% | 0.29% |
| 偏態係數 | -0.38 | -0.16 | -0.26 | -0.40 | -0.24 | -0.09 | -3.12 | -2.25 | -0.25 | -0.13 |
| 超額峰態 | 7.15 | 4.08 | 2.74 | 2.52 | 21.72 | 8.63 | 48.08 | 21.95 | 2.00 | 1.03 |
| 95%歷史 CVaR | 2.53% | 3.88% | 3.37% | 4.70% | 4.59% | 8.35% | 0.74% | 1.30% | 0.55% | 0.62% |
| 5%分位數 | -1.63% | -2.43% | -2.33% | -3.16% | -2.30% | -4.89% | -0.36% | -0.69% | -0.39% | -0.46% |
| 95%分位數 | 1.52% | 2.27% | 2.29% | 2.83% | 2.13% | 4.78% | 0.37% | 0.63% | 0.40% | 0.47% |

下表五為不同期間之下，原始 MCC 投資組合與經由馬可夫狀態轉換調整的 MCC 投資組合的結果比較，首先，在所有期間之下，經由馬可夫狀態轉換模型調整後，MCC 投資組合的平均年化報酬從 6.67% 上升到 8.44%，平均年化標準差則從 5.78 下降到 4.04%，每月最大損失更是大幅縮減，從原本的 13.81% 降至 3.19%，而 95% 年化下方風險也從 14.05% 下降到 13.37%，夏普指數則上升超過兩倍，從 0.81 上升到 1.66。

此外，在熊市期間，MCC 投資組合的平均年化報酬率僅剩 1.17%，年化標準差為 8.64%，95% 平均年化下方風險也從所有期間的 14.05% 上升到 15.37%，夏普指數則由正變負為 -0.1，但經由馬可夫狀態轉換模型調整後的 MCC 投資組合，平均年化報酬率仍有 6.76%，平均年化標準差從 8.64% 下降到 4.36%，95% 平均年化下方風險也下降到 11.92%，夏普指數則從 -0.1 大幅上升到 1.09。

在金融危機期間，MCC 投資組合的平均年化報酬率為 -6.08%，年化標準差為 12.77%，95% 年化下方風險為 15.55%，夏普指數為 -0.63，但經由馬可夫狀態轉換調整後，平均年化報酬率可維持在 6.11% 的高報酬，差異高達 12.19%，平均年化標準差從 12.77% 下降到 6.05%，95% 平均年化下方風險也從 15.55% 上升到 11.70%，而夏普指數則從 -0.63 大幅上升到 0.68。

經由表五的比較後，可見藉由馬可夫狀態轉換模型調整後，在狀態一(熊市)之下，不僅讓 MCC 投資組合的平均年化報酬率、夏普指數提升，也能有效的降低 MCC 投資組合的平均年化標準差、95% 平均年化下方風險以及每月最大損失，而這樣的差異性在金融危機期間更是明顯。除此之外，我們也發現權重集中度以及資產下方風險貢獻集中度指標，在狀態一(熊市)以及金融危機期間，經由馬可夫狀態轉換調整的 MCC 投資組合會比較高，因此在下一小節，本研究將針對這兩項指標做深入比較分析。

表五兩投資組合在不同期間下之比較

| 市場狀況 投資組合 | 所有期間 | | 狀態一 | | 金融危機 | |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | MCC | MCC+馬可夫 | MCC | MCC+馬可夫 | MCC | MCC+馬可夫 |
| 平均年化報酬率 | 6.67% | 8.44% | 1.17% | 6.76% | -6.08% | 6.11% |
| 平均年化標準差 | 5.78% | 4.04% | 8.64% | 4.36% | 12.77% | 6.05% |
| 95%年化下方風險 | 14.05% | 13.37% | 15.37% | 11.92% | 15.55% | 11.70% |
| 每月最大損失 | -13.81% | -3.19% | -13.81% | -3.19% | -13.81% | -3.19% |
| 夏普指數 | 0.81 | 1.66 | -0.10 | 1.09 | -0.63 | 0.68 |
| 偏態係數 | -4 | -0.43 | -3.70 | -0.36 | -2.72 | -0.22 |
| 超額峰態 | 34.16 | 3.29 | 21.30 | 3.41 | 10.67 | 2.37 |
| 權重集中度 | 0.26 | 0.36 | 0.21 | 0.49 | 0.26 | 0.47 |
| 下方風險貢獻集中度 | 0 | 0.16 | 0.00 | 0.45 | 0.01 | 0.37 |
| *最大資金水平減少量 | 18.94% | 5.08% | ** | ** | ** | ** |

● **為該期間沒有計算意義

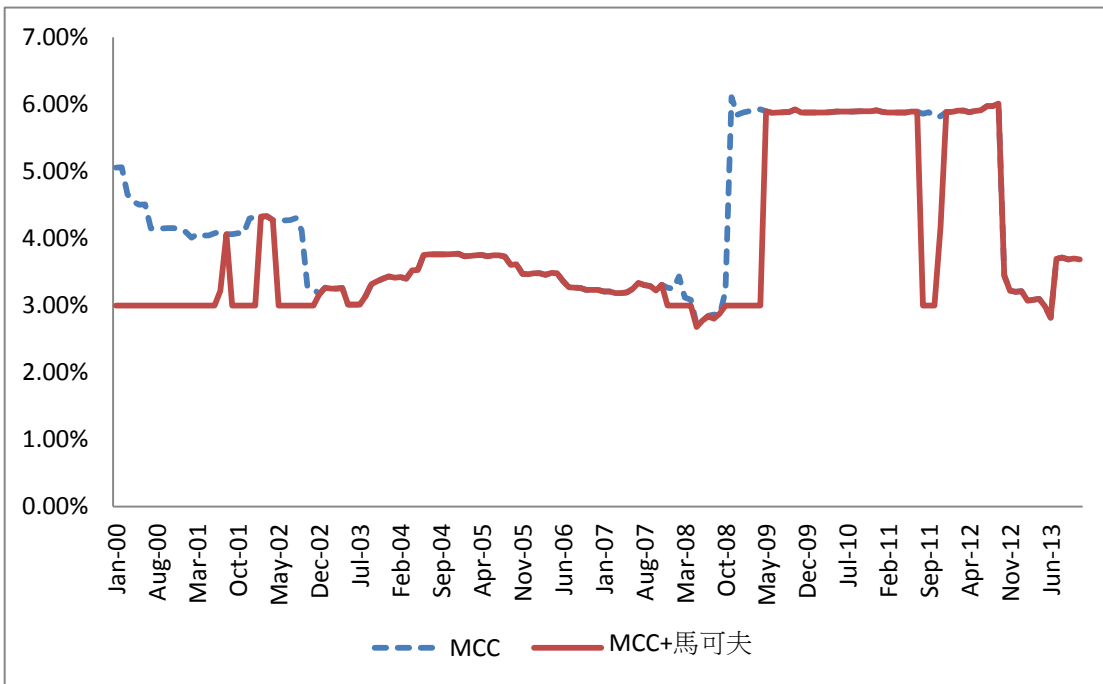
(二)下方風險、權重以及資產下方風險貢獻集中度分析

本小節主要探討兩投資組合的下方風險、權重集中度以及資產下方風險貢獻集中度的差異，而權重集中度的衡量是以赫芬達爾—赫希曼指數(Herfindahl-Hirschman Index，簡稱 *HHI*)來衡量，其數學式如下：

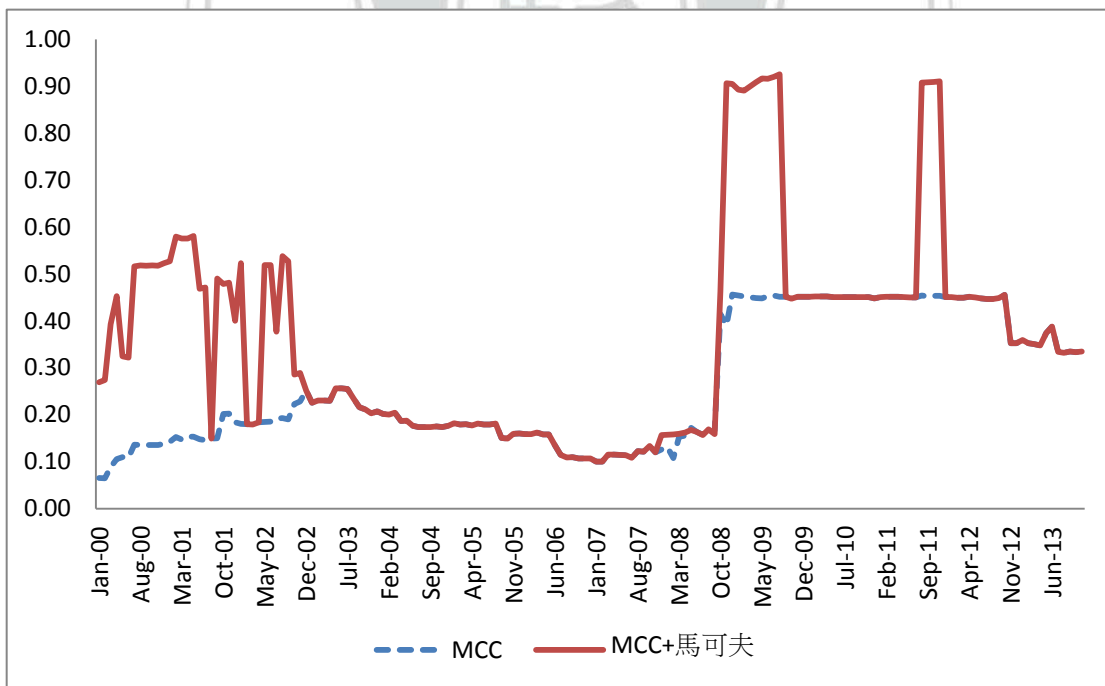
$$h_t = \sum_{i=1}^n w_i^2$$
$$\text{HHI} - W = \frac{h_t - 1/n}{1 - 1/n}$$

其中， w_i 為 i 資產所分配到的權重。當所有資產所分配的權重相同時， $\text{HHI} - W$ 為 0%。

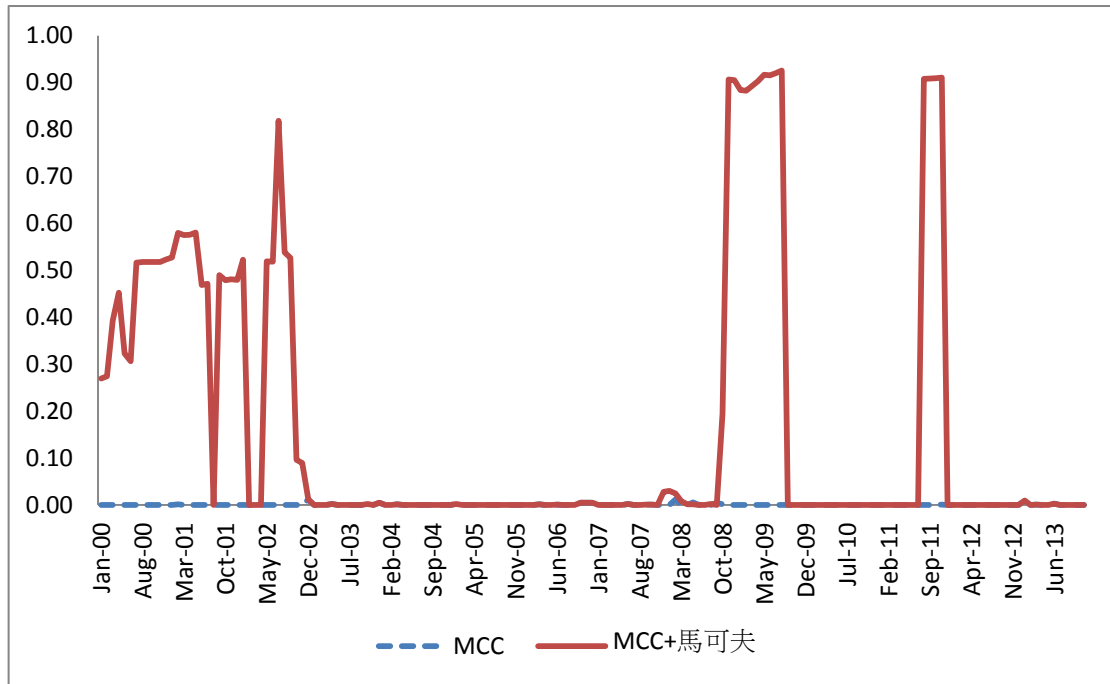
下圖五到圖七分別代表兩投資組合下方風險、權重集中度以及資產下方風險貢獻集中度的比較，由圖五我們可以發現，在熊市時，若將 MCC 投資組合的下方風險(CVaR)控制在 3.00% 之下，則 MCC 投資組合的權重集中度以及資產風險貢獻集中度都會大幅上升，例如 2000 年 1 月，我們將 MCC 投資組合的下方風險從 5.06% 降到 3.00%，則 MCC 投資組合的權重集中度以及資產風險貢獻集中度分別從 0.07 上升到 0.27 及 0 上升到 0.27，同樣的，2008 年 11 月，我們將 MCC 投資組合的下方風險從 6.11% 降到 3.00%，則 MCC 投資組合的權重集中度以及資產風險貢獻集中度上升幅度更大，分別從 0.39 上升到 0.91 及 0 上升到 0.91，代表著 MCC 投資組合在熊市時，下方風險與集中度風險似乎有抉擇(trade-off)的意味，而我們也可以從上表六的比較結果、Ang and Chen (2002) 以及 Hess (2010) 對於熊市時風險分散效益的論證推測，在熊市時，應以降低投資組合下方風險為優先考量，而不是均衡下方風險分散。



圖五投資組合下方風險比較



圖六投資組合權重集中度比較



圖七投資組合下方風險貢獻集中度比較

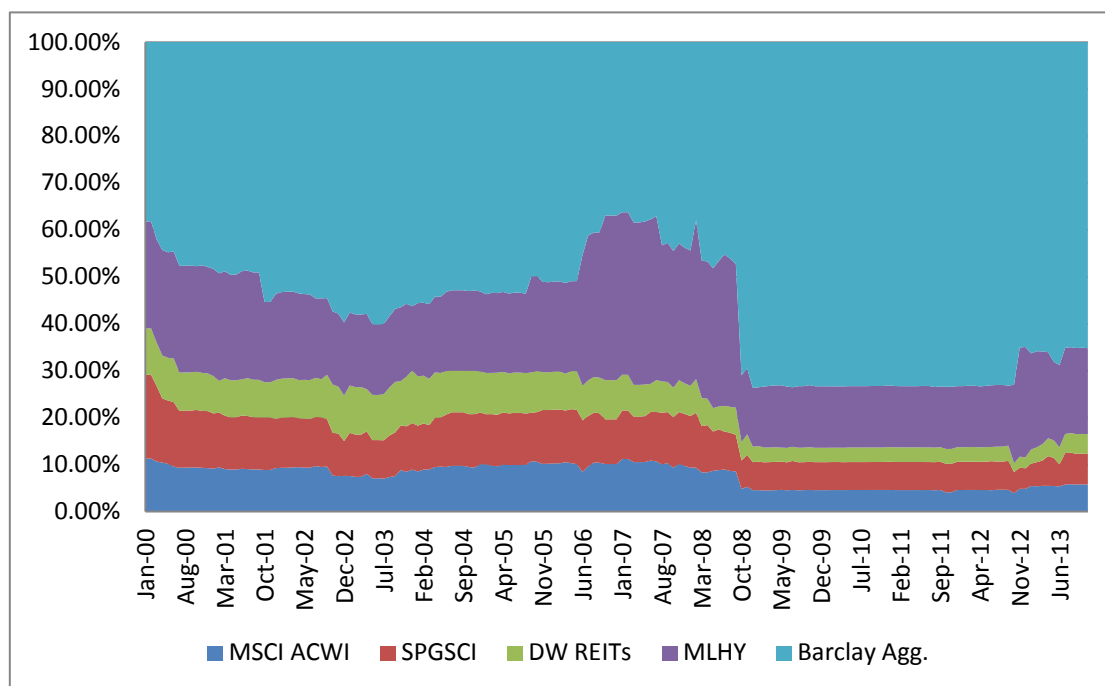
(三)投資組合權重分配以及資產下方風險分配分析

本小節將分兩部分來探討，第一部分是投資組合的權重分配，第二部分為資產下方風險貢獻度分配，首先我們將探討兩投資組合的權重分配比較。

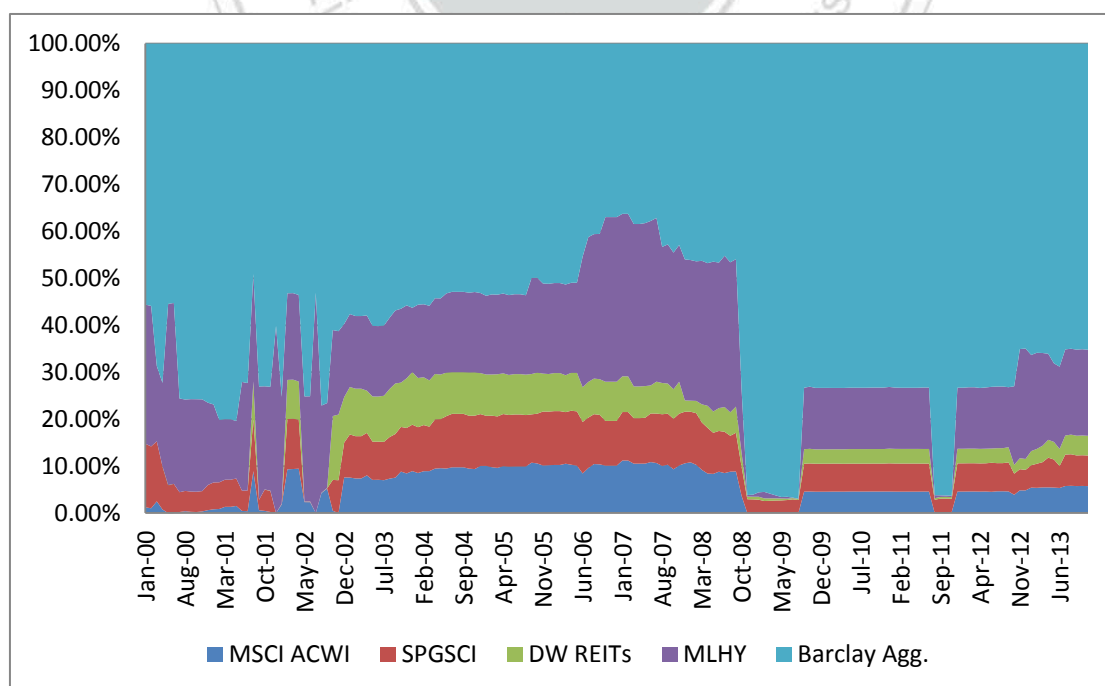
下圖八與圖九分別為 MCC 投資組合與馬可夫轉換調整的 MCC 投資組合權重分配，在原始 MCC 投資組合方面，權重大多集中在風險較小的資產池上，以投資等級債券指數的權重最大，房地產指數的權重最小，在 2008 年金融危機期間，MCC 投資組合的權重分配更集中於投資等級債券指數，從危機前的 50% 左右，在金融危機後則上升到 70%，權重變化高達 40%，是五個資產標的中最大的，而房地產指數的權重在危機期間只有 5.00% 左右。此外，Ang and Bekaert (2002) 認為在熊市時(高資產相關性及高報酬波動度)，投資組合應將更多權重分配在風險較小的資產上，因此，在金融危機後，雖然 MCC 投資組合有較多的權重集中在債券指數(投資等級債券以及高收益債券)上，權重分配有較為集中，但是權重集中的程度似乎還是不夠。

在馬可夫轉換調整的 MCC 投資組合上，2008 年金融危機前後的權重變化更

是急遽，投資等級債券指數的權重上升到 90%，而且房地產與球性股票指數的權重幾乎為 0%，可見為了降低下方風險，馬可夫轉換調整的 MCC 投資組合在調整權重分配上較為劇烈，幾乎將所有權重集中在風險較小的資產上，符合 Ang and Bekaert (2002)的論證。

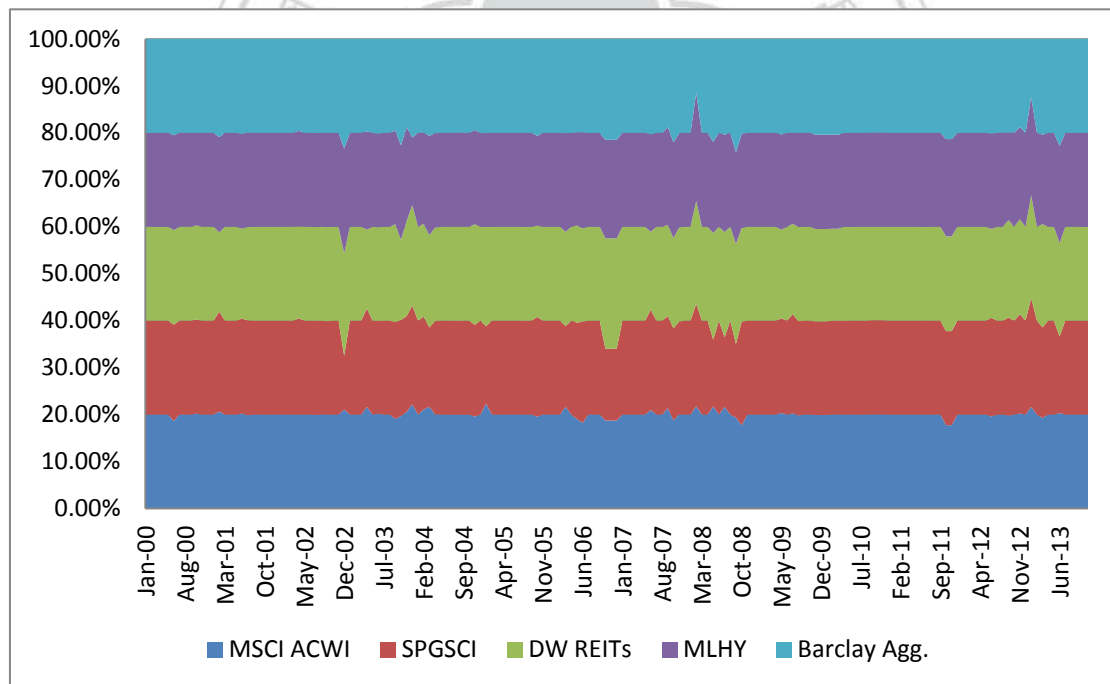


圖八 MCC 投資組合權重分配

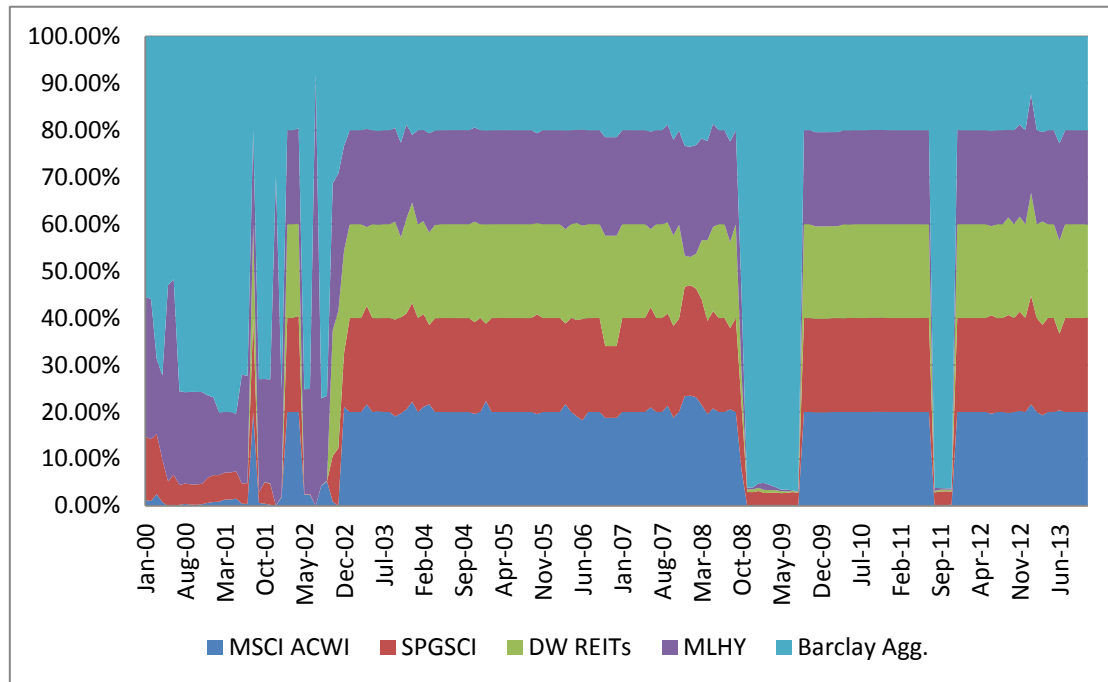


圖九 MCC+馬可夫投資組合權重分配

而下圖十與圖十一為投資組合資產下方風險貢獻度部分，在原始 MCC 投資組合方面，不論狀態一(熊市)或狀態二(正常市場)，每個資產的下方風險貢獻都維持在 20%左右，充分的達到下方風險均衡分散；而經由馬可夫狀態轉換調整的 MCC 投資組合在熊市時，例如 2000 年到 2002 年的科技泡沫，投資等級債券指數的資產下方風險貢獻度從 20%上升到 70%，為五個資產標的中下方風險貢獻最大的；在 2008 年金融危機期間，投資等級債券指數的資產下方風險貢獻度更是大幅上升到 90%，而房地產指數與球性股票指數的下方風險貢獻度幾乎為 0%，可見為了降低投資組合下方風險，經由馬可夫狀態轉換調整的 MCC 投資組合選擇將下方風險集中在投資等級債券指數上，而這個結果也符合 Ang and Bekaert (2002)的論證。



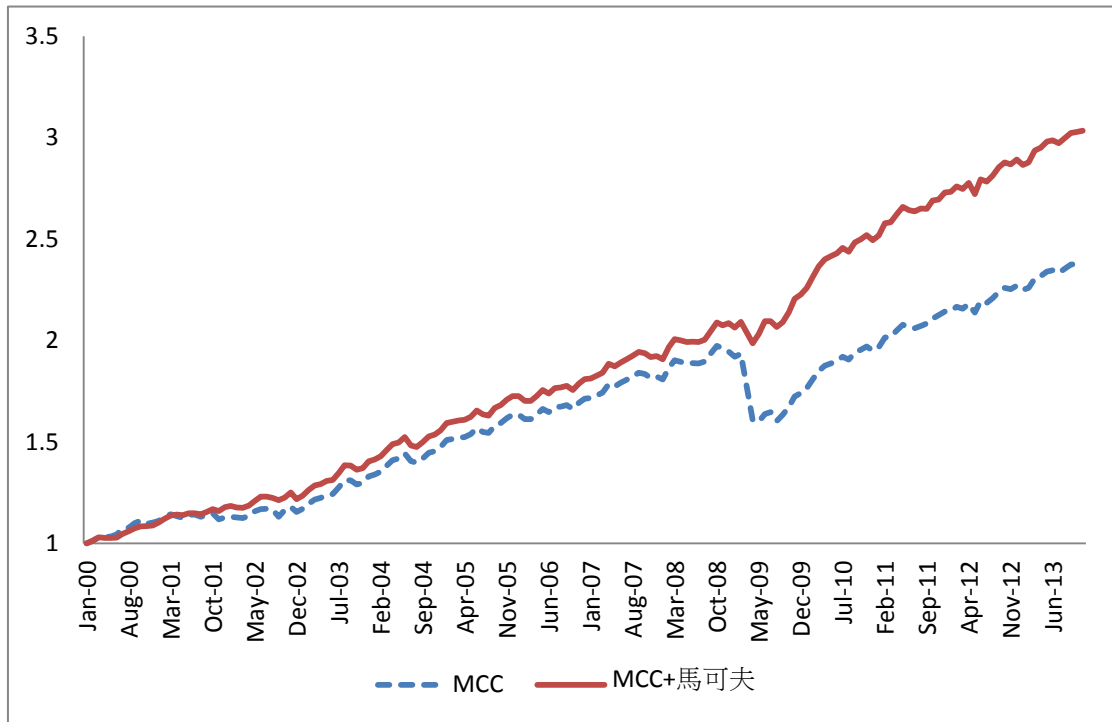
圖十 MCC 投資組合資產下方風險分配



圖十一 MCC+馬可夫投資組合資產下方風險分配

(四)投資組合累積報酬率比較

圖十二為兩投資組合的累積報酬率比較，可發現經由馬可夫轉換調整的MCC投資組合在2008年金融危機期間的波動較小，累積報酬率更是高達3.03倍，較原始MCC投資組合的2.35倍高出27.66%；此外，從上表六最後一列可看出，經由馬可夫轉換調整後，MCC投資組合的最大資金水平減少量從18.94%縮小為5.08%，大幅降低了MCC投資組合在金融危機期間的損失，因此，藉由加入馬可夫轉換模型來判斷市場情況，能保有MCC投資組合在正常市場的均衡風險分散優點，在熊市時也能適時地降低投資組合下方風險，改善MCC投資組合的報酬率以及波動度，讓MCC投資組合能獲得穩定的報酬，投資人也可以安然渡過2008年的金融危機。



圖十二投資組合累積報酬率比較



第五章、結論與後續研究建議

近年來全球經濟環境的變遷加快，使得傳統的靜態資產配置策略(buy and hold)已經無法再適用，而極端事件發生的頻率增加，也讓投資人不得不隨市場狀態的改變作投資組合策略調整，因此，本文以研究 Boudt et al. (2013)所提出的最低條件風險集中度投資組合為主，並加入馬可夫狀態轉換模型判斷市場狀態，藉此來改善 MCC 投資組合策略在熊市時的績效。

根據第肆章的實證結果發現，MCC 投資組合的在熊市或金融危機期間，投資組合報酬率、夏普指數都較正常市場低，而報酬率的標準差、每月最大損失以及 95% 下方風險也都較正常市場高，驗證了 MCC 投資組合策略在熊市時的績效的確較正常市場差。而本研究也針對 MCC 投資組合在熊市時的下方風險以及資產下方風險貢獻集中度做比較，發現在熊市時，MCC 投資組合雖然仍維持資產下方風險貢獻集中度為 0%，達到均衡下方風險分散的目標，但整體投資組合的下方風險卻大幅上升，代表 MCC 投資組合在熊市時並未充分的沖銷掉下方風險，下方風險分散並無預期的效益，而這也與 Ang and Chen (2002)對於熊市時，會高估風險分散效益的論證相同，因此，本研究認為 MCC 投資組合在熊市時，應以降低投資組合下方風險為主要考量，而不是以達到均衡下方風險分散為目標。

而在加入馬可夫狀態轉換模型調整 MCC 投資組合策略後，在熊市以及金融危機期間，MCC 投資組合都能將平均年化報酬率維持在 6.00% 以上，95% 平均年化下方風險也能從原本的 15% 降到 12% 以下，每月最大損失也從 13.81% 大幅下降到 3.19%，驗證了本研究加入馬可夫狀態轉換模型的方法的確是有效的。此外，從權重分配以及資產下方風險分配來看，雖然經由馬可夫狀態轉換模型調整後，MCC 投資組合會有 90% 的權重以及資產下方風險分配在投資等級債券上，但這個結果也符合 Ang and Bekaert (2002)及 Ang and Bekaert (2004)所提出的論證，即在熊市時，應將資產配置集中在風險較小的資產上。

除此之外資組合的累積報酬率走勢圖來看，可以發現經由馬可夫狀態轉換模

型調整後，MCC 投資組合的累積報酬率能增加 27.66%，更重要的是，在 2008 年金融危機期間，投資組合的最大資金水平減少量(maximum drawdown)從原本的 18.94%大幅縮小到 5.08%，讓投資人可以安然地渡過金融危機。

在後續研究建議部分，本研究以 S&P500 的 10 個類別指數來計算馬氏距離，作為衡量熊市指標，並依此作為馬可夫狀態轉換模型的變數，判斷市場狀態，但此為針對股票市場的指標，所以較無法準確的判斷出非股票市場的狀態，例如 2000 年到 2002 年的科技泡沫期間，債券以及商品市場並沒有像股票市場一樣有明顯的下跌現象，因此，在未來研究方面，可以利用其它指標來更準確地捕捉非股票市場的狀態，例如經濟成長率(GDP)、消費者物價指數成長率、隱含波動度指數(VIX)、買賣權未平倉比(Put/Call ratio)以及殖利率價差(yield spread)等指標，將市場狀態區分得更細更準確，讓投資組合策略的調整更符合市場狀態。

除此之外，本研究的市場狀態判斷是以前期的狀態機率為依據，但在實務上應以預測未來牛市或熊市的機率，並在該時點做資產配置，且本研究並未考慮交易成本，但將投資組合下方風險控制在 3.00%之下後，權重的變動會較大，因此，在考慮交易成本後，此投資組合策略的平均報酬率是否仍然較高？此外，敏感度分析方面，當信賴水準($1 - \alpha\%$)向上或向下調整後，對於績效的影響為何仍待後續研究。

參考文獻

1. Ang, A., and Bekaert, G. (2002), “International Asset Allocation with Regime Shifts,” *Review of Financial Studies*, Vol. 15, pp.1137–1187.
2. Ang, A., and Bekaert, G. (2004), “How Regimes Affect Asset Allocation,” *Review of Financial Studies*, Vol. 60, No. 2, pp. 86-99.
3. Ang, A., and Chen, J. (2002), “Asymmetric Correlations of Equity Portfolios,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, pp.443–494.
4. Alankar, A., DePalma, M., and Scholes, M. (2012), “An Introduction to Tail Risk Parity,” ALLIANCE BERNSTEIN.
5. Artzner, P., F. Delbaen, and J. Eber, D. Heath (1999), “Coherent Measure of Risk,” *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp.203-228.
6. Boudt, K., Carl, P., and Peterson, B. G. (2013), “Asset Allocation with Conditional Value-at-Risk Budgets,” *Journal of Risk* Vol. 15, No. 3, pp.39-68.
7. Butler, K. C., and Joaquin, D. C. (2002), “Are the Gains from International Portfolio Diversification Exaggerated? The Influence of Downside Risk in Bear Markets,” *Journal of International Money and Finance*, Vol. 21, pp. 981-1011.
8. Boudt, K., Peterson, B.G., and Croux,C. (2008), “Estimation and Decomposition of Downside Risk for Portfolios with Non-Normal Returns,” *The Journal of Risk* Vol. 11, No. 2, pp.79–103.
9. Denault, M. (2001), “Coherent Allocation of Risk Capital,” *The Journal of Risk* Vol. 4, No. 1, pp.1–33.
10. Ellis, J. (2005), “Ahead of the Curve: A Commonsense Guide to Forecasting Business and Market Cycles,” Harvard Business Press, Cambridge, MA.
11. Goldfeld, Stephen, M., and Richard, E. Quandt (1973), “A Markov Model for Switching Regressions,” *Journal of Econometrics*, Vol. 1, pp. 3-16.
12. Hamilton, J. D. (1989), “A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle,” *Econometrica*, Vol. 57, pp. 357-384.
13. Hamilton, J. D., and R. Susmel (1994), “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime,” *Journal of Econometrics*, Vol. 64, pp. 307-333.
14. Hess, M. K. (2010), “Timing and Diversification: A State-Dependent Asset Allocation Approach” *The European Journal of Finance*, Vol. 12, No. 3, pp.189-204.
15. Jorion, P. (1996), “Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk,” *McGraw-Hill*.

16. Kritzman, M., and Li, Y. (2010), "Skulls, Financial Turbulence, and Risk Management," *Financial Analysts Journal*, Vol. 66, No. 5, pp. 30-41.
17. Kritzman, M., Page, S., and Turkington, D. (2012), "Regime Shifts: Implications for Dynamic Strategies," *Financial Analysts Journal*, Vol. 68, No. 3, pp. 22-39.
18. Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol. 7, pp.77-91.
19. Maillard, S., Roncalli, T., and Teiletche, J. (2010), "On the Properties of Equally-Weighted Risk Contributions Portfolios," *Journal of Portfolio Management* Vol. 36, No. 4, pp.60–70.
20. Pflug, G. Ch. (2000), "Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk," In. Uryasev S. (Ed.) *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers.
21. Qian, E. (2005), "Risk Parity Portfolios: Efficient Portfolios Through True Diversification of Risk," *Report, Panagora Asset Management*.
22. Qian, E. (2006), "On the Financial Interpretation of Risk Contributions: Risk Budgets Do Add Up," *Journal of Investment Management*, Fourth Quarter.
23. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000), "Optimization of Conditional Value-at-Risk," *Journal of Risk*, Vol. 2, pp.21-41.
24. Wang, P., Sullivan, N. Rodney, and Ge, Y. (2012), "Risk-Based Dynamic Asset Allocation with Extreme Tails and Correlations," *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 38, No. 4, pp. 26-42.