

重隨機假設下動態違約相關性之描述及其資訊內涵：以指數型信用擔保債權憑證為例

On the Characterization and Information Contents of Dynamic Default Correlation under the Doubly Stochastic Assumption: The Case of iTraxx CDO Tranches

江睿修 / 國立政治大學金融學系副教授

Mi-Hsiu Chiang, Associate Professor, Department of Money and Banking, National Chengchi University

邱信瑜 / 國立政治大學金融研究所博士候選人

Hsin-Yu Chiu, Ph. D. Candidate, Department of Money and Banking, National Chengchi University

王盈心 / 國立政治大學金融系碩士

Ying-Hsin Wang, Master, Department of Money and Banking, National Chengchi University

Received 2011/12, Final revision received 2013/4

摘要

本文建立信用資產債權群組之動態違約相關性模型。其中，我們允許異質性信用風險事件之抵達由雙重 (Autonomous) 混合型卜瓦松跳躍過程 (Mixed Poisson Jump Processes) 所描述，且藉由跳躍幅度 (Jump Sizes) 反映信用事件之於信用資產池 (Reference Pool) 聯合存活機率 (Joint Survival Probabilities) 的危害程度。本文藉由提供驅動信用事件發生之頻率 (Default Intensity) 服從一雙參數伽瑪 (Gamma) 及帕雷圖分配 (Pareto Distribution)，以描述不同市場情境下信用事件發生之密集性。我們以市場指數型擔保債權憑證 iTraxx Europe 為例，驗證模型之市價擬合度，且藉由校準市價反推求得各分券之隱含相關性 (Implied Correlation)，進一步闡述隱含相關性於分券風險特徵及信用交易策略上所呈現的意涵。

【關鍵字】動態違約模型、混合卜瓦松跳躍過程、資產動態存活機率

Abstract

In this paper we present a tractable model that dynamically characterizes the correlation structure for a portfolio of credit entities. Heterogeneous credit events are modeled as the arrivals of mixed Poisson jump processes and magnitudes of jumps represent the associated impacts of credit events on the joint survival probabilities of the credit portfolio. We assume that the default intensities of both sources of risk are driven by a combination of two-parameter Gamma and Pareto distributions as to capture the clustering effects of default events under different market scenarios. We conduct calibration of the model to iTraxx Europe as an example and verify the goodness of fit between the market spreads and the model spreads of ours. We extract the implied jump-sizes that reveal information on the correlation structure, and further explore their impacts on the risk characteristics of CDO tranches.

【Keywords】 default correlations, mixed Poisson jump processes, contagious effects

壹、前言

本文承接縮減式模型 (Reduced Form Approach) 中一信用資產 (Credit Entity) 的違約與否為一卜瓦松過程 (Poisson Process) 所外生決定的假設。傳統縮減式模型中 (e.g., Duffie and Singleton, 1999) 必須假設違約事件為致命性的破產 (Bankruptcy)，即一信用資產發生違約事件，該資產即消失。而本文中對違約的定義同質於 Giesecke (2003)¹：我們允許違約事件為非致命性 (Non-fatal) 之信用事件 (Credit Events)，且可重複發生，只要一信用資產因其信用品質下降而使持有該資產的投資者遭受損失，都是信用風險事件。違約事件為非致命性信用事件之假設符合於信評公司諸如 Moody's 和 Fitch Ratings 對於一信用資產是否發生違約的定義。

信用擔保債權 (Synthetic Collateralized Debt Obligations) 是一種轉移信用風險之金融商品。藉由透過特殊目的機構 (Special Purpose Vehicle) 簽訂一籃子信用違約交換 (Credit Default Swaps)，信用保護買方 (Credit Protection Buyer) 將其所承擔之信用風險轉移予信用保護賣方 (Credit Protection Seller)。為了進一步增加信用商品市場之流動性及報價的透明度，近年來標準化的市場指數型信用擔保債權憑證為一新的商品趨勢，由 Markit 公司所編列之 iTraxx 指數即屬於此類標準化的商品。其商品之信用資產池由一特定地區之一籃子信用違約交換所構成，其中交易最頻繁者為 iTraxx Europe 指數，由歐洲最具流動性且為投資等級的 125 檔信用違約交換所構成，並依照其起賠點 (Attachment Point) 之不同分割為 5 檔分券。

就其商品結構而言，由多重標的信用資產 (Multi-name Credit Entities) 所構成之債權群組 (Reference Pool)，其聯合損失分配取決於個別信用資產發生違約的機率及信用資產之間違約的關聯性。債權群組中信用資產之間的違約相關性會隨著市場的總體經濟條件而發生變化，如景氣衰退、市場原物料價格飆漲、借貸資金成本上升等；此外，影響個別標的公司獲利情況之個別公司特有之非系統因素如管理階層蓄意掏空、政策制定錯誤、勞資糾紛、產品品質出現瑕疵等等，亦會造成該標的公司債信品質的惡化甚至發生違約的情況。

根據 Giesecke and Weber (2004) 及 Das, Duffie, Kapadia, and Saita (2007) 中指出，單一公司債信品質惡化時，容易造成相同產業下其他公司的債信品質也隨之下降。如 2005 年油價標漲，身為通用汽車 (General Motor) 最大汽車零件供應商的特耳非 (Delphi) 因資金取得不易而面臨破產危機，連帶拖累通用汽車。此外，銀行之間的同業拆款協定往往使得銀行間得以利用較低之拆款利率取得大量資金，當某間銀行發生財務危

1 Giesecke (2003) 的模型是一個違約強度模型 (Intensity-based Model)，個別公司違約由卜瓦松過程所驅動，違約的發生機率（即卜瓦松跳躍發生機率）是由外生的違約強度所決定，多資產的違約時點呈一聯合指數分布，同時 Giesecke (2003) 將信用風險定義為因為交易對手或發行商信用品質的不預期改變而造成投資損失的風險。

機，這些缺乏擔保品的拆款即可能導致其他銀行也面臨相同的財務困境，因此金融體系往往存在著不容忽視的傳染效應 (Contagious Effect)。由此可見，任何類型的信用擔保債權憑證其債權群組中信用資產的違約相關性不僅由總體經濟條件之系統性因素所驅動，個別信用資產發生違約的可能性更可藉由相同貿易網絡、關係企業的資金連結使得違約事件具有傳染效應。

在違約相關性描述的建構上，本文採用 Hull and White (2008) 中，令存活機率生成函數 (Survival Probability Generating Function) 取對數後的動態服從一卜瓦松跳躍過程 (Poisson Jump Process)。此時影響存活機率變化的因素包含了該跳躍項的跳躍頻率以及跳躍幅度 (Jump Size)。其中跳躍頻率決定了一段時間跳躍發生的密集程度，而跳躍幅度則決定了發生跳躍時對存活機率影響的程度。

本文與 Hull and White (2008) 不同的是，我們允許異質性的風險來源，允許信用風險事件可能有不同的發生頻率，並對存活機率造成不同的影響，甚至可能對各分券造成不同的危害程度。例如當市場利率非預期大幅上升、天然災害的發生導致普遍性的損失、通貨膨脹、市場景氣循環、匯率的變動皆可能對債權群組內所有標的公司之動態存活機率造成較大的危害程度。而假設投資組合中，單一標的公司發生跳票事件、或受某種原物料價格非預期上漲而造成成本負擔，使盈餘受到壓縮、或公司高層挪開大筆公司資金等等，這些事件也可能對投資組合的存活機率造成危害程度不同於前述總體因子的影響。

此外就分券的風險特徵而言，不同的分券由於其清償順位結構 (Senior / Subordinated Structure) 的不同，分別承受了不同的風險。權益分券由於起賠點較低，保護最低層的損失，因此承受契約的前期風險，並且當個別公司信用事件發生時，對權益分券造成的危害程度是最大的。而先償分券由於起賠點較高，當債權群組中發生累計違約家數多的時候才會侵蝕先償分券的本金，其承擔契約的後期風險，因此造成先償分券危害程度較大的風險較有可能為總體變化。

有別於 Hull and White (2008) 僅假設驅動信用事件所發生之頻率為固定常數，本文藉由引入驅動信用事件所發生之頻率為隨機變數的設定，來捕捉信用風險事件發生頻率可能具有叢聚的現象 (Das et al., 2007)，而非契約期間發生頻率都是固定的。在信用風險事件發生頻率的設定上，我們提供有兩種不同情境的假設：第一種為雙信用風險事件所發生之頻率分別服從一兩參數的伽瑪分配 (Gamma Distribution)；於此設定下，若假設兩伽瑪分配之尺度參數相同，兩個獨立的伽瑪分配即可合成為單由一個兩參數伽瑪分配來驅動信用風險事件的發生，此簡化後的模型特例即為 CreditRisk+ 模型中用以外生驅動信用事件於一期間內所發生次數的機制。第二種分配假設為帕雷圖分配 (Pareto Distribution)，著重於反應市場環境中偶發性叢聚違約之巨災性質，以其厚尾的特性捕捉信用風險事件次數於任何時期內可能極度密集發生的情境。

本文並以市場指數型信用擔保債權憑證 iTraxx Europe 為例，採用 Longstaff and Rajan (2008) 於多參數模型之校準方法驗證本模型於市價的擬合度，並由市價求得各分券之隱含跳躍幅度 (Implied Jump Size)。此市價所隱含之跳躍幅度，為 Hull and White (2008) 模型中所謂的隱含相關性 (Implied Correlation)，是一特定時期之內信用事件叢聚性的體現，反映信用事件之發生對於信用資產池聯合存活機率之危害程度。藉由觀察各分券之隱含相關性比較各分券受不同市場風險影響的程度，進而推論各分券承受之主要風險來源與市價呈現之整體市場風險狀況。

本文後續之論述依序規劃如下：我們於第貳節提供信用資產違約相關性之現有文獻回顧；第參節中我們論述本文之基本假設與模型設定；第肆節呈現本文所建立的模型於市價擬合度上的數值結果與分析；第伍節為本文之結論。

貳、文獻回顧

信用資產債權群組聯合預期損失之估算為評價任何類型的信用擔保債權憑證所不可缺之的一環。而債權群組內信用資產間違約相關性的描述即為估算標的債權群組損失分配之重要議題。

Li (2000) 以聯繫結構函數 (Copulae) 描述信用資產違約之關聯性，其模型藉由觀察一信用資產之距違約時點 (Time Until Default) 來取決違約事件的發生與否，建構其違約密度函數 (Default Intensity Function) 進而求得此資產之邊際分配，再藉由聯繫結構函數，將個別邊際分配串聯成債權群組之聯合違約機率分配，產生債權群組之聯合違約機率分配。當債權群組之資產數目眾多，則該模型會面臨維度的詛咒 (Curse of Dimensionality)，模擬得執行上相當耗時。因此，在條件獨立 (Conditional Independence) 假設下所產生的因子聯繫結構 (Factor Copulae) 模型便逐漸被應用於多重標的信用衍生性商品之評價。

因子聯繫結構模型假設債權群組之標的資產受到系統性因子影響，在給定系統性因子下，標的資產彼此獨立，僅受標的資產之個別非系統因子支配。因此聯合違約機率分配之維度不再由標的資產之個數決定，而是由影響資產價值之系統性風險因子之個數決定。以單一系統因子為例，以單維度積分即可計算債權群組之聯合違約機率分配。此類評價模型包含了 Laurent and Gregory (2003)、Andersen, Sidenius, and Basu (2003) 及 Hull and White (2004)。

上述之模型均屬於違約相關性的靜態描述，意即，模型均假設債權群組中的信用資產違約的關聯性皆遵循事先所給定之聯繫結構。為彌補因子聯繫結構於違約相關性刻劃上的不足，Andersen et al. (2003) 在此架構下進一步推演跨期違約相關性模型，其中風險因子及因子承載係數 (Factor Loadings) 皆具跨期相關 (Inter-temporal Dependent) 的特性，且設定違約時資產的回復率為隨機。為增進對信用資產池聯合違約機率分配

厚尾性的描述，Albrecher, Ladoucette, and Schoutens (2007) 建構了 Levy Copula 的幾何單因子模型，其假設資產價值的分配函數為已知，而大幅改善模型的精確度。該模型的特色為使違約發生的極端值其尾端分佈更具有相關性，而且結構相關性也使得模型配適上有更高的彈性。

在違約相關性的動態描述上，Totouom and Armstrong (2007) 首先嘗試將靜態的聯繫結構模型延伸至動態架構之下，並發展出 Archimedean Copulae 來描繪違約時間動態。該模型具有可交換的性質，也就是說兩變數間的相關性不會因選擇不同的變數而有所改變。在建構大樣本、同質組合模型時，應用可交換性將十分重要，但是此模型中仍然有其限制在，因為實務上具有此類同質性的信用資產組合甚少。

聯繫結構函數對於違約關聯性的假設，多為事先給定違約相關型態下，求得聯合違約機率分配，其靜態的性質無法描述違約環境之演變。因子聯繫模型雖具計算的便利性，但近期許多實證研究提出債權群組之違約機率在條件獨立模型設定下，明顯低估違約密集發生之機率。債權群組違約相關性不僅藉由總體經濟條件之系統性因子驅動，債權群組中標的公司的違約機率可能藉由相同貿易網絡、關係企業的資金連結使得違約事件具傳染性，單一標的債信品質惡化可能造成其他公司債信品質隨之下降，促使違約事件的連鎖反應。

Das et al. (2007) 以美國 1970 年至 2004 年公司違約資料為研究根據，發現在不考慮違約傳染效果的情況下，明顯低估違約密集發生的機率。Azizpour and Giesecke (2008) 提出自我傳染模型 (Self-exciting Model)，加入傳染效果及不可觀察到之不確定風險 (Frailty) 刻劃違約密度，試圖捕捉違約叢聚現象，以 1970 至 2006 年美國之公司資料進行研究，顯示在給定相同系統性因子與不可觀察到之不確定因子的條件下，加入傳染效果顯著增加標的公司違約叢聚發生之機率。

Hull and White (2008) 的模型假設延續 Giesecke (2003) 中定義一信用事件之發生為非致命，且信用資產債權群組之存活機率生成函數由卜瓦松跳躍過程所動態決定，以外生跳躍的發生描述信用事件之發生。在此模型中，信用資產債權群組之存活機率的上升或下降取決於信用事件（跳躍）發生的次數及信用事件發生時其跳躍自身的幅度。債權群組之存活機率下降，隱含其違約機率上升，進而反映債權群組之累積期望損失的提升。此模型所建構之動態違約相關性描述，在信用擔保債權的評價上，相較於靜態模型，能夠整合違約環境演變之訊息，並動態刻劃信用資產池於各時點之聯合損失分配。

參、模型設定與基本假設

本文採用 Hull and White (2008) 中令存活機率生成函數服從卜瓦松跳躍過程的假設。相較於 Hull and White (2008)，本文允許信用風險事件的發生根據其緣由可進一步

區分為兩類信用風險因子。此外，有別於 Hull and White (2008) 僅假設驅動信用事件所發生之頻率為固定常數，本文藉由引入驅動信用事件所發生之頻率為隨機變數的設定，來捕捉信用風險事件發生頻率可能有時具有叢聚的現象。

在信用風險事件發生頻率的設定上，本文提供有兩種不同情境的假設：第一種為兩信用風險事件因子發生跳躍之頻率分別服從各兩參數的伽瑪分配；於此設定下，若假設兩伽瑪分配之尺度參數相同，兩個獨立的伽瑪分配即可合成為單由一個兩參數伽瑪分配來驅動信用風險事件的發生，此簡化後的模型特例即為 CreditRisk+ 模型中用以外生驅動信用事件於一期間內所發生次數的機制。第二種分配假設為帕雷圖分配，著重於反應市場環境中偶發性叢聚違約之巨災性質，以其厚尾的特性捕捉發生極度密集違約的情境。

一、存活機率生成函數

首先定義 $S(t)$ 為從時點 0 到時點 t ，單一資產之累積存活機率，介於 $[0,1]$ 且具非隨時間遞增 (Non-increasing in Time) 性質，表示隨這時間的推移，從時點 0 至時點 t 的累積存活機率會下降或持平，定義 $S(0)=1$ ，表示時點為 0 時，債權群組之標的不會有任何違約情況發生，令 $X(t)=-\ln S(t)$ ，累積存活機率可表示為下列公式：

$$d \ln S(t) = dX(t) = \mu dt + dq_1 + dq_2 \quad (1)$$

其中 $P(dq_1 = H_1) = \lambda_1 dt$ ， $P(dq_2 = H_2) = \lambda_2 dt$ ， $H_1, H_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu \geq 0$ 。 q_1 及 q_2 是分別由兩信用風險事件因子所驅動之跳躍過程。 H_1 及 H_2 分別為跳躍發生時所連帶的跳躍幅度，此跳躍幅度，反映信用風險事件之發生對於信用資產池聯合存活機率之危害程度，在本文中，我們將其稱之為信用風險事件之危害程度。 $\mu \geq 0$ ，為一漂浮項，由於 $S(t)$ 具有非隨時間遞增的性質下， $X(t)$ 必須是一個非隨時間遞減的函數，因此漂浮項必須大於等於零。另外， λ_1 及 λ_2 分別為兩信用風險事件發生之頻率，即單位時間內之發生次數。重新整理 (1) 式，單一資產標的之動態存活機率可以下列公式表示：

$$S(t, J_1, J_2) = \exp(-M(t) - \sum_{i=1}^{J_1} H_1 - \sum_{i=1}^{J_2} H_2) \quad (2)$$

其中 $M(t) = \int_0^t \mu(s) ds$ 為漂浮項對時間積分值， J_1, J_2 分別為兩信用風險事件發生之次數，次數的密集程度由發生頻率 λ_1, λ_2 驅動。

二、動態違約機率

本模型沿用 Credit Suisse First Boston (1997) 中求得單一資產發生違約次數的概念²，設定債權群組內單一標的公司之非系統信用事件發生次數及系統信用事件發生次數的機率分別為兩個獨立之混合卜瓦松分配 (Mixed Poisson Process)，單位時間內信用事件發生次數的機率取決於頻率的設定，進一步影響債權群組內各個標的之動態存活機率。

在 Hull and White (2008) 中假設信用風險事件發生頻率為常數 λ_c ，信用發生次數為一卜瓦松過程。本模型對於信用事件發生頻率 λ 之分配 U 的第一種設定採用 Credit Suisse First Boston (1997) 中兩參數的伽瑪分配 $\Gamma(\alpha, \beta)$ ，其機率密度函數如下表示：

$$dU(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} d\lambda, \lambda > 0 \quad (3)$$

其中 α 及 β 為正。期望值為 α/β ，變異數為 α/β^2 ，信用事件發生頻率 λ 為一不對稱的分配， β 為尺度參數 (Scaling Parameter)，決定隨機變數分配的分散程度， β 越小則表示信用事件發生頻率之分散程度越大。 α 決定伽瑪分配的形狀，稱為形狀參數 (Shape Parameter)，在由 β 支配的尺度內，若 α 越大，機率分配集中區域由左邊端點漸漸往右移，當 α 大到一個程度，伽瑪分配逼近於常態分配。

在 λ 為兩參數伽瑪分配假設下，混合卜瓦松可簡化為一個負二項分配 (Negative Binomial Distribution)，表示如下，推導請參照附錄 A：

$$P(J, t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} dU(\lambda) = \binom{J+\alpha-1}{J} \left(\frac{t}{t+\beta} \right)^J \left(\frac{\beta}{t+\beta} \right)^\alpha \quad J=0,1,2\dots \quad (4)$$

在同一時點 t 下，跳躍發生次數的機率分配隨著 α 值的上升，發生少次信用事件的機率會下降，發生多次事件的機率會提升，機率分配右尾增厚。 β 值下降與 α 值上升有類似的效果，發生少次信用事件的機率明顯的減少，發生多次信用事件的機率提升，機率密度函數右尾增厚。當模型中兩個信用風險事件因子跳躍頻率分別服從伽瑪分配時： $\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$ 、 $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$ ，我們可以將 $P(J_1, t)$ 與 $P(J_2, t)$ 相乘即可求得單一標的公司在 t 時點分別發生 J_1 次信用事件及 J_2 信用事件的機率，表示如下：

2 在 Credit Suisse First Boston (1997) 文中資產組合群內發生違約的機率彼此獨立，個別債權標的之違約機率可經由機率產生函數 (Probability Generating Function) 之泰勒展開式求得為一混何卜瓦松分配，配合單位時間內發生違約頻率服從兩參數的伽瑪分配的假設，求得發生違約次數的機率可簡化為一個負二項分配，本文利用此概念應用在計算發生信用事件之發生次數的機率。

$$P(J_1, J_2, t) = \binom{J_1 + \alpha_1 - 1}{J_1} \binom{J_2 + \alpha_2 - 1}{J_2} \left(\frac{t}{t + \beta_1} \right)^{J_1} \left(\frac{\beta_1}{t + \beta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{t}{t + \beta_2} \right)^{J_2} \left(\frac{\beta_2}{t + \beta_2} \right)^{\alpha_2}, \quad (5)$$

$$J_1, J_2 = 0, 1, 2, \dots$$

另外本模型對於信用事件發生頻率 λ 的第二種分配假設為帕雷圖分配，為具有極厚尾性質的分配。帕雷圖分配的厚尾性質於精算保險領域中，可刻劃巨型災害發生使保險公司可能造成極大損失的情形，或是資本市場中股票價格大幅度下跌造成巨大損失的偶發情形等等。當假設信用事件發生頻率 λ 為帕雷圖分配時，其厚尾性能夠合理反應系統信用事件的發生次數具有密集叢聚的巨災性質，刻劃現實中系統性風險所導致的密集信用違約現象，改善伽瑪分配可能低估極端值風險發生的可能性。帕雷圖分配有兩個參數， α 及 λ_0 可表示為 $Pareto(\alpha, \lambda_0)$ ，其機率密度函數、期望值、變異數如下表示：

$$f(\lambda) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}, \lambda > \lambda_0, \alpha > 0 \quad (6)$$

$$E(\lambda) = \alpha \lambda_0 / (\alpha - 1), \alpha > 1 \quad (7)$$

$$Var(\lambda) = \frac{\alpha^2 \lambda_0}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \alpha > 2 \quad (8)$$

式子 (6) 中系統信用事件發生頻率有一最小值 λ_0 的設定， $\alpha > 0$ 為分配之形狀參數，當 $\alpha > k$ ，表示帕雷圖分配的 k 階動差存在，若 $\alpha > 1$ ，表示期望值存在，若 $\alpha > 2$ ，則二階動差存在。在相同最小值 λ_0 設定下， α 參數之改變影響帕雷圖分配機率密度函數的厚尾性。當 α 越小表示此分配的厚尾性質越嚴重，即發生極端值的機會較高，描述市場信用事件叢聚發生之巨災性風險的提升。

給定 α 為任意正整數，時點 0 至時點 t 發生 J 次系統信用事件的機率分配表示如下，推導過程請參照附錄 B：

$$P(J, t) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} dU(\lambda) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \int_{\lambda_0 t}^{\infty} x^{J-\alpha-1} e^{-x} dx, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

當模型中兩個信用風險事件因子跳躍頻率分別服從帕雷圖分配及伽瑪分配時： $\lambda_1 \sim Pareto(\alpha_1, \lambda_0)$ 、 $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$ ，將 $P(J_1, t)$ 與 $P(J_2, t)$ 相乘即可求得單一標的公司在 t 時點分別發生 J_1 次信用事件及 J_2 信用事件的機率。

三、聯合損失分配

信用擔保債權分券之合理信用價差評價關鍵為債權群組內聯合損失分配的建立，債權群組中各標的之違約關聯性的設定延伸因子聯繫模型中條件獨立的概念，在給定信用事件發生次數 J_1 、 J_2 下，假設債權群組中單一標的公司在 t 時點之動態存活機率彼此獨立，當信用風險事件次數密集發生時，債權群組內所有標的公司違約機率同時大幅提升，造成當期債權群組內高違約相關性。條件獨立假設下，債權群組之整體違約機率由個別資產標的之違約機率相乘，故在 t 時點發生 J_1 及 J_2 次信用事件的情況下，有債權群組內 N 個標的公司中有 n 個標的公司違約的機率表示如下：

$$\Phi(n, t | J_1, J_2) = b(n, N, 1 - S(t | J_1, J_2)) \quad (10)$$

(10) 式中 $b(n, N, p) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ 為一個二項式，在給定 J_1 、 J_2 的情況下，各個標的之存活機率彼此獨立。根據各分券的損失起賠點 a_L 及損失止賠點 (Detachment Point) a_H ，可得到各分券在 n 個標的發生違約的情況下所剩餘的單位本金如下（假設分券期初本金為 1 元）：

$$w(n) = \min \left(\max \left(\frac{a_H - n(1-R)/N}{a_H - a_L}, 0 \right), 1 \right), \quad n \leq N, 0 \leq R \leq 1 \quad (11)$$

(11) 中 R 為回復率 (Recovery Rate)，當違約發生時，分券持有人在期初投入每單位本金能夠拿回 R 單位，損失 $(1-R)$ 單位，本文假設債權群組內的組成標的具備同質性，故單一標的公司違約時造成的損失比例同為 $n(1-R)/N$ 。根據 (10) 式的條件聯合違約機率及 $w(n)$ ，可計算出給定信用事件發生次數 J_1 、 J_2 的條件下，該分券在 t 時點的期望單位本金如下：

$$E(t | J_1, J_2) = \sum_{n=0}^N \Phi(n, t | J_1, J_2) w(n) \quad (12)$$

接著針對 (12) 式中條件期望單位本金 (Conditional Expected Principle) $E(t | J_1, J_2)$ 所給定的信用事件發生次數發生機率 $P(J_1, J_2, t)$ 乘積進行加總，即可推得無條件下 t 時點該分券期望單位本金：

$$E(t) = \sum_{J_1} \sum_{J_2} E(t | J_1, J_2) P(t, J_1, J_2) \quad (13)$$

利用 (13) 式，我們可以計算各付息時點的期望本金，進而決定分券持有人，即信用保護賣方未來現金流入與現金支出的現值，接著以分券持有人期望收入等於期望支出的限制式，即可求出信用債權群組各分券之合理信用價差。

肆、數值結果與分析

本節運用第參節中所建構之理論模型，對 iTraxx Europe Tranche 市場價格進行評價，參數校準及相關之數值分析。iTraxx Europe 由歐洲最具流動性的 125 個信用違約交換標的 (Credit Default Swap) 組成，並排除 Baa3/BBB- 等級以下 (含) 具有負向觀望之標的，每個公司占相同比重，風險程度相當分散。下表為 2007 年 1 月 30 日及 2008 年 3 月 31 日之市場價格：

表 1 iTraxx Europe 市場價格

iTraxx Europe 2007 年 1 月 30 日市場價格				
aL(%)	aH(%)	5 年 (b.p.)	7 年 (b.p.)	10 年 (b.p.)
0	3	10.25(%)	24.25(%)	39.30(%)
3	6	42.00	106.00	316.00
6	9	12.00	31.50	82.00
9	12	5.50	14.50	38.25
12	22	2.00	5.00	13.75
Index		23.00	31.00	42.00
iTraxx Europe 2008 年 3 月 31 日市場價格				
0	3	40.28(%)	45.63(%)	50.05(%)
3	6	483.50	569.00	681.70
6	9	310.00	354.30	397.20
9	12	216.40	239.20	261.30
12	22	109.50	121.80	134.40
Index		123.00	127.00	128.00

表 1 中除 0%~3% 之權益分券外，分券持有人於分券付息期間依該分券剩餘本金收取由市場決定之信用價差，如 2007 年 1 月 30 日 7 年期 3%~6% 之分券持有人每單位剩餘本金於每期可收取 106 基本點 (Basis Point) 之利息。0%~3% 之權益分券市價表示方法不同於其他分券，以契約初期信用保護買方須支付信用保護賣方 (即分券持有人) 之本金的百分比例表示，稱為初期費用 (Upfront Fee)，此後之付息期間皆依該分券剩餘本金收取固定 500 基本點之利息。評價模型中需估計之參數包括無風險利率之期間結構 r_t 、伽瑪分配下兩信用風險事件發生頻率 $\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$ 、 $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$ 或 λ_1 在帕雷圖假設下 $\lambda_1 \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_0)$ 共四個參數，動態存活機率隨時間下降之漂浮項 μ ，信用事件危害程度 H_1 及 H_2 。其中無風險利率期間結構利用市場資料即可獲得，模型參數估計主要在於信用事件發生次數頻率分配參數 (α_1, β_1) 或 (α_1, λ_0) 、 (α_2, β_2) ，以及危害程度 H_1 、 H_2 ，參數的估計可利用市場價格資料進行估計。

一、模型校準

本節第一部分先介紹模型校準之流程。第二部分假設驅動存活機率的信用風險發生頻率為兩獨立伽瑪分配，以市價進行多參數校準。第三部分假設這兩個信用風險事件發生頻率分別為帕雷圖及伽瑪分配，以市價進行多參數校準程序。第四部分為帕雷圖與伽瑪分配假設之差異分析。

(一) 校準流程

1. 任意給定 (α_1, β_1) 、 (α_2, β_2) ³，將參數帶入，選擇對應的信用事件危害程度 H_1 、 H_2 使得 5、7、10 年期各分券模型價格與市場價格接近。
2. 計算將上述參數組合帶入各分券所得模型價格與市場價格誤差平方值總和。
3. 重複上面步驟找出使各分券信用價差平方值總和最小的參數組合。

(二) 兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$ 、 $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

假設水平利率期間結構，回復率 0.4，漂浮項 μ 為 0，信用風險的危害程度為常數 H_1 及 H_2 ，以市價對模型分配參數及 H_1 、 H_2 進行市價校準。圖 1、圖 2 為 2007、2008 年市價信用事件隱含危害程度，觀察兩類信用風險危害程度，我們將在各分券表現行為類似的信用風險因子放在同一張圖表中顯示，注意兩類信用風險事件所隱含的危害程度，依照年期及分券的不同，分別各有 15 個。圖 1 為第一類信用風險事件由市價所隱含之不同年期、不同分券的信用事件危害程度，圖 2 則為第二類信用風險事件由市價所隱含之不同年期、不同分券信用事件危害程度。

首先，我們觀察到第一類信用風險事件對 12%~22% 的先償分券造成最大的危害，對 0%~3% 的權益分券則危害較小。而圖 2 中，第二類信用風險事件由不同年期的各分券市價所隱含之信用事件危害程度，除了 2008 年 3 月 31 日 7 年期券之外，以權益分券危害程度最嚴重，而 12%~22% 分券危害程度皆最小。第二，比較圖 1、圖 2，第一類信用風險事件危害程度約在 0.03~0.15 的區間，第二類信用風險事件危害程度則在 0~0.04 的區間。權益分券、3%~6% 次償分券的第二類信用風險事件危害程度較第一類信用風險事件稍大，其餘分券第一類信用事件危害程度大幅高於第二類信用風險事件，闡述權益分券及同樣為保護層底端的 3%~6% 分券，同時承擔第一、第二類信用事件風險，其餘 6%~9%、9%~12%、12%~22% 分券則風險來源主要為第一類信用風險。第三，我們在圖 3 中比較兩信用風險事件發生頻率的分配，2007 年校準結果可發現第一類信用風險事件發生頻率的期望值高於第二類信用風險事件，第二類信用事件頻率的機率分配集中在較接近 0 的一側，反映第二類信用事件發生次數零星，同時

3 為了驗證校準參數結果的強健性，我們嘗試不同的參數初始值來測試校準所得的參數結果，所試的參數初始值範圍 α 在 0.001~40， β 則在 0.6~130 之間，柏拉圖分配參數 α 在 2~8 之間， λ_0 在 0.001~0.2 之間，這些參數初始值組合會使信用事件發生頻率的期望值在 0.0016~0.2 區間，變異數則在 0.001~0.09 區間。測試各種不同的參數初始值之後，校準參數的結果仍然保持不變。

發生頻率的波動較小而 2008 年第一類信用風險事件次數期望值則略低於第二類信用風險事件。

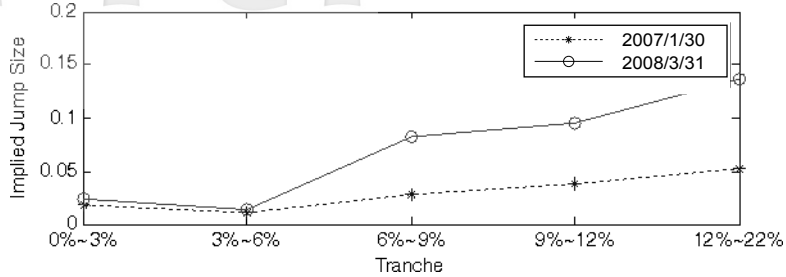


圖 1.1 第一類信用風險事件由 5 年期分券市價所隱含之信用事件危害程度

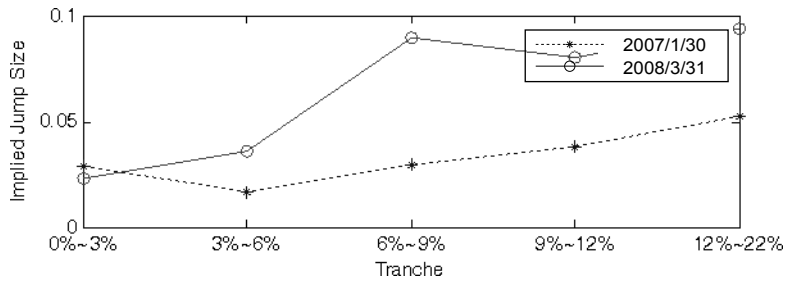


圖 1.2 第一類信用風險事件由 7 年期分券市價所隱含之信用事件危害程度

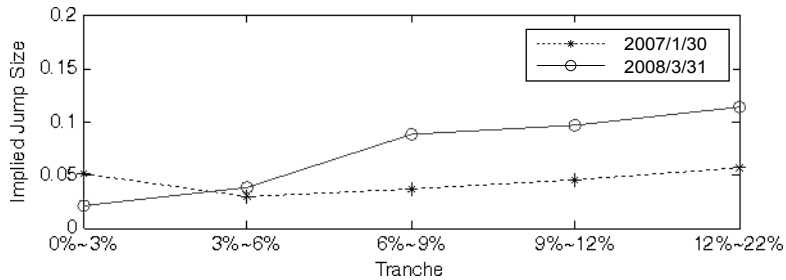


圖 1.3 第一類信用風險事件由 10 年期分券市價所隱含之信用事件危害程度

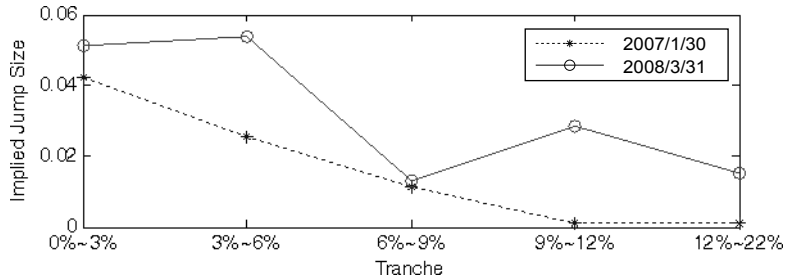


圖 2.1 第二類信用風險事件由 5 年期分券市價所隱含之信用事件危害程度

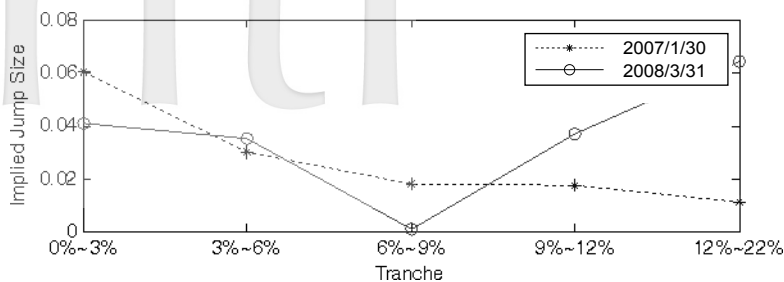


圖 2.2 第二類信用風險事件由 7 年期分券市價所隱含之信用事件危害程度

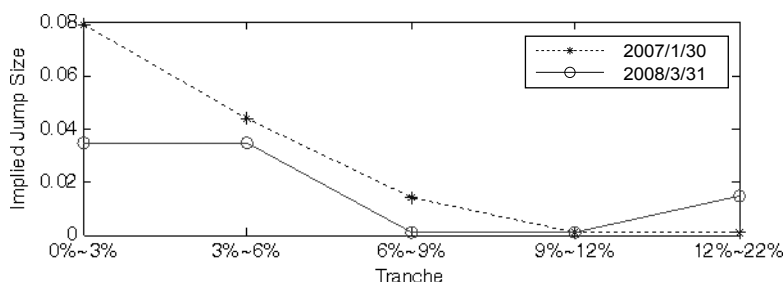


圖 2.3 第二類信用風險事件由 10 年期分券市價所隱含之信用事件危害程度

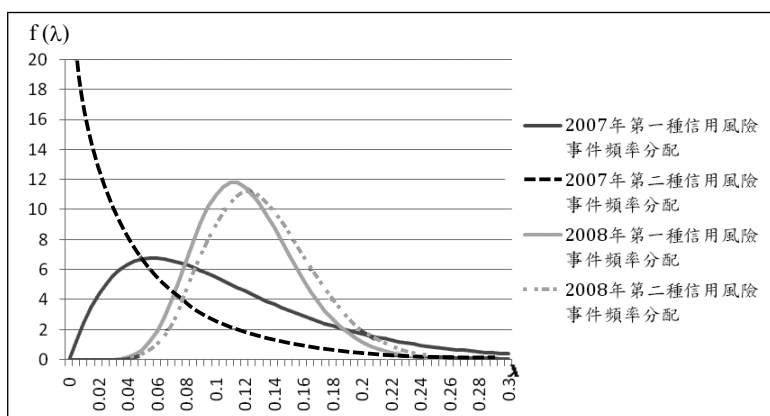


圖 3 信用風險事件發生頻率分配圖。假設兩類信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配且具相異尺度參數

*2007 年 1 月 30 日第一類信用風險事件發生頻率 $\lambda_1 \sim \alpha_1 = 2.1, \beta_1 = 19.17, E(\lambda_1) = 0.11, Var(\lambda_1) = 0.0057$; 第二類信用風險事件發生頻率 $\lambda_2 \sim \alpha_2 = 0.85, \beta_2 = 16.67, E(\lambda_2) = 0.051, Var(\lambda_2) = 0.003$; 2008 年 3 月 31 日第一類信用風險事件發生頻率 $\lambda_1 \sim \alpha_1 = 12.24, \beta_1 = 100.08, E(\lambda_1) = 0.122, Var(\lambda_1) = 0.0012$; 第二類信用風險事件發生頻率 $\lambda_2 \sim \alpha_2 = 12.88, \beta_2 = 97.8, E(\lambda_2) = 0.132, Var(\lambda_2) = 0.00135$ 。

(三) 兩信用風險事件發生頻率分別為帕雷圖及伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim Pareto(\alpha_1, \lambda_0)$ 、 $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

接下來我們在模型其他假設條件維持不變的情況下，將其中一信用事件發生頻率

採用另一個分配假設—帕雷圖分配，同樣以市價對模型中參數 α_1 、 λ_0 、 α_2 、 β_2 、依年期及分券而不同且由第一個信用風險事件造成之危害程度 H_1 ，以及由第二個信用風險事件造成之危害程度 H_2 進行校準。其中我們假設第一類信用風險事件發生頻率分配為柏拉圖分配，也就是 $\lambda_1 \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_0)$ 第二類信用風險事件發生頻率分配為伽瑪分配，也就是 $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$ 。

信用風險事件之隱含危害程度如圖 4、5 所示，我們仍然將在各分券表現行為類似的信用風險因子放在同一張圖表中顯示，其中圖 4 中的第一類信用風險事件，其危害程度在各分券的表現，類似於圖 1 中假設兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配時的第一類信用風險事件因子。該因子在圖 4 中的隱含危害程度 H_1 除權益分券外，依分券優先償還順位上升而增強，顯示先償分券的承擔較高的風險。同時，第一類信用風險事件造成違約機率的上升幅度，除了權益分券外，均較圖 5 中第二類信用風險事件所隱含之危害程度 H_2 嚴重；而 H_2 在權益分券有最嚴重損害，接著依分券優先順位上升而減低單次事件發生造成的危害。

圖 6 為經上述市價校準程序之信用事件發生頻率分配，2007 年 1 月 30 日第一類信用風險事件發生頻率 λ_1 有一最小值門檻 λ_0 為 0.0775，期望值 0.1162，變異數 0.0045， λ_1 的機率分配從 0.0775 之最高點，隨著 λ_1 增加而下降，分配特性使得 λ_1 坐落於門檻值 0.0775 的可能性相當高，且事件發生頻率極大的可能性，因分配厚尾性質而大增，第一類信用事件發生頻率 $\lambda_1 > 0.4$ 的可能性極遠遠高於第二類信用事件發生頻率 λ_2 。2007 年的第二類信用事件發生頻率分配 λ_2 期望值 0.1494，變異數 0.0056， λ_2 於 0~0.03 區間賦予較高之發生可能性，多集中在 λ_2 較小的範圍內。2008 年 3 月 31 日的校準結果，第一類信用風險事件發生頻率 λ_1 最小門檻值 λ_0 拉升至 0.105，期望值、變異數皆上升，而第二類信用風險事件發生頻率 λ_2 集中區域左移，集中座落 0~0.2，期望值、變異數皆下降。

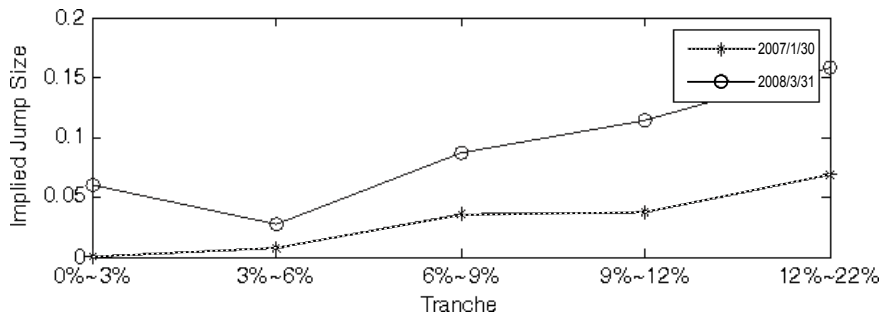


圖 4.1 第一類信用風險事件由 5 年期 iTraxx 分券市價所隱含之信用風險事件危害程度

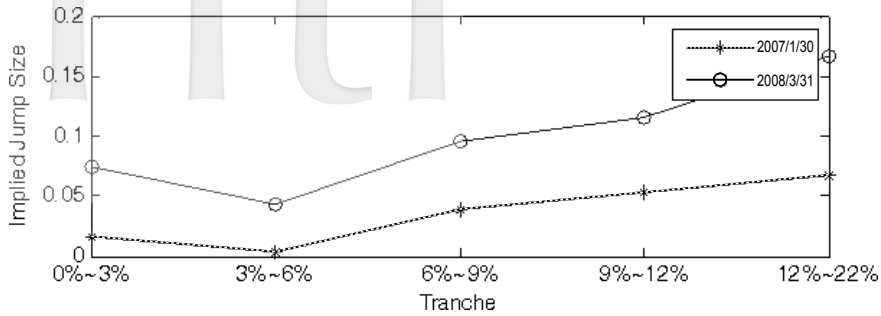


圖 4.2 第一類信用風險事件由 7 年期 iTraxx 分券市價所隱含之信用風險事件危害程度

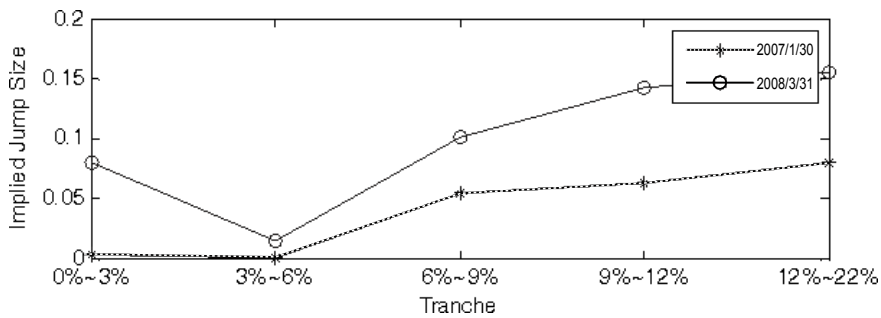


圖 4.3 第一類信用風險事件由 10 年期 iTraxx 分券市價所隱含之信用風險事件危害程度

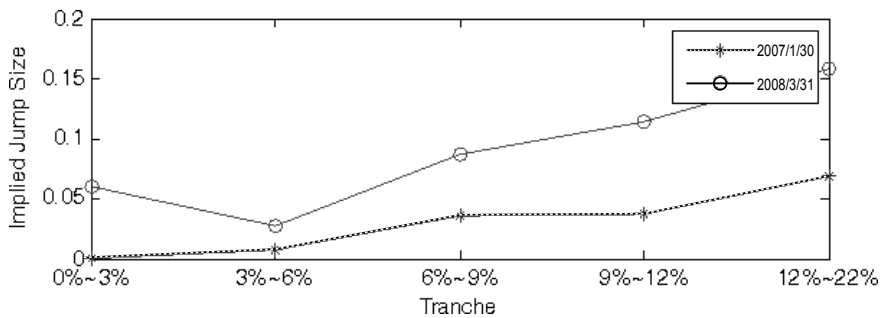


圖 5.1 第二類信用風險事件由 5 年期 iTraxx 分券市價所隱含之信用風險事件危害程度

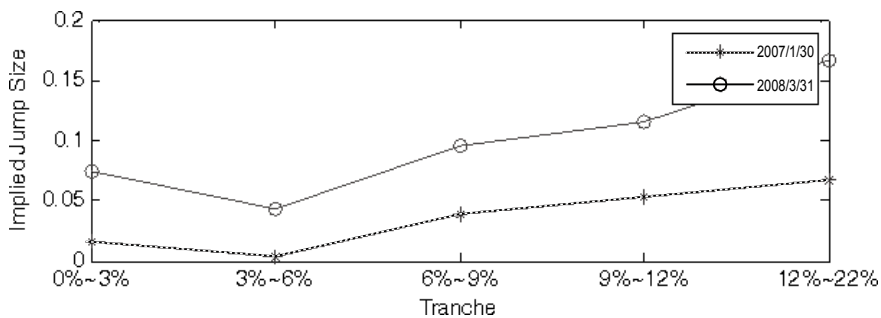


圖 5.2 第二類信用風險事件由 7 年期 iTraxx 分券市價所隱含之信用風險事件危害程度

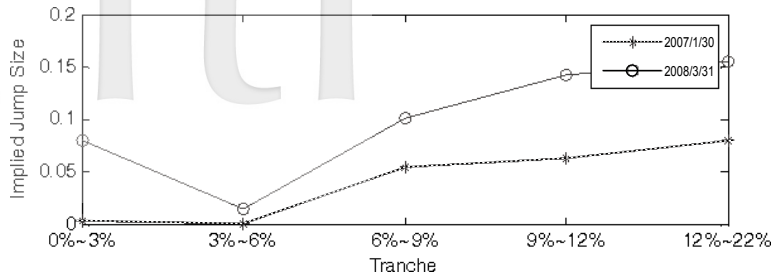


圖 5.3 第二類信用風險事件由 10 年期 iTraxx 分券市價所隱含之信用風險事件危害程度

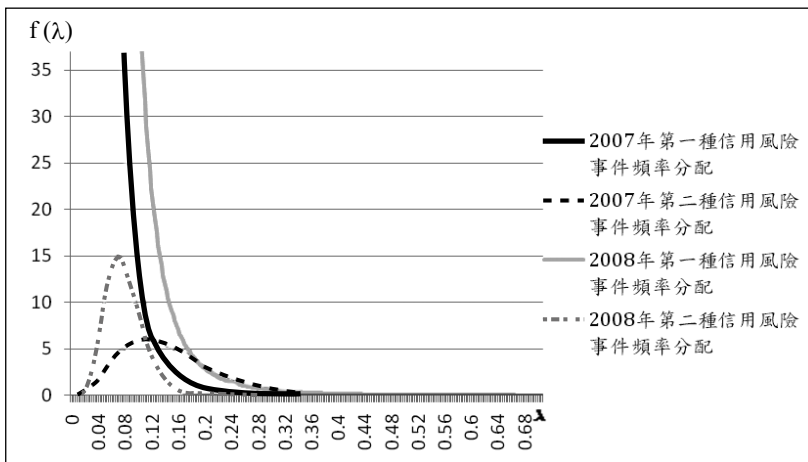


圖 6 信用風險事件次數發生頻率分配圖。假設兩類信用風險事件發生頻率分別為一帕雷圖分配及一伽瑪分配

*2007 年 1 月 30 日第一類信用風險事件發生頻率 $\lambda_1 \sim \alpha_1 = 3$, $\lambda_0 = 0.0775$, $E(\lambda_1) = 0.1163$, $Var(\lambda_1) = 0.0045$; 第二類信用風險事件發生頻率 $\lambda_2 \sim \alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 26.768$, $E(\lambda_2) = 0.1494$, $Var(\lambda_2) = 0.0056$; 2008 年 3 月 31 日第一類信用風險事件發生頻率 $\lambda_1 \sim \alpha_1 = 4$, $\lambda_0 = 0.1050$, $E(\lambda_1) = 0.1400$, $Var(\lambda_1) = 0.0025$; 第二類信用風險事件發生頻率 $\lambda_2 \sim \alpha_2 = 8$, $\beta_2 = 100.1500$, $E(\lambda_2) = 0.0799$, $Var(\lambda_2) = 0.0008$ 。

圖 6 指出 2008 年第一類信用風險事件發生之頻率較 2007 年為高，第二類風險事件發生之頻率則較 2007 年減少。而 2008 年第一類信用風險事件危害程度，也就是圖 4 中的 H_1 增加，同時第二類信用風險事件發生之頻率雖然降低，但從圖 5 的 H_2 仍可看出單次信用事件危害程度放大。

(四) 異質性分配假設之差異性分析

觀察 2008 年市價校準結果，此為市場動盪的一年，市場上整體系統性風險大幅提高，在伽瑪分配與帕雷圖分配假設下，第一類信用風險事件次數、事件危害程度 H_1 皆大幅增加，且後者分配設定之第一類信用事件在「次數」、「危害程度」大於前者。相較之下，第二類信用風險詮釋的風險比例較低。在 λ_1 為帕雷圖分配假設下，相較於第一類信用風險事件，第二類信用風險事件以發生次數多但單次危害程度小呈現；在

λ_1 為伽瑪分配假設下，相較於第一類信用事件，第二類信用風險事件則以次數少、單次危害程度大，來刻劃此時第一類信用風險為風險主體的市場環境。

在雙伽瑪分配假設下，當 2008 年整體市場風險增加時，會同時顯著增加第一及第二類信用風險。帕雷圖分配假設下的第一類信用事件發生次數於 2008 年遽增，第二類信用事件發生次數則減少為 2007 年次數之 0.57 倍，雖然信用事件次數減少，但單次事件的危害程度增為原本的 2~3 倍，故在第一類信用事件發生頻率為帕雷圖假設下，當 2008 年整體市場風險增加時，第一類信用風險會巨幅增加，第二類信用風險則是微幅增加。

二、敏感度分析

本部分探討模型中各參數對於模型評價之影響，針對模型中單一參數對於模型評價結果，給定該參數一個變動區間後，其他參數值皆固定的情況下，觀察各參數對於分券信用價差的影響。此外，由於以 2007 年 1 月 30 日或 2008 年 3 月 31 日 iTraxx 市場資料之校準結果進行敏感度分析有相似結果，故選擇其中一筆資料進行敏感度分析，下列分析將以 2007 年 1 月 30 日 iTraxx 市價校準結果為基準。

(一) 第一類信用風險事件之危害程度 H_1

表 2 為第一類信用風險事件之危害程度 H_1 在兩風險事件發生頻率皆為伽瑪假設下之敏感度分析，給定無風險利率為 0%，回復率 0.4，以及 2007 年 1 月 30 日市價所校準結果為基準，另外當模型設定兩風險事件發生頻率分別為一帕雷圖分配及伽瑪分配時，敏感度分析結果相似，因此此處僅採用兩風險事件發生頻率皆為伽瑪分配來說明。

表 2 改變第一類信用風險事件危害程度，以圖 1 中各分券 H_1 校準結果，在 0.9 倍~1.1 倍的區間變動，此處僅列出第一類信用事件危害程度對 5 年期各分券之影響。當第一類信用風險事件危害程度增加時，先償分券信用價差上升最多，權益分券及 3%~6% 的次償分券信用價差受影響程度較小；當信用風險事件危害程度降低，先償分券信用價差下降最多，權益分券及 3%~6% 的次償分券信用價差減少程度較小，顯示先償分券價格對 H_1 的變動較為敏感。當兩風險事件發生頻率分別為一帕雷圖分配及伽瑪分配時，改變第一類信用風險事件危害程度時，先償分券價格對 H_1 的變動一樣較權益分券為敏感。

(二) 第二類信用風險事件之危害程度 H_2

表 3 為第二類信用風險事件之危害程度，在兩風險事件發生頻率皆為伽瑪假設下之敏感度分析。此處同樣僅列出第二類信用風險事件危害程度對 5 年期各分券之影響。觀察表 3，當第二類信用風險事件危害程度增加時，其效果與改變第一類信用事件危害程度的結果剛好完全相反。而當兩風險事件發生頻率分別為一帕雷圖及伽瑪分配時，第二類信用風險事件危害程度之敏感度分析結果是相似的。

表 2 第一類信用風險事件危害程度 H_1 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

H_1	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
0.90	881.48(-14.0%)	38.67(-7.9%)	7.73(-35.6%)	3.13(-43.0%)	1.07(-46.6%)
0.95	954.21(-6.9%)	40.28(-4.1%)	9.72(-19.0%)	4.21(-23.5%)	1.48(-25.9%)
1.00	1025.00(--)	42.00(--)	12.00(--)	5.50(--)	2.00(--)
1.05	1093.86(6.7%)	43.84(4.4%)	14.58(21.5%)	7.03(27.6%)	2.63(31.6%)
1.10	1160.81(13.2%)	45.80(9.0%)	17.46(45.5%)	8.81(60.2%)	3.39(69.4%)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

表 3 第二類信用風險事件危害程度 H_2 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

H_2	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
0.90	945.68(-7.7%)	34.00(-19.1%)	11.66(-2.8%)	5.50(-0.1%)	2.00(-0.07%)
0.95	987.00(-3.7%)	37.90(-9.8%)	11.83(-1.4%)	5.50(-0.05%)	2.00(-0.04%)
1.00	1025.00(--)	42.00(--)	12.00(--)	5.50(--)	2.00(--)
1.05	1059.84(3.4%)	46.30(10.5%)	12.18(1.5%)	5.50(0.05%)	2.00(0.04%)
1.10	1091.70(6.5%)	50.79(20.9%)	12.37(3.1%)	5.51(0.1%)	2.00(0.07%)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

(三) 第一類信用風險事件發生頻率之參數 $\Gamma(\alpha_1, \beta_1)$

首先，我們在假設兩類信用風險事件頻率分別為一伽瑪分配的狀況下，給定無風險利率為 0%，回復率 0.4，以及以 2007 年 1 月 30 日校準所得參數為基準，改變第一類信用事件發生頻率分配中的兩個參數 (α_1, β_1)，進行敏感度分析。

表 4 第一類信用風險事件發生頻率分配參數 α_1 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

α_1	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
1.89	861.97(-15.9%)	39.66(-5.6%)	9.78(-18.5%)	4.35(-20.8%)	1.56(-21.9%)
1.99	943.75(-7.9%)	40.81(-2.8%)	10.86(-9.5%)	4.91(-10.8%)	1.77(-11.4%)
2.10	1025.00(--)	42.00(--)	12.00(--)	5.50(--)	2.00(--)
2.20	1105.72(7.9%)	43.22(2.9%)	13.21(10.1%)	6.14(11.6%)	2.25(12.4%)
2.31	1185.91(15.7%)	44.46(5.9%)	14.49(20.8%)	6.83(24.1%)	2.51(25.7%)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

表5 第一類信用風險事件發生頻率分配參數 β_1 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

β_1	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
17.25	1197.30(16.8%)	45.10(7.4%)	15.66(35.5%)	7.61(38.3%)	2.86(42.9%)
18.21	1107.11(8.0%)	43.44(3.4%)	13.66(13.9%)	6.45(17.1%)	2.38(19.0%)
19.17	1025.00(--)	42.00(--)	12.00(--)	5.50(--)	2.00(--)
20.13	949.94(-7.3%)	40.74(-3.0%)	10.61(-11.6%)	4.73(-14.1%)	1.69(-15.3%)
21.08	881.07(-14.0%)	39.64(-5.6%)	9.43(-21.4%)	4.09(-25.7%)	1.44(-27.8%)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

第一類信用風險事件發生頻率為伽瑪分配時期望值為 α_1/β_1 ，變異數為 α_1/β_1^2 ，當 α_1 上升或 β_1 下降，信用風險事件發生次數期望值、變異數皆增加，使得第一類信用風險事件造成的風險上升，其效果與危害程度增加類似，同樣僅以 5 年期為例，表 4 及表 5 顯示當 α_1 增加或 β_1 下降，先償分券之信用價差增加幅度最多，權益分券或 3%~6% 次償分券受影響最少。

(四) 第一類信用風險事件發生頻率之參數 $Pareto(\alpha_1, \lambda_0)$

表 6、7 為第一類信用風險事件發生頻率為帕雷圖分配之設定下，給定無風險利率為 0%，回復率 0.4，以及以 2007 年 1 月 30 日校準結果為基準，分別針對分配中的兩個參數，進行敏感度分析，並以 5 年期為例。表 6 針對 α_1 在 1~8 的範圍變動， λ_0 保持不變；表 7 為 λ_0 在 0.9 倍~1.1 倍的區間變動， α_1 保持不變，分券信用價差評價結果。

帕雷圖分配為具有極度厚尾性質的分配，期望值 $\alpha_1\lambda_0/(\alpha_1-1)$ ，變異數為 $\alpha_1^2\lambda_0/(\alpha_1-1)^2(\alpha_1-2)$ 。當 $\alpha_1>1$ ，分配期望值才存在，當 $\alpha_1>2$ ，分配變異數才存在。 α_1 增加時，一段時間內發生之系統信用事件次數減小，變異程度降低；反之， α_1 下降時，期望值變大，即一段時間內發生之系統信用事件次數增加，變異程度是升高的。 α_1 變小對於權益分券信用價差提升的效果較不顯著，而對先償分券影響較大。其中從 $\alpha_1=8$ 至 $\alpha_1=4$ 的階段，由於發生頻率期望值及變異數皆上升，使得信用價差上升。但從 $\alpha_1=3$ 至 $\alpha_1=1$ 的階段，隨著 α_1 變小，反而造成信用價差下跌之反效果。對於各層分券而言，當第一類信用風險事件次數超過一定的程度，違約機率持續上揚，造成本金極嚴重的虧損，以至於超過各分券所承擔的風險範圍，反而使得未來不確定性的下降，故信用價差不升反降。表 7 的結果一樣顯示先償分券對 λ_0 的變化最敏感，權益分券最不敏感。

表 6 第一類信用風險事件發生頻率分配參數 α_1 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一帕雷圖分配及一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_0)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

α_1	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
1.0	997.463(-0.33%)	36.836(-5.67%)	0.1030(-98.95%)	1.260(-73.70%)	0.002(-99.89%)
2.0	1000.655(-0.01%)	38.556(-1.26%)	4.772(-51.24%)	3.041(-36.52%)	0.177(-91.21%)
3.0	1025.001(2.43%)	41.998(7.55%)	11.999(22.59%)	5.500(14.79%)	2.000(-0.74%)
4.0	1019.742(1.90%)	41.952(7.43%)	14.526(48.41%)	6.699(39.81%)	2.918(44.83%)
5.0	1011.498(1.08%)	40.806(4.50%)	14.459(47.72%)	6.512(35.92%)	3.179(57.76%)
6.0	1006.169(0.54%)	39.934(2.26%)	12.063(23.25%)	5.739(19.79%)	2.726(35.30%)
7.0	1002.900(0.22%)	39.397(0.89%)	10.608(8.38%)	5.138(7.24%)	2.261(12.24%)
8.0	1000.723(--)	39.050(--)	9.788(--)	4.791(--)	2.015(--)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

表 7 第一類信用風險事件發生頻率分配參數 λ_0 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一帕雷圖分配及一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_0)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

λ_0	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
0.070	1015.16(-1.0%)	40.66(-3.2%)	10.08(-16.0%)	4.77(-13.3%)	1.64(-17.8%)
0.074	1020.13(-0.5%)	41.33(-1.6%)	11.03(-8.1%)	5.13(-6.7%)	1.82(-9.0%)
0.078	1025.00(--)	42.00(--)	12.00(--)	5.50(--)	2.00(--)
0.081	1029.78(0.5%)	42.65(1.6%)	12.98(8.2%)	5.87(6.8%)	2.18(9.2%)
0.085	1034.46(1.0%)	43.30(3.1%)	13.98(16.5%)	6.24(13.5%)	2.37(18.7%)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

(五) 第二類信用風險事件發生頻率之參數 $\Gamma(\alpha_2, \beta_2)$

表 8 是在兩信用風險事件發生頻率皆為伽瑪分配下，給定無風險利率為 0%，回復率 0.4，以及以 2007 年 1 月 30 日校準結果為基準，改變第二類信用風險事件發生頻率分配參數而得的敏感度分析，以 5 年期為例。表 9 分成兩部份：針對 α_2 校準結果 0.853 上下 10% 為變動範圍， β_2 保持不變；針對 β_2 校準結果 16.667 上下 10% 為變動範圍， α_2 保持不變。

表中可觀察到，調整第二類信用風險事件發生頻率與第一類信用風險事件頻率的敏感度分析不同，其影響對各分券造成的強度是相反的，觀察表 8，當 α_2 增加或 β_2 減小，權益分券信用價差受到的影響最為強烈，先償分券之效果較不明顯。另外當第一類信用風險事件發生頻率分配為柏拉圖分配時，各分券的敏感度分析與表 8 的情形類似，此處不再另製圖表顯示。

表 8 第二類信用風險事件發生頻率分配參數 α_2 、 β_2 敏感度分析 - 兩信用風險事件發生頻率分別為一伽瑪分配 ($\lambda_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$)

α_2	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
0.768	882.72(-13.8%)	37.46(-10.8%)	11.75(-2.1%)	5.496(-0.1%)	1.999(-0.06%)
0.811	954.16(-6.9%)	39.7(-5.5%)	11.88(-1.0%)	5.498(-0.05%)	1.999(-0.03%)
0.853	1025.0(%)	42.0(--)	12.0(--)	5.50(--)	2.00(--)
0.896	1095.2(6.9%)	44.3(5.6%)	12.13(1.0%)	5.50(0.05%)	2.00(0.03%)
0.939	1165(13.7%)	46.7(11.2%)	12.25(2.1%)	5.51(0.1%)	2.00(0.07%)
β_2	0%~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
15.000	1164.77(13.6%)	48.29(15.0%)	12.32(2.6%)	5.507(0.1%)	2.002(0.08%)
15.833	1091.84(6.5%)	45.0(7.0%)	12.15(1.2%)	5.504(0.05%)	2.001(0.04%)
16.667	1025.0(--)	42.00(--)	12.0(--)	5.501(--)	2.00(--)
17.500	963.51(-6.0%)	39.42(-6.2%)	11.87(-1.1%)	5.499(-0.05%)	1.999(-0.03%)
18.333	906.75(-11.5%)	37.13(-11.6%)	11.75(-2.1%)	5.496(-0.1%)	1.999(-0.06%)

* 灰底為 2007 年 1 月 30 日參數校準結果，括弧內是以灰底資料為基準之變動百分比

三、模型意涵

相較於傳統以聯繫結構函數來賦予違約相關性一靜態的描述，動態違約相關性描述於國內文獻中相當缺乏，且皆屬於試驗的階段，導致目前市場上尚無一標竿型模型 (Benchmark Model)。其中 Davis and Lo (2001) 建構斷續性違約傳染模型以取代靜態違約相關性描述，Brigo, Pallavicini, and Torresetti (2007) 的動態廣義卜瓦松損失模型直接考量損失的時間相依的動態描述，Graziano and Rogers (2009) 則以馬可夫鍊 (Markov Chain) 驅動信用資產池中違約事件之發生。

上述模型之架構與出發點皆與本文全然迥異，較難找出比較的基準點。本文的模型為 Hull and White (2008) 模型之延伸，在違約的定義上，我們採用 Giesecke (2003) 及 Giesecke, Spiliopoulos, and Sowers (2013) 中區定義違約事件為非致命性 (Non-fatal，意即非破產性) 的信用事件，且進一步區分信用事件為尋常性 (Typical) 與非尋常性 (Atypical) 兩類。相對於本文的斷續性模型，此模型為連續性，且驅動兩類違約事件之發生為一考量了系統性風險驅動因子與非系統性驅動因子的外生違約頻率 (密度) 過程。相較於 Hull and White (2008) 的模型，本文不同之處在於：

有別於 Hull and White (2008) 僅假設驅動信用事件所發生的頻率為固定的常數，我們藉由引入驅動信用事件所發生頻率為隨機變數的設定來捕捉信用風險事件發生頻率可能具有叢聚的現象，而非契約期間發生頻率都是固定的。我們並允許兩類信用事件有不同的頻率驅動情境：當考量信用事件之驅動因子為伽瑪分配時，我們允許所產生的聯合違約機率分配具有左偏、右偏、或是近似於常態的對稱分配。而考量信用事件之驅動因子柏拉圖分配則是希望賦予一段時間內信用風險事件發生的次數可以具有

異常密集的現象，我們嘗試藉此來描述系統風險發生的情境。

本文的兩類信用事件，為非齊次卜瓦松抵達 (Inhomogeneous Poisson Arrivals)，意即：信用事件的發生連帶著不同的跳躍幅度，而跳躍幅度與信用資產池的動態存活機率為反向的關係，我們藉此反映現實中不同的信用事件對於一信用資產池存活機率的影響，因其所連帶的跳躍幅度不同，而會有不同的危害程度，也就是說單一標的公司發生信用違約事件對債權群組其他標的公司之動態存活機率造成的影響，和總體市場環境變化所造成的影響是不同的。

上述的論點為本文與 Hull and White (2008) 的差異。本文嘗試提出一個較能貼切描述市場違約情境，並且具備可校準性的模型，本文的數值結果中提供了 2007/1 月至 2008/1 月的 iTraxx 市場價格的校準結果。我們同時容許異質性風險來源，且數值結果中的敏感度分析呈現異質性風險確實有不同分券有不同影響。

本文模型所設定的兩類信用風險事件，其頻率分配及隱含的危害程度，均可由市場擔保債務憑證不同分券、不同年期的信用價差校準而得，但透過不同分券所隱含的危害程度及敏感度分析，我們於模型所呈現的意涵作如下推論：

首先由數值結果中的表 2 可以觀察到，當調整第一類信用風險事件的危害程度，對先償分券的影響是較大的，先償分券對第一類信用風險事件危害程度 H_1 較為敏感；反之，表 3 可觀察到先償分券對於第二類信用風險事件危害程度 H_2 最不敏感。

而當調整第一類信用風險事件發生頻率的分配參數時，表 4 到表 7 顯示，先償分券對於第一類信用風險事件頻率分配參數最為敏感；當調整第二類信用風險事件發生頻率的分配參數，在表 8 中則對權益分券造成最大的影響。直覺上我們可推論，由於當債券群組標的發生一定數量違約之後，才開始由先償分券承擔損失，因此造成所有債券群組存活機率大幅下降的總體風險，可能會對先償分券造成較大的危害，同理，個別公司的違約發生，則對先償分券影響較小，因此很可能第一類信用風險事件屬於總體風險，而第二類信用風險事件則描述個別信用事件對整體存活機率造成影響的風險。

另外從 2007 年 1 月 30 日及 2008 年 3 月 31 日各年期不同分券信用價差所反推的隱含危害程度也可以發現，第一類信用風險事件所造成的危害程度，不論模型設定為伽瑪或是帕雷圖分配，先償分券均比權益分券為高，也就是說系統性因子對於先償分券造成的危害程度較劇。

為了確保模型的可校準性及校準結果一致性，我們另外以 2007 年 1 月 30 日至 2008 年 3 月 31 日間的市場分券信用價差作校準，期間 iTraxx 市場價格共有七筆，分別是 2007 年 4 月 30 日、2007 年 5 月 31 日、2007 年 6 月 29 日、2007 年 7 月 31 日、2007 年 9 月 28 日、2007 年 11 月 30 日及 2008 年 1 月 31 日。在假設異質性風險來源分別為一伽瑪分配下，我們發現從市價反推而得的隱含危害程度均可得到與上面模型

意涵所敘述的相同結果。也就是說第一類信用風險事件對先償分券均有較高的危害程度，第二類信用風險事件則反之，礙於篇幅，我們僅將七筆市價反推隱含危害程度之平均值繪製於圖 7.1 及 7.2。

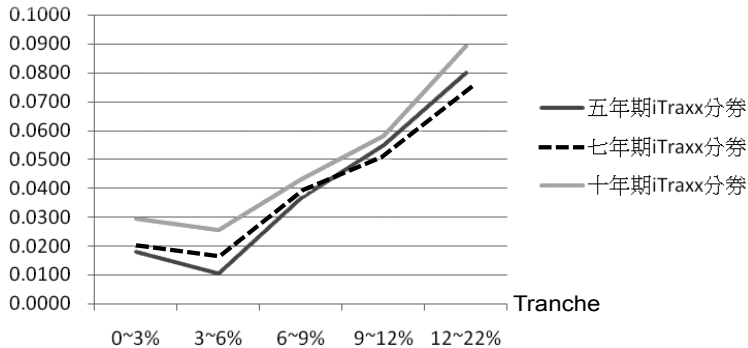


圖 7.1 第一類信用風險事件隱含危害程度

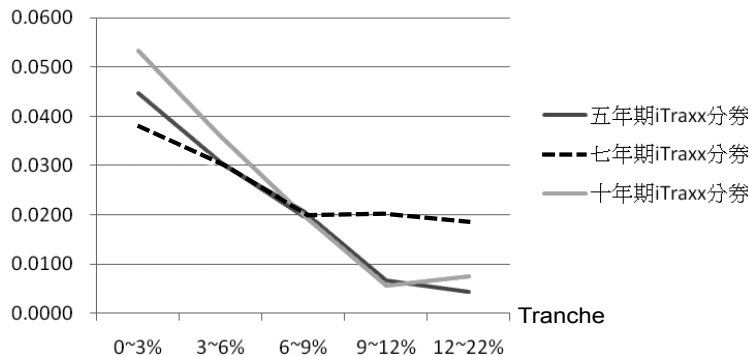


圖 7.2 第二類信用風險事件隱含危害程度

* 假設異質性風險來源分別為一伽瑪分配，使用 2007 年 4 月 30 日、2007 年 5 月 31 日、2007 年 6 月 29 日、2007 年 7 月 31 日、2007 年 9 月 28 日、2007 年 11 月 30 日及 2008 年 1 月 31 日 iTraxx 市場價格反推隱含危害程度之平均值

伍、結論

本文建立動態違約模型，以混合卜瓦松跳躍過程描述資產動態存活機率，以跳躍來描述信用事件之發生對存活機率下降之影響及衝擊，允許異質性的信用風險事件來源，同時允許驅動信用事件發生之頻率為隨機，可捕捉信用風險事件可能叢聚的現象。本文所建立之模型，並不涉及複雜積分及模擬，可廣泛應用於信用資產群組之評價與風險分析。

在信用事件發生頻率的設定上，本文提供有兩種不同情境的假設：第一種為雙信用風險事件所發生之頻率分別服從一兩參數伽瑪分配；於此設定下，若假設兩伽瑪分

配之尺度參數相同，兩個獨立的伽瑪分配即可合成為單由一個兩參數伽瑪分配來驅動信用事件所發生之頻率，此簡化後的模型特例即為 CreditRisk+ 模型中用以外生驅動信用事件於一期間內所發生次數的機制。第二種分配假設為帕雷圖分配，著重於反應市場環境中偶發性叢聚違約之巨災性質，以其厚尾特性捕捉市場中突發性叢聚違約之巨災性質。單次信用事件造成存活機率下降之幅度以跳躍強度量化，信用事件越嚴重則跳躍幅度越大。故違約叢聚之性質由信用風險事件發生之次數及危害程度共同描述。

本文並以 iTraxx Europe 市場指數型擔保債權憑證為例，驗證模型的市價擬合度，進而提供分券之風險分析。我們以市價對模型進行校準，研究結果顯示分券確實因其清償順位結構的不同，使不同類型的信用風險事件對其造成的危害程度也有所不同。總體風險（第一類信用風險事件）對先償分券造成較嚴重之損害；而個別信用事件造成整體存活機率下降的風險（第二類信用風險事件）則對權益分券造成之危害較顯著。相較於 2007 年，2008 年市場風險大幅提高之際，總體信用風險事件之於信用資產池的危害程度增劇，發生的頻率大幅提升，使先償分券及部分次償分券本金遭受損失的可能性大幅增加；相對地，權益分券之本金可能因初期違約事件而遭受損失，當總體風險以接續密集發生已超過分券本金保護範圍時，能造成本金損失增加之幅度有限，故危害程度之於其分券信用價差的影響只呈現微幅上升、持平或微幅下降。

相較於總體風險，個別信用事件造成整體存活機率下降的風險能詮釋的風險比例較低，對於權益分券或 3%~6% 之次償分券造成的危害明顯較先償分券高出許多，符合先償分券主要承受總體風險，而權益分券主要承受個別違約風險之概念。於 2008 年市場風險大幅提升之際，個別信用風險亦是同步上揚。故市場風險上升時，兩信用風險會同時提升，但總體信用事件發生頻率假設為帕雷圖分配之設定時傾向強調總體風險之上升幅度；雙伽瑪設定之模型則傾向同步增加兩類風險。

本文的模型參數皆由校正 iTraxx 各分券市價所得，模型參數未能與市場上其他總體或個體風險因子做驗證並賦予經濟意涵，但本模型所隱含的兩類信用風險事件分配參數及其危害程度，對信用市場或許能提供有效的交易輔助資訊。例如當 iTraxx 權益分券價差提高，藉由本文模型可以校正出是總體還是個體信用風險的發生頻率增加，這對其他信用擔保債權憑證分券投資人選擇避險工具時將具有參考價值。當總體信用風險發生頻率增加，先償分券投資人可以針對 iTraxx 指數來進行避險，而當個體信用風險發生頻率增加，先償分券投資人可選擇不進行避險或是針對信用價差較高，較容易違約的個別信用價差進行避險。在交易方面，如果預期總體信用風險事件發生頻率有提高的趨勢，建立先償分券價差的買方部位會比交易權益分券來的有效率，反之如果是預期個體信用風險事件發生頻率提高，則應選擇建立權益分券價差的買方部位。

本文提出一個能描述市場違約叢聚，具備可校準性，同時容許異質性風險來源的模型，但任何模型都有其侷限，本文模型較為複雜，參數較多，如果模型參數能以市

市場上可觀察到之總體或個體風險因子代理變數做進一步驗證並賦予其經濟意涵，將能更彰顯本模型之優勢。在未來研究方向上，藉由本模型校正各分券市價所得的兩類信用風險事件分配參數及其危害程度，對於一般信用擔保債權憑證投資人在避險或交易上是否能提供重要資訊也是未來可繼續進行研究與實證的。另外由各分券市價所校正出的兩類信用風險事件，是否能在總體經濟或投組中個別公司的資訊中找出具有經濟意涵的替代變數來做驗證，也是未來的研究方向之一。

On the Characterization and Information Contents of Dynamic Default Correlation under the Doubly Stochastic Assumption: The Case of iTraxx CDO Tranches

Mi-Hsiu Chiang, Associate Professor, Department of Money and Banking, National Chengchi University

Hsin-Yu Chiu, Ph. D. Candidate, Department of Money and Banking, National Chengchi University

Ying-Hsin Wang, Master, Department of Money and Banking, National Chengchi University

Purpose / Objective

Proper characterization of the dependence structure among events of default is vital in the construction of the joint-loss distribution for a pool of credit entities. Existing empirical studies have suggested that default correlations in fact react to macroeconomic conditions. For example, Das et al. (2007) observe that, during economic recessions, correlation of defaults among credit entities is most likely to increase and brings about default clustering as a direct result.

Moreover, the embedded risk characteristics of CDO tranches are very different. Depending on their senior/subordinated structures, CDO tranches endure different sources of risk that induce varying extents of impact on the associated tranche spreads. Equity tranches tend to suffer losses in the early contract stage whenever a default-event takes place, and are therefore more susceptible to influences of idiosyncratic nature. Senior tranches, on the other hand, are vulnerable to the detriments induced by an increase in the systematic exposure of the reference pool.

While economic conditions are recognized to be a major factor, they are not the sole determinant in the dependence structure among events of default, as suggested by Giesecke and Weber (2004), and Das et al. (2007). They show that, deteriorations in the credit quality of one single entity may affect that of other counterparties in the same pool; thus, a proper characterization of default correlation must account for not only the systematic risk factor, but also the idiosyncratic component. In this research, iTraxx CDO tranches are taken as an example to illustrate the complex inter-relations between credit-events that are driven by heterogeneous sources.

Design / Methodology / Approach

In order to gain a thorough understanding of the complex risk characteristics of CDO tranches, in this research we extend the framework of Hull and White (2008) to account for

heterogeneous sources of risk-driving factors that generate the occurrence of credit-events. In addition, these risk factors are assumed to follow a doubly stochastic setting and jointly affect the survival probabilities of the reference pool.

In contrast to Hull and White (2008), our doubly stochastic setting allows for the randomization of the default intensities underlying a inhomogeneous Poisson process that governs the survival probability generating function of the reference pool. In addition, we provide different market scenarios under which the total numbers of credit-events are driven by the default intensities that follow a mixture of two-parameter Gamma and Pareto distributions.

Such setting, though being theoretical, reflects the real life situation that credit-events are not merely driven by macroeconomic conditions. While systematic factors represent the market's economic situation as a whole, firm-specific, idiosyncratic factors may also bring about the rising of default possibility for a single-name asset.

To demonstrate the feasibility of model calibration, we provide a calibration procedure that adopts the approach of Longstaff and Rajan (2008) in verifying the goodness of fit between a multi-parameter model and the market prices. By calibrating the model parameters to historical spreads of iTraxx Europe CDO tranches, we examine the pricing errors between the market spreads of CDO tranches and the model spreads of ours. In addition, we extract the implied jump-sizes that reveal the information contents on the correlation structure of defaults.

We finalize this research by conducting sensitivity analysis of the model spreads to the key parameters of the distributions and the associated jump sizes that represent the detrimental extent of default events on the survival probabilities.

Findings

As was suggested by Hull and White (2008), the implied jump sizes extracted from the market prices upon calibration reflected the implied correlation structure of credit-events. They, as a direct consequence of the extent of damage being imposed on the overall survival probabilities of the reference pool, induce the clustering of defaults over a sample period. Such observation enables us to draw further conclusions on the effects of heterogeneous risk-driving factors on CDO tranches. In the following discussion, we further differentiate the credit-events generated by the risk-driving factors into two categories, one being the “credit-events of the first type”, and the other being the “credit-events of the second type”.

Our calibration results reveal that credit-events driven by heterogeneous sources exhibit different implied jump sizes for different tranches of a CDO according to their senior/subordinated structure. For credit-events of the first type, the implied jump sizes of senior tranches are larger in magnitude than those of equity tranches. On the other hand, credit-events of the second type exhibit larger implied jump sizes for equity tranches than those for senior tranches. This indicates that, when the first-type credit-events occur, these jumps have greater impacts on the spreads of senior tranches than that of equity tranches. Such effects of jump sizes on CDO tranches resembles that of default correlation. A high correlation of defaults increases the likelihood of the extreme cases of atypical credit-events, and implies that losses are likely to occur on the senior tranche.

Our results of sensitivity analysis further confirm the above findings. We find that the spreads of senior tranches are more sensitive to the changes in the jump sizes and distribution parameters of the first-type credit events. On the other hand, the spreads of the equity tranches are more volatile when we change the jump sizes and distribution parameters of the second-type credit events. We therefore hypothesize that the first-type credit events are atypical credit-events of a systematic nature, while the second-type credit events are typical credit-events of an idiosyncratic nature. Our hypothesis awaits further empirical validation.

Originality / Contributions

In this research, we present a calibratable model that is analytically tractable and dynamically characterizes the correlation structure for a portfolio of credit entities. Our model allows for the co-existence of heterogeneous sources of risk-driving factors and helps one to further explore the risk characteristics of CDO tranches under such interactions.

In addition, information drawn upon calibration helps forming the correlation trading strategies. While the dealers can eliminate the sensitivity of CDO tranches spreads to the spread-variability of underlying credit entities, they remain exposed to the uncertainty in correlation structures.

Based on the model, one can extract the jump sizes and distribution parameters upon calibration. The implied jump sizes enables one to identify the market implied correlation structure of either type of risk-driving factors. For correlation trading, the dealers can sell the tranches that exhibit large jump sizes to those who have overestimated the values, and buy the tranches that exhibit small jump sizes from those who have underestimated them.

Hedging implications are also intuitive. Upon extracting the key parameters of the

underlying distributions, the holders of the senior tranches can choose to hedge against the movements of iTraxx index when the extracted information indicates that the default intensity of the systematic component is rising. If the default intensity of the idiosyncratic credit events is observed to have increased, the holders can instead hedge against the movements of the single-name credit default swaps.

Research Limitations / Implications

The number of parameters needed to be calibrated in our model is greater than that of Hull and White (2008), and that entails more endeavors be made in the calibrations procedure and thus inevitably more time required for computation.

Further empirical validation is warranted to find out whether or not the model is capable of differentiating credits events originated from a systematic risk-driving factor or an idiosyncratic one requires. By that, proper selection of market proxies for both types of credit-events is crucial, though at the time of research such information is not yet available.

Further work also calls for comparisons to be drawn among different approaches that strive to provide a dynamic characterization on the correlation structure of defaults.

參考文獻

- Abramowitz, M., and Stegun, I. A. 1972. *Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY: Dover Publications.
- Albrecher, H., Ladoucette, S., and Schoutens, W. 2007. A generic one-factor lévy model for pricing synthetic CDOs. In Fu, M. C., Jarrow, R. A., Yen, J. Y., and Elliot, R. J. (Eds.), *Advances in Mathematical Finance, Part III*: 259-277. New York, NY: Birkhäuser Boston.
- Andersen, L., Sidenius, J., and Basu, S. 2003. All your hedges in one basket. *Risk*, 16 (11): 67-72.
- Azizpour, S., and Giesecke, K. 2008. *Self-exciting corporate defaults: Contagion vs. frailty*. Working paper, Stanford University, Stanford, U.S.A.
- Brigo, D., Pallavicini, A., and Torresetti, R. 2007. Calibration of CDO tranches with the dynamical generalized-poisson loss model. *Risk*, 20 (5): 70-75.
- Credit Suisse First Boston. 1997. *CreditRisk+: A credit risk management framework*. <http://www.csfb.com/institutional/research/assets/creditrisk.pdf>. Accessed Dec. 1, 2011.
- Das, S. R., Duffie, D., Kapadia, N., and Saita, L. 2007. Common failings: How corporate defaults are correlated. *The Journal of Finance*, 62 (1): 93-117.
- Davis, M., and Lo, V. 2001. Infectious defaults. *Quantitative Finance*, 1 (4): 382-387.
- Duffie, D., and Singleton, K. 1999. Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, 12 (4): 687-720.
- Giesecke, K. 2003. A simple exponential model for dependent defaults. *Journal of Fixed Income*, 13 (3): 74-83.
- Giesecke, K., Spiliopoulos, K., and Sowers, R. B. 2013. Default clustering in large portfolios: Typical events. *Annals of Applied Probability*, 23 (1): 348-385.
- Giesecke, K., and Weber, S. 2004. Cyclical correlations, credit contagion, and portfolio losses. *Journal of Banking and Finance*, 28 (12): 3009-3036.
- Graziano, G. D., and Rogers, L. C. G. 2009. A dynamic approach to the modeling of correlation credit derivatives using Markova chains. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12 (1): 45-62.
- Hull, J., and White, A. 2004. Valuation of a CDO and an n-th to default CDS without Monte Carlo simulation. *Journal of Derivatives*, 12 (2): 8-23.
- _____. 2008. Dynamic models of portfolio credit risk: A simplified approach. *Journal of Derivatives*, 15 (4): 9-28.

- airiti
- Laurent, J. P., and Gregory, J. 2003. *Basket default swaps, CDO's and factor copulas*. Working paper, University of Lyon, Lyon, France.
- Li, D. X. 2000. On default correlation: A copula approach. *Journal of Fixed Income*, 9 (4): 43-54.
- Longstaff, F. A., and Rajan, A. 2008. An empirical analysis of the pricing of collateralized debt obligations. *The Journal of Finance*, 63 (2): 529-563.
- Totouom, D., and Armstrong, M. 2007. *Dynamic copulas processes: Comparison with five 1-factor models for pricing CDOs*. Working paper, Cerna Mines Paristech, Paris, France.

附錄 A

Lemma 1:

假設信用事件發生頻率為兩參數伽瑪分配時，推導可得時點 0 至時點 t 發生 J 次非系統信用事件的機率為負二項分配：

$$\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta), \quad f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda}, \lambda > 0 \quad (\text{A.1})$$

$$P(J, t) = \binom{J + \alpha - 1}{J} \left(\frac{t}{t + \beta} \right)^J \left(\frac{\beta}{t + \beta} \right)^\alpha \sim \text{Negative Binomial Distribution} \quad (\text{A.2})$$

Proof:

$$\begin{aligned} P(J, t) &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} dU(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} f(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{t^J \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) J!} \int_0^\infty \lambda^J e^{-\lambda t} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{t^J \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) J!} \int_0^\infty \lambda^{J+\alpha-1} e^{-\lambda(t+\beta)} d\lambda \end{aligned}$$

令 $y = \lambda(t + \beta)$, $dy = (t + \beta)d\lambda$ ，則有：

$$P(J, t) = \frac{t^J \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) J!} \frac{1}{(t + \beta)^{J+\alpha}} \int_0^\infty y^{J+\alpha-1} e^{-y} dy \quad (\text{A.3})$$

其中 $\int_0^\infty y^{J+\alpha-1} e^{-y} dy = \Gamma(J + \alpha)$ ，故 (A.3) 式右半部分代換後，即為負二項分配，如式 (A.4) 表示：

$$\begin{aligned}
 P(J,t) &= \frac{\Gamma(J+\alpha)t^J\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)J!(t+\beta)^{J+\alpha}} \\
 &= \frac{(J+\alpha-1)!}{J!(\alpha-1)!} \left(\frac{t}{t+\beta}\right)^J \left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha \\
 &= \binom{J+\alpha-1}{J} \left(\frac{t}{t+\beta}\right)^J \left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $\binom{J+\alpha-1}{J} \left(\frac{t}{t+\beta}\right)^J \left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha \sim \text{Negative Binomial Distribution}$

若 α, β 非為整數，可將 $\binom{J+\alpha-1}{J}$ 改寫為 $\frac{\Gamma(J+\alpha)}{\Gamma(J+1)\Gamma(\alpha)}$ ，此時伽瑪函數 $\Gamma(\cdot)$ 容許非整數，因此仍可進行計算。

附錄 B

Lemma 2:

假設信用事件發生頻率為帕雷圖分配 $\lambda \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda_0)$ ， λ 有一最小值 λ_0 ，機率密度函數如式子 (B.1)：

$$f(\lambda) = \frac{\alpha\lambda_0^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}, \lambda > \lambda_0 \tag{B.1}$$

信用事件發生次數即為混合卜瓦松分配 $J \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 。

Proof:

$$\begin{aligned}
 P(J,t) &= \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} dU(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} f(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^J e^{-\lambda t}}{J!} \frac{\alpha\lambda_0^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \\
 &= \frac{\alpha\lambda_0^\alpha t^{\alpha+1}}{J!} \int_{\lambda_0}^{\infty} (\lambda t)^{J-\alpha-1} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (\text{令 } x = \lambda t, \lambda_0 \rightarrow \lambda_0 t, \infty \rightarrow \infty, dx = td\lambda) \\
 &= \frac{\alpha\lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \int_{\lambda_0 t}^{\infty} x^{J-\alpha-1} e^{-x} dx
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

根據 incomplete gamma 函數的限制，我們將 (B.2) 式分成三種情況分別討論，(1) $J-\alpha$ 為正整數 (2) 當 $J-\alpha$ 為零 (3) $J-\alpha$ 為負整數。

(1) 第一種情況當 $J-\alpha$ 為正整數時，符合一般 incomplete gamma 函數的限制 (即 $J-\alpha > 0, \lambda_0 t > 0$)，可直接展開計算如式子 (B.3)：

$$J-\alpha \in N \Rightarrow J-\alpha \geq 1 \Rightarrow J \geq \alpha + 1$$

$$P(J, t) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \Gamma(J-\alpha, \lambda_0 t) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \Gamma(J-\alpha) e^{-\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{J-\alpha-1} \frac{(\lambda_0 t)^k}{k!} \quad (\text{B.3})$$

其中 $\Gamma(a, x) = \Gamma(a) e^{-x} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{x^k}{k!}$ ， $a, x > 0$ ，且 $\Gamma(J-\alpha, \lambda_0 t) = \Gamma(J-\alpha) e^{-\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{J-\alpha-1} \frac{(\lambda_0 t)^k}{k!}$

(2) 當 $J-\alpha = 0$ 時，系統信用事件次數發生機率表示如下：

$$P(J, t) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \int_{\lambda_0 t}^{\infty} x^{-1} e^{-x} dx = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \Gamma(0, \lambda_0 t) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} E_1(\lambda_0 t) \quad (\text{B.4})$$

其中運用指數積分 (Exponential Integral) 整理如下：

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt} t^{-n} dt = x^{n-1} \Gamma(1-n, x) \quad (\text{B.5})$$

令 $n=1$ ， $x = \lambda_0 t$ ，則 $x^{n-1} \Gamma(1-n, x) = \Gamma(0, \lambda_0 t) = E_1(\lambda_0 t)$ ，即為 (B.4) 式所示之結果。

(3) 當 $J-\alpha$ 為負整數時，系統信用事件次數發生機率表示如下：

$$P(J, t) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \int_{\lambda_0 t}^{\infty} x^{-(\alpha-J)-1} e^{-x} dx = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \Gamma(-(\alpha-J), \lambda_0 t) \quad (\text{B.6})$$

(B.6) 式子中右半部當 $\alpha-J$ 為正整數時，改寫 $\Gamma(-(\alpha-J), \lambda_0 t)$ 為下式 (c.f. Abramowitz and Stegun, 1972):

$$\Gamma(-(\alpha-J), \lambda_0 t) = \frac{(-1)^{\alpha-J}}{(\alpha-J)!} [E_1(\lambda_0 t) - e^{-\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{\alpha-J-1} \frac{(-1)^k k!}{(\lambda_0 t)^{k+1}}] \quad (\text{B.7})$$

整理後可導出系統信用事件發生次數之機率如下：

$$P(J, t) = \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \frac{(-1)^{\alpha-J}}{(\alpha-J)!} [E_1(\lambda_0 t) - e^{-\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{\alpha-J-1} \frac{(-1)^k k!}{(\lambda_0 t)^{k+1}}] \quad (\text{B.8})$$

整理上述推導證明之結果於下：

$$P(J,t) = \begin{cases} \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J_2!} \Gamma(J-\alpha) e^{-\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{J-\alpha-1} \frac{(\lambda_0 t)^k}{k!} & \text{for } J-\alpha > 0 \\ \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} E_1(\lambda_0 t) & \text{for } J-\alpha = 0 \\ \frac{\alpha \lambda_0^\alpha t^\alpha}{J!} \frac{(-1)^{\alpha-J}}{(\alpha-J)!} [E_1(\lambda_0 t) - e^{-\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{\alpha-J-1} \frac{(-1)^k k!}{(\lambda_0 t)^{k+1}}] & \text{for } J-\alpha < 0 \end{cases}$$

作者簡介

* 江彌修

國立政治大學金融系副教授。倫敦帝國大學計量金融研究所博士，倫敦帝國大學數學系碩士、學士。主要研究領域為信用風險模型，信用金融控管與金融工程。學術論文曾發表於 *Journal of Derivatives*, *Journal of Risk and Insurance*、《經濟論文》、《財務金融學刊》、《臺大管理論叢》等期刊。

邱信瑜

國立政治大學金融研究所博士生。主要研究領域為信用風險模型及金融工程。

王盈心

德意志銀行環球金融部銷售代表。主要研究領域為信用衍生性商品評價、信用風險控管與財務工程計算。

作者們感謝匿名評審人所提供的寶貴意見，增進了本文的深度及廣度。

國科會計畫編號：NSC99-2410-H-004-066-

* E-mail: mhchiang@nccu.edu.tw