國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

國中學生在絕對值相關問題之概念錯誤研究

An investigation into junior high school students' conceptual errors on absolute value

碩專班學生： 郭 盈 瑜 撰

指導教授： 譚 克 平 博士

中華民國 103 年 6 月 30 日

誌　謝

多年來，為了兼顧國中行政、導師職務及政大數學教育在職專班的課業，雖然相當地忙碌與辛苦，但在過程中也體會到成長的喜悅、更加瞭解自我。這段不短的日子以來，要感謝的人很多，希望在此表達我的謝意。

本論文能順利的完成，首先要感謝我的指導教授譚克平老師，在我陷於自我的迷惘時，老師的睿智使我正向面對自己，即便花了一段時間，老師仍不斷循循善誘、諄諄教誨，使我在這段人生的旅程中成長茁壯，也在研究上獲得前所未有的成果及視野;感謝口試委員宋傳欽教授及楊凱琳副教授提供的寶貴建議及指導，協助本論文的修改更加完善，也十分感謝張宜武副教授鼓勵我堅持到最後。

其次感謝研究所同學瑾儀老師，總是在我身旁關心我的進度、給我鼓勵，並且提供我很多實質的支持及幫助；感謝校內長官、同事在公務上的協助，令我無後顧之憂可以兼顧研究所課業，也感謝與我一同討論的夥伴：耀文老師、媛婷老師賢伉儷、怡如老師、曉君老師、人祝老師、順盈主任…等，謝謝你們時常給我建議及勉勵。

最後感謝我親愛的家人們無時無刻地關懷及鼓勵，時而溫柔地陪伴及安撫我高高低低的心情起伏，時而堅定地支持著我堅持下去；謝謝我的另一半燿宇，與我度過這豐盛的研究所生涯，從結婚到迎接新生命，對我無微不至地照顧。多年來，這些點點滴滴在心頭，感恩身旁所有善知識及貴人相助，非常感謝您們。

Abstract

This study aims to explore the kinds of difficulties encountered by junior high school students in solving problems related to absolute value as well as analyzing and identifying the probable causes of such difficulties. It is hoped that the results from this attempt can provide teachers with useful information regarding how to improve their instructional practices and plan remedial instruction, thereby enhancing their teaching effectiveness.

The main methodology for this study is survey design supplemented with clinical interviews that allowed for in-depth information collection regarding problem solving strategies and difficulties from selected respondents. During the first stage, a literature review was conducted on research studies that focused on absolute values. This was followed by discussions with several junior high school mathematics teachers relating to learning difficulties they observed. Subsequently, a paper and pencil test instrument on absolute values with three main dimensions was compiled by the author to test the learning status of the participating students. Their performances would form the basis for selecting them to participate in the second stage of the study, namely, the interview phase. All clinical interviews were unstructured and they were recorded and transcribed into verbal records. Analyses were then performed to identify the presence of conceptual misunderstandings and explored the causes of such difficulties.

It was found that students' conceptual errors on absolute values can be classified into five different types, namely, oversimplifying the definition of absolute value into mnemonic phrases, inability to perform inscriptional transformation between geometric properties and arithmetical concepts of absolute values, incomprehension of the relationships among the synonyms related to the concept of absolute value, over-generalizing the definition of absolute values and difficulties in understanding the connotation behind letter symbols. Several suggestions regarding instructional practices as well as future direction of research based on the present findings were provided at the end of this study.

Keywords: absolute value, conceptual error, survey research, unstructured interview

中文摘要

本研究的目的主要為探討學生在解決絕對值相關題目時所遇到的困難，進而瞭解學生在解此類問題時出現錯誤之原因，希望研究的結果能夠提供教師作為補救教學或改進教學策略的依據，增進教學成效，並作為未來教學及研究的參考。

本研究採調查法，並輔之以訪談蒐集資料。第一階段為問卷調查，經由對絕對值相關概念作文獻探討，以及與多位數學教師討論之後，研究者以自編之絕對值相關概念試題本進行施測，藉此瞭解學生在各向度的答題情況，並且作為選擇訪談對象的依據。第二階段為無結構開放式訪談，主要訪談學生作答時之想法與解題策略，所有訪談皆全程錄音，並轉錄成文字檔後進行內容分析，進一步瞭解學生在概念上錯誤的內涵，以及探討解題困難產生的原因。

研究結果發現，學生在絕對值相關概念之錯誤可歸納出五大原因：過度簡化絕對值定義之口訣、無法進行絕對值概念中「幾何概念」與「算術概念」之間的轉化、不瞭解絕對值概念中各同義詞之間的關係、以偏概全絕對值之定義以及文字符號概念之理解困難。文後尚有提供絕對值相關教學改善的建議。

關鍵詞：絕對值、錯誤概念、調查法、無結構性訪問

目　　次

表 次

圖　次

第一章　緒論

本研究在探討學生學習絕對值之錯誤原因。本章緒論分別說明研究動機、研究目的，提出待答問題，並針對本研究相關名詞進行解釋，依結論提出本研究之貢獻，最後指出研究中的範圍限制。

第一節 研究動機

自人類有史以來，數學便在歷史上留下濃厚的一抹重量，從古中國的「周髀算經」到第一部集大成的數學書籍「九章算術」，而後魏晉趙爽作「勾股方圓圖注」、南北朝祖沖之（429-500）發現圓周率、李治與朱世傑所發明的代數方法「天元術」、「四元術」；西方畢達哥拉斯學派的畢氏定理、歐幾里得著「幾何原本」，乃至近代的牛頓、高斯、萊布尼茲等等的重大發現，都為現代科學帶來的最牢固的根基。

審視台灣歷年來的國民教育，不管課綱怎麼修正、課程如何變化，數學始終都是最為重要的一門課程，但卻很少人能從學習數學中得到樂趣，研究者身為"學生最害怕、最不喜歡的科目－數學"的教學者，常思索著該如何讓孩子從討厭到接受甚至喜歡數學，進而真正學到東西，這不單只是教學者自我的反思，更一直都是外界最關注的課程議題，也是目前所推行的 12 年國教中最重要的課題之一。研究者發現，討厭數學的學生多數是低成就表現的孩子，因為在成績上沒有獲得直接的回饋，容易因此自我嫌棄或是從他人評價裡產生挫折感，漸漸對於數學產生抗拒與排斥，可惜的是，每當老師與家長看見學生成績表現不理想時，常給予學生的意見不外乎是要求他們練習更多題目，而忽略了在學習的歷程中，學生是否產生迷思與誤解，使得他們形成錯誤概念，即便做了再多的題型，學生依舊無法正確靈活使用解題策略，因此在求新求變的同時，教學者能精確地掌握學生學習歷程，和明確瞭解學生易發生錯誤概念的關鍵，才能更貼近學生的學習

困難、適時給予幫助，如此一來可減少學生產生迷思(Almog & Ilany, 2012)，並能達到即時補救教學的效果，而學生也能從中累積成就感與自信，接納並愉快地學習數學。

在研究者的 8 年教職生涯裡，發現有些國九學生無法靈活運用絕對值概念，或是在處理含未知數符號的絕對值運算上有所障礙，以致於對目前學習的章節造成部分學習困難，追根究柢，這些學生在最一開始的絕對值學習中就產生錯誤概念，或是對於概念模擬兩可，進而每當遇到與絕對值相關的概念時，無法做正確的連結。觀看國中三年的教材中，絕對值在其定義及運算較其他單元來的容易，但研究者發現學生對於絕對值的解題卻無法完全掌握，大多數學生在絕對值中僅含數字的運算上都能正確解答，例如 $|-7|=7$、$|3-7|=|-4|=4$，一旦在絕對值運算上牽扯到含未知數之文字符號時，多半學生會產生錯誤及困難，例如：x 為任意數，無論 x 大於或是小於 0 的時候，學生會出現 $|x|$ 一定會等於 x 的迷思，或是當題目為『已知 x 為任意數，當 $x<3$，則 $|x-10|$ 可化簡為________________。』學生經常出現錯誤答案 $|x-10|=x-10$；甚至少數學生使用將 x 代入某個整數，再取其絕對值答案的錯誤方式，例如取 $x=2$，則 $|x-10|=|2-10|=8$。可見，雖然絕對值看似容易，但其中所隱含之概念與應用轉化，對於學生學習而言並不如想像中簡單，這使研究者對於探求學生在解絕對值相關概念的困難產生好奇。

目前絕對值在國中教材中並未獨立出一個完整的章節，但其在數學課程中卻占有一席之位，從國七第一章介紹絕對值基本概念，延伸至根式運算、直線方程式、不等式…等等，都會接觸到絕對值的相關問題，從計算規則角度看是代數，但在解析幾何中又是不容忽視的存在。

金玉麒於 1987 年曾研究國中一、二年級學生絕對值及不等式概念的錯誤分析及補救教學，將學生在絕對值的概念錯誤情形進行統計，之後利用問卷調查請教師針對各題目選出最佳教學方法；洪碧芳（2003）探討國中生絕對值的發展與

學習特性，進而了解迷思概念的成因，結果發現對於受測者來說，含有未知數的絕對值運算遠比只含數字的運算困難，而且他們可以用絕對值表示兩量的差或兩點距離，但卻不容易建立相關的方程式，由此可見學生對於絕對值的相關概念必定存在某些關鍵迷思，以至於在學習上難以建構正確的概念。

金玉麒（1987）建議國中課本有關絕對值問題部分，應多加日常生活問題，多使用數線的方式提供學生理解概念。因當時所之使用國立編譯館版本，採取較為制式的符號教學，雖引進數線進行說明，但所占篇幅不多且不詳細，而目前九年一貫版本的教材活潑度提升，並且在絕對值概念中，類題舉例說明增加，以南一版國中數學第一冊為例，該版本將住家以數線表示，舉出與生活相關的例子並搭配圖示讓學生探索出絕對值與距離的關係，使得概念更容易被連結。然在改編版本過後，對於絕對值的錯誤類型研究不多，大多數絕對值概念研究偏向測驗基本概念、代數運算及運用上的錯誤，較少與解析幾何作連結，因此，研究者以絕對值為研究主題，除了基本代數觀點之外，增加利用平面幾何的觀點，了解並分析歸納學生在學習過後所可能產生的錯誤之原因，供教師們教學時的參考。

第二節 研究目的

基於上述之研究動機，本研究除了絕對值概念外，學生須具備直角坐標幾何及函數圖形概念，故鎖定研究者任教之九年級學生為研究對象，目的在研究國中學習歷程中經過多次螺旋式概念架構建立後，學生在絕對值的概念中仍存在哪些錯誤，期望能找出學生在處理絕對值相關概念時易發生的錯誤，及分析形成錯誤概念的原因，進一步希望能對學生及數學教師在實質上提供幫助和教學方面的參考。根據以上構思，本研究目的如下：

一、了解九年級學生在處理絕對值相關概念問題的解題表現及錯誤原因。

二、綜合研究結果，提出結論和建議，供教師未來教學及研究的依據。

第三節 待答問題

根據前述兩個主要研究的目的，本研究提出研究問題，作為研究探討之方向。

一、對於絕對值相關概念之試題本來說，學生在絕對值中的「無向距離」方面是否有困難，如果有，困難為何？

二、對於絕對值相關概念之試題本來說，學生在絕對值中的「長度」方面是否有困難，如果有，困難為何？

三、對於絕對值相關概念之試題本來說，學生在絕對值中的「正負數運算」方面是否有困難，如果有，困難為何？

四、對於絕對值相關概念之試題本來說，學生在絕對值中的「去絕對值運算」方面是否有困難，如果有，困難為何？

五、對於絕對值相關概念之試題本來說，學生是否能運用絕對值的意義，判斷出含絕對值的函數圖形？如果無法正確運用，其困難為何？

第四節 名詞解釋

本研究所涉及的重要名詞，說明如下：

一、絕對值：在數線上，一個數 a 所表示的點 $A(a)$ 與原點的距離，稱為這個數 a 的絕對值，以符號 $|a|$ 來表示。

二、絕對值之幾何概念：使用距離來解決絕對值之相關問題，即 $|a|$ 可表示為在數線上，一個數 a 所表示的點 $A(a)$ 與原點的距離；$|a-b|$ 可表示為在數線上，一個數 a 所表示的點點 $A(a)$ 與一個數 b 所表示的點 $B(b)$ 之兩點距離。

三、絕對值之算術概念：使用絕對值基本算術運算來解決絕對值之相關問題。例如：$|\pm 5| = 5$、$|2-8| = 6$ 等。

四、含一個絕對值一元一次方程式與不等式：一次方程式與不等式中只含有一個

絕對值且絕對值中只含一個未知數。方程式以等號連接，例如$|x-4|=2$。

而不等式以不等號（≤、≥、<、>）連接，例如$|x-4|\le 2$。

五、含兩個絕對值的一元一次方程式與不等式：一次方程式與不等式中只含有兩個絕對值且絕對值中只含一個未知數。方程式以等號連接，例如$|x-4|+|x+1|=2$。而不等式以不等號（≤、≥、<、>）連接，例如$|x-4|+|x+1|\le 8$。

六、錯誤概念：在學生學習一項新知識的過程中，原先本身已具有的或是自行發展而產生某些想法，但與學者專家所公認的概念不一致。

七、錯誤類型：依據數學運算式中產生錯誤答案的關鍵步驟，歸納分類出各種類型(Taria, 1987)。本研究所指的錯誤類型，是經由本研究之「絕對值相關概念」正式施測試卷的資料分析所得到的錯誤類型。

第五節 本研究的貢獻

近幾年國內文獻中，對於絕對值的研究，仍為高中職教材中的複數絕對值單元為多數，相對研究國中生在學習基礎概念的錯誤類型少之又少；再者，目前沒有研究從幾何方面深入探討學生在絕對值概念的整體表現及概念建構中可能產生的錯誤原因，因此本研究希望能增加文獻中未探討的部分。

第六節 研究範圍限制

本研究僅以台北市某國中之九年級學生為樣本，故所得到的研究結果只能推論當相同地區或是類似樣本，能否推及其他地區或不同條件的學生，則應特別嚴謹詳慮，並有待進一步研究。另外，因部分錯誤類型牽扯學生於其他單元的概念學習，例如直角坐標平面、函數，故其所影響之錯誤類型未加以詳細分析討論，建議未來可深入討論。

第二章　文獻探討

本研究首先探究絕對值的字義起源及其意義，釐清絕對值在學生學習數學中所應備的能力，進而深入探討學生解決絕對值問題時，所遇到的困難及其原因。第二節就目前國中教科書相關概念內容進行整理分析，並於第三節探討絕對值相關概念之研究。

第一節　絕對值的字義起源及其意義

絕對值是目前國中生學習代數學之先備概念之一，而「absolute value」這個名詞是由 Karl Weierstrass (1815-1817)提出，取自拉丁字 absolvere，意思是 to free from『免除』之意（引自洪碧芳，1990）。

為什麼要叫「絕對值」？而不是「相對值」或是使用其他名詞？研究者首先探究「絕對」 (absolute)的字義解釋，以釐清絕對值所隱含的意義。

一、在牛津字典中解釋為獨立存在並且和其他事物不相關聯；非相對或比較 (Viewed or existing independently and not in relation to other things; not relative or comparative)，或者以哲學的觀點為可以解釋為一個值或是原則是普遍成立的或是被視為和其他事物沒有相關 (A value or principle which is regarded as universally valid or which may be viewed without relation to other things)。

二、教育部重編國語辭典修訂本中解釋「絕對」一詞為不依靠任何條件而獨立存在，且恆定不起變化。凡事物有對待關係的稱為「相對」；僅有單方面的稱為「絕對」。那相對又是甚麼意思呢？指依靠一定條件而存在，隨著一定條件而變化，例如相對高度、相對壓力…等（周何，1987）。

以上解釋中有一詞「非相對」，至於相對一詞表示在描述一個事物特性無法僅從此事物本身出發，必須使用其他事物來做比較(Considered in relation or in proportion to something else)。故絕對與相對就如同獨立與相依，其分界可用是否

與一事物相較；在絕對值的運算中，任何一實數a的絕對值取其大小相同的正數，此時，研究者產生一個疑問：負數是相對而來的嗎？

早在兩千多年前的「九章算術」中出現負數概念的引入，九章算術卷八「方程章」第八題：

今有賣牛二、羊五，以買十三豕，有餘錢一千。賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足。賣羊六、豕八，以買牛五，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？

書中解法：

術曰：如方成，至牛二、羊五正、豕十三負，餘錢數正；次置牛三正、羊九負、豕三正；次置牛五負、羊六正、豕八正，不足錢負。以正負術入之。

劉徽的九章算術注說明正負術：「今兩算得失相反，要令正負以名之」

由解法中，可以清楚見到該書引入「負」的概念來解題，賣出的數量為正數、買入數量為負數；餘錢用正數、不足錢用負數；而劉徽對正負術作注說明了在列方程時，由於「得」、「失」的意義相反，要用正負來表示。由此可知其正負的相對性，用正負數表示相反意義的量。另外印度數學家婆羅門笈多(Brahmagupta, 約598~665)開始認識負數，他對負數的解釋是負債與損失。歐洲第一個正確使用負數的概念也同為錢財問題，把負數表示為賠錢，正數表示為賺錢（趙文敏，1985）。

『負數是相對而來的嗎？』這無疑是可以得到肯定的答案；由數學史中的考證負數是人類在發展活動時，為了方便表示其情況所造出來的數，從發現使用到真正被承認經過許多爭論，大多數歐洲數學家還不承認負數是個「數」，其間荷蘭人 Albert Girard 對於負數有一個很進步的概念，他指出：負數能看成是與正數相反方向的數，在幾何上，負數可以表示後退，而正數表示前進，這樣的看法正是數線的模型（趙文敏，1985）。

那麼「絕對值」(absolute value)一詞又是如何解釋的呢？

一、在牛津字典中解釋為一個實數的大小無關於它的符號 (The magnitude of a real number without regard to its sign)。

二、中學數學實用辭典中解釋絕對值是如此說明:『實數 a 的絕對值用表示 $|a|$。他的意義是：當是 a 正數時，$|a|=a$；當 a 是零時，$|a|=0$；當 a 是負數時，$|a|=-a$。實數 a 的絕對值之幾何意義是指實數 a 在數軸上所對應的點到原點的距離。』

綜合來看，性質符號「＋」、「－」的使用是一種相對概念，是將一個量做為區分，經由約定而形成的相對關係，例如：賺到 100 元以＋100 元表示，100 是一個量、虧損 80 元以－80 元表示，80 也是一個量，這個「量」不依靠任何條件獨立存在，和人類所賦與的相對關係(此例中的盈虧兩條件)不相關，故『絕對值』的意義指的應是其數量上的意義，$|a|$ 指的是 a 這個數值的量、$|a-5|$ 視為 a 與 5 的差距或稱 a 與 5 相差多少，不論 a 比 5 大或比 5 小，其差距（相差）是絕對的。

以數學史的發展來看，當數學家承認負數後，將正負數對應至數線上，給與其相對的位置，套入方向的概念，而距離是一個「絕對」的概念，沒有方向的相對關係，換句話說，距離是一種長度，代表兩個位置的差距，所以絕對值的意義可視為「無向距離」這個觀點(Ahuja, 1976)。

Brumfiel (1980)提出 5 種對於實數絕對值的定義，並將此 5 種定義細分為幾何的定義及算術的定義：

幾何定義：

一、設 x 為任意實數，在數線上有一點 X 的坐標為 x，那麼 $|x|$ 為 X 與原點的無向距離。

二、設 r 為任意實數，取任意兩數 x、y 使得 $x-y=r$，在數線上有兩點 X、Y 的坐標分別為 x、y，那麼 $|x-y|$ 為 X 與 Y 的無向距離。

算術定義：

一、$|x|$ 是 x、$-x$ 兩者間比較大的數，可寫成 $|x| = Max\{x,-x\}$，而 $|0| = 0$。

二、$|x| = \sqrt{x^2}$

三、當 $x \geq 0$，那麼 $|x| = x$；當 $x < 0$，那麼 $|x| = -x$。

第二節　國內教科書絕對值相關概念之內容分析

九年一貫之後，開放教科書版本，雖然出版編輯者不同，但仍依循著教育部所發布之課程綱要進行教材的編製，其中絕對值的能力指標及分年細目在中華民國 92 年 11 月 14 日台國字第 0920167129 號發布數學領域能力指標（以下稱為 92 課綱）與中華民國 101 年 5 月 15 日臺國（二）字第 1010074428C 號令修正發布「國民中小學九年一貫課程綱要」（以下稱為 97 課綱）略有不同，研究者針對兩者分別就絕對值概念相關之能力指標及分年細目整理如下頁表 2-2-1

表 2-2-1 絕對值之能力指標與其對應之分年細目

	92 課綱	97 課綱
能力指標	N-3-10 能理解絕對值的意義。	N-4-05 能認識負數、相反數、絕對值的意義。 N-4-07 能將負數標記在數線上，理解正負數的比較與加、減運算在數線上的對應意義，並能計算數線上兩點的距離。
對應之分年細目	7-n-05 能認識絕對值符號，並理解絕對值在數線上的圖義。 7-n-06 能用絕對值的符號表示數線上兩點間的間隔（距離）。 7-n-07 能運算絕對值並熟練其應用。	7-n-05 能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小。 7-n-08 能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

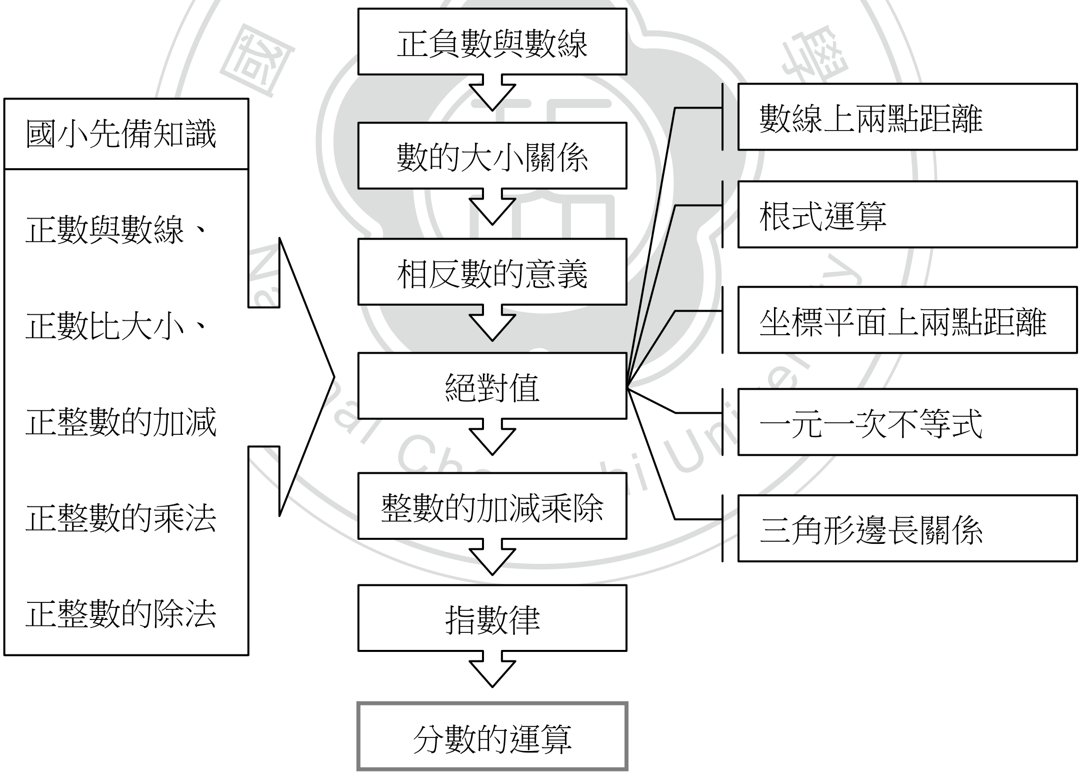
由上表 92 課綱中的分年細目詮釋（教育部，2003）之內容可知，學生必須能認識絕對值符號，知道一數加上絕對值後，取其正值，如：$|-5|=5$、$|5|=5$，並能認識在數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離，例如，點 -2 至原點的距離為 2，而 -2 的絕對值 $|-2|=2$，利用距離的概念能理解使用絕對值的符號表示數線上兩點間的間隔（距離），例如，數線上兩點如 2、-3 其距離為 5，亦可以用 $|-3-2|$ 或 $|2-(-3)|$ 表示。

此外學生亦被要求必須能運算絕對值並熟練其應用，在不牽涉到方根或方程式解題技巧，可熟練一些運算。 例：$|甲|=7$，$甲=\pm 7$。相較之下 97 課綱建議採用較直接且直觀的方式教學進行絕對值的教學，其嚴謹的定義不一定需要在國中階段出現，例如：一個正數的絕對值就是它自己，一個負數的絕對值就是把它的負號去掉後的數，而 0 的絕對值還是 0，所以 $\left|-1\frac{1}{3}\right|=1\frac{1}{3}$（把負號去掉）；$\left|1\frac{1}{3}\right|=1\frac{1}{3}$，而當學生學會負數的加減計算後，應該要理解有絕對值算式的計算，例如：$10-|-6|$ 和 $10-(-6)$ 的不同。

關於絕對值的應用問題方面，97 課綱提出在國中階段有兩個比較重要的應用：一個是用來比較負數的大小，另一個是用絕對值來表達數線上的兩點距離，（7-n-08 能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。）由此可知雖其對應之分年細目略有不同，但絕對值在距離上的理解及應用仍是未刪減，並且在細目詮釋上強調數線是學生首次學習代數與幾何結合的題材，教師在安排教學內容時應包括這類的題材。

研究者將目前之國中絕對值教材地位及絕對值應用單元教材內容進行整理，如圖 2-2-1。

圖 2-2-1 國中絕對值教材分析圖



從國中端延伸至高中，依照教育部 97 年 1 月 24 日發布的普通高級中學數學課程正式綱要中，將絕對值歸為數線中的幾何，內容包含絕對值的一元一次方程式與不等式，除了原先的一個絕對值的方程式及不等式之外，還增添具備處理含兩個絕對值的一元一次方程式及不等式的能力，並且介紹三角不等式的概念做為

學習解析幾何的準備，甚至，未來學習微積分的第一堂課，多數要先解決實數系中絕對值相關的問題。Hoch 與 Dreyfus (2006)指出學生若對絕對值概念有完整的瞭解，在解決絕對值不等式時，可用直觀的想法解之，不必進行代數操作解題；Nava 與 Bat (2012)於研究中亦發現當學生使用代數方式處理絕對值不等式的問題時，多半是因為在絕對值相關概念有錯誤迷思。由此讓研究者體認國中階段的絕對值學習，關係著未來銜接深入探討的能力，更加深研究者對於學生在絕對值相關概念之理解的好奇心。

詳看國中數學教科書，雖皆依據相同能力指標來編排絕對值的教材，但不同編輯者對於同一單元的內容安排及呈現方式難免有所差異。以下針對國中階段絕對值相關概念，選擇了部編、翰林、康軒與南一四個版本的教科書內容來綜合分析，研究者發現絕對值概念的建立，以目前教材內容皆以數線為引入主軸，且學生在處理絕對值相關概念時對於正負號的混淆時為常見，故研究者亦將這兩部分教材之鋪陳列入探討說明。

一、負數

各版本在介紹絕對值概念之前，皆先進行負數之教學，以生活中學生易接觸到的情境，例如收入與支出、往東與往西、進步與退步、零下溫度…等相對意義或相反的量作為範例，讓學生充分瞭解數系中負數的意義。在定義負數方面，康軒版以性質符號「＋」、「－」說明正負數，數字前有帶「－」者即為負數；部編版、翰林版、南一版在定義負數時，皆強調比 0 大的數稱為正數；比 0 小的數稱為負數。

二、數線

在國小階段學生已經學過將所有正數標記在數線上，於是在負數引進之後，數線更趨完整，在銜接上翰林版、康軒版以拓展數線的方式，介紹數線：「很像把數線向左延伸，再將負數標示在向左延伸的數線上。」；南一版以與介紹負數之同一例題（住家東西向道路）引進，以此東西向道路為基礎，套入數線概念。以上三個版本皆在建構負數後，直接介紹數線及坐標點之描

繪，接著以數線概念進行相反數、絕對值的教學，然而部編版之教材編排呈現與其他版本迥然不同，編者選擇先以負數的大小、絕對值、相反數之順序進行教學，而後再安排數線概念的引進及坐標點之描繪，並緊接著介紹距離與絕對值關係。僅只有部編版有在數線概念中提及點坐標向左向右移動後之位置。

三、絕對值

在定義絕對值時，翰林版、康軒版及南一版皆以『點 $A(a)$ 與原點之間的距離稱為 a 的絕對值』之幾何觀點賦予絕對值的意義，其中康軒版特別說明「不考慮方向」；南一版則用一貫之住家東西向道路範例，提出往東或往西走的距離都一樣，當指考慮數值，而不需要前面的「＋」、「－」號時，便可使用絕對值符號『｜ ｜』來表示，相較之下翰林版無安排生活情境範例先行說明，開門見山直接給與絕對值定義。部編版舉例以進出貨之相對意義說明絕對值，進出貨相同件數以±符號個別表示，意義不同，但必須搬運的數量相同，依此部編版對於絕對值之定義使用代數觀點：一個數的絕對值就是不考慮他前面的「＋」、「－」號所得到的數。因此南一版與部編版的說明方式較為雷同，以相對量之意義切入絕對值，不計方向（±符號意義），不同的是南一版對於絕對值的定義採取以幾何定義來做結論，而部編版則以代數定義來做結論。

研究者將各版本絕對值相關概念比較整理為下頁表 2-2-2。

表 2-2-2 各版本絕對值相關概念比較

	部編版	翰林版	康軒版	南一版
教材呈現順序	正數與負數 →負數的大小 →絕對值 →相反數 →數線（坐標點、移動、距離與絕對值） →整數加減 →數線上兩點的距離	正數與負數 →數線(僅介紹坐標點) →數的大小 →相反數 →絕對值 →整數加減 →數線上兩點的距離	正數與負數 →數線(僅介紹坐標點) →數的大小 →相反數 →絕對值 →整數加減 →數線上兩點的距離	正數與負數 →數線(僅介紹坐標點) →數的大小 →相反數 →絕對值 →整數加減 →數線上兩點的距離
概念情境引進	進出貨之相對意義，進出貨相同件數以 ± 符號個別表示，意義不同，但必須搬運的數量相同。	列舉數線上整數點坐標，說明與原點的距離即為絕對值。	列舉數線上整數點坐標，不考慮方向，說明與原點的距離即為其絕對值。	將生活情境畫作數線上坐標，行走方向以 ± 符號個別表示，其意義不同，但必須行走的距離相同。
意義說明	一個數的絕對值就是不考慮他前面的「＋」、「－」號所得到的數。	數線上一個數所表示的點坐標與原點之距離，稱為此數的絕對值。	數線上一個數所表示的點坐標與原點之距離，稱為此數的絕對值。	數線上一個數所表示的點坐標與原點之距離，稱為此數的絕對值。
概念澄清及例題說明	1. 只含數字的絕對值運算 2. 絕對值方程式的應用(非以未知數呈現) 3. 利用絕對值比較兩負數的大小 4. 澄清 a、$-a$ 的正負關係	1. 有無某數的絕對值為負數或 0。 2. 只含數字的絕對值運算 3. 利用絕對值比大小 4. 絕對值方程式與不等式的應用 5. 在數線上描繪符合絕對值方程式與不等式的點坐標	1. 有無某數的絕對值為負數或 0。 2. 只含數字的絕對值運算 3. 利用絕對值比兩負數的大小 4. 絕對值方程式與不等式的應用	1. 正負數的絕對值區分 2. 利用絕對值比大小 3. 比較多個數的大小與其絕對值的大小之異同 4. a、b 與 $\|a\|$、$\|b\|$ 之間的大小關係 5. 絕對值方程式的應用(非以未知數呈現)

第三節　與絕對值相關概念之研究

距離這一個概念在連結人類日常生活是相當普遍的，然而學生在絕對值相關概念的理解與解決問題卻無法完整掌握（洪碧芳，2003），其中一個主要原因來自學生對於絕對值的形式定義不了解(Parish, 1992)，因此教師在教材教學方面是否為真正建立強而有力的連結，使學生在學習絕對值時，減少錯誤概念之迷失，本研究針對目前對於絕對值相關概念之研究進行整理，冀提供教學者作為參考，縮短學生在絕對值相關概念迷思資料之蒐集時間，提高有效教學之成效，本節研究者就學生在絕對值相關概念之錯誤類型與學習困難之原因、教學上的研究兩方面分別匯總如下，其中錯誤類型及原因之分類為研究者整理歸納而出：

一、學生對於絕對值相關概念之錯誤類型及原因，

1. 數線上兩數距離概念之錯誤

   因學生在學習絕對值時，由於部分教科書定義絕對值的意義是某數與原點的距離，此時他們會瞭解一般我們所指的「距離」是不會有負的，所以絕對值才不會有負號；但學生會混淆「距離」與「坐標」的意義，忽略坐標上有方向之區分，誤認為在原點左方的數若與原點相距 N 單位，則坐標為 N ，而不是 $-N$ （張立群，2003）。

   i. 錯誤使用距離非負數的觀念，而忽略在數線上的坐標因方向的差異會有產生正負符號的表徵（張立群，2003）。例如：高雄台南在台南方 50 公里，以台南為原點，向北為正，2 公里為一單位，學生認為距離沒有負數，因此高雄代表的數為 25。

   ii. 當學生接觸的練習題量多的時候，學生會發現某些題型有一定的作答方法可循，產生過度依賴以往作答經驗作答，於是面對題型相似的題目，錯誤解答的學生有時希望用曾做過的方法來解題，或是希望直接使用算術的運算方式，組合題目中的數字，以獲得答案（李靜瑤，1994）。例如：高雄台南在台南方 50 公里，以台南為原點，

向北為正，2 公里為一單位，則學生認為高雄所代表的數為：52（50+2）、48（50-2）、25（50÷2）或 100（50×2）（張立群，2003）。

iii. 概念不清楚，將片面知識混用，例如：解決絕對值方程式 $|x-3|=5$ 時，學生的答案為 $x=\pm 8$（金玉麒，1987）。

iv. 有些學生可以將兩數差的絕對值視為兩點間的距離，但卻無法將兩個已知數和的絕對值視為兩點間的距離（洪碧芳，2003）。例如：$|-2+4|$ 表示 (A)點-2 與 4 的距離 (B) 點-2 與-4 的距離 (C) 點-3 與原點的距離 (D)點(-2+4)與原點的距離 (E)其他。

2. 文字判讀與了解題意方面

張景媛（1994）提出，學生對於某些關鍵字不瞭解，會造成學生解題上的困擾，而有時解題也會受前一題題型的影響，誤用解題策略，或者是題目的描述語言及語意結構亦會影響學生的判斷(楊瑞智，1990)，金玉麒(1987)的研究也指出，學生因為不了解題意，而無法正確作答。

i. 受相似題目混淆干擾，誤認為「絕對值等於 5 的數」與「絕對值小於或等於 5 的數」題目相同（張立群，2003）。例如：絕對值等於 5 的數，學生的答案是「0、±1、±2、±3、±4」或「0、±1、±2、±3、±4、±5」。

ii. 誤認為題目中只要有「絕對值」的詞彙，答案就應該要加上絕對值（張立群，2003）。例如：哪些整數的絕對值小於 4？學生回答是 $|-4|$、$|-3|$、$|-2|$、$|-1|$、$|0|$、$|1|$、$|2|$、$|3|$、$|4|$。

iii. 受題目所給予的其他條件影響，誤將絕對值錯認為其他條件（張立群，2003）。例如，題目先問-12 的相反數，再問 8 的絕對值，學生的答案是 8 的相反數-8。

3. 概念建構不完整，忽略答案完備性

數學教材在國中階段開始循序漸進建構出數系，於是題型變化增加，經常出現給予不同的數系範圍，可能是限制答案的範圍或個數，或者是增加答案的範圍或個數，而缺乏完整概念之學生在解題時，常會忽略題目的條件或是答案的完備性。

i. 忽略絕對值內的數字可以為任意數，尤其是負整數或 0(張立群，2003；Almog & Ilany, 2012)。例如，絕對值等於 5 的數，學生的答案只有 5 或-5 其中之一；哪些整數的絕對值小於 4？學生僅回答出 ±1、±2、±3 及 ±4；解絕對值不等式 $|x| > 0$ 時，學生認為 x 可為任意實數 R，忽略當 $x = 0$ 時，$|x| = 0$。

ii. 忽略絕對值的數值可能為 0。(張立群，2003；Almog & Ilany, 2012)，例如；解絕對值不等式 $|x| \le 0$ 時，學生認為 x 無解，因該生對於絕對值的認知為「一個數的絕對值一定比 0 大」。

iii. 只考慮整數解(金玉麒，1987；Almog & Ilany, 2012)。

例如：若 $x < -2$，則求 $\left|1-|1+x|\right|$ 之值。題目設計循序漸進之小題（1）$|1+x|$=____、（2）$1-|1+x|$=___、（3）$\left|1-|1+x|\right|$=____。

產生錯誤之學生僅能計算數字之絕對值，一旦題目再加上 $x < -2$ 之條件，便無法使用正確解答策略，於是僅以數字代入答案，對不等式概念不清，例如學生以 $x = -3$ 代入，得到 $|1+x| = |1+(-3)| = 2$；$1-|1+x| = 1-|1+(-3)| = 1-2 = -1$，則 $\left|1-|1+x|\right|$=1。

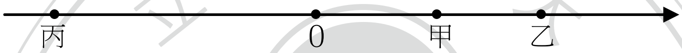
另一例子：解絕對值不等式 $|x| > 3$ 時，學生錯誤類型有二，其一錯誤解為 $x \ge 4$ 或 $x \le -4$，學生忽略 3 與 4 之間存在其他非整數解；另一錯誤解為 $x = 4,5,6$ 或 $x = -4,-5,-6$，學生誤認為舉出數個符合

此不等式之整數解即可，因此以最接近±3且符合的數個整數為解答，完全忽略非整數之解。

4. 以偏概全，將絕對值與相關觀念混淆

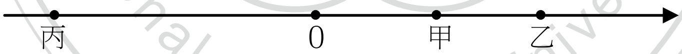
在學生學習一個概念時，常會與先前所學過的概念做比較，歸納出符合個人想法的結論，因此常出現錯誤的歸納，亦或是如刺激反應連結論中所主張：學得的經驗會彼此干擾，而造成觀念的混淆。

i. 誤認為比較絕對值的數值大小就是比較其數的大小(金玉麒，1987；張立群，2003）。例如：$|-7|<|2|$；如數線所示：比較｜甲｜、｜乙｜、｜丙｜的大小



學生的解題想法就是比較甲、乙、丙的大小，因此學生的答案是乙＞甲＞丙。

ii. 誤認為比較絕對值的大小就是將此數到原點之距離「由近至遠」或「由遠至近」寫出，將距離的大小與數線上的位置混淆（張立群，2003）。例如：如數線所示：比較｜甲｜、｜乙｜、｜丙｜的大小



學生誤認為就是比較甲、乙、丙的大小。學生會認為要比較｜甲｜、｜乙｜、｜丙｜的大小就是將甲、乙、丙與原點之距離「由近至遠」排序，所以答案是甲＞乙＞丙；或「由遠至近」寫出來，答案是丙＞乙＞甲。

iii. 忽略絕對值，而誤將絕對值當作括號來處理（金玉麒，1987；洪碧芳，2003；張立群，2003）。例如：$|-7|=-7$；$|-5-1|=-5-1=-6$；$-6-|-4|=-6+4=-2$。

iv. 誤用絕對值為非負數的值，認為絕對值內的值必為非負數(金玉麒，

1987；Almog & Ilany, 2012)，例如：解$|x|+|y-1|+|z-2|=0$，學生沒有$|x|\geq 0$的概念，只是很直覺地想到 0+0+0=0，而寫出答案；解絕對值不等式$|x|\geq 0$時，學生認為絕對值必為非負數，故$|x|\geq 0$之解為$x\geq 0$。此時，學生無法分辨絕對值內的值與絕對值外的值之差異。

v. 數的絕對值是本身及相反數（金玉麒，1987；洪碧芳，2003），例如$|\,2\,|=\pm 2$；$|-5-1|=\pm 6$

vi. 認為正數的絕對值是負數（洪碧芳，2003），或是存在某數的絕對值為負數（張立群，2003）。例如，$|\,乙\,|=-1$，學生的答案$乙=-1$或者是$乙=1$、-1。

vii. 錯誤使用去絕對值運算規則，即當$x<0$，則$|\,x\,|=-x$（$|-5|=-(-5)=+5$），學生自我加強了「絕對值內為負的，就要變號」這樣的運算規則，因此將所有看見的『－』變號為『＋』，將其絕對值內性質符號變號或減法換成加法，例如：$|\,4-3|=4+3=7$（洪碧芳，2003）。

5. 無法正確使用未知數之表徵

根據皮亞傑的發展認知理論，國中生屬於具體運算階段(concrete operational stage)（7~12 歲）與形式運算階段 (formal operational stage)（12~15 歲）之間，學生漸能將具象思維提升到抽象思維，然而對於初學者，帶有未知數之符號文字仍是一個具有難度的課題。洪碧芳（2003）指出，學生反應絕對值內有帶有未知數的題型相較於只含數字的絕對值運算要難的多，且在作答時沒有辦法與所得的經驗相連結。

i. 對於一個已知負數屬於具體數值，當學生看見一個未帶有性質符號負號『－』的數字時，便可直接判斷此為非負數，因此容易套用此規則至文字符號上，把 x 當作正數，把 $-x$ 當作負數，故誤認為 $|x|=x$ (Sink, 1979；金玉麒，1987；洪碧芳，1990、2003；Almog & Ilany, 2012)，例如：解 $|x+8|=7$ 時，學生認為 $x+8$ 為正數，因此只考慮 $x+8=7$ 的狀況。

ii. 金玉麒（1987）的研究顯示很少人答對 $1<|-x|<3$ 的解，一是絕對值與不等式概念混和，另一方面是 $|-x|$ 更使學生覺得迷糊。

iii. 無法根據情境，列出相關的絕對值方程式，並解決問題（洪碧芳，2003）。例如：阿珠重 63.5公斤，阿花重 y 公斤，兩人相差幾公斤？ (A) $63.5+y$ (B) $y-63.5$ (C) $63.5-y$ (D) $63.5y$ (E) $|63.5-y|$ (F)其它；台中某日由上午6點到下午6點氣溫的變化是，先上升攝氏3度後再下降5度，那麼上午 6 點與下午 6 點的溫差應該如何計算？ (A) 5－3 (B) 3－5(C) 3＋5 (D) $|3-5|$ (E)其它 。

iv. 複雜的文字符號干擾絕對值概念，因此在增加條件限制之下，學生更容易出錯(金玉麒，1987)，例如：

設 a 、b 為任意非零的實數，令 $K=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$

（1）當 $a>0$ 、$b>0$ 時，K 的值是______________

（2）當 $a>0$ 、$b<0$ 時，K 的值是______________

（3）當 $a<0$ 、$b>0$ 時，K 的值是______________

（4）當 $a<0$ 、$b<0$ 時，K 的值是______________

學生在（1）、（2）、（3）小題的錯誤率較高，而做對者大多以數字代入而求出答案。

二、教學上的研究

絕對值相關概念對學生來說是一個全新的符號概念，在學習的當下是比較困難的，因此國內外有些教學上的研究與建議，從瞭解學生錯誤概念，修正教師教學策略：

1. 重視正向遷移對學生學習之影響

由認知心理學的觀點來看，學生會受先前學習知識的影響而主動建構或「發明」知識，因此學生先前學習的知識對於當下所接觸的新概念，可能有正向之影響，稱為正向遷移；但也有可能造成干擾，稱為反向遷移。數學的學習是新知識不斷與舊經驗的聯結(Siegel, 1981；Shuell, 1990；蘇慧娟，1998)，因此原有概念的重要性不言而喻，張立群（2003）建議在教授新概念時，教師應使用適當的教學策略重新喚起學生對此部分的觀念，並適時修正先前學習中不正確的觀念。

2. 以具體解釋抽象

金玉麒（1987）、洪碧芳（2003）指出運算性質的認識，教學上要從日常生活中，取具體問題為教材，從具體引導至抽象的數，再延伸到符號化的式，以建立完整的學習歷程。Sink (1979)也發現對於學生在學習絕對值內為文字符號方面容易產生混淆，因此進行教學『當 $x<0$ 時，$-x$ 為正數』之概念時，教師應特別注意舉實際數字為範例進行說明，例如：當 $x=-4$ 時，$-x=-(-4)=4$，故 $-x$ 為正數。

善用數線之表徵，運用代數意義與幾何意義交互引證，金玉麒（1987）指出在學生常犯的絕對值錯誤中，多數都能以實際的數在數線上說明絕對值的意義，像是學生犯了 $|-2|=-2$、$|0|=0$ 等錯誤時，可引導學生畫出數線，並將點坐標標上，強調一個數的絕對值就是該數與原點的距離概念，加深學生概念建立之基礎。Parish (1992)亦提出不同於代數思維，對於絕對值方程式或不等式，可以使用二維數線來解題，可以有效改善學生的錯誤概念，並

且對於『或』(or)與『且』(and)混淆的學生而言是個不錯的教學策略。此外，Ozmantar 與 Roper (2004)探討鷹架在抽象過程中的作用，研究顯示，學生可經由適當引導進行較艱深的教材教學，或是由一套循序漸進的教材習得更進階之知識。

3. 避免學生出現習慣僵化的現象

王克先於學習心理學一書中說明：所謂「習慣僵化」，當個人多次練習同一類型的題目後，反而有礙於處理之後的題目，亦即多做某一類題目後會產生一種「心向」(mental set)，培養出一種趨勢，往一特定的方向去反應，這種心向會延續到接著做下去的新題目上，反而無法發展出以更快而有效解決新問題的新方法，反而阻礙了這個新問題的解決速度。這種現象稱為「功能固著」(functional ixedness)或稱習慣僵化(habitual rigidity)。

在學生絕對值相關概念之錯誤中，誤將絕對值當成括號來處理，或誤認為「絕對值等於5 的數」，與「絕對值小於（或小於等於）5 的數」題目相同，皆屬於習慣僵化的情況，由此發現學生對於此種題目的練習量夠多，導致於遇到相似的題型時，便會不加思索的寫出錯誤的答案，造成學習的負效果，導致學生的負遷移(negative transfer)。

當然，不可否認的，學好數學的一種方法就是多練習；但若是盲目而毫無目的地，認為有題目可以做就是正確的，便失去了練習的意義。練習的目的在於使學生對於概念能更熟悉，概念的連結更完整。因此張立群（2003）建議教師若能在教學或評量時，對同一種概念或題型以多樣的呈現方式，例如：「寫出絕對值等於5的數」，變化為「寫出絕對值小於5的數」、「寫出絕對值小於等於5的數」，提供機會讓學生多比較思考，當可起舉一反三之效，協助學生經驗的類化，增進遷移的效果。洪碧芳（2003）也提出教學者須多注意學生的基本認識及先備能力，引導學生作反思內化，以建立踏實的基本概念，不要把學生引到解難題、演練技巧的方向。

第三章　研究方法

本章介紹本研究所採用的研究方法以回答第一章所提出的研究問題，第一節先介紹本研究的研究設計與構想，第二、三、四節分別說明研究對象、研究工具與研究過程。

第一節 研究設計

本研究的目的主要為探討學生在解決絕對值相關試題時所遇到的困難，進而了解學生在解絕對值相關試題時分不清如何求出正確絕對值之原因，希望能夠提供教師作為補救教學或改進教學策略的依據，增進教學成效。

為能確實瞭解學生在絕對值相關概念的錯誤原因，本研究採調查法，並輔之以訪問蒐集資料。首先，研究者與三位具教學經驗之教師及指導教授進行討論，分析絕對值之概念與教學脈絡，作為絕對值相關概念試題編製的主軸，以此自編之試題本作為調查工具讓學生填寫，然後根據學生的答題情況選擇訪問對象，接著以開放無結構性訪問進一步瞭解學生答題時的想法。本研究所有訪問皆有全程錄音，研究者再將其錄音內容轉錄成文字稿，以方便進一步分析學生在學習絕對值相關概念時所遇到的是什麼困難，以及探討困難產生的原因。

本研究所採取的分析方法為個案研究法，質性為主，量化為輔，主要以訪問學生所表達之想法做為分析方向，然而訪問對象的選擇是以口語能力較好的學生為優先考量，因此其訪問學生是否能代表整體學生之表現，有待周詳之評估，故研究者佐以量化資料提供正式施測學生的整體答題表現，作為分析之參考。

第二節 研究對象

根據本研究者的研究目的，本研究所考慮的研究對象其範圍設定為已經學過絕對值、直角坐標系及基本函數觀念之學生。為了開發研究工具並進行效化的過程，本研究之研究對象分為兩類：第一類是預試對象；第二類是正式施測對象及訪問對象，皆為常態分班、男女合班之學校學生。

一、預試樣本

本研究之預試對象，為台北市某兩間願意合作研究的國民中學，此兩校學生程度皆中等以上，抽樣是藉由方便取樣方式，委託在該兩所學校任教之兩位老師所任教的八年級學生進行測驗。參與對象分別來自甲校一個班級學生 33 人及乙校兩個班級共 37 人，去除無效樣本 1 人，總共 69 人。

二、正式施測樣本

因考量訪問之便利性，本研究之正式施測對象為研究者所任教的九年級學生，該校位於台北市，其學生程度屬於中等以上，大多數家庭社經背景為中等小康狀況，對於學生教育頗為關注。

本研究正式施測紙筆測驗對象，有效樣本人數男生 20 人、女生 34 人。第二階段訪問對象，則由參加第一階段紙筆測驗的學生中，根據第一階段紙筆測驗的答題表現分為三個組別，成績前 27%的學生為高能力組、成績中間 46%為中能力組、成績後 27%的學生為低能力組，每組抽取男女生各 2 人，共 12 位學生進行訪問，因考慮訪問之成效，選取語言表達能力不是太差之學生作為訪問對象。下表 3-2-1 為本正式研究 12 位訪問學生之能力分組編碼對照表，S 後數字代表學生編號，本編號採男女混合隨機編碼。

表 3-2-1　參與訪問學生之能力分組編號對照表

	高能力	中能力	低能力
學生編號	男：S26、S48 女：S13、S34	男：S41、S45 女：S28、S32	男：S01、S07 女：S05、S30

因本研究正式訪問的樣本很小，故將本研究結果推及全體情況時必須要特別小心，下表 3-2-2 交代本研究正式訪問之 12 位學生之背景資料，包含該生父母親職業與該生在國中階段參加數學科校外補習(或個別家教指導)的每周平均時數。

表 3-2-2　各能力學生之背景資料

	高能力男生	高能力女生	高能力學生	中能力男生	中能力女生	中能力學生	低能力男生	低能力女生	低能力學生
父親職業(人數)	商(1) 金融(1)	自由(1) 醫生(1)	商(1) 自由(1) 醫生(1) 金融(1)	服務(1) 金融(1)	服務(1) 商(1)	服務(2) 商(1) 金融(1)	商(1) 待業(1)	資訊(1) 待業(1)	商(1) 資訊(1) 待業(2)
母親職業(人數)	家管(1) 金融(1)	商(1) 教職(1)	商(1) 教職(1) 家管(1) 金融(1)	服務(1) 資訊(1)	金融(1) 商(1)	服務(1) 商(1) 金融(1) 資訊(1)	商(2)	商(1) 家管(1)	商(3) 家管(1)
參加數學科校外補習的每周平均時數	3.25	0	1.625	3	0	1.5	2	0	1

由表可知，本次研究訪問對象裡，中、高能力的男生每周平均多花了 3 到 4 小時參加課外補習，而恰好參與訪問的全部女生均無參加校外補習。其中低能力的四位學生中，只有一位男生每周平均多花 4 小時進行校外補習。

第三節 研究工具

本研究共使用研究工具有三種，分別為「絕對值相關概念試題」、「絕對值相關概念訪問流程記錄表」及「學生背景資料問卷」，分別說明如下：

一、 絕對值相關概念試題本

本研究工具為研究者自編之「絕對值相關概念試題本」預試試題本（見附錄一），其題型先請任教年資超過 10 年之數學老師審查，針對題本中文字描述之語意及題目條件不清之地方進行修改，再請任教年資超過 10 年之國文老師，針對語意不流暢的地方進行修飾，最後再請指導教授進行審核，以建立專家效度。題型設計來自於與三位數學科教師討論之教材脈絡及絕對值相關文獻研究，期望能從中瞭解學生在學習絕對值相關概念之困難。以下就其設計研究工具詳細說明：

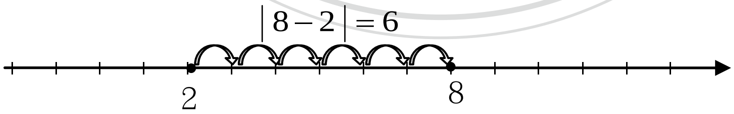
1. 教材脈絡

研究者發現，不同老師對於絕對值定義會有不同的解讀，即便是教科書上明定出相同的一種定義，但教學者常會因本身之解題策略，提示學生使用某一種幾何定義或算術定義來解決問題，因此每一個學生對於絕對值的解讀不是一致的，洪碧芳（2003）的研究發現，學生最常從兩個角度來看待絕對值：一是去負號（把負變成正），一是距離。為瞭解學生對於絕對值的概念理解採取哪一向度為主要解題策略，本研究設計第一部分開放式問題：

1.你認為什麼是「絕對值」？請詳細說明，並舉例。 2.你認為$\|-3\|$是什麼？請詳細說明。你覺得$\|-3\|$可以在數線上解釋嗎? 怎麼解釋? 你認為$\|3\|$和$\|-3\|$有哪些關連性？ 3.你認為$\|-2+6\|$是什麼？請詳細說明。你覺得$\|-2+6\|$可以在數線上解釋嗎?怎麼解釋?你認為$\|-2+6\|$和$\|2-6\|$有哪些關連性？

目前現行版本中在絕對值的概念陳述上皆以數線之幾何觀點進行教學說明，即數線上一個數所表示的點坐標與原點之距離，稱為此數的絕對值，因此$|-5|$為數線上-5到原點的距離，故$|-5|=5$，待學生熟悉單一數字的絕對值意義之後，推廣到兩個數字的絕對值：$|11-7|$可視為數線上11和7的距離，因此『距離』為絕對值相關概念之向度之一。而『距離』是不考慮兩者之相對位置，因此這裡的距離說是無方向性，有時，我們亦稱兩量之「相差」為距離，因此研究者將「相差」這一個概念列入距離的子向度之一，在此稱為『長度』。

在瞭解絕對值之基本定義後，對於含單一數字的絕對值，及含兩個數之加減的絕對值，會進行去絕對值的運算之教學，多數教學者會歸納出若絕對值內為正數，則直接去掉絕對值；反之，若絕對值內為負數，則去掉絕對值要加一個負號（或變號），這樣的運算規則包含了正負數的運算及相對方向的觀點，在國中教材裡，對於正負數的加減法則，教科書中提供了數線上點移動後位置的概念：$2+6$在數線上的位置可視為點2向右移動6個單位後，到達點8，所以得到$2+6=8$；反之，$2-6$則為點2向左移動6個單位後，到達點-4，因此$2-6=-4$。將此運算逆推，由研究者定義數線上點a到點b的距離為$|b-a|$，例如：數線上點2到點8的距離為$|8-2|=6$，若以移動的觀點：



點2向右移動到點8的長度為$|8-2|=6$單位長，換句話說，$|8-2|$等於數線上點2向右移動到點8的長度。數線上點7到點3的距離為點7向左移動到點3的長度，若我們將向右移動設為正向，則可利用對稱的想法，使點7與點3在數線上對原點作對稱，得到點7對稱至點-7與點3對稱至點-3，則點7到點3的距離$|3-7|$等於點-7到點-3的距離，故可得$|3-7|=-3-(-7)$，再利用正負數的

運算得到 $-3-(-7)=-3+7=4$。推及含文字符號之去絕對值法則，舉例來說，當 $x<3$ 時，$|x-7|$ 可視為點 7 到點 x 的距離，因 $x<3$，所以點 x 在點 7 的左邊，依上述規則，點 7 到點 x 的距離為點 7 向左移動到點 x 的長度，利用對稱想法得到點 7 對稱至點 -7 與點 x 對稱至點 $-x$，因此 $|x-7|=-x-(-7)=-x+7$，綜合以上幾何的觀點，研究者將去絕對值的運算法則亦歸類為數線上的方向向度，其方向向度之含義為絕對值的逆操作運算，依此想法研究者設計有關正負數運算及去絕對值運算法則相關之題型如下。

1. 關於 $|2-7|$ 的敘述，你認為下列<u>哪些</u>是正確的?正確請在□內打✓(可複選)
   □A. $|2-7|=|-5|=-5$
   □B. $|2-7|=|-2+7|$
   □C. $|2-7|=-(2-7)$
   □D. $|2-7|=|7-2|$
   □E. $|2-7|=+5$ 或 -5
2. 關於 $|11-6|$ 的敘述，你認為下列<u>哪些</u>是正確的?正確請在□內打✓(可複選)
   □A. $|11-6|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離
   □B. $|11-6|$ 等於數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度
   □C. $|11-6|$ 等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度
   □D. $|11-6|$ 等於數線上坐標 11 向左移動 6 單位後與原點的距離
   □E. $|11-6|$ 等於數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置
   □F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示
3. 請計算下列各絕對值：
   (1) $|-10|=$__________。
   (2) $|20-9|=$__________。
4. 請完成計算絕對值的過程：請於□中填入＋、－
   (1) $|7-12|=(\square 7)-(\square 12)$
   (2) 已知 x 為大於 3 的任意數，則 $|x-1|=(\square x)-(\square 1)=$_______。

2. 絕對值相關文獻研究探討題型

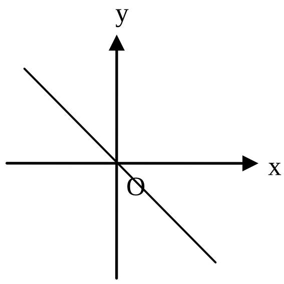
金玉麒（1987）在「國中生絕對值及不等式概念的錯誤分析及補救教學」的研究中，認為許多學生對於絕對值與不等式的概念尚未完全徹底瞭解，研究指出許多學生犯了$|x|=x$的錯誤，相同地洪碧芳（2003）發現對於學生而言含有未知數的絕對值運算遠比只含數字的運算困難，因此，含有文字符號之絕對值概念對於學生無疑是一個困難點。然而在其含有文字符號之絕對值的研究中，距離及去絕對值運算並未做完整的測驗，因此本研究針對含文字符號的絕對值在距離及去絕對值運算法則，設計以下試題：

1. 關於$|x-5|$的敘述，你認為下列哪些是正確的?正確請在□內打✓
   □A.$|x-5|$一定是正數
   □B.$|x-5|=|5-x|$
   □C.$|x-5|=1$
   □D.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x移動到坐標 5 的長度
   □E.$|x-5|$等於數線上坐標-5 移動到某一點坐標為x的長度
   □F.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x與原點的距離
   □G.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x與-5 的距離
   □H.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x向左移動 5 個單位後與原點的距離
2. 請根據以下各題所給的方程式，求出所有符合之x的數值:
   (1) $|x|=2$，$x=$_________。 (2) $|x-5|=0$，$x=$_________。
   (3) $|x-5|=1$，$x=$_________。(4) $|x+3|=4$，$x=$_________。
3. 請化簡下列各題(化簡指的是不使用絕對值來表示，可以使用未知數之式子形式表現)：
   (1) 假設k為正整數，那$|k|$可以化簡為_______________。
   (2) 假設k為負整數，那$|k|$可以化簡為_______________。
   (3) 假設k為任意實數，那$|k|$可以化簡為_______________。
   (4) 已知x為任意實數，且$1<x<6$，則$|x+3|+|x-10|$可以化簡為_________。

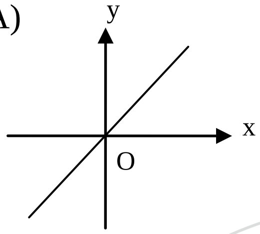
Parish (1992)提出處理絕對值方程式或不等式時，可以使用二維數線來解題，可以有效改善學生對於「或」與「且」的混淆情況。因此運用代數意義與幾何意義交互引證（金玉麒，1987），有助於釐清學生對於絕對值相關概念的迷思，此外，Ozmantar 與 Roper (2004)研究顯示，教材中未呈現的較艱深之絕對值函數圖形，例如，$|f(|x|)|$，可適當地利用教學鷹架，讓學生理解，也能讓學生瞭解其抽象化之概念。然而目前國內關於絕對值相關概念學生之錯誤概念的研究當中，缺少在函數圖形與絕對值相關概念之連結，因此本研究工具增加絕對值函數圖形部分，目的是為了從圖形概念中發現學生在絕對值相關概念之迷思，因國內教材安排函數概念於七下後期，為了減少函數錯誤概念可能影響之變因，及顧及學生認知發展需具抽象思考能力，故在選擇九年級學生為研究對象，題型設計以較為簡單的絕對值函數圖形為主，並在題幹說明時多加條件解釋，此外函數圖形之作圖，在國中教材中先以描出多個點作為引入，往後再進一步討論不同函數其圖形具有之性質，但因國中教科書中並未提及絕對值函數圖形，依研究目的，僅著重在學生是否能應用所學之絕對值相關概念，藉此判斷解題策略，並由學生答題表現瞭解學生在絕對值的錯誤原因，因此，研究者設計本題選項時特意安排使用刪去法即可得出最佳的答案。以上述之理念，編製圖形向度之題型，請見下頁：

1. ( )已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，

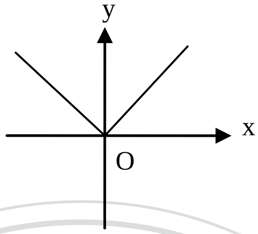
則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？



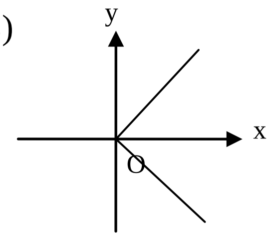
(A)



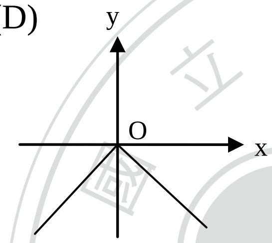
(B)



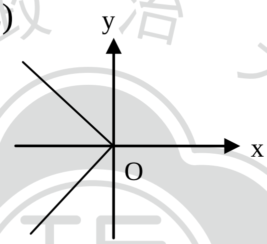
(C)



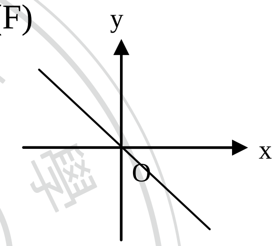
(D)



(E)

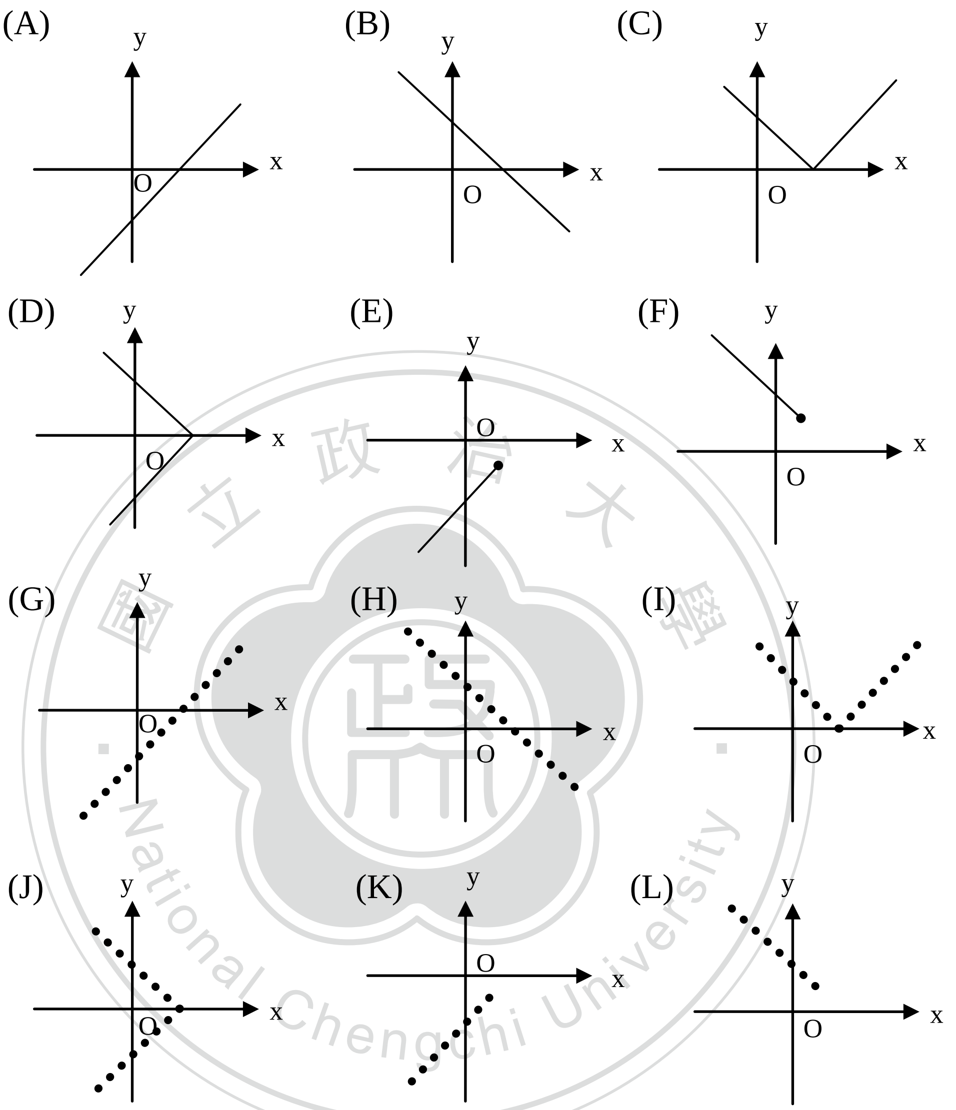


(F)



請說明選擇此選項的原因：

2. (　　)請問 $y=f(x)=|x-5|$，且 $x\le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？



請說明選擇此選項的原因：

根據上述設計理念，本研究工具之設計開發，將絕對值相關概念分成『距離』、『方向』、『圖形』三個向度，在此三個向度下細分為「無項距離」、「長度」、「正負數運算」、「去絕對值法則」五種次向度，並將純數字題型與含未知數文字符號

之題型特別做區分，希望透過學生在次向度中的表現及訪問想法，判斷學生是否具備該向度之能力，進一步了解學生在絕對值相關概念之錯誤原因，其預試題本第二部分雙向細目表如表 3-3-1。

表 3-3-1「絕對值相關概念試題」預試題本第二部分雙向細目表

<table>
<tr><th colspan="2">向度</th><th>問題情境</th><th>題號</th><th colspan="2">題數</th></tr>
<tr><td rowspan="4">距離</td><td rowspan="2">無向距離</td><td>數字</td><td>4D、5A、5F</td><td>3</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>符號</td><td>8B、8F、8G、10(4)</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">長度</td><td>數字</td><td>5B、5D、5C、5E</td><td>4</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>符號</td><td>8D、8E、8H</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">方向</td><td rowspan="2">正負數運算</td><td>數字</td><td>4A、4C、4E
6(1)、6(2)</td><td>5</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>符號</td><td>9(1)、9(2)、
9(3)、9(4)</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">去絕對值
運算法則</td><td>數字</td><td>4B、7(1)</td><td>2</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td>符號</td><td>7(2)、8A、8C、
10(1)、10(2)、10(3)、</td><td>6</td></tr>
<tr><td>圖形</td><td>去絕對值
運算法則</td><td>絕對值函數圖形</td><td>11、12</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

經過預試的施測，計算試題的難易度、鑑別度後，再根據上述不理想的題目進行編修及刪減，設計為本研究的正式試卷。

本研究之預試對象，為台北市某兩間國中八年級學生共 70 人，刪除完全空白與作答規律等無效題本後，有效樣本為 69 人，預試試題分析結果如下表 3-3-2

表 3-3-2 絕對值相關概念試題」預試題本之難易度、鑑別度

向度		問題情境	題號	難易度P	鑑別度D
距離	無向距離	數字	4D	.971	.11
			5A	.647	.40
			5F	.706	.50
		符號	8B	.868	.33
			8F	.912	.11
			8G	.662	.44
			10(4)	.426	.83
	長度	數字	5B	.676	.22
			5C	.471	.39
			5D	.456	.33
			5E	.485	.28
		符號	8D	.691	.50
			8E	.706	.22
			8H	.485	.33
方向	正負數運算	數字	4A	.971	.11
			4C	.779	.33
			4E	.985	.06
			6(1)	1	0
			6(2)	.956	.17
		符號	9(1)	.941	.22
			9(2)	.926	.11
			9(3)	.824	.44
			9(4)	.824	.50
	去絕對值運算法則	數字	4B	.985	.06
			7(1)	.838	.22
		符號	7(2)	.603	.78
			8A	.147	0
			8C	.868	.33
			10(1)	.853	.44
			10(2)	.412	.83
			10(3)	.279	.61
圖形	去絕對值運算法則	絕對值函數圖形	11	.235	.56
			12	.176	.56

在信度方面，經檢測求得 Cronbach's Alpha 值為 0.824，顯示具有內部一致性。在試題難度方面，試題難度依 P 值而定，共可分四大類：容易（$.75 < P \le 1$）、中偏易（$.50 < P \le .75$）、中偏難（$.25 < P \le .50$）與困難（$0 \le P \le .25$），當 P 值越大代表試題的難度越低，試題越容易。

在預試試題本學生表現結果中，第 4 題 A、B、D、E 選項含兩個數字差的絕對值問題與第 6 題第 1 小題，其難度均大於.97，因此將本題刪除，並將原第 4 題 C 選項 $|2-7| = -(2-7)$ 修改合併至第 5 題 G 選項 $|11-6| = |6-11| = -(6-11)$；依據預試老師反應學生對於第 5 題之 B、E 選項及第 8 題之 E 選項文字描述有語意上誤解，故將文字敘述略作修改：B. $|11-6|$ 等於數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度修改為數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成 $|11-6|$、E. $|11-6|$ 等於數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置修改為數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置坐標等於 $|11-6|$；第 8 題 A 選項 $|x-5|$ 一定是正數難度.147 表示此題對於學生較為困難，使得高分組與低分組的差異不大，研究者希望能從學生的答題狀況，瞭解學生錯誤原因，因此將此題保留。第 8 題 F 選項與 G 選項容易引導學生在兩個選項中猜測答案應為二選一，故將 F 選項予以刪除；根據預試中第 9 題絕對值方程式求解的學生作答情形學生策略大致分為兩種，一種是以距離來看，另一種是以代數方式分成兩個一元一次方程式求解，而以距離求解的學生在第 2 小題較不易發現錯誤，因此研究者對於此小題進行修改，將原題 $|x-5| = 0$ ，$x =$_____改為 $|x| + 4 = 0$ ，$x =$_____。其正式試題如附錄二，編修及刪減過程整理如下表 3-3-3：

表 3-3-3 預試編修及刪減形成正式題本過程

預試題本				編修及刪減過程	正式試題
向度		問題情境	題號		題號
距離	無向距離	數字	4D	刪除本題目	
			5A	保留本題目	4A
			5F	保留本題目	4F
		符號	8B	保留本題目	7B
			8F	刪除本題目	
			8G	保留本題目	7F
			10(4)	保留本題目	9(4)
	長度	數字	5B	修改題目敘述	4B
			5C	保留本題目	4C
			5D	保留本題目	4D
			5E	修改題目敘述	4E
		符號	8D	保留本題目	7D
			8E	修改題目敘述	7E
			8H	保留本題目	7G
方向	正負數運算	數字	4A	刪除本題目	
			4C	修改本題目	4G
			4E	刪除本題目	
			6(1)	刪除本題目	
			6(2)	修改題目	5
		符號	9(1)	保留本題目	8(1)
			9(2)	修改本題目	8(2)
			9(3)	保留本題目	8(3)
			9(4)	保留本題目	8(4)
	去絕對值運算法則	數字	4B	刪除本題目	
			7(1)	保留本題目	6(1)
		符號	7(2)	保留本題目	6(2)
			8A	保留本題目	7A
			8C	保留本題目	7C
			10(1)	保留本題目	9(1)
			10(2)	保留本題目	9(2)
			10(3)	保留本題目	9(3)
圖形	去絕對值運算法則	絕對值函數圖形	11	保留本題目	10
			12	保留本題目	11

二、「絕對值相關概念訪問流程記錄表」

根據研究目的及待答問題，研究者設計訪問流程記錄表，並在正式訪問之前，整理出參與訪問學生在各向度中的答題表現，確保在訪問過程中，完整地記錄學生想法，並避免使用帶有暗示推論的字句，訪問期間將會全程錄音。絕對值相關概念訪問流程記錄表見附錄四。

三、學生背景問卷

因本研究正式樣本數很小，為免誤用推及全體情況，設計學生背景問卷（見附錄三）。為了解不同能力學生基本背景資料，首先調查：年齡、年級、性別、父母親的職業以及課外加強補習（含個別家教）情形；接著以 Likert 五點量表讓學生表達自我對於數學的學習態度及對於絕對值相關概念的理解程度，此外亦調查學生認知本身的國文程度為何，與本身在處理數學文字描述時的瞭解題意程度，希望藉此幫助研究者更能分析出學生在解決絕對值相關問題時的表現。

第四節 研究過程

本研究過程可分為兩階段，第一階段確立研究主題及目的、蒐集相關文獻與分析目前國中階段數學絕對值教材內容、編製及修正預試題本，接著實施預試施測並再次進行試題的修正；第二階段為正式施測選取訪問對象，進行訪問及資料分析，最後提出討論與建議。

第四章　研究結果與分析

本研究依「絕對值相關概念試題本」結果將學生分為三類，分別為高、中、低能力組，每組選取男女生各 2 名學生，共 12 名學生進行開放式無結構訪問，藉由與學生訪問之內容,瞭解學生想法,及分析在絕對值相關概念中錯誤的原因。本章將分為絕對值定義概念資料分析、各向度不同能力學生之資料分析、學生態度量表資料分析及綜合資料相關分析共八小節。

第一節 絕對值定義概念資料分析

本研究設計絕對值相關概念試題本之第一部分為開放式問題,以瞭解學生對於絕對值的概念理解採取哪一向度為主要解題策略，在正式測驗中，學生對於絕對值定義的解釋方式，包含第 2 題第 2 小題：在數線上解釋$|-3|$及第 3 題第 2 小題：在數線上解釋$|-2+6|$中，研究者將學生的解釋方式分為以下幾種，其中 A、B、C 為研究者之歸納，D 為學生的用語：

A.　在數線上某數到原點的距離

B.　數線上兩數間的距離

C.　任意數的絕對值為正數（或非負數）

D.　用以去掉負號的值（符號）

E.　無法回答或空白

其中 A、B 研究者分屬於絕對值之幾何概念；C、D 屬於絕對值之算術概念，以下研究者以整體分組表現及參與訪問之分組表現各別進行說明分析：

一、　絕對值定義之整體分組表現

在參與測驗之有效樣本 54 位學生中，約有 4 成的學生可以使用絕對值之幾何定義解釋絕對值，其中多數學生採取「A.絕對值就是在數線上某點到原點的距

離」來解釋，佔 4 成中的 78%；而約有 5 成 5 的學生可以使用絕對值之算術定義來解釋絕對值，其中 90%的學生採取「B.任意數的絕對值為正數（或非負數）」來解釋，且使用此選項的學生多以『不管絕對值內為正數或負數，加上絕對值後變成正數』此類敘述呈現；以「D.用以去掉負號的值」來解釋者，僅有 0.5%； 無法回答或空白之學生也占 0.5%。

本研究發現，在所有不同能力分組的學生當中，能力高之學生雖然多數是使用幾何觀點來解釋絕對值，但仍擁有正確絕對值算術法則一定之程度，中、高能力兩組的學生中，各有 1、3 位學生在解釋絕對值時有多重解釋表現：高能力組 S24 解釋絕對值為「與原點的距離、正數或負數的絕對值都為正數」、中能力組 S28 解釋絕對值為「讓負數和正數變為正數、兩者為相反數放入絕對值會變成同樣的正數、可當作距離」、中能力組 S32 解釋絕對值為「在絕對值之內的數出來必為正數、通常用以表示距離」，以及中能力組 S45 解釋絕對值為「與原點的距離或是兩數間的距離」；反之，能力越低的學生越是偏用算術觀點來解釋絕對值，甚至低能力組的學生沒有人使用距離之幾何觀點解釋絕對值。其各能力學生在絕對值定義說明表現歸納如下表 4-1-1。

表 4-1-1 各能力學生在絕對值定義解釋表現

組別	統計數值	A	B	C	D	E	A、C	A、B	小計
高能力	全組表現(人數)	8	1	3	1	0	1 (S24)	0	14
中能力	全組表現(人數)	6	3	12	1	1	2 (*S28、*S32)	1 (*S45)	26
低能力	全組表現(人數)	0	0	11	1	2	0	0	14
合計	總表現	14	4	26	3	3	3	1	54

*代表為有參與訪問之學生

本開放式問題當中有兩小題設計為解釋絕對值在數線上的表示法，在第 1

題的統計中，研究發現低能力組學生在解釋絕對值時，皆使用算術定義來說明，因此研究者特別關注學生在解釋絕對值定義及在數線上表示絕對值之表現，研究者將學生在數線上表示絕對值的情況分類如下：

F. 能將$|-3|$解釋為在數線上原點 0 與-3 的距離、$|-2+6|$解釋為在數線上-2 與-6 的距離

G. 能將$|-3|$解釋為在數線上原點 0 與-3 的距離、$|-2+6|$解釋為在數線上 6 與 2 的距離

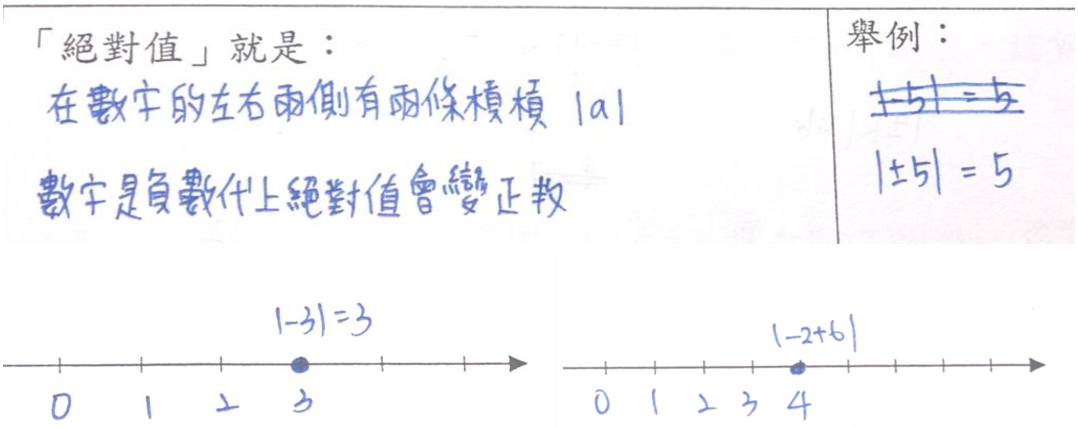
H. 將$|-3|$解釋為在數線上點 3 的位置、$|-2+6|$解釋為在數線上點 4 的位置

I. 將$|-3|$解釋為在數線上原點 0 與 3 的距離、$|-2+6|$解釋為在數線上原點 0 與 4 的距離

J. 無法解釋或空白

低能力學生在解釋絕對值定義時，皆以「在絕對值之內的數出來必為正數」的算術觀點理解絕對值（目前暫不討論此種說法概念之缺陷），因此在第 2 題及第 3 題中在數線上解釋$|-3|$及$|-2+6|$中，無人正確使用距離的想法來解釋，例如 S05 的實際作答情形如下圖 4-1-1。

圖 4-1-1 S05(女)絕對值定義概念實際作答圖



整體低能力學生之表現如下表 4-1-2。

表 4-1-2 整體低能力學生在絕對值定義及數線上表示絕對值之相關表現

組別	絕對值定義 (人數)	F	G	H	I	J	其它
低能力	A(0)	0	0	0	0	0	
	B(0)	0	0	0	0	0	
	C(11)	0	0	9	1	1	
	D(1)	0	0	1	0	0	
	E(2)	0	0	0	0	1	S17 將 $\left\|-3\right\|$ 解釋為數線上原點 0 與-3 及原點 0 與 3 的距離、$\left\|-2+6\right\|$ 解釋為數線上-2 與 4 的距離 6
合計	人數 (佔本組百分比)	0 (0)	0 (0)	10 (0.72)	1 (0.07)	2 (0.14)	1 (0.07)

低能力組中 9 位學生將 $\left|-3\right|$ 解釋為數線上點 3 的位置、$\left|-2+6\right|$ 解釋為數線上點 4 的位置，表示低能力學生在絕對值相關概念中，對於與原點的距離及兩點間的距離這兩項距離的觀念十分薄弱，有 2 人更是無法在數線上解釋因此勾選不可以用數線來解釋之選項。學生 S17 誤將 $\left|-3\right|$ 解釋為在數線上原點 0 與-3 及原點 0 與 3 的距離、將 $\left|-2+6\right|$ 解釋為在數線上-2 與 4 的距離 6，顯示該生雖有距離之概念，但是把無向距離及根據距離產生相反方向混淆。學生 S07 將 $\left|-3\right|$ 解釋為在數線上原點與 3 的距離、$\left|-2+6\right|$ 解釋為在數線上原點與 4 的距離，該生認為因為絕對值一定是正的，又因為距離為正，故所有點的距離應該是從正數的點到原點的距離，與該生訪問過程詳見如下（T 為研究者，S 為學生）:

T：你認為絕對值是什麼？
S07：不管正或負出來都是正的。
T:那你在解釋絕對值-3 的時候為什麼這樣做？(畫出點 3 跟 0 的距離為絕對值-3)
S07：因為，它算出來是 3 呀，所以就畫了 3 格。
T：然後？
S07：<u>0 跟 3 的距離就是絕對值-3。</u>
T：那你覺得你對於這個解釋跟你在上一題所說的絕對值的意思是一樣的嗎？

S07：一樣阿！

T：為什麼？一樣的點在哪？

S07：就是正的嘛！

T：什麼是正的？

S07：數字阿～-3 加絕對值就變成正 3。

T：還有嗎？

S07：距離是正的。

T：還有嗎？

S07：ㄟ…沒有…………現在一片空白。

T：好，沒關係，我們看一下你第 2 題解釋|-2+6|是怎麼作的

S07：就是這個算出來變成 4 阿！

T：恩恩！

S07：所以 0 到 4 之間就是 4 格的距離。

從資料中研究者發現中能力的學生，有超過一半的人將$|-3|$解釋為在數線上點 3 的位置、$|-2+6|$解釋為在數線上點 4 的位置，且以此解釋的學生當中有四分之三的人在第 1 題解釋絕對值時是以算術概念為方法，因此中能力學生中，仍有多數學生在距離的解釋上有所困難；然而能知道某數的絕對值就是該點與原點的距離之學生多半能正確解釋數線上單一數字的絕對值，但當絕對值內含兩個數字相加減時，此兩點距離之概念易混淆或其概念不完整，例如，以下學生均可以解釋$|-3|$為數線上原點 0 與-3 的距離，但在數線上無法把$|-2+6|$視為兩點距離：S18 把$|-2+6|$解釋為在數線上點 4 及點-4 的位置、S49 解釋$|-2+6|$在數線上點 4 的位置，因為他認為$|-2+6|$就是 0 為原點，先往後 2 格再往前 6 格，該生雖正確解釋了-2+6 在數線上移動的涵意，卻沒有將絕對值之『與原點的距離』概念作結合、S33 將 $|-2+6|$解釋為在數線上-2 到 6 的距離，表示該生應具有絕對值可表示為兩點距離的能力，但是卻忽略距離的算法是相減後加絕對值，須將-2+6 化成-2-(-6)，而非直接由數字（-2）與（+6）取距離。另外認為絕對值就是把任意數化為正數的學生中，有兩位學生（S21、S39）無法利用數線解釋$|-3|$，

也誤將$\left|-2+6\right|$解釋為數線上-2 到 6 的距離。至於無法解釋或空白的部分：其中 1 人為特殊身分學生，在語言表達中有部分困難，無法在數線上解釋某數的絕對值，因此勾選不可以用數線來解釋之選項，但由研究中發現該生具基本數學概念；另 1 人則是空白未回答。中能力學生在絕對值定義及數線上表示絕對值之相關表現，整理如下表 4-1-3。

表 4-1-3 整體中能力學生在絕對值定義及數線上表示絕對值之相關表現

組別	絕對值定義 (人數)	F	G	H	I	J	其它
中能力	A(6)	0	2	0	0	1	S18 將$\|-3\|$解釋為數線上原點 0 與-3 的距離、$\|-2+6\|$解釋為數線上點 4 及點-4 的位置 S49 將$\|-3\|$解釋為數線上原點 0 與-3 的距離、$\|-2+6\|$解釋為數線上點 4 的位置 S33 將$\|-3\|$解釋為數線上原點 0 與-3 的距離、$\|-2+6\|$解釋為數線上-2 到 6 的距離
	B(3)	1	0	2	0	0	
	C(12)	0	0	10	0	1	S21 無法解釋$\|-3\|$、$\|-2+6\|$解釋為數線上-2 到 6 的距離
	D(1)	0	0	0	0	0	S39 無法解釋$\|-3\|$、$\|-2+6\|$解釋為數線上-2 到 6 的距離
	E(1)	0	0	1	0	0	
	AC(2)	1	0	1	0	0	S32 有 F、H 兩種解釋 S28 採用策略 C 回答
	AB(1)	1	0	0	0	0	
合計	人數	3	2	14	0	2	5

在 26 位中能力學生中僅有 5 位能使用正確距離概念、低能力則是無人能表達，然而高能力學生 14 位中有 5 位能夠完整在數線上解釋單一數字的絕對值，及絕對值內含兩個數之兩點距離，故整體而言，其絕對值之幾何概念相較於中低

能力學生為佳。本研究雖在「絕對值相關概念試題本」中，能用正確幾何概念表達之學生未達 5 成，但詳細分析學生之答題表現時，發現兩名學生應可歸屬在具有能力之範圍中，其一：S22 能將$|-3|$解釋為數線上原點 0 與-3 的距離，也能將$|-2+6|$解釋為 0 與 4 的距離，但在數線上無法卻正確標示出來，其二：S48 在解釋$|-3|$與 $|-2+6|$時空白未作答，該生恰好為參與訪問學生之一，在訪問中該生表示當時懶得寫，所以選擇空白，但該生在訪問中明確表達出數個正確的兩點距離關係，其訪問過程如下：

T：你在試題中是怎麼解釋絕對值的？
S48：就像上面寫的阿！在數線上 0 與某數之間的距離。
T： 那麼第 2 題你怎麼沒有解釋絕對值-3？
S48：因為我懶得寫。
T： 那你現在用說的好了。
S48：<u>絕對值-3 等於絕對值 0 減 3，所以就是 0 跟 3 的距離。</u>
T：恩！
S48：<u>絕對值-2+6 就是 0 跟-2+6 的距離。</u>
T：有沒有別的距離表示法，不是跟 0 的距離？
S48：就是用兩數相減，<u>2 跟 6 的距離。</u>
T：還有嗎?
S48：<u>-2 跟-6 的距離。</u>

因此，若將以上兩位學生列入在具有解釋絕對值之幾何概念的能力範圍中，則有 5 成之高能力學生能使用正確的距離概念，整體高能力學生在絕對值定義及數線上表示絕對值之相關表現，如下頁表 4-1-4。

表 4-1-4 整體高能力學生在絕對值定義及數線上表示絕對值之相關表現

組別	絕對值定義 (人數)	F	G	H	I	J	其它
高能力	A(8)	2	2	1	0	1	S22 將 $\lvert -3 \rvert$ 解釋為數線上原點 0 與-3 的距離但畫不出來、$\lvert -2+6 \rvert$ 解釋為 0 與 4 的距離但畫不出來 S48 空白
	B(1)	0	1	0	0	0	
	C(3)	0	0	2	1	0	
	D(1)	0	0	1	0	0	
	E(0)	0	0	0	0	0	
	AC(1)	0	0	0	1	0	S24 使用策略 C 回答
合計	人數	2	3	4	3	1	2

二、絕對值定義之訪問分組表現

參與訪問之 12 位學生對於絕對值的解釋之歸納如下表 4-1-5，其中，高能力學生有 3 位學生使用絕對值之幾何觀點解釋絕對值的定義，另外 1 位學生使用算術觀點說明絕對值的定義；中能力學生使用絕對值之幾何觀點或算術觀點說明絕對值的定義大約佔各半；而低能力學生皆僅能使用算術觀點來解釋絕對值的定義，而在訪問中，中高能力之學生皆能用算術觀點來說明絕對值，或是以算術之概念計算處理試題，因此雖然將幾何與算術概念作區分，但原則上，多數具備幾何概念的學生也同時具備有正確的算術概念，當然其中也有可能在概念上有些許不完整或是錯誤的地方，此研究將於後面小節進行討論。

表 4-1-5 參與訪問之學生在絕對值定義及數線上表示絕對值之相關表現

組別	統計數值	A	B	C	D	E	AC	AB	小計
高能力	參與訪問 (人數)	2	1	1	0	0	0	0	4
中能力	參與訪問 (人數)	0	0	1	0	0	2	1	4
低能力	參與訪問 (人數)	0	0	4	0	0	0	0	4
合計	參與訪問 (人數)	2	1	6	0	0	2	1	12
	總表現 (人數)	14	4	26	3	3	3	1	54

在訪問過程中，研究者針對學生在絕對值概念的描述進行再次釐清，並且詢問訪問學生能否以不同於紙筆測驗中之方法解釋絕對值，中、高能力組8位學生，均可以明確說出其它解釋，S26、S48、S45、S28 原試題上以「在數線上某數到原點的距離」解釋絕對值，在訪問中均使用到「任意數的絕對值為正數（或非負數）」之概念；S34、S32 原試題上以「數線上的兩點距離」來解釋，而在訪問中補充解釋，能正確使用移動後與原點的距離如下：

T:你在解釋絕對值的時候只寫了絕對值 a ，為什麼？
S34：沒想這麼多。
T:那如果現在要你解釋你會怎麼說？
S34：就是兩個數的距離。
T:你可以舉例嗎?
S34：那就用這個0 跟-3 的距離就是絕對值-3。
T:那如果你這樣解釋的話，絕對值-3 跟絕對值3 用距離來解釋呢?
S34：呃…距離…它們的距離是一樣的，恩，雖然他們是不同的點，但是他們跟0 的距離是相同的。
T:可以再說清楚一點嗎？
S34：絕對值-3 是-3 到0 的距離，絕對值3 是3 到0 的距離。
T:第3 題的例子絕對值-2+6，你是用距離嗎？
S34：不是，我就直接算出答案，就是4。
T: 那如果用距離來解釋，可以嗎？
S34：-2+6 是正數，所以直接直接把絕對值拆開就是6-2，那就是坐標6 向左移2個距離就是4。
T:那你覺得你現在這個講法跟剛剛跟絕對值-3 的講法一樣嗎?
S34：不一樣。
T:可以用一樣的講法嗎?就是你剛剛說的兩點間的距離。
S34：喔～我知道了，就是6 跟2 之間的距離是4，對對對。

S32：恩，像這個|-1|跟|1|在數線上距離是一樣的，如果取這裡是0，當絕對值裡面的是正的時候，就是正向，如果裡面是負的話就是反向，因為它們兩個的距離出來還是一樣的數字。
T：所以妳的意思是說絕對值1 就是0 的右邊距離1？
S32：對！
T：絕對值-1 就是？

S32：0 的左邊距離 1。

T：好，那妳|-3|是這樣解釋的？

S32：對！

T：那妳說<u>|-2+6|是以原點而言，反向走 2 單位再正向走 6 單位的位移？</u>

S32：對，所以它的總位移是 4。

T：那妳可不可以不用位移，而用距離的想法來寫？

S32：就是從原點來說，<u>在負向距離 2 的地方再往正向走 6 步，然後最後距離原點的位置吧！</u>

至於高能力學生 S13、中能力學生 S41 在原試題中解釋絕對值為「任意數的絕對值為正數（或非負數）」，在訪問中 2 位學生均能說出絕對值之幾何解釋，且其中 S41 皆能正確說出絕對值內含單一數字及絕對值內含兩數加減之距離關係，反觀 S13 對於絕對值內只有一個數在數線上的解釋可以很快反應，但是在兩點間的距離時，直覺反應出現了錯誤，將 $|-2+6|$ 誤認為是-2 跟 6 的距離，在先前中能力學生中亦有 3 位學生發生同樣的錯誤狀況，可見學生在判斷兩數和的絕對值時，易發生此類錯誤，訪問過程如下：

T：你認為無論什麼數值放進去都會變成正的，這個的數值指的是什麼？

S13：無論是分數，恩，正數或是負的。

T: 對於絕對值的解釋還有別的想法嗎?

S13：恩…如果是在數線，假如裡面放一個數字的話，就是出來的這個值就是在數線上與 0 的距離。

T: 可以舉例嗎？

S13：像|-3|出來就是 3，就是-3 跟 0 的距離就是 3。

T:所以|-2+6|你能用一樣的解釋方法嗎?

S13：恩…<u>-2 和 6 的距離。</u>

T:-2 和 6 的距離，如果畫在數線上的呢?

S13：…這樣不行，怪怪的。

T:那你覺得應該怎麼改？

S13：不太會講。

T:你剛剛是哪個地方覺得怪怪的？

S13：剛是講-2 和 6 的距離是 8，可是算出來是 4。

T:我們以前說距離的話應該是數字相加還是相減？

S13：相減。

T:哪這裡是?

S13：相加。

T:嗯哼，所以怎麼可以讓它變成相減？

S13：-2-6 或是 6-(-2)。

T:那如果根據這個題目應該是-2 跟誰的距離？

S13：-2 跟-6 的距離。

T:所以我把-2+6 改成-2-(-6)那就變成了？

S13：他們兩個的距離…-2 跟-6 的距離=4。

中能力學生 S28 在原試題上以「讓負數和正數變為正數、兩者為相反數放入絕對值會變成同樣的正數、可當作距離」解釋絕對值，在訪問過程中也補充了幾何距離的想法，但對於距離的概念該生有倒果為因之錯誤迷思：因絕對值為正數，且距離也為正數，所以任何一個數的絕對值都是指一個正數到原點的距離，此錯誤迷思在上述的低能力組學生 S07 也有相同的情形，其訪問過程如下：

T：妳在數線上解釋|-3|妳把它畫在點 3 的上面，妳可以用距離來解釋嗎？

S28：恩，<u>因為|-3|=3，所以它的距離就等於 3，就 0 到 3 的距離，而且絕對值不可能變成負數，所以他一定會在正數，所以是正 3 的位置。</u>

T：那絕對值 3 呢？

S28：<u>絕對值 3 也是 3，因為絕對值會讓哪個負數跟正數都會變成同樣的數+3，那距離都會相同。</u>

T：恩，所以妳的意思是因為絕對值是正的，所以不可能畫在原點的左邊，是這樣嗎？

S28：恩！

T：那我問妳喔，如果現在有一個人跟妳距離是 3 步，那可不可以在妳左手邊？

S28：恩恩！

T：可不可以在妳右手邊？

S28：可以，嗯哼！

T：所以距離有沒有方向？

S28：沒有方向。

T：那如果我可不可以 0 到-3 的距離叫做絕對值-3？

S28：可以。

T：這樣是不是跟妳說的有衝突？

S28：不會，因為它說的都是距離等於 3。

參與訪問之低能力的學生在解釋絕對值時，除 S07 之外，其餘 3 人皆無法用「與原點的距離」或是「兩點間的距離」來解釋絕對值，他們認為某數的絕對值就是指一個正數，所以在數線上的解釋僅將絕對值算出來的數標記在數線正向的某一點上，例如：

T：請你解釋一下你認為絕對值的意思是什麼？
S01：就是在絕對值裡面的數字不管是正負數還是會變正的。
T：在數線上怎麼解釋呢？你沒寫上去？
S01：|-3|就是 3 阿！
T：所以就標在 3 上面？
S01：對！
T：那你還有想到其它絕對值的解釋想法嗎？
S01：沒有！
T：我們有教過距離的表示法，你知道嗎?
S01：…ㄟ…我忘了！

小結

在現行的教科書版本中，皆定義某數的絕對值為數線上該點原點與原點的距離，但是從本研究中學生的表現裡，卻發現能用此定義解釋絕對值的學生不到一半，並且能正確在數線上畫出絕對值的學生更是少之又少，由此可知學生雖然能將絕對值直接聯想到距離，但是卻對「距離」的真正概念不熟悉，因此產生錯誤的概念，並且也因為對於絕對值的解讀認為「任何數的絕對值都為正數」，所以在數線上的解釋會用某一正數點來代表其絕對值。

第二節 不同能力學生的「無向距離」概念之資料分析

在絕對值相關概念中，絕對值代表數線上某數到原點的距離，其某數位置在數線的正向上或是反向上，都不會影響到距離的值，也就是說點在原點左邊或右邊它與原點的距離是相同的，因此，學生必須能分辨「兩點距離」及「相差」之含意。表 4-2-1 將參與訪問之 12 位學生的答題情況與正式施測學生作比較，其中，在此向度中訪問之學生答對率皆達 5 成以上，在整體分組能力顯示，第 4 題的 F 選項及第 9 題第 4 小題對於中、低能力的學生而言仍有困難，甚至低能力組學生面對第 9 題第 4 小題時更是顯出困境。

表 4-2-1 不同能力學生在無向距離概念之答對率統計表

距離－無向距離	數字		符號			平均
	4A	4F	7B	7F	9(4)	
高能力 (整體答對率)	0.75 (0.86)	0.75 (0.79)	1 (1)	1 (0.79)	1 (0.86)	0.9 (0.86)
中能力 (整體答對率)	0.75 (0.85)	0.50 (0.69)	1 (0.92)	0.5 (0.77)	0.75 (0.58)	0.7 (0.76)
低能力 (整體答對率)	1 (0.71)	1 (0.64)	1 (0.71)	0.75 (0.64)	0.75 (0.29)	0.9 (0.60)
綜合表現 (整體答對率)	0.83 (0.82)	0.75 (0.70)	1 (0.89)	0.75 (0.74)	0.83 (0.57)	0.83 (0.74)

一、 高能力學生之答題情形

高能力學生在此向度中距離的運用較為靈活，並且在兩點間的距離判斷上較為準確，亦可以與其他類似概念作比較或歸納。以 S13 為例：

【4A. $|11-6|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

T：請妳解釋一下為什麼妳如何判斷這些選項？
S13：如果要算 6 和 11 的距離就是相減，然後又加了絕對值，就一定是正的，所以我覺得可以解釋。

【4F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示】

S13：F，就很像是在數線上問 6 跟 11 的距離，所以也可以用 11-6 的絕對值。

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S13：B 的話感覺就好像再問說<u>|x-5|就是 x 跟 5 的距離，然後|5-x|就是 5 跟 x 的距離。</u>
T：嗯哼！
S13：然後都加了絕對值都一樣。

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

S13：如果是|x-5|我覺得應該是 x 跟 5 的距離。

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

S13：這題我是用拆絕對值的方法做的。
T：那請妳說一下妳是怎麼解的？
S13：因為 x 大於 1，所以 x+3 就是正的，所以就直接可以把絕對值拆掉，然後因為 x 小於 6，所以 x-10 是負數，所以要多加括號及一個負號，式子就變成 x+3-(x-10)，所以答案就是 13。
T：那你可以用距離想法去解這題嗎？
S13：…是兩點距離嗎?x 到 10 的距離，和 x 到-3 的距離…如果畫在數線上，x 介在 1 和 6 之間，所以跟-3 的距離是|x-(-3)|，跟 10 的距離是|x-10|…所以就可以發現距離是 13 (學生解法畫圖如下圖 4-2-1)。

圖 4-2-1　S13(女)解釋題目 9(4)之實際圖解

此外，高能力學生能明確地了解題目所用到的概念，也能明確舉出敘述的反例，或是敘述出通用的式子及正確的解題策略，並且運用代入適當的數字作為檢視驗算。以 S26 為例：

【4A. $|11-6|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

S26：就是….我不知道該怎麼解釋耶！
T：你怎麼想就直接說就好，你是怎麼想就把它寫出來。
S26：就是，一個數減一個數的絕對值就是兩個數之間的距離。

【4F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示】

S26：相差的值應該不會用負的來表示，所以，就是用大數減小數的絕對值跟小數減大數的絕對值，這樣算出來的值就是相差值。

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S26：兩個數如果都不改變…就是…A-B 的絕對值會等於 B-A 的絕對值。
T：為什麼？
S26：恩…不知道該怎麼說為什麼…也不是誰跟我講的啦，我通常都是習慣就是<u>代數字進去算阿，就是我正數已經帶進去算了，是對的，然後代負數也是一樣的。</u>
T：所以你都是代數字？
S26：對阿，通常這種題目都是代一正一負進去看看是不是，成不成立。

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

S26：就是假設 x 坐標是 2 好了，它與-5 的距離應該是 7，可是|x-5|算出來只有 3 而已，所以這個距離不會相等。

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

S26：因為 x 大於 1 小於 6，所以 x+3 一定是正數那絕對值就直接去掉，然後 x-10，因為 x 小於 6，所以 x 小於 10，所以 x-10 絕對值中算出來是負數，如果要把絕對值去掉的話，就要把兩個數字改成大的減小的。

在高能力組中，此向度僅只有一人未全答對，訪問中該生表示，在閱讀題目過程中，因為在文字敘述上斷章取義，而造成錯誤，以下是 S48 之訪問過程：

【4A. $|11-6|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

T：請你解釋下面各選項你是怎麼判斷對錯的?從 A 選項開始。
S48：我再看一下…恩…為什麼我不勾耶？
T：什麼意思？
S48：我現在認為它是對的，應該是那時候沒看清楚。

【4F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示】

T：F 為什麼勾了又畫掉？
S48：相差的值有可能是…ㄟ相差的值是正的，我<u>那時候可能想說因為是差，所以要減，有可能是 6-11。</u>
T：那你現在覺得？
S48：相差的值就是那個，就是正的。

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S48：就是用原點的距離跟絕對值的想法去做。

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

S48：對阿…因為有可能 2-3 跟 3-2 的絕對值都是一樣。

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

S48：就 x 是正數，所以就把絕對值拆掉，阿它又小於 6 所以 x-10 要顛倒過來才會是正的。

經由訪問釐清學生想法後，此向度高能力學生幾乎達完全能掌握概念之程度，從以上高能力學生的解題策略來看，在第 9 題的第 4 小題，高能力學生都是選擇使用去絕對值的運算法則處理，而非使用兩點間之距離來說明，但因高能力學生具備絕對值的幾何概念，故在訪問中要求學生以距離觀點重新解釋時，學生能很快反應（見高能力學生 S13 之訪問過程）。

二、　中能力學生之答題情形

在中能力 4 位學生的表現中，S45 及 S41 在解釋絕對值幾何概念中的無向距離想法較為正確，雖不如高能力學生在表達上流暢，但在給予充分的時間或是引導，這兩位學生大致上都可以描述不同題目之共通點，及正確的概念。以 S45 為例，訪問過程如下：

【4A. $|11-6|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

S45：<u>|11-6|是 11 到 6 的距離，而它後面寫的可解釋 6 到 11 的距離，距離是一個…一個…怎麼講，距離都是 5。</u>
T：恩！
S45：然後 <u>6 到 11 的距離也是 5</u>，所以我打勾。

【4F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示】

S45：解釋跟上面蠻接近的。
T：所以你覺得相差的值跟什麼蠻接近的？
S45：距離，所以也是可以用這個吧！

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S45：呃…x-5 就是 x 到 5 的距離，所以會等於 5 到 x 的距離，裡面的距離是一樣的，可是意思不一樣。

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

S45：喔…這跟上面的一樣，應該是 x 到 5 的距離，或者是-5 到-x 的距離。

至於另 2 位中能力學生在第一部分開放式問題中，皆回答出多重解釋：「絕會值就是與原點的距離」及「無論絕對值內為正數或負數，出來的值都是正數」，但這 2 位學生在訪問中明顯採取不同的概念策略，S28 偏向依照題目的敘述，利用算術的方式處理問題，S32 則是偏向使用解釋基本的距離概念，例如，第 4 題 A 選項中 S32 採取距離的方式解釋；而 S28 則用算術規則判斷正確與否，其訪問比較內容如下：

【4A. $|11-6|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

S32：因為對我來說絕對值就是距離的意思，所以|11-6|就是可以當作是 6 跟 11 的距離… (看了 20 秒)…呵呵…沒看到。
T：怎麼了?
S28：是對的。
T：為什麼？
S28：因為|11-6|=5，6 到 11 的坐標也等於 5。

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S32：然後他們兩個的距離其實是一樣的。
T：是誰跟誰的距離？
S32：x-5 的距離跟 5-x 的距離，就是它可以是 x 走到 5 也可以是 5 走到 x，就是正向和反向，所以距離是一樣。
S28：這個，如果 x 都代同樣的數字進去的話，假如代 2，|2-5|=3，5-2 的絕對值也等於 3，所以它就是對的。
T：那妳可以用距離來解釋嗎？
S28：距離…呃…恩…就假如 x 在某一點，就跟 5 的距離會相等，就不管在哪邊跟 5 的距離會相同，所以 x-5 就會等於 5-x。
T： x-5 就會等於 5-x？
S28：的絕對值。

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

S32：然後，F 也不對，應該是 x 與 5 的距離吧！

S28：…嘿嘿…應該我看錯了！
T：哪裡看錯？
S28：這個就跟上一題問得很像。

然而這 2 位中能力學生 S32、S28 都對於「相差」的概念不甚瞭解，她們都認為只要是「相差」就要使用減法，但是對於是否要用絕對值表示，產生困擾，因為以往經驗都是以大數減小數，因此在結合新的絕對值概念時無法做適當連結，認為只要拿兩數相減即可。

【4F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示】

S32：他們兩個差的值，加絕對值也對啦，只是我覺得不加絕對值也可以耶！
T：那我加了絕對值之後，這句對不對嗎？
S32：還是對啦！
T：那如果我改個敘述，6 和 11 相差的值可以用 6-11 來表示，這樣對嗎？
S32：<u>差的話通常是大的減小的。</u>
T：為什麼是大的減小的？
S32：…恩…(無法回答)…所以它的差也可以是-5 嗎？
T：妳覺得咧？
S32：好像可以。
T：所以我也可以小減大？
S32：恩！

T：F 為什麼沒有打勾呢？
S28：<u>6 跟 11 的相差如果是用 6-11 的話就是-5，就不可以用|11-6|來講，因為|11-6|=5，兩個相差是-5。</u>
T：所以妳覺得相差是-5？
S28：恩！

由上述訪問內容中發現，S32 在概念上是模擬兩可的狀態，並不瞭解「相差」為什麼是「大數減小數」的規則，而 S28 認為兩數相差的值就是拿前面的數減去後面的數，所以相差的值會有正負之區分，當題目問「6 和 11 相差的值」就應

該用 6-11 來算，該生在相差的概念想法明顯是錯誤的。

此向度的最後一題，第 9 題的第 4 小題，中能力學生與高能力學生的解題測略大同小異，其中有 3 位中能力學生（S41、S45、S32）與高能力學生採取相同的「去絕對值法則」進行運算，舉例如下：

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

S45：這題因為 $1<x<6$，正的可以直接去掉絕對值，負的要顛倒減，所以我把它化簡成 x+3+10-x 就等於 13。

而學生 S28 因偏用算術策略，因此她採取代入多個數，此題以嘗試錯誤的方式計算，發現只要符合範圍，無論 x 代入什麼數，皆可使 $|x+3|+|x-10|$ 都得到相同的答案，因此該生便認為此數即為所求，但此方法是極端作法，對於所以相同類型的題目，並非通解，所以當再次遇到這樣的題型時，該生的策略便無法適用。

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

T：這題為什麼妳寫答案是 13？
S28：因為它說 x 大於小於 6，所以我就代 2345 進去，發現出來都是 13，所以答案就是 13。
T：如果我把題目的問題改成 $|x+3|+|x+1|$，然後這個 $1<x<6$ 條件不變，那你會怎麼做？
S28：恩…一樣代看看…恩 (代了 2345 進去)…呃…跟剛剛不一樣。
T：那你解得出來嗎？
S28：有點難，不知道怎麼辦。
T：那你可以利用距離的方法去算嗎？
S28：…ㄟ…也有點難。

在此題中 S28 無法判斷絕對值內含兩個數字和或兩個數字差的幾何概念(兩點間的距離)，再加上未知數的干擾，讓學生不知如何下手解題。

三、 低能力學生之答題情形

研究中發現低能力學生 S05 產生判斷策略的障礙，在於解釋兩點間的距離時，對於相似題目的轉換會受以往經驗之干擾，對於解決問題，該生有將做過的題目強記的傾向，所以在與該生進行訪問時，該生時常出現：以前看過或是以前教過

這類的反應，因此對於題目敘述改變，該生即會產生困擾，可見兩點間的無向距離，對於該生具有一定的困難度：

【4A. $\left|11-6\right|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

S05：我記得我之前就是這樣算出來的。
T：怎麼叫做算出來？
S05：因為我覺得我國文可能理解能力有問題吧，所以我一開始看不是很懂。
T：哪裡看不懂？
S05：<u>可能就是說坐標 6 跟坐標 11 阿，它就用 11-6，不過我會想說，有時候不是可以用 6-11 嗎?有時候我會搞混之類的。</u>
T：妳覺得什麼時候用 6-11 什麼時候用 11-6？
S05：就是有時候數字可能是大的減小的，可是在學的時候又有小的減大的，可能我就會搞錯吧！
T：那如果我把 A 選項改成 11-6 解釋坐標 11 跟坐標 6 的距離，妳覺得對嗎?
S05：如果是我，我會覺得是對的。
T：那坐標 11 跟坐標 6 的距離和坐標 6 跟坐標 11 的距離有不一樣嗎?
S05：沒有吧！
T：是一樣的嗎？
S05：是一樣的，只是看到數字會猶豫吧！

從訪問內容中發現，在第一部分的開放式問題中，雖然低能力學生無法用幾何距離觀點來解釋絕對值，但是從題目的引導中，低能力學生仍可使用基本的距離概念處理題目，例如，S30、S01 可直接用距離判斷兩正數差的絕對值，而 S07 在處理同樣一個敘述時，將 $\left|11-6\right|$ 以算術觀點算出，再將坐標 6 和坐標 11 的距離為 5 的想法做比對，其訪問內容如下：

【4A. $\left|11-6\right|$ 可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離】

S30：因為…坐標 6 到坐標 11 的距離就是 11-6，然後算出來的答案有時候可能等於負的，所以就掛上絕對值吧！
T：為什麼？
S30：因為距離沒有負的吧！

S01：恩…因為 6 到 11 的距離就 11-6，然後…恩…然後就把它變成正的，就加絕對值。
T：那我們接下來看看 4A，|11-6| 可以解釋為數線上 6 和 11 的距離，你有勾選，

為什麼你覺得是對的？
S07：算出來是 5 阿，6 到 11 的距離也是 5，以就是對的。

至於「相差」的概念在低能力這 4 位學生中，並未產生錯誤想法：

【4F. 6 和 11 相差的值可以用 $|11-6|$ 來表示】

S30：因為是相差的值，所以就這樣。
S07：因為它們相差 5 阿！
S01：6 和 11 的相差的值就 11-6。
S05：6 和 11 的相差的值是 5。

研究中發現，當低能力學生處理含有文字符號的問題時，容易使用代數字的想法去處理，例如：

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S30：因為那時候我把 x 想成是 1-5=-4，然後絕對值出來等於 4。
T：嗯哼！
S30：然後 5-1=4 它也會等於 4。

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

承 7E
S01：假如坐標 x 是 3 的話，3-5 等於 2，然後 2 出絕對值等於 2，3+5 等於 8，代數字進去算。
T：3+5 是哪來的？
S01：-5 跟 3 的距離是 8。
T：恩，那如果是 F 選項呢？
S01：如果 x 是正的時候就不對。

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

S01：我代代看，不管代 2 到 5 出來的值都是 13。
T：所以你是湊的嗎？
S01：就是…就是 x…都一樣的一個加 3 一個減 10，加起來還是都一樣阿，所以它 x 就不需要啦！
T：這個題目你以前做過嗎？
S01：沒有。

T：那你怎麼解的？
S01：就試試看阿！
T：是自己想的嗎？
S01：對阿！

解決含文字符號問題的困難也包含學生不了解什麼是未知數，未知數所代表的含意為何，例如，學生 S07 能解釋兩個已知數的距離，但是無法解決有關未知數與一個已知數的距離：

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

T：F 選項為什麼選了又畫掉？
S07：怪怪的。
T：哪裡你覺得怪怪的？
S07：…因為 <u>x 不知道是什麼東西呀！</u>
T：經過前面解釋，現在你知道了嗎?
S07：…（想了一下）…不知道。

而另一位低能力學生 S01 具備對未知數之瞭解，因此能做正確的推論：

【7 B. $|x-5|=|5-x|$】

S01：x-5 出來，或是 5-x 出來數字都一樣，然後都有絕對值，都是正的。
T：你所說的數字有包含正負符號嗎？
S01：沒有吧！

在此 4 位低能力學生當中，學生 S30 能正確解釋兩正數差為兩數之間的距離，也能明確指出距離應該使用減法處理，但是當題目出現未知數時，對於減法與運算符號之負號便發生混淆，例如：學生認為減 5 就是負 5，因此當她看見 $x-5$ 會做錯誤解讀，認為是 x 與負 5 的關係，其訪問內容如下：

【7 F. $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離】

S30：因為坐標 x 到-5 的距離就是他們兩個數互減，所以是對的。
T：所以相減是 x-5？
S30：應該一樣吧！
T：所以妳看到 x 減 5 的減就是相減的意思。
S30：對阿，應該一樣吧！
T：妳代代看數字呢？

S30：不一樣咧！

T：妳剛剛說距離應該是相減嗎？

S30：恩！

T：所以應該是誰減誰？

S30：恩…-5-x。

T：可以顛倒嗎 x-(-5)？

S30：好像也可以耶(所以不是很懂距離可以用小減大表示)！

【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1 < x < 6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】

S30：應該是 2x+13 吧！

T：為什麼？

S30：因為有兩個 x，都是正的，都是同一個數，然後因為是負 10 就加負號。

T： 那我寫出過程來給妳看看…(寫完之後)

S30：喔~原來是這樣，我懂了！

T：妳看得懂嗎?

S30：恩！

T： 那妳一步一步解釋看看|x+3|=x+3。

S30：因為都是正的。

T：妳說的都是正的是什麼意思？

S30：因為 x 前面沒有，對所以 x+3 絕對值出來都會是正的！

T：妳的意思是說 x 是正的， 然後這裡是+3 也是正的?

S30：恩！

T：接下來咧？怎麼解釋|x-10|=-(x-10)？

S30：所以我就不知道怎麼解釋。

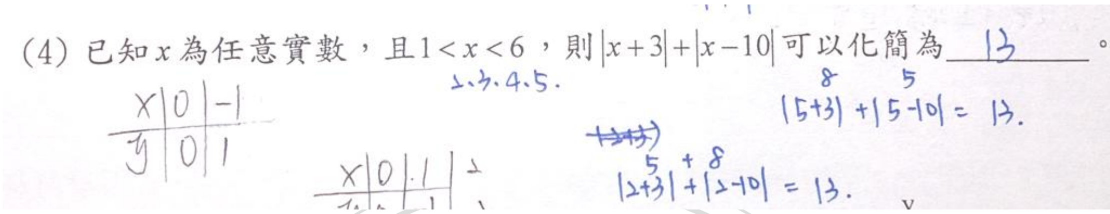
從以上兩題訪問過程可知，S30 在解釋絕對值內未知數與已知數的加減時，無法分辨運算符號與性質符號的差別，因此做出錯誤解讀，並且該生誤認為未知數 x 為正數，因此 $|x+3|$ 中 x 是正的，+3 也是正的，另外，該生對於去絕對值運法則也有錯誤迷思，她認為只要是正的項，作絕對值的化簡時就不用變號，只要改變負的項即可，所以在同一絕對值內的，若有負項，就只改變負項，其他正的項皆不用變號。

小結

在絕對概念之「無向距離」此向度中，對於具有幾何概念之中高能力學生，

較能準確處理相關問題，並且較有效率，而使用算術概念之學生有一部分是在距離的解讀上產生困難，或是在兩點間的距離與兩數相差之概念有誤解，對於低能力學生而言未知數的解讀是一大困難，即便有基本距離的概念，但卻無法使用在含未知數的絕對值中，例如 S05 的解法圖示 4-2-2

圖 4-2-2　S05(女)解釋題目 9(4)之實際作答圖



第三節　不同能力學生的「長度」概念之資料分析

在數線上，「距離」與「點與點間的長度」同義，而學生對於在數線上移動長度的解讀同樣影響著距離的判斷，本向度「長度」也在判別學生是否具有「無向距離」的概念。從研究中發現，高能力學生在本向度達完全瞭解的程度，而中能力學生在「長度」之概念仍有部分錯誤概念，答對率平均只有 6 成 6，尤其是在第 4 題 D 選項以及第 7 題 G 選項，而低能力學生的錯誤則反應在第 4 題 D 選項及第 7 題 G 選項上，見下表 4-3-1。

表 4-3-1 不同能力學生在長度概念之答對率統計表

距離－長度	數字				符號			平均
	4B	4C	4D	4E	7D	7E	7G	
高能力 (整體答對率)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (0.93)	1 (0.93)	1 (0.86)	1 (0.79)	1 (0.92)
中能力 (整體答對率)	1 (0.73)	0.75 (0.73)	0.25 (0.57)	0.5 (0.62)	1 (0.89)	0.5 (0.73)	0.5 (0.58)	0.66 (0.68)
低能力 (整體答對率)	1 (0.57)	1 (0.50)	0.5 (0.5)	0.5 (0.57)	0.75 (0.43)	0.25 (0.26)	0.25 (0.57)	0.63 (0.46)
綜合表現 (整體答對率)	1 (0.76)	0.92 (0.74)	0.58 (0.67)	0.67 (0.69)	0.92 (0.78)	0.58 (0.65)	0.58 (0.69)	0.76 (0.68)

一、 高能力學生之答題情形

高能力學生在本向度達到完全正確的程度，研究發現高能力學生能明確表達出長度及距離的同義關係，也能將移動後的長度視為位移（無方向性）以下舉高能力學生 S13 為例：

【4B 數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成$\left|11-6\right|$】

S13：如果要從坐標 6 移動到坐標 11 的那個長度就一定是 11 跟 6 的距離，所以我覺得這也可以這樣寫。

【4C. $\left|11-6\right|$等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度】

S13：C，我想說-6 跟-11 的距離是 5，那 11-6 的絕對值也是 5，所以也可以這樣解釋。

【4D $\left|11-6\right|$等於數線上坐標點 11 向左移動 6 單位後與原點的距離】

S13：*D，我覺得說 11-6 的絕對值是 5，然後如果從數線上 11 往左移動到 6，也是到 5，5 到原點的距離也是 5。*

【4E 數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置坐標等於$\left|11-6\right|$】

S13：E 的話，坐標 11 往左移動到 6，那就覺得就是 11-6 那個坐標就是 5。
T：那妳覺得這一整題，妳解題的關鍵是什麼？
S13：我有幾個選項是直接算出它們的值。
T：那其他選項咧？
S13：就是用那個點跟點的距離。

而對於未知數文字符號的表徵，高能力學生也能確實瞭解其涵意，並且能舉出反例，或是將敘述用正確的式子表示之：

【7D $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度】

S13：我覺得|x-5|就很像就在數線上 x 移動到 5 的，就是它們兩點的距離。
T：所以妳的意思是說，移動到什麼位置的長度，跟它們兩個的距離是一樣的嗎？
S13：恩！

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成$\left|x-5\right|$】

S13：我覺得如果從-5 移動到 x 的話應該要是相減，那如果要寫的話，要寫|x-(-5)|。

【7G $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離】

S13：我覺得 x-5 應該是數線上 x 往左移動 5，然後移動 5 之後的那個坐標，與原點的距離就是一樣的。

學生 S26 對於解題能用絕對值距離方式表達移動的長度，與其他訪問學生較為不同的是，該生多採用數字驗算之方法：

T：嗯哼，你覺得你在判斷這個選項的時候，是用到哪一些概念？
S26：沒有甚麼概念，就是<u>移動跟計算的意義。</u>
T：就是計算他的絕對值然後去比對對不對?
S26：對!<u>就是移動了之後的結果跟計算之後的結果是不是一樣的。</u>

【7D $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度】

S26：坐標 x 如果是大於 5 的話，那它減掉 5 的話，算出來是正數，本來就應該是，該怎麼說，就是把 5 到 x 的距離畫出來，再把 x 到 5 的距離畫出來，那如果 x 是正數的話，本來就是 x 到 5 的那段距離，那如果 x 是負數的話，x-5 雖然會是負數，但是加上絕對值就會是正數，那就剛好會是 x 到 0 的距離加上 0 到 5 的距離。

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成$\left|x-5\right|$】

S26：因為，假設 x 坐標隨便代一個數字進去的話，假設是 1 好了，
T：恩！
S26：那 1-5 的話，算出來是 4，但是 1 到-5 的距離是 6，應該是 x-(-5)，才會是我們要的。

二、 中能力學生之答題情形

在研究中發現，對於點與點移動的長度判別，中能力的學生也能瞭解移動的長度與距離同義，但若是將移動的長度及與原點的距離放在一起，學生便會發生錯亂的現象，其中一個原因是學生在未知數的文字符號上發生困難，例如：中能力學生 S28 之訪問過程：

【4B 數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成$\left|11-6\right|$】

S28：B…因為坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度就是等於它們兩個之間的距離所以呢，也可以寫成|11-6|一樣會等於 5。
T：那妳接下來的解題想法是一樣的嗎？
S28：恩！

T：都是用什麼想法或是解題策略？

S28：它們的距離會相同，加上絕對值也會相同。

【7D $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度】

S28：就跟 B 選項的時候一樣，用距離表示。

（B 選項之訪問：

S28：距離…呃…恩…就假如 x 在某一點，就跟 5 的距離會相等，就不管在哪邊跟 5 的距離會相同，所以 x-5 就會等於 5-x。

T： x-5 就會等於 5-x？

S28：的絕對值。）

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成 $|x-5|$】

S28：也一樣。

T：妳有確定一樣嗎?

S28：是阿…(看了一下)…ㄟ…可是，也是有可能的。

T：怎麼說有可能，妳可以寫在旁邊？

S28：ㄟ…不可以能，這裡是-5……我算一下。

S28：因為如果-5 的位置是在這，離-5，如果 x 是負數的話，離-5 就會等於 x+5，或是-5-x，不可能得出 x-5，如果 x 是正數的話，這樣 x 只能減-5，也是 x+5，不可能得出 x-5。

T：所以妳覺得這是錯的。

【7G $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離】

T：G 呢?為什麼認為它錯？

S28：有可能向右，不一定向左。

T：為什麼有可能向右？

S28：恩……喔，假如這個是-5 的點，那 x 不知道哪個點，ㄟ，寫錯了是 5，那跟 x 的距離…不一定是 x-5 與原點的距離。

T：那妳看一下 4D，妳覺得有相似嗎，妳剛剛有解釋說是對的。

S28：喔~~~也跟上面一樣！

S28：我<u>看不懂題目。</u>

T：那為什麼上面哪題妳可以看懂？

S28：<u>因為這個多了一個 x。</u>

T：所以在未知數出現的時候會發生問題？

S28：有的時候會發生問題。

T：為什麼？

S28：<u>因為不知道 x 是什麼，假設會很多。</u>

另一種是學生 S41 在解讀題目時，因為受到前面類似題型的干擾，而做了錯誤的解讀：

【4D $\left|11-6\right|$ 等於數線上坐標點 11 向左移動 6 單位後與原點的距離】

T：第 4 題 D 你沒勾選的原因是什麼？
S41：因為它是 11 到 6 的距離，並不是說 11 移動 6 之後跟原點的距離，ㄟ，是嗎？
T：你再解釋一次？
S41：等一下(看了一下)…ㄟ…好像可以耶！
T：為什麼？
S41：11-6 等於 5 嘛，所以它的確是它到原點的距離，所以應該是正確的。
T：恩！
S41：我好像當初被那個兩個點的那個…
T：被兩個點什麼?
S41：我一開始想成 11 跟 6 的距離，所以那個講法不通，可是我現在想過一遍之後就發覺好像它講的並沒有錯。

【4E 數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置坐標等於 $\left|11-6\right|$】

S41：E 是…向左移動…好像也沒錯。
T：為什麼又突然沒錯？
S41：11-6 它的坐標的確是 5，就等於 11-6 的絕對值。
T：那你當初為什麼沒有勾選呢？
S41：我好像一直被兩個坐標的那個…
T：那個是？
S41：那個兩個坐標的距離就是相減，我那時候就是只是這樣想，所以題目沒有看得很清楚。

【7G $\left|x-5\right|$ 等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離】

T： 你看一下 7G 和 4D 這兩題的敘述，有什麼不同？
S41：恩…問的好像是一樣的。
T：為什麼 7G 和 4D 你的答案不一致？
S41：因為上面我就一直想成距離，這裡我是用代數字，所以就覺得是對的。

至於中能力學生 S32，則是在解讀題目時，認為題目多加一些不必要的條件，如果去掉條件也能成立，或是過度的解讀，自行創造出某種對應之關係，所以認為此選項有問題，因此在訪問過程中更改了自己原本的答案：

【4D $\left|11-6\right|$ 等於數線上坐標點 11 向左移動 6 單位後與原點的距離】

S32：恩…它是等於這裡到這裡的距離沒有錯，那我為什麼沒有勾，我可以補嗎？
T：所以妳現在認為它對了？
S32：對，因為它是可以當作距離來講沒有錯。

【4E 數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置坐標等於 $\left|11-6\right|$】

S32：坐標 11 向左 6 單位後的坐標位置是這個沒錯，但是<u>我覺得用絕對值的表示感覺不太對。</u>
T：為什麼不太對？
S32：因為如果我<u>換個數字像是坐標-11 移動 6 單位後是負的</u>，就不能用絕對值表示。
T：恩，那題目上的這句話是對的嗎？
S32：對阿，<u>只是我覺得應該不用加絕對值就會對了。</u>

【7D $\left|x-5\right|$ 等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度】

S32：然後這個沒有錯，因為它也可以解釋成距離。

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成 $\left|x-5\right|$】

S32：坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成|x-5|，好像可以耶！
T：為什麼可以？
S32：因為-5 移動到 x…ㄟ…不對…是-5-x。
T：所以?
S32：這題答案應該是-x-5 的絕對值。

【7G $\left|x-5\right|$ 等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離】

S32：(念過題目後)恩…跟原點的距離吧…對！
T：妳這裡都把 EFG 的答案改過，是為什麼？
S32：想到的東西不一樣。
T：什麼不一樣？
S32：那時候是直接想 x-5 就好，可是它好像…因為它是-5，沒有注意到負號，如果還要加負的話就變正。

三、 低能力學生之答題情形

在研究中發現，對於點與點移動的長度判別，低能力的學生容易與向左或向右的方向混淆，例如，學生 S05 容易產生『向右為正（用加法），向左為負（用減法）』的移動觀點，因而錯誤解釋移動後的距離，並且容易忽略距離是單指兩數或兩位置間的長度，或兩數間相差的值，因此遇到負數的移動，或是與負數的距離之相關題目，該生便容易產生抗拒，以下是與學生 S05 的訪問內容：

【4B 數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成 $|11-6|$】

S05：是一樣的，只是看到數字會猶豫吧！

【4C. $|11-6|$ 等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度】

S05：<u>我看不懂，只要是代上負號的我通常很多東西都會看不懂。</u>
T：為什麼？
S05：會有點緊張。
T：那妳現在多給妳時間再思考一下。
S05：我覺得不對是因為我覺得它是正的，它是負的，因為-6 到-11 就是要減阿，負 5 阿，它算出來是加 5 不就是正 5 嗎，所以我覺得應該是錯的。
T：所以妳覺得-6 向左移動到-11 應該是負 5，為什麼是負 5?
S05：移動到他那邊，如果加 5 的話就是-1，如果是減 5 的話就是-11。
T：所以是減 5 的意思？
S05：恩恩？？
T：那妳看這個有兩個字叫長度，什麼是長度?
S05：反正就不是負數，就是有小數點、分數都沒關係。
T：所以如果我們只看後面這一句「數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度」妳覺得是什麼？
S05：-5 阿！
T：妳剛剛說長度不是負數。
S05：<u>喔~~是正的，我以為跟理化很像，向西方就是減的感覺。</u>

【4D $|11-6|$ 等於數線上坐標點 11 向左移動 6 單位後與原點的距離】

S05：我那時候覺得 CD 這兩題很像。
T：那妳再看一下。
S05：我比較不清楚與原點的距離。
T：那我們分段看~移動 6 單位後的位置到哪？
S05：5。

T：那 5 跟原點的距離是多少？

S05：5，喔~~我懂了！

【7D $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度】

S05：D 選項之前在學距離的時候說過，兩個東西相減再掛上絕對值就是可以表示它的長度。
T：所以呢?
S05：所以我就給他打勾了。

由此發現該生在處理正數的兩點距離問題時，較有信心答對，且能做正確判斷。

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成$\left|x-5\right|$】

S05：ㄟ………
T：妳剛剛說距離是怎麼算的？
S05：喔…這裡是不是要寫成 x-(-5)變成 x+5 阿？是嗎？
T：妳覺得呢？
S05：我在想一下喔…對阿~所以這裡少一個負號。
T： 所以這題應該要改成什麼？
S05：x-(-5)再掛上絕對值。

當遇到文字複雜一些，且多了需要分段思考的部分時，該生又發生混淆的狀況：

【7G $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離】

S05：…喔…又來了!
S05：…恩…這個應該是說它減 5 個單位到那個東西的時候，那個東西再和原點的那個距離。
T：對！
S05：所以這個應該不是對的！
T：為什麼?
S05：因為它移動 5 個單位不是它跟原點的距離阿，所以一定不會是這樣子，對嗎？
T： x 向左移動 5 個單位，完了之後再和原點取距離。
S05：恩！
T：就會是絕對值 x-5 這樣對嗎？
S05：不對阿，它如果是 x-5 的話，應該是 x-5 跟 0 中間相差的那個數字吧！
T：剛剛我們第 4 題說向左移動 6 之後，中間的距離不就是可以相減再掛上絕對值嗎？

S05：恩恩！
T：所以 x 也向左移動 5 阿！
S05：恩恩！
T：所以我是不是也能夠 x-5 再加絕對值？
S05：恩恩！
T：那這個點是不是跟原點的距離一樣？
S05：那我可以畫一下嗎？
T：可以阿。
S05：喔…太小了…所以說我現在在這邊，等於在數線上某一點坐標 x，假設 x 等於 9 可以嗎?
T：好阿！
S05：然後向左移動 5，12345 這邊阿。
T：恩！
S05：就是它移動後這邊，所以說這邊就是它跟這邊的距離喔？
T：對阿！
S05：喔…我懂了！
T：這是不是一樣的？
S05：所以這是對的。

低能力學生 S30 在給予充預的時間時，能正確使用移動的長度就等於距離的概念，因此在訪問過程中，該生的反應時間較長，（研究者將學生思考之空白時間以…表示），例如：

【4B 數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成 $|11-6|$】

S30：向右，我為什麼會寫這個阿？
T：想一下。
S30：呃…因為我習慣大數減小數，如果算出來是負的之後再加負的，不過，長度應該也沒有負的吧！

【7D $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度】

S30：因為長度就是這個數減那個數阿！
T：我問一下，長度跟距離有關連嗎？
S30：好像有耶，長度指的是 A 點跟 B 點的距離。

但若是遇到負數之加減運算時，如同前一小節的結果，該生在正負數及加減運算符號得混淆，以至於所有相關題目均無法做正確計算。

低能力學生 S07 及 S01 在移動的長度上有錯誤概念，兩者皆認為題目有「向左移動」故最後的答案就應該要是負數，而忽略重點是兩點間的長度，其原因有可能是在文句上解讀有困難，或是該生認為只要出現某些關鍵字答案必定與它有關。第 4 題 C 選項此 2 位學生之訪問內容如下：

【4C. $|11-6|$ 等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度】

S01：-6 移到-11 的話…是…恩？
T：怎麼了？
S01：跟第一題一樣，差不多。
T：所以你覺得？
S01：ㄟ…好像是對的…等一下等一下…對的！
T：你那時候為什麼沒有選？
S01：不知道耶，我不知道要不要看正負號。
T：正負號指的是什麼？
S01：<u>-6 移到-11 方向是負的阿！</u>
T：恩？
S01：然後 11-6 再加絕對值會變正的。

【4C. $|11-6|$ 等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度】

T：ok~那 C 選項你為什麼不勾選？
S07：因為它向左，應該是負的。
T：而不是題目寫的式子？
S07：對！
T：那如果我們現在只看「數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度」你會如何回答？
S07：……-5 嗎？ -5！
T：移動的長度是多少？
S07：恩…5 嗎？
T：那再看|11-6|是多少？
S07：5！
T：所以這個選項對嗎？
S07：好像對。
T：為什麼哪時候覺得是錯的？
S07：因為好像向左就應該要負的。

此外，該生對於含未知數之文字符號無法瞭解涵義，因此在不知道未知數所代表為何數時，對於題目無法使用正確的策略：

【7D $|x-5|$等於數線上某一點坐標為x移動到坐標 5 的長度】

S07：……看不懂。

T：你剛剛前面移動有畫過圖，你可不可以再畫一次？

S07：………

T：有困難嗎？困難在哪？

S07：x-5…絕對值。

T：我問你，什麼叫長度？

S07：長度喔？

T：長度跟距離一樣嗎？

S07：……

T：移動到哪裡的長度，跟它們的距離一樣嗎？

S07：…一樣。

T：那所以這句話可不可以改變想法？

S07：……

T：坐標 x 移動到坐標 5 的長度改成 x 到 5 的距離，可不可以？

S07：可以呀！

T：那回來這裡想 x 到 5 的距離，可不可以用絕對值寫？

S07：x…可以。

T：怎麼寫？

S07：…5-x。

T：5-x？

S07：…的絕對值。

T：還有別的寫法嗎？

S07：x-5 的絕對值。

T：所以這題？

S07：是對的。

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為x的長度可以寫成$|x-5|$】

S07：-5-x…喔！

T：那為什麼那時候沒勾？

S07：看不懂。

【7G $|x-5|$等於數線上某一點坐標為x向左移動 5 個單位後與原點的距離】

T：那 G 選項呢?

S07：…恩…不知道。

最後一位低能力學生S01在未知數之文字符號瞭解較其他3位同能力的學生好，該生能自行舉出具體的數字代入題目中檢視是否正確，並且也能與其他類似題目作比較，說明類似的概念，但在文字解讀時，容易讀錯題目，直接套用其他類似題目條件，不過，經過提問後該生能發覺解讀錯誤之處：

【7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成 $|x-5|$】

S01：也一樣，講的差不多。
T：有一樣嗎？
S01：………呃。
T：怎麼突然停住？
S01：第 4 題是 x-5，第 5 題是 x+(-5)吧，所以差 x。
T：你說的是 x+(-5)？
S01：對阿！
T：那 x+(-5) 跟 x-5 不是一樣的？
S01：對阿！
S01：<u>等一下…好像錯了…呃…這裡應該錯了吧！</u>
T：為什麼錯了？
S01：假如坐標 x 是 3 的話，3-5 等於 2，然後 2 出絕對值等於 2，3+5 等於 8，代數字進去算。
T：3+5 是哪來的？
S01：-5 跟 3 的距離是 8。

【7G $|x-5|$ 等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離】

S01：原點跟 5 的距離是 5 個單位，如果 x 是負的…就…等下！
T：恩。
S01：如果 x 是負的，不是原點的距離，是 <u>x 移動 5 跟原點的距離…是是是…所以第 7 題是對的吧！</u>
T：為什麼突然就覺得它是對的？
S01：沒看清楚題目。

第四節 不同能力學生的「正負數運算」概念之資料分析

對於絕對值的「方向」向度，研究者將其細分為「正負數運算」及「去絕對值運算法則」，在「正負數運算」概念試題裡，中、高能力的學生在解決相關問題時皆有超過7成的學生能確實回答出正確解答，平均表現都有8成以上的正確率，而唯一答錯第5題之中能力學生及唯一答錯第8題之高能力學生，純屬失誤，而非概念上出現問題（詳見各能力學生之答題表現）。

由研究中發現，低能力學生雖在第一部分開放式問題中，皆以「無論正負數的絕對值一定為正數」之概念闡述絕對值的定義，但是在實際運用此算術概念時，生明顯表現出困難，尤其在此向度中含未知數相關之試題更為顯著，例如第8題的各小題中，多數低能力學生僅能求出一個答案，不同能力學生在正負數運算概念之答對率統計，見下表 4-4-1。

表 4-4-1 不同能力學生在正負數運算概念之答對率統計表

方向－正負數運算	數字		符號				平均
	4G	5	8(1)	8(2)	8(3)	8(4)	
高能力 (整體答對率)	0.75 (0.93)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (0.93)	0.75 (0.86)	0.92 (0.95)
中能力 (整體答對率)	0.75 (0.77)	0.75 (0.93)	1 (0.96)	1 (0.77)	1 (0.96)	1 (0.89)	0.92 (0.88)
低能力 (整體答對率)	0.75 (0.65)	1 (0.79)	0.75 (0.79)	0.25 (0.36)	0 (0.36)	0 (0.29)	0.46 (0.54)
綜合表現 (整體答對率)	0.75 (0.78)	0.92 (0.91)	0.92 (0.93)	0.75 (0.72)	0.67 (0.80)	0.58 (0.72)	0.83 (0.81)

一、 高能力學生之答題情形

整體來說，高能力學生在處理這6題「正負數運算」概念試題皆能有效且正確解釋各題，所採取之策略以高能力學生 S13 為例，該生選擇使用絕對值之算術概念－「無論正負數的絕對值一定為正數」，對各項絕對值進行計算，唯一錯誤的第8題第4小題，屬於失誤，而非概念錯誤，其訪問內容如下：

【4G. $|11-6|=|6-11|=-(6-11)$】

S13：G，因為 11-6 跟 6-11 加了絕對值之後出來都一樣，然後-(6-11)也是 5，我也覺得是對的。

【8(1) $|x|=2$，$x=$________。】

S13：絕對值要是 2 的話，絕對值裡面就是正 2 或負 2。

【8(2) $|x|+4=0$，$x=$________。】

S13：因為絕對值出來的數不會有負的，所以這題無解。

【8(3) $|x+3|=4$，$x=$________。】

S13：絕對值 x+3 要是 4 的話，絕對值裡面就是正 4 或負 4。

【8(4) $|x-5|=1$，$x=$________。】

S13：絕對值 x-5 要是 1 的話，絕對值裡面就是正 1 或負 1。
T：恩！
S13：然後-1 找不到。
T：找不到？
S13：ㄟ，有ㄟ，那個時候我好像有點想錯…我也不知道那時候怎麼了？
T：是為什麼？
S13：好像有點緊張。
T：喔，那妳看看未知數會緊張覺得很難嗎？
S13：還好。

而另一位高能力學生 S34 在解釋此向度概念時，與學生 S13 策略不同，該生使用去絕對值的運算法則解釋，雖基本中心概念同為「無論正負數的絕對值一定為正數」，但其策略相異：

T：第 8 題妳解題的策略是什麼？
S34：把絕對值直接把可能性用出來，可能是正的可能是負的，像是絕對值 x-5 等於 1，那 x-5 是正的就是 x-5=1，如果是負的，就-(x-5)=1，再把它推出來。

至於高能力學生 S48 在同一題的想法，是逆操作絕對值之「與原點的距離」具方向概念，來解決問題：

【8(1) $|x|=2$，$x=$________。】

S 48：與 0 之前的距離是 2，所以是 2 和負 2。

【8(2) $|x|+4=0$，$x=$________。】

S48：第 2 題絕對無解，因為 0 或正數加上正數不可能是 0。

而該生對於第 4 題的題目敘述中第三個式子產生疑問，原因來自過度的解讀，自行創造出某種對應之關係：

【4G. $|11-6|=|6-11|=-(6-11)$】

S48：G……好像也對…但是又覺得怪怪的。
T：哪裡怪？
S48：數字算出來是對的，但是它好像只能用…就是如果改成-(11-6)那就不行。
T：可是題目現在是這樣寫嗎？
S48：不是阿，但是我心裡覺得怪怪的。
T：所以這樣寫是對的嗎？
S48：對阿？

高能力學生 S26 在解決本向度問題時，明確地表示出絕對值的幾何概念，並且能使用算術方式驗算自己的想法，在第 8 題的部分也採取方向概念－逆操作絕對值之「與原點的距離」作為解題策略：

【4G. $|11-6|=|6-11|=-(6-11)$】

S26：11-6 的絕對值是 5，6-11 是-5，絕對值後也是 5，那 6-11 是-5 可是加一個負號是 5，所以三個答案都是 5。
T：嗯哼，你覺得你在判斷這個選項的時候，是用到哪一些概念？
S26：沒有甚麼概念，就是移動跟計算的意義。
T：就是計算他的絕對值然後去比對對不對？
S26：對!就是移動了之後的結果跟計算之後的結果是不是一樣的。

【8(1) $|x|=2$，$x=$________。】

S26：就是正 2 跟負 2 的絕對值都是 2，就是到原點的距離是一樣的。
T：那你是用距離看的嗎？

【8(2) $|x|+4=0$，$x=$________。】

S26：就是，老師就是教絕對值的時候，就是因為絕對值沒有負數，所以用距離來解釋的，然後因為某數的絕對值應該大於 0 或是等於 0，所以加上一個正數後，不可能等於 0。

二、 中能力學生之答題情形

中能力學生 S28 皆以算術概念進行解題，再進一步詢問能否使用距離概念解題，該生之答題情形反應出該生具有絕對值距離之逆操作能力，能在數線上表示距離相同但方向相反之兩數；其中第 5 題的錯誤，該生表示是因為看錯題目，與該生之訪問內容如下：

【4G. $|11-6|=|6-11|=-(6-11)$】

T：G 呢?妳是怎麼判斷的？
S28：我就把三個都算出來，三個同樣都等於 5。

【5. $|9-20|=$__________。】

T：第 5 題為什麼寫錯？
S28：我看錯了。

【8(1) $|x|=2$，$x=$__________。】

S28：恩，這個，它說 x 的絕對值是 2，因為只有 x，所以 x 可以代-2 等於 2 也可以代 2 也等於 2，所以 x 有兩種可能。

【8(2) $|x|+4=0$，$x=$__________。】

S28：再來這個，怎麼解都不會等於 0，因為後面有加 4。

【8(3) $|x+3|=4$，$x=$__________。】

S28：再來有兩種可能，…恩…這題我好像是代數字去算。
T：怎麼代？
S28：直覺反應。
T：怎樣的直覺反應？
S28：就是 x+3=4，就是 1 或-7，恩，就是一定要絕對值裡面的數，算出來一定要是 4 或-4。
T：所以就是絕對值裡面的數要是 4 或-4？
S28：恩恩！

【8(4) $|x-5|=1$，$x=$__________。】

T：妳後面哪題也是這樣做的嗎？
S28：對！
T：那妳可以用距離來解題嗎？
S28：可以。

T：怎麼解釋？

S28：畫數線出來，x 有可能是正數或負數，然後這個，它要求出的是 1，那 x-5 要等於 1 的話就是前面一格數，它跟它的距離就會等於 1，就是 6 跟 4，因為兩個跟 5 的距離都是 1。

反觀中能力學生 S41，在第 8 題各小題中，雖然全部答對，但請該生使用距離解釋之，該生反應無法與距離作連結：

T：第 8 題的部分我看你都是用解方程式的方法?那你剛剛有講到距離，那有沒有可能用與上面不同的方法再解釋一次？

S41：你說這些題目。

T：對呀！

S41：感覺好像有，搞不好可以用圖形……想不太到。

中能力學生 S32 與另一位高能力學生 S34 同樣使用去絕對值的運算法則解釋第 8 題，且該生反應經過練習，可以很快建立解題策略：

S32：根據絕對值裡面的數，不管是正還是負出來的一定是正數，所以出來要等於 2，裡面就是本來的它或是加負號的它。

T：這個方式是妳自己想的嗎？

S32：因為之前有寫過，寫一兩題就可以反射寫。

T：妳覺得未知數對妳覺得困難嗎？

S32：要想一下。

至於第 4 位中能力學生 S45，在其他題表現與同能力學生 S28 雷同，但在第 4 題 G 選項，該生直覺反應一個括號外有一個負號時，此數值即為負數：

【4G. $|11-6|=|6-11|=-(6-11)$】

S45：喔…這錯得蠻誇張的吧！

T：為什麼？

S45：絕對值出來是正的…ㄟ…是對的…喔！

T：你發現什麼？

S45：我本來以為乍看之下-(6-11)是負的！

三、 低能力學生之答題情形

低能力學生在本向度皆以算術概念作為解題策略，由研究發現，第 4 題 G 選項此能力學生解釋方式均相同，以試題中學生 S30 為例：

【4G. $|11-6|=|6-11|=-(6-11)$】

S30：我就用算的阿~這個等於 5，這個等於 5，但是<u>這個不是絕對值</u>…ㄟ…我好像算錯了。
T：算錯了嗎？
S30：恩…我算一下。
T：好。
S30：不對.它是正的，我算錯了，這是對的。
T：為什麼你當初覺得不對？
S30：恩…我看到最後一個地方直覺是負的。

該生在此題答錯的原因，是在看到一個括號前有一個負號存在，因此直覺認為是負數，這與中能力學生 S45 犯了相同的錯誤。

研究中發現，低能力學生在絕對值算術概念不完全理解，常誤用「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」這樣的概念，產生以偏概全之錯誤經驗連結，所以無法寫出完整答案，再加上未知數符號運算的干擾，尤其是絕對值內含兩項以上的式子時，因此對於自己所得出的答案沒有信心，以至於不敢寫上「無解」這類不是一般數字的答案，或是任意填上一個自認為最接近的答案。：

【8(2) $|x|+4=0$，$x=$________。】

T：那第 8 題第 2 小題妳寫未知，是為什麼？
S05：因為我覺得不會有負號出現阿！
T：所以 x 有解嗎？
S05：應該無解吧！
T：妳都說無解了。
S05：對阿！
T：所以就寫無解阿！
S05：不能寫未知喔？
T：未知好像就是說我不知道的意思阿！
S05：有耶！

【$8(2)|x|+4=0$，$x=$__________。】

T：好，那第 2 小題，我看妳有圈起來，為什麼？

S30：因為我覺得怪怪的不會寫？

T：哪裡怪？

S30：一個正的加 4 不會是 0 阿！

T：恩。

S30：所以我想不到答案是什麼？

T：那妳為什麼寫 4？

S30：因為妳說盡量不要空白。

T：妳記得我們以前有學過如果沒有正確的合理答案可以怎麼寫？

S30：無解喔？

T：對阿，妳怎麼沒想到？

S30：我怎麼會沒有想到咧，對阿，我也想問自己。

【$8(2)|x|+4=0$，$x=$__________。】

S01：因為要負的.所以要在絕對值外加負號。

T：你覺得你所寫的-|4|值是多少？

S01：-4。

T：所以 x 是-4 嗎？

S01：不是阿！

T：那怎麼辦?如果是這樣你再算一次會寫什麼答案？

S01：不知道。

T：為什麼不知道？

S01：不知道。

T：這時候|x|要等於多少？

S01：-4 阿！

T：你找的到|x|=-4 嗎？

S01：找不到阿！

T：所以 x 有解嗎？

S01：沒有阿！

T：所以 x 怎麼寫？

S01：就無解阿！

T：嗯哼，那時候怎麼沒有寫無解？

S01：我有想到阿，可是這個答案怪怪的。

另外，低能力學生直覺能最快找到符合絕對值方程式答案的，多半是絕對值內為正數的解。另一方面，研究中，低能力學生無法使用絕對值幾何之距離的概

念處理這類的題型。例如，學生 S05 在解釋第 8 題第 1 小題$|x|=2$，很快能反應絕對值內為正負 2，但因該生認為「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」，所以在解絕對值內含兩項以上式子的方程式時，誤認為 x 的解必然是一正數及一負數，因此在用嘗試錯誤求解的時候，找不到另一個答案，與該生訪問內容如下：

【8(3) $|x+3|=4$， x=________。】

T：第 3 題妳的答案只有 1 個，妳覺得還有別的嗎？
S05：恩…我覺得我很難想到第二個答案。
T：為什麼…那妳為什麼第一題會有兩個答案？
S05：<u>因為那個比較簡單，這個有加 3，然後我就開始亂七八糟了，只有單一個數字的時候，我會覺得是最簡單。</u>
T：恩！
S05：然後這個的話我可能覺得它又要被換來換去，換到不同的位置去，算出來的答案可能又不一樣之類的。
T：恩。
S05：所以有時候我覺得太麻煩，我就跳過了。
T：恩，那如果我們多一點時間看，慢慢想，妳覺得還有答案嗎？
S05：喔，好像有耶！
T：好像有什麼答案？
S05：因為 x 我把它代…我想一下，-7，-7 出來以後-4，因為-7+3 變成-4，絕對值出來之後就變成正 4。
T：所以妳少考慮？
S05：負號！
T：為什麼？
S05：恩…就直接想到什麼我就寫什麼，然後我都就是只要想出一個答案就覺得很好了，就直接寫下一題，就會忽略掉。

【8(4) $|x-5|=1$， x=________。】

T：恩，那妳再看第 4 題呢？
S05：我想一下喔，這兩個就不行了耶，因為如果<u>x 代負它數字就會變大，喔是變更小，就像如果我代-7 然後就變成-12，就更小，就不會對。</u>
T：為什麼要代-7？
S05：因為<u>有一個 6 是正的，另一個我就代負的。</u>
T：還有沒有別的數也可以讓 x-5 的絕對值變成 1？
S05：呃…應該沒有了吧。
T：那剛剛回到前面那題，我們把絕對值內的這堆東西遮住。

S05：恩！
T：絕對值多少等於4？
S05：絕對值正負4 都會等於4。
T：所以這一堆遮住的是正負4，因此x+3=4，跟x+3=-4。
S05：恩恩！
T：那如果用一樣的想法想第4 題呢？
S05：恩，那如果x-5=1 跟x-5=-1。
T：那妳寫寫看。
S05：…(在紙上算)…好了…喔！
T：有發現什麼了嗎？
S05：就是有兩個答案！
T：還有嗎？
S05：ㄟ…<u>答案不一定是那個一正一負。</u>

而低能力學生S30 在絕對值概念說明時，提出：「絕對值以內任何數都是正數」，在對於其它直述問題的解釋時，該生能正確使用絕對值之算術定義，但對於逆操作解絕對值內的值時，就看出該生在絕對值的定義上發生問題：

【5. $|9-20|=$__________。】

S30：我不太會用拆的.所以我都算裡面數字，再加絕對值。
T：好！
S30：所以9-20=-11，再加負號，所以是正11。

【8(1) $|x|=2$，$x=$__________。】

T：第8 題都只有一個答案為什麼？
S30：<u>在絕對值內任何數為正數。</u>
T：那有沒有負數的絕對值會是2？
S30：呃…有… -2！
T：恩！
S30：對，不管是正的還是負的絕對值出來是正的…喔…對耶！
T：那妳後面兩題還會有其它答案嗎？
S30：好像不只一個耶！
T：那妳覺得還有什麼答案？
S30：-7！
T：-7 恩，那時候為什麼沒寫？
S30：為什麼咧？我也不知道！

T：還有嗎？
S30：應該就這樣，恩！
T：另一題呢？還有別的答案嗎？
S30：…4，因為4-5=-1，絕對值之後會等於1！

當低能力學生 S07 在解釋第 8 題第 1 小題$|x|=2$，能迅速答出絕對值內為正負 2，然而在後續研究中發現，該生誤用「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」這樣的概念，產生以偏概全之錯誤經驗連結，因此學生 S05 在解絕對值內含兩項以上式子的方程式時，誤認為 x 的解就一定是正負某數：

【8(2)$|x|+4=0$，x=________。】

T：那第8題為什麼你答案x是-4？
S07：因為不知道要寫什麼?？算不出來阿？
T：為什麼？
S07：他出來一定是正的阿，然後又加了一個4，所以不可能是0，怪怪的。
T：那你答案寫-4代進入答案會對嗎？
S07：不對阿！
T：不對？
S07：代什麼數都不對吧！
T：代什麼數都不對的時候x應該就沒有解吧？你記得我們有教過解不出來就可以寫無解嗎？
S07：不記得！

【8(3)$|x+3|=4$，x=________。】

T：第3小題為什麼答案只有一個(學生答案是1)，而上面那題有兩個？
S07：<u>因為-1的話就變成2。</u>
T：那有別的答案嗎？
S07：沒有吧！
T：為什麼要代-1？
S07：<u>1+3=4，所以是正負1，再代-1，試試看就不對阿！</u>
T：那絕對值裡面的x一定要是正的嗎？
S07：…………恩……可以是負的。
T：多少？
S07：x可以是-7。
T：為什麼突然出現這個答案？
S07：因為算出來還是會變正的阿！
T：所以你x就多了一個答案-7？

S07：恩！
T：只有這兩個嗎？
S07：沒有了。

【$8(4)\ |x-5|=1$，$x=$________。】

S07：第 4 題，<u>6-5=1 呀！</u>
T： 6-5=1，還有別的答案嗎？
S07：沒了。
T：那上一題你有發現絕對值裡可以是負的，這題呢？
S07：負的就不會是 1 啦~對阿~會算出別的答案。
T：什麼別的答案？
S07：<u>-6 代進去就變成-11，就變成 11。</u>
T：為什麼代-6？
S07：…………(久久無法回答)。
T：你剛剛上一題答案多了-7，那你不是用-1 代的，那有沒有可能這題也一樣，雖然其中一個答案是 6，但是不代-6 也可以讓絕對值出來也是 1？
S07：4。
T：怎麼來的？
S07：4-5 是-1，然後再加絕對值就變成正 1。
T：為什麼當時沒發現這個答案？
S07：………。
T：是因為你先找出一個答案 x-5=1，x=6，然後就代 x 為正負-6 嗎？那你現在覺得這樣的想法對嗎？
S07：不對！
T：那你覺得怎樣才會是對的？
S07： 恩…算出來要是正的幾跟負的幾。
T：正的幾跟負的幾指的是什麼？
S07：正的…正的 1，跟負的 1。

最後一位低能力學生 S01 在解絕對值方程式明顯使用嘗試錯誤的方法進行解題，因此在第 8 題答案中，有的是出現絕對值內為正數之解，有的是出現絕對值內為負數之解：

【$8(3)\ |x+3|=4$，$x=$________。】

S01：x+3 就一定要等於 4，就 1 阿，然後不可能是-1 阿，-1+3 就變成 2 了。
S01：…ㄟ…也有可能是-7，因為-7+3=-4，就 4 了。

T：為什麼要代-1？
S01：因為就代代看阿！
T：為什麼不代-2？
S01：因為代-2 就不會是 4 啦！

【8(4) $|x-5|=1$，$x=$_________。】

S01：x-5 一定要是 1，4 減 5，-1，出絕對值就是 1，也有可能是 6，6-5 是 1 出來也是 1。
T：那你為什麼當初沒有寫 6 這個答案？
S01：忘記了！

小結

在本向度正負數運算中，高能力學生能正確使用算術概念解題，同時亦能活用幾何觀點，相較之下，中低能力之學生在此幾何與算術概念間轉換困難。錯誤概念中有 2 名學生誤認為當一個括號外有一個負號時，此數值即為負數；低能力學生更是誤用絕對值之算術定義，在逆操作絕對值運算時發生以偏概全的現象。

第五節 不同能力學生的「去絕對值運算」概念之資料分析

因本向度設計去絕對值運算相關試題時，考量學生在具體數字運算偏向以嘗試錯誤，用湊的方式解題，因此題型較多為未知數符號之運算，故在研究顯示，中能力的學生對於文字符號的運用及理解程度比高能力學生弱，而低能力學生甚至是發生無法作答的現象。整體表現中高能力之學生在第 6 題第 1 小題、第 9 題第 1 小題、答對率高於 9 成；此外，第 7 題 A 選項能答對之學生在正式施測的全體表現中只有 2 成，在訪問中發生錯誤的學生皆表示因為「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」，所以解題當下做了錯誤判斷，某些學生在提問之下多數能發現忽略絕對值可以是 0 的事實。不同能力學生在去絕對值運算概念之答對率統計表，見下頁表 4-5-1。

表 4-5-1 不同能力學生在去絕對值運算概念之答對率統計表

	數字	符號						平均
	6(1)	6(2)	7A	7C	9(1)	9(2)	9(3)	
高能力 (整體答對率)	1 (1)	1 (0.93)	0.5 (0.29)	1 (0.86)	1 (1)	1 (0.93)	1 (0.86)	0.93 (0.84)
中能力 (整體答對率)	1 (0.96)	0.75 (0.62)	0 (0.15)	1 (0.89)	1 (0.92)	0.5 (0.54)	0.25 (0.42)	0.64 (0.64)
低能力 (整體答對率)	0.75 (0.64)	0.25 (0.14)	0.25 (0.21)	0.75 (0.79)	0.75 (0.57)	0 (0.14)	0 (0.14)	0.39 (0.38)
綜合表現 (整體答對率)	0.92 (0.89)	0.67 (0.57)	0.25 (0.20)	0.92 (0.85)	0.92 (0.85)	0.5 (0.53)	0.42 (0.46)	0.65 (0.62)

一、　高能力學生之答題情形

研究發現，高能力學生皆能正確處理去絕對值運算，解題策略皆是先判斷絕對值內是正數還是負數，若是正數則可以去掉絕對值，若是負數就要做變號處理，至於第 7 題 A 選項，高能力學生 S34、S48 能正確判斷出絕對值為非負數，而在訪問中學生 S26 能自行發現忽略絕對值可以是 0，而 0 非正數，學生 S13 則是在提問下發覺忽略非負數。以下以 S13 為例，訪問內容如下：

【6(1) $|7-12|=(\square 7)-(\square 12)=$________。】

T：第 6 題妳是怎麼判斷填入正負的？
S13：因為|7-12|=5，那它出來一定要是正的阿，所以如果只寫+7-12 是負的，所以要加負號。
T：所以妳是先判斷絕對值內的數，再去拆解嗎？
S13：對！
T：所以第 2 小題是一樣的方式嗎？
S13：是！

【7A. $|x-5|$ 一定是正數】

S13：<u>不管 x 是正是負，減 5 之後加了絕對值一定是正數。</u>
T：有沒有可能某數的絕對值出來不是正數？
S13：ㄟ...0。
T：0？

S13：如果它們相減等於 0 的話。
T：那 0 是正數還負數？
S13：都不是。
T：所以這句話說|x-5|一定是正數正確嗎？
S13：不正確。
T：那時候怎麼沒想到？
S13：就沒想到 0。

【7C.$|x-5|=1$】

S13：因為如果|x-5|要等於 1 的話，那 x 就一定要等於 6，但是他沒有說 x 一定等於 6。

學生 S34 在此向度中概念十分完整，能明確指出錯誤部分，並且充分瞭解未知數的表徵及正負判斷：

【7A.$|x-5|$一定是正數】

S34：恩，A 選項，恩…喔，因為它有可能是 0。

【7C.$|x-5|=1$】

S34：因為不一定是 1。

【9(1)假設 k 為正整數，那$|k|$可以化簡為______________。】

【9(2)假設 k 為負整數，那$|k|$可以化簡為______________。】

S34：喔，如果 k 是正數，它就是正的，就可以去絕對值就是 k，那如果是負數的話，那答案就是，去絕對值之後應該要，前面要加一個負，那就是-k。

【9(3)假設 k 為任意數，那$|k|$可以化簡為______________。】

S34：那第 3 題……ㄟ…老師…那如果是 0 的話，我要寫出正負 0 嗎？
T：妳覺得 0 應該是正數還是負數？
S34：0 喔~我覺得都不是。
T：所以我寫+0 或-0 的時候，會不會有不同？
S34：不會。
T：所以當我寫+0 的時候就符合 k，-0 的時候也符合 k。
S34：喔…那這題我是想任意數有可能是正的或是負的，所以我寫正負 k。

該生會特別注意當 0 出現的情況，並提出討論，但是在牽扯到未知數之表示時，對於 0 應該放在正 k 或是負 k 產生疑惑。

第 9 題的第 3 小題在全部施測學生的答題情況中，高能力學生 S48 答題與其他所有人不同，能回答出正確答案者多是以 $\pm k$ 表示，而該生的答案則是 $\sqrt{k^2}$ ，其訪問內容如下：

【9(3)假設 k 為任意數，那 $|k|$ 可以化簡為______________。】

S48：這個實數可能是正或負或 0，但是如果平方的話就是變成正的，然後之後再開根號。

由此發現，該生能完整分辨實數分類，並且活用平方的概念將絕對值化簡為其它式子。

二、 中能力學生之答題情形

研究發現，中能力學生處理本題型之過程裡，皆能想到使用去絕對值運算，但是對於未知數的正負判讀易產生錯誤。第 7 題 A 選項，在訪問中發生錯誤的學生皆表示因為「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」，所以解題當下做了錯誤判斷，某些學生在提問之下能發現忽略 0 的絕對值是非負數。

以 S45 為例，該生在具體數字去絕對值運算中，能以距離之觀點進行說明，並且對於某些題目能提出錯誤原因，但是在第 9 題第 2 小題誤用未知數之表徵，訪問內容如下：

【6(1) $|7-12|=(\square 7)-(\square 12)=$________。】

T：第 6 題你是怎麼填正負的？

S45：它等式前面的是 7 到 12 的距離等於 5，要-7 跟-12 的距離才會是 5。

【6(2)已知 x 為大於 3 的任意數，則 $|x-1|=(\square x)-(\square 1)=$_____________。】

S45：因為 x>3，所以脫掉絕對值的話就直接是正的，不用變號。

【7A. $|x-5|$ 一定是正數】

S45：絕對值 x-5 就是代表距離，距離沒有負的嘛，就是一定是正數。

【7C. $|x-5|=1$】

S45：不選 C 的原因是 x 可以是任意數，不一定會等於 1。

【9(1)假設 k 為正整數，那 $|k|$ 可以化簡為______________。】

T：第 9 題你有做過嗎？
S45：有，好像老師教過，也在講義寫過。
T：那你怎麼想的？
S45：第 1 題，正整數的話出來不會變號，一樣是正整數。

【9(2)假設 k 為負整數，那 $|k|$ 可以化簡為______________。】

S45：再來如果是 k 為負整數的話，那絕對值脫掉就要變成正數的，就不是原本的 k，要多上一個負號，才可以讓它變成原來的 k 為負整數，那個怎麼辦。
T：你解釋一下阿?為什麼寫-(-k)？
S45：呃…我好像只想，如果是正的數 k 的話，我是用代的。
T：怎麼代的？
S45：如果把正整數 k 帶進去的話，把它冠上一個負號就變成負的，再給它一個負號就變成正 k，然後，那如果它是負整數，本身就是負的，代進去的話就是正 k 再給它一個負號就變成-k。
T：可是這樣|k|出來不是要正數嗎？
S45：恩！
T：那你剛剛那樣代的話都是正數嗎？你說負數，不就矛盾。
S45：那是我想錯了，<u>我把這個 k 想成出來的 k，不是裡面的 k！</u>

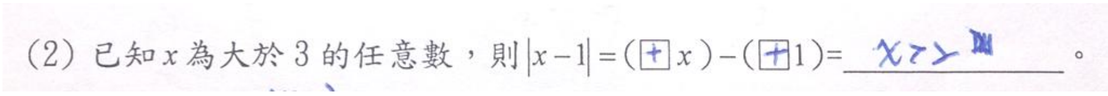
學生 S28 亦能經由提問發現忽略 0 的絕對值為非負數，但在未知數之正負表徵上無法正確表達，與 S45 相同，因此在第 9 題誤用未知數之表徵，將答案都填上「k (k 皆為正整數)或是(k 皆為正數)」，其訪問內容如下：

【9(1)假設 k 為正整數，那 $|k|$ 可以化簡為______________。】

T：第 9 題，為什麼妳的答案都是 k，然後後面都有括號寫正整數？
S28：因為絕對值可以讓負數變成正數。
T：可是妳這裡寫的 k 跟前面的 k 有沒有一樣？
S28：k 值是一樣的，只不過它是正整數。
T：所以應該要怎麼表示，才能用 k 這個符號表是正整數？
S28：負 k………喔~~那第 3 小題應該要寫正負 k。

中能力學生 S41 對於化簡一詞解釋，認為若是題目條件有給予不等式範圍，則就應同樣化簡出以不等號表示之範圍，並且在未知數的使用上發生困難，重複使用與題目相同之符號，而產生混淆，其訪問內容如下：

圖 4-5-1　S41(男)解決題目 6(2)實際作答圖


(2) 已知 x 為大於 3 的任意數，則 $|x-1|=(\boxed{+}x)-(\boxed{+}1)=$ ________ 。

T：你在第六題的第二小題，答案為什麼要寫 $x>2$ 呢？

S41：因為它就是說 x 大於 3 的任意數，那 $x-1$ 就是正數，絕對值就可以去掉，那它既然是 x-1 的話就代表說減 1 就是範圍減 1，就變小，就變成 x 大於 2。

T：這樣題目的 x 跟你寫的 x ？

S41：不一樣，這邊的是 x 大於 3，這邊的是 x 大於 2。

T：那你剛說題目是 x 大於 3，這邊你答案寫出來的是 x 大於 2，它們的含意不一樣？

S41：對阿~因為這裡的含意是所有的任意數都減掉 1…恩…好像不能說用一樣的符號，是嗎？

T：所以你覺得這裡的符號應該要怎麼表示會比較適當？

S41：恩…應該說…$x-1$ 大於 2 比較好…對…阿…要同時相減，要 $x-1$ 大於 2。

該生於【9(4)已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為________。】也發生相同的問題：

T：第 4 小題你化簡出一個範圍，為什麼你這樣寫？

S41：這跟前面那題一樣耶，我把符號重複使用了。

T：那如果是這樣的話，你可以再算一次嗎？

S41：就，它說 x+3，……類似這種(在紙上運算)…可是…怪怪的。

T：哪裡怪？

S41：因為加起來 x 就突然消掉了...就變成 13，8<13<18，單純變成一個範圍。

T：你覺得什麼是化簡？

S41：化簡感覺就是把它精簡化，我好像沒有。

T：那我們來看一下，第 6 題和第 9 題都是要處理化簡問題，你在 6 的第 2 小題和 9 的第 4 小題都寫的是範圍，其它都是數字或是以未知數表示，為什麼有這樣的區別？

S41：因為我不知道它的值在哪裡，所以我只能用範圍去表示。

T：好。

S41：又或者是我覺得題目有給我範圍，所以我可以化簡成一個範圍？

T：那如果我們要你化簡成一個單純的一元一次這類的式子，你可以做得到嗎？

S41：恩，可以…那這樣就有值的，答案就變成 13。

T：為什麼就變成 13？

S41：因為 x 剛好就消掉，它給我們 x 的範圍是 1 到 6，那如果減掉 10 的話，就代表是負數，所以應該要加一個負號。

T：你是根據什麼性質要加一個負號？
S41：根據絕對值出來一定要是正數的性質，所以它如果是負數的話，一般我們都是要括弧在前面加一個負號才對。

三、 低能力學生之答題情形

研究發現，低能力學生處理本題型之過程裡，無法直接運用去絕對值之運算，且對於未知數的判讀，產生錯誤，此外，低能力學生在判斷未知數的正負時，多半無法認知未知數是任意數，未知數可能為正數也可能為負數，因此誤認 x 為正數而 $-x$ 必為負數。例如：【9(3)假設 k 為任意數，那 $|k|$ 可以化簡為__________。】

T：第 9 題為什麼要這樣寫+k？
S01：因為 k 是正整數，所以絕對值後也是正的，然後負的出絕對值也是正的，任意實數的話出絕對值也是正的，所以都是正的。
T：所以你都寫+k？
S01：對！
T：那你有沒有看到這幾個條件，如果考慮進去，這個+k 是什麼意思？
S01：就是正的阿！

以 S05 為例，該生在具體數字去絕對值運算中，能用嘗試錯誤的方式湊出答案，但是對於題目中含未知數的條件無法正確具體化，以絕對值之算術概念解題，所以出現整數解的答題情況。該生訪問內容如下：

【6(2)已知 x 為大於 3 的任意數，則 $|x-1| = (\square x) - (\square 1) =$____________。】

T：6(2)為什麼妳答案是 3？
S05：因為他說 x 大於 3，所以我就用 4 阿，代 4 進去 4-1=3，所以就是 x=4，減掉 1 就是 3。
T：妳覺得還有別的答案嗎？
S05：有阿~妳說的是像是 5 之類的嗎?只是我不知道怎麼寫。
T：妳覺得答案會有幾個？
S05：很多個阿，像是分數或是其它的正數。
T：那有沒有什麼方法可以表示很多數？
S05：應該是可以，但是我現在還沒有想到，是像一元一次不等式嗎？
T：可以是一元一次式嗎？
S05：ㄟ…不知道。
T：那我可不可以用未知數來表示？
S05：可是它用過 x 啦…呵呵…我真的不知道。

T：那我寫成 x-1 可以嗎？

S05：為什麼阿？

T：妳看如果我代 x=3、x 代 9.9…代任何數都可以符合題目的要求。

S05：喔！

T：妳對於未知數有什麼感覺？

S05：有時候很簡單，有時候很難。

T：什麼時候簡單？

S05：就是計算題的時候比較簡單，但是看到應用題就很難，可能被國文檔掉就很難！

【9(1)假設 k 為正整數，那 $|k|$ 可以化簡為______________。】

S05：因為我不知道它是要我代數字還是什麼的，我就寫 k 了。

【9(2)假設 k 為負整數，那 $|k|$ 可以化簡為______________。】

T：那第 2 小題為什麼妳寫|-k|？

S05：因為他說負整數阿，我就把負號寫上去了。

T：代上負號發生什麼事？

S05：代上負號就這個數整個就負數了，不是嗎？

T：所以妳的意思是說，k 是一個負數，所以前面應該要有一個負號？

S05：對阿！因為 k 不是在裡面嗎？

T：嗯哼！

S05：所以如果它是負整數，那它就帶上負號啦！

T：所以妳的認知是如果它是負整數的話，那他前面一定要有負號？

S05：恩恩！

T：那如果它前面就沒有負號，它就是正的？

S05：恩恩，對阿！

T：所以我要給它一個負號才會對？

S05：恩恩！

T：所以去了這個絕對值再把負號拿掉？

S05：對阿，因為不是放上絕對值這個負號也沒了嗎？

T：嗯哼。

S05：是嗎？

T：那這樣子我們來看看這裡有點奇怪，如果 k 是負整數，所以 k 可以想成-1。

S05：恩！

T：然後妳說-k 會是負的，我們來代看看，變成-(-1)，這是多少？

S05：1。

T：是正的還負的？

S05：正的！

T：那哪裡有問題？

S05：喔，所以本來 k 就是一個負數了！

T：恩！

S05：所以我就不用再給它負號了！

T：是阿！

S05：那我懂了！

T：因為未知數是一個代表，妳要看它給妳這個代表是什麼條件，不是說妳沒看到負號就是正的，或是有負號就是負的。

S05：喔，瞭解。

T：那妳知道這個答案應該怎麼寫了嗎？

S05：恩…k 是負的，所以絕對值算出來要正的，所以恩再給它一個負號。

T：好的，那妳現在有比較懂未知數的正負了嗎？

S05：有哇！

在研究中發現，低能力學生 S30 在正負數運算出現問題，且該生無法活用絕對值算術定義，因此在解決相關問題時，多以嘗試錯誤方式拼湊答案：

【6(1) $|7-12|=(\square 7)-(\square 12)=$________。】

S30：因為是|7-12|，所以就是正 7 減掉括號負 12。

T：那妳算一下正 7 減掉負 12 的值是多少？

S30：也是 5 阿。

T：是嗎? 正 7 減掉負 12 是 5 嗎？

S30：ㄟ…-5，對阿！

T： -5 嗎?是減負 12 耶！

S30：19。

T：那如果現在寫妳會改成什麼？

S30：用湊的話，把正 7 改成負 7，-7 減-12！

【6(2)已知 x 為大於 3 的任意數，則 $|x-1|=(\square x)-(\square 1)=$____________。】

S30：我是用湊的耶！

因為絕對值裡面是正的，然後 1 就是負的，就正 x 減掉正 1，這樣！

T：所以妳是先判斷絕對值裡面是正的還是負的？

S30：恩？？

T：因為是正的，所以就這兩個就填正？

S30：對，這是變號以後的。

T：回來妳原來這裡是怎麼湊的？

S30：7-12 是負的，所以要變正的，然後就減負 12。

T：所以妳就改中間這個減，想成負變成正？

S30：恩！
T：這種題目妳有做過嗎？
S30：好像有！
T：那妳的解題方式是怎麼來的？
S30：好像有說過…然後我就這樣想的！

在判斷一個敘述是否正確時，該生和學生 S01 皆誤認為只要能找出符合這個敘述是對的情況下就是對的，因此對於舉出反例對他是有困難的：

【7C. $|x-5|=1$】

S30：C 為什麼不勾呢，6-5 也會等於 1 耶，它應該是對的吧，當時我好像沒想這麼多耶。
T：哪妳現在覺得是對的嗎？
S30：恩，應該是對的。
T：那妳覺得|x-5|=3 對不對？
S30：應該也是對的，因為它沒有說 x 的範圍。
T：那如果 x 沒有給範圍，也是|x-5|=4 對的？
S30：對阿！
T：所以它只說|x-5|=1 對嗎！
S30：不一定耶，可能還有其它的。
T：恩！
S30：喔~是這個意思喔！

【7C. $|x-5|=1$】

S01：x 可能是 6 或是 4，算出來就是 1。
T：那我問你|x-5|可不可以等於 2？
S01：可以，那這句話就是錯的。

至於單一未知數之絕對值化簡，該生 S30 不懂化簡的意思，因此在經過提示後，均可以表示正確：

【9(1)假設 k 為正整數，那 $|k|$ 可以化簡為_______________。】

S30：不知道甚麼叫化簡。
T：上面有解釋阿！
S30：喔~我沒看到！
T：那妳知道了嗎?就是我不要用絕對值，將式子用 k 表示。
S30：恩！

小結

學生錯誤判斷未知數的正負之原因，多數來自誤認為一個式子最前面出現負號時，此式子的值就是負號，且此情形在未知數中更為明顯，因為多半無法理解未知數是任意數，未知數可能為正數也可能為負數，因此誤認x為正數而$-x$必為負數。各能力學生皆容易忽略 0 的絕對值是非負數，誤用了「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」之概念，所以解題當下做了錯誤判斷，某些學生在提問之下能發現忽略 0 的絕對值是非負數。

第六節 不同能力學生的「絕對值函數圖形」概念之資料分析

針對絕對值的綜合概念運用，研究者設計以絕對值函數圖形為判斷學生在絕對值概念中，是否達到各層面之能力。函數圖形之作圖，在國中教材中先以描出多個點作為引入，往後再進一步討論不同函數其圖形具有之性質， 因此發現多數學生在無法直接判斷用何種概念解題時，會使用描點的方式過濾選項或是找出符合之選項。另外，學生亦會使用絕對值為非負數的概念，使用刪去法刪去不可能的答案，此法雖不是絕對值函數作圖之正解，但是依研究目的，研究者設計本題選項時，僅著重在學生是否能應用所學之絕對值相關概念，藉此判斷解題策略，並由學生答題表現瞭解學生在絕對值的錯誤原因。

在研究中顯示，中、高能力學生在此向度之答題正確率較低能力學生來得高，選擇錯誤選項有可能是因為未注意到題目中的限制條件，因此高能力學生在答題表現中，較接近正確答案；另一部分原因來自低能力學生在絕對值算術概念不夠完善，因此增加圖形及未知數干擾下，低能力學生無法使用正確概念或判斷出圖形不符合絕對值之處。不同能力學生在絕對值函數的答題情形及答對率統計表，請見下頁表 4-6-1。

表 4-6-1 不同能力學生在絕對值函數的答題情形

絕對值 函數圖形	10	11	平均	訪問學生 答題情形(百分比)		整體學生 答題情形(百分比)	
				10	11	10	11
高能力 (整體答對率)	0.5 (0.5)	0.5 (0.79)	0.5 (0.65)	A(0.5) *B(0.5)	B(0.25) *F(0.5) L(0.25)	A(0.5) *B(0.5)	B(0.14) *F(0.79) L(0.07)
中能力 (整體答對率)	0.25 (0.23)	0.75 (0.31)	0.5 (0.27)	A(0.75) *B(0.25)	B(0.25) *F(0.75)	A(0.58) *B(0.23) C(0.04) D(0.04) F(0.08) AF(0.04)	A(0.58) B(0.) *F(0.31)
低能力 (整體答對率)	0 (0.07)	0 (0.07)	0 (0.35)	A(1)	A(0.25) B(0.75)	A(0.79) *B(0.07) F(0.07) AF(0.07)	A(0.14) B(0.36) *F(0.07) C(0.07) G(0.14) H(0.07) AG(0.14)
綜合表現 (整體答對率)	0.25 (0.24)	0.42 (0.37)	0.33 (0.31)				

*為正確答案

一、 高能力學生之答題情形

高能力學生雖在紙筆測驗中答對率僅達 5 成，作答正確知之學生約可區分為採用兩種策略：一是以描點判斷，將 x 代入正數、負數及 0，將其對應的函數值算出；二是因為絕對值為非負數，因此可以使用刪去法，此法雖不是絕對值函數瞭解題目之判斷策略。但是在訪問過程中，高能力學生能在充分時間中，重新檢視自己的想法過程，並且能準確指出自己錯誤想法，亦能使用多種解題策略解釋絕對值函數題型，包含算術概念及幾何概念。例如：高能力學生 S13，能使用算術概念得出正確解答，在訪問過程中亦能使用幾何概念解釋第 10 題，其訪問結果如下：

【10. 已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

T：第 10 題妳是用代點的方式作的？
S13：恩！
T：妳確定答案嗎？
S13：確定！
T：如果我們不要用代點的方式的話，妳可不可以判斷出圖形？
S13：…（想了一下）可以！
T：怎麼解釋？
S13：因為他說 <u>f(x)=-x，然後第二個是 g(x)=|-x|，那如果在絕對值裡面的-x 改成 f(x)的話，看旁邊的圖就可以了。</u>
T：怎麼看的？
S13：因為 f(x)=-x，那放到絕對值裡面之後，都會變成正的，在右邊的圖裡面，<u>把右下角的那條會變成負的，把它往上調就可以了。</u>

由此可見此學生在絕對值圖形中，能明確瞭解絕對值為非負數，並且將圖形利用正負含數值對稱之想法進行解題。

【11. 請問 $y=f(x)=|x-5|$，並且符合 $x\le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

T： 好的，11 題，妳也代點之後就選 L，為什麼？
S13：因為題目說 x 小於等於 2，所以我就從 2 往下代，就算完之後就選 L。
T：那我好奇耶，為什麼不選 F？
S13：喔…我沒有看到。
T：妳當初沒有看到這個選項喔？
S13：恩。
T：那妳覺得哪個比較正確？
S13：F。
T：為什麼？
S13：因為 F 在最右下角那裏有一點，往左上延伸，就代表往右下就沒了，但是往左就都可以繼續代其他點。
T：恩。
S13：但是 L 的話就是那幾個點了。
T：是的，那如果不描點的話妳可以找到答案嗎？
S13：可以，因為題目說 x 小於等於 2，所以要從 2 往左畫，然後因為它有絕對值，所以都是正的。

學生 S34 以描點方式進行解題，但在第 10 題的描點中只將 x 代入 0 及負數，因此認定此圖形必為一直線，因此判斷錯誤；而 11 題因完整考慮到題目所給的限制，因此依照絕對值為非負數的概念即推出正確解答，其訪問內容如下：

【10. 已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

T：第 10 題為什麼妳選擇 A？

S34：我先找圖形點(1,-1)，因為它的方程式是這個。

T：恩。

S34：那所以說，-x，假設 g，喔它一定會通過原點(0,0)，所以就…恩…等下…所以如果 x=1 的話，y 就等於絕對值-x，-x 就是-1，所以說絕對值-1 就等於 1，所以先找有沒有這個相符的，然後這個沒有這個沒有這個也沒有(用刪去法刪去 DEF)。

T：恩。

S34：然後…這應該要怎麼說…恩…它一定是一條直線。

T：為什麼妳覺得是一條直線？

S34：因為它就是 x 一個數字就是一個解。

T：恩，一個數字就是一個解，所以就是一條直線？

S34：對，所以刪掉 BC，就只剩下 A。

T：那我問一下，妳覺得只代一個點夠精準嗎？

S34：ㄟ…阿…我想錯了… 我看看，如果 x=-1 的話，阿，對應該是 B。

T：為什麼又突然改答案了？

S34：因為我剛代-1 的時候，y=1，所以說它的點可能是在這裡，所以只有這個答案符合。

T：那有沒有可能有別的想法，不代點用數字算，而得到答案？利用到題目給妳的圖形。

S34：恩…我想一下。

T：好。

S34：可以，g(x)=絕對值-x，就是這個不管怎麼解都是正數，所以 y 一定是正數所以只要 y 坐標有到負的就不行，所以就是 B。

而高能力學生 S48 能使用幾何對稱觀點，利用題目所給的已知條件精準地選出正確選項，代表該生在絕對值相關概念非常熟練：

【10. 已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

S48：就 y=g(x)就是它一定是正的，因為它掛上絕對值，所以 y 一定是正數，就這樣。

T：那你可以用 f(x)的圖形去做這題嗎？

S48：ㄟ…把負的變成正的，把原來-x 算出來的負數，掛上絕對值就變成正的。

T：恩。

S48：所以對稱摺上去。

T：把哪裡對稱摺上去？

S48：就是 y 是負的地方。

【11. 請問 $y=f(x)=|x-5|$，並且符合 $x\le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

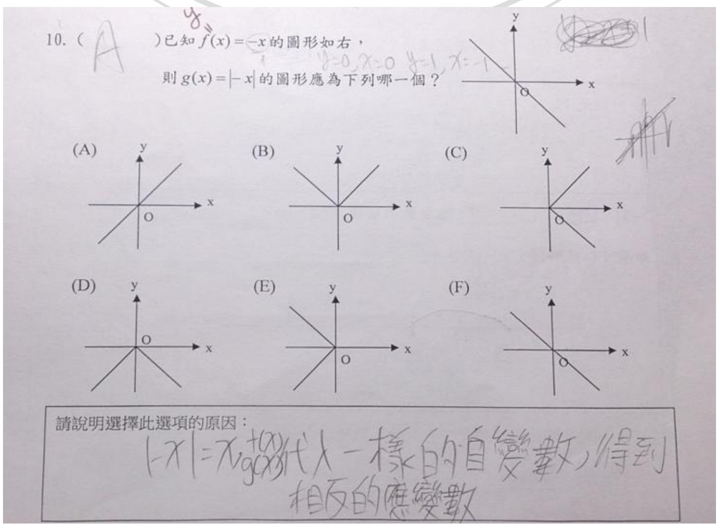
S48：這個加上絕對值之後，最小的數就是 3，就是 x 帶入 2，就是 x 代 2，y 最小是 3，然後 x 越小，y 就會越大。

T：嗯哼！

S48：所以要選 F。

至於學生 S26，在之前的向度中，該生多偏向使用代入數字的算術策略解釋題目，因此在研究中顯示該生無法靈活直接使用未知數思考，因此在判別時容易出現困難。訪問過程中，多次未經過研究者提問，該生就能發現自己的錯誤，因此若是給予充裕的時間，該生較能正確處理此類型題目，與學生 S26 訪問內容如下所示，該生作答情形如圖 4-6-1：

圖 4-6-1　S26(男)解決題目 10 實際作答圖



S26：我覺得選錯了。

T：為什麼？

S26：我不太會寫這題。

T：那如果你再想一次，你會選什麼？

S26：看一下…我覺得應該是 B，但是不知道應該怎麼解釋。

S26：我看一下…恩…呃…不太知道…我看不太懂題目說什麼。

T：請你再把題目念一遍。

S26：(念過一遍後)… x 是可以隨便代一個數字進去嗎？

T：我們以前在畫函數圖形的時候，不就是舉好幾個 x 的數值進去算出 y 的嗎?

S26：恩，對…所以我覺得答案是 B。

T：為什麼？

S26：<u>因為-x 的絕對值根本不可能是負數，所以 y 不可能小於 0。</u>

T：那你當初為什麼寫|-x|=x？

S26：因為|-x|代出來會跟 x 一樣。

T：真的嗎？

S26：ㄟ…不是嗎?喔…不是喔…那 x 是正數的時候是對的，但是 x 是負數的時候不成立。

T：為什麼那時沒想到？

S26：當初想太急了。

【11. 請問 $y = f(x) = |x-5|$，並且符合 $x \le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

T：從上一題到這裡，你會想改 11 題的答案嗎？

S26：11 題喔，會，但是我不知道這個虛線是什麼意思。

T：這是由點所構成的圖形，因為只有某些特定的 x、y 的解才符合函數，所以畫出這個點點的圖。

S26：就不是線型函數。

T：恩。

S26：我覺得應該是 C。

T：為什麼？

S26：因為有加絕對值，所以函數值不會有小於 0 的數，有可能等於 0 但是不可能小於 0。

T：那你這個題目還有沒有條件沒有用到？

S26：…x 小於等於 2 的圖形…喔…所以是 F。

二、 中能力學生之答題情形

中能力學生 4 人中，兩題皆答對者只有學生 S45，該生完整地討論 x 之值域，代入一正一負的兩個 x 值進行計算描點，再輔助絕對值為非負數之概念，因此能

做出正確判斷，但若是要該生利用 $y=f(x)=-x$ 圖形解題，該生無法判斷絕對值與圖形關係：

【10. 已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

S45：10 我是代兩個點，一個正一個負，就可以描點。
T：你下面解釋的原因寫絕對值出來為正數，請你解釋一下這句。
S45：因為 y 出來的值一定都是正數，所以圖形一定都是在上面，一定是 B。
T：你都沒有用到 f(x)給你的圖形，有沒有可能用到圖形解釋呢？
S45：呃…暫時想不到。

【11. 請問 $y=f(x)=|x-5|$，並且符合 $x\le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

S45：其實是點的話就可以全部刪掉，因為它沒有說分數或小數點都不行，所以一定是一直線。
T：恩。
S45：然後有限制是從 x<=2，一定有個點開始，所以是 EF，然後 y 是正的所以是 F。

此外，中能力學生 S32、S28 處理第 10 題時，多數直觀產生 $|-x|=x$ 之錯誤概念，並且誤認為 x 為正數而 $-x$ 必為負數，因此判斷只要將圖形改變斜率（或是學生所說的直線走向），並且研究發現中能力學生容易混淆想法，而忽略絕對值均為非負數之算術概念。以 S32 為例：

【10. 已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

T：10 題妳選 A 是為什麼？
S32：我記得暑假有教到方程式前面的 a 如果是正數的話，圖形就往上走，是負數的話就往下走，他說這個 f(x)是-x，所以它是負數往下走，加絕對值就是正數，所以往上。
T：妳說的加絕對值變正數的意思是什麼？
S32：是|-x|出來變成 x，是正的，所以往上走。
T：所以妳的意思是 x 是正數，-x 是負數？
S32：對。

T：那妳想想如果我們今天 x 代-1。

S32：…咦…什麼？

T：妳剛剛說 x 是正的，可是 x 是不是可以代-1，那 y 不就是變成 1？

S32：那就變成正的啦。

T：所以我們不能說看到 x 就說是正數，-x 是負數。

S32：咦…那我不能說 x 是正數嗎？

T：x 是不是一個變數，它可以是 0，那麼對應到的點就是(0,0)？

S32：恩！

T：x 是-1，那對應到的就是點(-1,1)。

S32：對喔！x 可以變…恩！

T：那答案要選哪一個？

S32：還是 A。

T：為什麼？

S32：那就處理那個負號就好，圖形就是反的。

T：妳試試看描點代數字看看，盡量考慮到正負數跟 0。

S32：這是原本的，那如果這樣出來就會…ㄟ…不管怎樣都會是正的。

T：恩。

S32：就是 B。

T：為什麼會這樣？

S32：因為我忘記 y 都要是正數。

T：妳有發現哪裡有問題嗎？

S32：有！

T：哪裡？

S32：因為他出來都不會是負數，可是 A 的 y 有負值。

T：妳看妳把|-x|化成 x 是不是就會有問題？

S32：恩。

【11. 請問 $y=f(x)=|x-5|$，並且符合 $x\leq 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

S32：11 題我好像就代數字，代 x=2,10,-1,-2，算出來是 34567，可是我只有代整數，可是還有其他的，所以不會是點點的，所以點的就先不要理它。

T：恩。

S32：所以畫出圖來就是 F。

T：那第 10 題的時候怎麼沒有想要代點？

S32：當初覺得這個比較簡單，就沒有想要描點。

T：恩。

S32：11 題沒有代數字我就不會看。

T：這樣的題目妳以前有做過嗎？

S32：沒有。

T：妳解題的方式是自己想的，還是有人教的？
S32：自己想的。

此外學生 S28 在處理 11 題時，雖然描點時依照題目所給予的限制條件 $x \le 2$，選擇正確的 x 值代入，但是在描製圖形時卻忽略此條件：

【11. 請問 $y = f(x) = |x-5|$，並且符合 $x \le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

S28：喔~~我先看一下 x 小於等於 2，還有絕對值，…我想改答案。
T：妳要改哪個答案？
S28：C。
T：為什麼？
S28：因為他有點跟上一題一樣，代-1 等於 6、-2 等於 7，因為絕對值會讓負數等於正數，所以…不可能是負數。
T：那妳為什麼不選 D？
S28：因為有負的。
T：那為什麼不選 F？
S28：因為不可能只有一半，是無限延長的。
T：妳覺得那個 x 小於等於 2 有什麼用？
S28：就是 x 要代負數。
T：那我問妳喔 x 可不可以等於 3？
S28：恩…可以。
T：可是題目有說 x 小於等於 2。
S28：對喔！
T：恩？
S28：所以~這個圖形不可能有無限延伸，要有端點的。
T：為什麼妳沒想到？
S28：<u>我只有想到絕對值裡面那個 x，沒有想到圖形也要有限制。</u>

最後一位中能力學生 S41 則能在訪問中發現自己的錯誤想法，並且明確指出錯誤之處，在訪問最後該生反應自己對於絕對值的幾何定義概念不熟悉，因此在有關於幾何方面有困難，與該生之訪問內容如下：

【10. 已知 $y = f(x) = -x$ 的圖形如右，則 $y = g(x) = |-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

T：你在第 10 題選 A 的理由寫出 y=x，你指的是|-x|=x 嗎？
S41：<u>我好像沒有考慮到 x 有可能是負數的問題。</u>
T：恩。

S41：因為我這裡沒有想到這麼多，就是，只是單純覺得絕對值出來一定是正數，可是我忘記 x 是一個未知數，所以我們不能斷定它出來一定就是 x。

T：那如果再給你想一次，你認為答案應該要選什麼？

S41：因為它既然只能是正數，那代表說，

T：你的它指的是什麼？

S41：它指的是 $y=|-x|$，應該也可以說 y 是 $g(x)$ 。

T：所以你的意思是這個 y 是正的？

S41：對，所以只要有在負以下的就不合。

T：你所謂的負以下的指的是？

S41：就是直線有到第三或四象限的位置。

T：恩。

S41：所以應該是 B。

T：你還可以有其他解釋的方法嗎？

S41：恩，因為當 X 如果變成負的時候，它還是變成正的，阿如果 X 是正的時候它還是正的阿，所以它的線就會呈現一種好像到 0 再跑上去的這種。

【11. 請問 $y=f(x)=|x-5|$，並且符合 $x\leq 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

T：那請你解釋一下 11 題你的判斷策略是什麼？

S41：因為題目說 x 小於 2，變成說 x 就是成這邊畫過來往後。

T：你說的往後的意思是？

S41：x 越來越小，然後它又有加絕對值就代表它就是負數不行。

T：恩。

S41：還有，它不是點點的是因為它只有說它小於 2，沒有說一定要是整數，所以它就不會有這種問題，那就是一直線。

T：那你覺得這兩題圖形解題的關鍵應該是什麼？

S41：就是看有沒有在負數以下的。

T：你的負數以下指的是？

S41：恩…就是函數值，就是拿這個來判斷、那這邊的話還可以拿整數和限制範圍來看。

T：那你覺得你讀這些題目會有困難嗎？

S41：如果有專心看的話都還好，只是沒有辦法直接看出答案，要想一下。

T：例如說？

S41：就是在距離的那些，有卡一點點。

T：所以在你學絕對值的時候你覺得哪裡有困難嗎？

S41：恩…在距離和移動，感覺好像絕對值可以代表很多東西。

三、 低能力學生之答題情形

由研究中發現，3 位低能力學生 S05、S07 及 S01 處理第 10 題時，與中能力學生 S32、S28 發生同樣的錯誤：認為$|-x|=x$、x是正數而$-x$必為負數，因此判斷只要將圖形改變直線方向，就是正確解答，且因混淆想法，而忽略絕對值均為非負數之算術概念。以 S05 為例：

【10. 已知$y=f(x)=-x$的圖形如右，則$y=g(x)=|-x|$的圖形應為下列哪一個？】

S05：因為它說 f(x)=-x，那個負號是個重點。
T：恩？
S05：恩，所以我覺得如果負號是往右邊斜的話，那它的正號就可能往左邊斜。
T：所以妳就選 A？
S05：恩。
T：那妳的意思是<u>-x 是負，|-x|=x 變正</u>嗎？
S05：恩。
T：那我們剛剛前面重新釐清未知數的正負了，妳看到未知數有帶負號不代表一定就是負數的，對不對？
S05：恩。
T：所以如果用這種想法來想這題的時候？
S05：有點怪怪的。
T：那重新再想這題妳會怎麼解？
S05：所以說它這個 x 有可能是負號有可能是正號，反正我代出來就是不是正就是負就對了。
T：恩，這就是我們原本釐清過的想法。
S05：所以它可能正的也往右斜，負的也往右斜。
T：所以妳覺得用正負畫圖形是不是有問題？
S05：恩。
T：那再想想。
S05：<u>恩…可是這個 g(x)一定是正的阿！</u>
T：為什麼？
S05：因為 x 不管是負的或正的，負的它跟它就變成正的，正的它跟它就變成負的，可是代上絕對值出來還是正的。
T：恩！
S05：對阿，所以這個圖形一定是正的。

T：妳說這個圖形一定是正的意思是？

S05：y 是正的…所以要…ㄟ……喔喔…好奇怪喔…它有經過原點，這樣子。

S05：喔喔~~所以 x 它應該是負的…這樣我又糾結了。

T：那裏糾結？

S05：它還是往右斜還是往左斜？

T：看一下題目給妳的圖，描點的時候，妳代-1 的時候點描在這，代 1 的時候點描在這。

S05：對。

T：所以要找符合它 g(x)的圖形出來阿！

S05：喔………我懂了……好怪喔……恩這個不行...這個也不行（刪去其它選項)。

T：所以妳現在剩下 AB 兩個？

S05：對，那我來代負號看看。

T：好！

S05：如果是用(-1,1)的話…喔…我出來的答案是 B。

T：恩！

S05：我覺得我好像瞭了。

T：怎麼瞭了?解釋一下？

S05：因為一開始它說 f(x)=-x，可能是正號或是負號，然後我經過，我代 x 是正或是負的時候，我發現它負的時候這樣這樣，反正都成立。

T：恩！

S05：然後之後就代這個，然後我代正的之後呢，它一開始是往上爬，可是我代負的時候它就開始…呃…就是一開始正的時候往右上方爬，之後代負的是往左上方爬，反正之後就發現這個好像是對的。

T：妳還有想到其他什麼方法？

S05：妳說從這裡去想嗎？

T：從圖形或是從絕對值去想?

S05：我覺得我做不到！

T：妳剛剛有說到很關鍵ㄟ，妳說 x 不管是負的或正的，可是代上絕對值出來還是正數？

S05：恩恩！

T：意思就是說 y 就變成正數。

S05：喔~~y 都是正數。

T：對嗎？妳剛都有說到ㄟ。

S05：有耶！

在 11 題的部分，經過前一題的概念釐清後，學生 S05、S01 及 S07 都可以使用基本絕對值運算法則判斷，只要找出函數值為正數的圖形即可，但是對於題目的

條件限制，仍無法與圖形作連結，若經由提示便可選出正確答案，以下以 S07 之訪問內容為例：

【11. 請問 $y=f(x)=|x-5|$，並且符合 $x\leq 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？】

T：那 11 題呢?為什麼選 B，你寫算出來是正的？
S07：恩~因為這裡是正的,所以 x 代 1，代 2 都是正的。
T：那你怎麼不選其它的？
S07：要連接兩個點是直線。
T：題目有你沒用到的條件嗎？
S07：x…x 小於等於 2。
T：嗯哼，所以你選 B 的時候，有沒有可能把 x=5、x=6 算進去？
S07：………好像有。
T：那你覺得要怎麼改比較妥當？
S07：F。
T：為什麼？
S07：因為絕對值出來是正的，x 不能大於 2。

最後一位低能力學生 S30 在訪問過程中發現，該生無法作出正確的基本函數圖形的描點，所以即使能計算基本具體數字之絕對值，但在描繪圖形上無從下手，若除去描點之能力，給與圖形描繪之協助，該生能正確使用絕對值為非負數之概念。其訪問內容如下：

【10. 已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？】

S30：看不懂這個圖，
T：那我們之前有學過描點來畫圖，像是直線一次函數，或是拋物線二次函數，不管是怎樣的圖形，都可以找出幾個點來看。
S30：恩！
T：行得通嗎？
S30：行得通。
T： 妳可以找出幾個點嗎？
S30：畫出來嗎？
T：恩！
S30：隨便找嗎？
T：恩！
S30：(寫下 1234)，出來都一樣的。

T：妳都代正的，那 0 呢？
S30：0。
T：可不可以代負的？
S30：可以(-1、-2)，這樣。
T：那畫在直角坐標上咧？
S30：恩(結果點描錯)。
T：確定(1,-1)在這嗎？
S30：阿，畫錯了！
T：那重畫一下。
S30：恩………這樣好像是 B！所以 y 不會是負的！！

小結

在此題型錯誤之學生大致分為三類：一是，受到圖形之干擾，忽略函數值 y 即絕對值為非負數；其二，沒有注意到題目有範圍限制，而非無限延伸之直線；最後，在未知數之表徵中，誤認 x 為正數而 $-x$ 必為負數，因此改變圖形斜率（或是學生所說的直線走向）。而絕對值函數在國中教材中並無出現，因此，在研究發現更能瞭解學生是否具備絕對值的幾何概念及算術概念，當然，牽扯到自變數及應變數的概念判斷，也是造成中低能力學生在此表現不佳的原因之一。

第七節　絕對值相關概念態度量表資料分析

本研究佐以 Likert 五點量表讓學生表達自我對於數學的學習態度及對於絕對值相關概念的理解程度，此外亦調查學生認知本身的國文程度為何，與本身在處理數學文字描述時的瞭解題意程度，希望藉此幫助研究者更能分析出學生在解決絕對值相關問題時的表現。本量表記分方式為：非常同意—5 分、同意—4 分、還好—3 分、不同意—2 分、非常不同意—1 分，以下就學習態度、對於絕對值相關概念瞭解程度及國文程度分別討論：

一、學習態度

在數學學科成就感中，喜好數學的程度依序為高能力組、中能力組與低能力組，其中，中能力平均程度 4 及高能力學生平均程度 4.25，顯示中高能力的學生喜歡數學，至於低能力學生認為還好，而這 12 位學生中並無勾選不同意及非常不同意的學生。中能力與高能力的學生認為數學簡單，程度平均在 3 及 3.5，低能力學生不同意數學很簡單，可見在低能力學生在數學這一個學科中最有挫敗感，不喜歡數學而且自認為數學成績不好，詳細數據如下表 4-7-1。至於在問題解決的學習態度方面，資料顯示高能力組學生會主動跟同學討論數學，家中也有人可以指導功課，至於低能力學生則是與高能力學生相反，由此可知，低能力學生在學習主動程度及家中支持的資源較為薄弱。

表 4-7-1 不同能力的學習態度平均數

	題目	高能力組		中能力組		低能力組	
		平均	標準差	平均	標準差	平均	標準差
成就感	1. 我很喜歡數學	4.25	0.5	4	0.82	3	0
	2. 我覺得數學很簡單	3.25	0.96	3	0	2	0
	3. 我的數學成績很好	3.5	0.58	2.75	0.5	1.75	0.5
	組平均	**3.67**		**3.25**		**2.25**	
問題解決	4. 我平常會跟同學討論數學	4.5	0.58	3.75	0.5	2.75	0.5
	5. 家中有人指導我的數學功課	4	1.15	2.75	0.96	2.5	0.58
	組平均	**4.25**		**3.25**		**2.63**	

二、絕對值相關概念的理解程度

在學習歷程中，高能力學生認為自己學得很好（平均 4 分）、中能力學生認為還好偏同意（平均 3.75 分），而低能力學生不同意自己學得很好（平均 2.75 分）;認真程度高能力學生認為還好（平均 3.5 分），中能力同意自己很認真（平均 4.25 分），低能力學生認為還好（平均 3.75 分），其各項平均見下頁表 4-7-2。

表 4-7-2 不同能力的概念理解平均數

	題目	高能力組		中能力組		低能力組	
		平均	標準差	平均	標準差	平均	標準差
學習歷程	6. 國中學習這些概念時，我學得很好	4	0.82	3.75	0.5	2.75	0.5
	7. 國中學習這些概念時，我覺得老師教得很清楚	4.25	0.96	4.75	0.5	4.25	0.5
	8. 國中學習這些概念時，我上課都很認真	3.5	0.58	4.25	0.96	3.75	0.5
	組平均	**3.92**		**4.25**		**3.58**	
概念瞭解	9. 我瞭解數學中「移動」的意思	3.5	0.58	4	0	3	0.82
	10. 我瞭解數學中「距離」的意思	3.5	0.58	4.25	0.5	3.25	0.96
	11. 我瞭解數學中「絕對值」的意思	3.25	0.5	4.25	0.5	3.25	0.5
	12. 我瞭解數學中「去絕對值符號」的意思	3.25	0.5	4	0.82	2.75	0.96
	13. 我瞭解數學中「函數圖形」的意思	3.75	0.5	4	0	2.5	0.58
	組平均	**3.45**		**4.1**		**2.95**	
概念計算	14. 我覺得「移動」的計算很簡單	3.75	0.5	3.75	0.96	2.75	0.5
	15. 我覺得「距離」的的計算很簡單	3.75	0.5	4	0.82	3	0.82
	16. 我覺得「絕對值」的計算很簡單	4	0	4.25	0.96	3.25	0.96
	17. 我覺得「去絕對值符號」的計算很簡單	3.75	0.5	3.5	1	3	0.82
	18. 我覺得「正負數加減」的計算很簡單	4.25	0.5	4.5	0.58	3.5	1
	組平均	**3.9**		**4**		**3.1**	
概念應用	19. 我覺得「移動」的應用很簡單	3.5	0.58	3.5	0.58	3	0
	20. 我覺得「距離」的應用很簡單	3.75	0.5	3.5	0.58	3	0
	21. 我覺得「絕對值」的應用很簡單	3.75	0.5	4	0.82	3.5	0.58
	22. 我覺得「去絕對值符號」的應用很簡單	3.75	0.5	3.5	1	3.25	0.5
	23. 我覺得「正負數加減」的應用很簡單	4	0.82	4.5	0.58	4.25	0.5
	24. 我覺得「函數圖形」的應用很簡單	3.25	1.5	3.75	0.5	2.25	0.96
	組平均	**3.67**		**3.79**		**3.21**	

在概念瞭解部分，高能力學生認為還好（平均 3.45）、中能力學生皆認為同意自己瞭解絕對值相關的概念（平均皆大於 4），至於低能力學生認為自己對於絕對值相關概念的瞭解程度是屬於不太瞭解的範圍（平均 2.95）；計算、應用這兩部分的簡單程度，中、高能力學生認為還好偏向同意（平均皆大於 3.6），低能

力學生則認為是還好。從數據上來看，學生普遍認為絕對值單元概念未到充分瞭解的程度，對於絕對值的計算及應用雖不覺得很難也不是非常簡單，屬於中等程度。

二、本身的國文程度為何，與本身在處理數學文字描述時的瞭解題意程度

在三組學生中，中能力學生認為自己的國文成績還好，高能力與低能力學生平均認為自己的國文成績不是很好；在閱讀數學題目情況中，中能力的學生比高能力及低能力學生容易在不瞭解題目的情況下進行計算，因此在訪問過程中，中能力學生（S41、S28）經常反應自己發生沒有看清楚題目之情況，當重新再檢視題目時，會發現自己的答案有誤。如下頁表 4-7-3。

表 4-7-3 不同能力的國文程度及瞭解題意程度平均數

	題目	高能力組		中能力組		低能力組	
		平均	標準差	平均	標準差	平均	標準差
文字解讀	25. 我的國文成績很好	2.5	1	3	1.15	2.75	0.5
	26. 在做數學題目的時候，我會在沒有瞭解題目的情況下就進行計算	2.75	0.96	3.25	1.5	2.25	0.5
	27. 在回答數學的應用題時，我都很清楚地了解題目的意思	3.25	0.5	3.25	0.96	2.5	0.58

最後一題在應用問題的文意描述，中高能力學生認為「在回答數學的應用題時，我都很清楚地了解題目的意思」平均都是還好－3.25 分，而低能力學生則偏向不同意－2.5 分，因此對於題意的理解，學生普遍認為沒有十分清楚，例如：低能力學生 S30 認為「反覆去看幾遍才看得懂」、高能力學生 S26 認為「我國文不好」。

這個部分是學生主觀認為的自我認知，但是不一定代表實際情況，例如，中能力學生 S45 在第 26 題「在做數學題目的時候，我會在沒有瞭解題目的情況下就進行計算」圈選 2 分－不同意，並在第 27 題「在回答數學的應用題時，我都

很清楚地了解題目的意思」圈選了 4 分－同意，但是在訪問過程中，有好幾題該生皆反應為當時沒有看清楚題目，所以寫錯。其因素有很多種可能，原因之一或許是該生授施測者的地位（任教老師），而選擇選擇符合社會期待之選項。

第八節　綜合資料相關分析

在此小節研究者提出量化資料作為分析輔助，從整體學生 54 位正式樣本在「絕對值相關概念試題本」中的結果，各向度之 Pearson 相關如下表 4-8-1

表 4-8-1 絕對值相關概念之相關

	無向距離	長度	正負數運算	去絕對值法則	圖形
無向距離	1	.289* .034	.319* .019	.249 .069	.215 .119
長度		1	.337* .013	.237 .084	.297* .029
正負數運算			1	.533* <.0001	.278* .042
去絕對值法則				1	.426* .001
圖形					1

*表示有相關

以整體表現來說「無向距離」與「長度」及「正負數運算」相關約為 0.3，P<0.05，「正負數運算」與「長度」及「圖形」相關約為 0.3，P<0.05，以上皆有正相關性，而「去絕對值法則」與「正負數運算」相關約為 0.53，P<0.001，屬中度正相關。

此外，參與訪問 12 位學生其測驗表現及態度向度之相關方面，「測驗總分」與「學科成就」相關 0.9，P<0.0001、「測驗總分」與「問題解決」相關 0.75，P<0.01 兩者皆屬高度正相關，即學生在自我認知學科表現與實際表現沒有太大的落差，

而學生在個人解決問題的態度大大的影響到個人實際學科的表現。「學習歷程」與概念三個層次「瞭解」、「計算」及「應用」相關均在 0.73 以上，P<0.01 皆屬高度正相關，如下頁表 4-8-2：

表 4-8-2 參與訪問學生測驗成就與態度之相關

	測驗總分	學科成就	問題解決	學習歷程	概念瞭解	概念計算	概念應用	文字解讀	態度平均
測驗總分	1	.899** <.0001	.754** .005	.289 .362	.347 .269	.520 .083	.477* .117	.336 .285	.629* .029
學科成就		1	.717** .009	.455 .137	.492 .105	.561* .05	.633* .027	.487 .109	.756** .004
問題解決			1	.457 .135	.376 .228	.497 .100	.330 .295	.362 .248	.621* .031
學習歷程				1	.734** .007	.744** .006	.732** .007	.819** .001	.870* .<.0001
概念瞭解					1	.723** .008	.590* .043	.577* .049	.829** .001
概念計算						1	.580* .048	.675* .016	.874* .<.0001
概念應用							1	.763** .004	.829** .001
文字解讀								1	.820** .001
態度平均									1

*表示有相關　**表示有顯著相關

至於「瞭解」、「計算」及「應用」三個層次的概念，其兩兩關係也具有相關性，而在「文字解讀」與「測驗總分」、「學科成就」皆無相關，恰好印證前一小節的分析，平均來說中高能力學生並不覺得自己的國文程度好，低能力學生認為自己還好而已，可見現在學生對於自我的國文程度沒有信心。以整體來說，學生的學習態度影響著他的學習表現這是無庸置疑的。

第五章　研究討論與建議

本研究的目的為探討學生學習絕對值相關概念發生的錯誤之原因，透過研究者自編絕對值相關概念試題本及與學生訪問之結果，作為相關討論與建議。

本章共分為四節，第一節將依據訪問的內容進行結果的討論，此節分為兩部分，一部分為學生在解絕對值相關試題本中所發生的困難，另一部分討論學生發生困難的原因；第二節針對研究者之自編試題本進行討論；第三節描述這段時間研究者的成長；最後第四節針對教師的教學及未來研究給予建議。

第一節 研究結果的討論

一、　學生解「絕對值相關概念試題」之困難

1.　對於「距離－無向距離」方面

部分中低能力學生在「絕對值相關概念試題本」中的同義詞發生困難，無法正確連結距離與「相差的值」之關係，直覺認為只有要題目出現「相差」即是使用減法，忽略相差與距離同義，因此沒有負數，甚至有學生認為兩數相差會有正負兩種情形；另外，對於低能力學生而言，判斷單一數字的絕對值概念（某數到原點的距離）比較容易，當絕對值內含兩數字加減，或是絕對值內含一個未知數與一個數字加減，要判斷絕對值就是兩數之間的距離，對低能力的學生來說是十分困難的事。

2.　對於「距離－長度」方面

多數中低能力學生對於「移動後的長度」與「距離」及「移動後的位置與原點的距離」兩種敘述判別容易發生困難，原因之一，來自學生對於「向左（右）移動」與「向左（右）移動後的長度」混淆，在數理計算上，對於方位移動，會以加減做為方向區分，但所謂向左（右）移動後的長度單指是的兩數間的距離，兩者之間的差異，對於中低能力的學生而言，容易混為一談。此外，某低能力學

生無法解決一負數移動到另一負數的距離問題，原因在於該生無法正確解讀多個正負數加減的式子，或是無法正確解讀未知數文字符號加減某數的式子。

3. 對於「方向－正負數運算」方面

中低能力學生在逆操作使用絕對值為非負數之算術觀念時，對於相同距離而有不同方向（正負向）之概念求解產生困難，學生往往忽略負向之答案，因此在處理此類型題目時，學生易偏向尋找絕對值內為正數之解，而忽略負數之解，或是誤用絕對值為非負數之算術觀念，以偏概全認定此未知數的解必為正負某數，抑或是認為解一定是一正一負，因此無法完整回答所有可能的答案。其次，中低能力之學生在判斷四則運算較複雜的式子（含兩項）的正負時，容易產生困難，部分學生直觀認為在某括號外帶有一負號時，此式子的數值即為負數；此外，低能力學生因自我解讀對於概念理解不清楚，因此對於無解之題型，雖然本身計算後認為無解，但卻沒有信心填上「無解」之解。

4. 對於「方向－去絕對值運算」方面

在此向度內，各能力學生皆會因為過度簡化絕對值算術定義之口訣－「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」，造成解題之困難，所以解題當下做了錯誤判斷，忽略絕對值可以是 0 的事實，或者是 0 不是正數也不是負數，其中不同的是高能力學生能經由再次思考，自行發現錯誤之處，中低能力學生可經過提問或提示發現問題；其次，中低能力學生易誤用未知數之表徵，在判斷未知數的正負時，多半無法認知未知數是任意數，未知數可能為正數也可能為負數，因此誤認 x 為正數而 $-x$ 必為負數；此外，某些低能力學生在化簡絕對值內含有兩項時，容易以偏概全使用絕對值內為正就直接去掉絕對值的法則，僅將絕對值內為負的項進行變號，而非此絕對值內所有項皆須變號。

5. 對於「圖形」方面

低能力學生在絕對值算術概念不夠完善，因此在研究者增加圖形及未知數兩項條件的干擾下，學生無法使用正確概念或判斷出圖形不符合絕對值算術定義之處。此外，中低能力學生忽略絕對值均為非負數之算術概念，多數直觀產生 $|-x| = x$ 之錯誤概念，並且誤認為 x 為正數而 $-x$ 必為負數，因此判斷只要將圖形改變斜率（或是學生所說的直線走向）即為正解，或是學生認為絕對值內無論正數或負數其值都相同，所以誤認為圖形無關 x 之正負，所以應該圖形改變為與 y 軸對稱即可。

二、 學生在絕對值相關概念錯誤之原因

1. 過度簡化絕對值定義之口訣

為應付解題，學生容易把概念化簡之後，以容易記頌的方式建立對此概念的解讀，從研究中顯示，學生常將絕對值之算術定義簡化為「無論絕對值內是正數或負數出來都是正數」，所以忽略 $|0| = 0$ 的情況，甚至有學生作了錯誤的概念口訣：「在絕對值內任何數為正數」，因此造成概念的混淆，在處理具體數字時能採用正確概念，而遇到需抽象思考時將絕對值內的所有數視為正數。此外，學生對於距離的算法，依照以往舊經驗以「距離就是大數減小數」記頌，當題目出現未知符號時便無法對應處理。

2. 無法進行絕對值概念中「幾何概念」與「算術概念」之間的轉化

由本研究發現，學生在處理絕對值相關問題時，其解題策略大致可以分成用幾何定義方法與算術定義方法兩種，但多數題型會將此兩類定義混合，抑或是看似幾何問題但實際為算術概念之應用，或相反。從研究發現，多數中低能力學生傾向使用單一定義，以至於無法解決所有絕對值相關概念之題型。譬如，在逆操作絕對值問題時，學生必須完整了解絕對值為非負數之算術觀念，並考慮與原點的距離相等時，該點可以在數線的正向上或是負向上。

3. 不了解絕對值概念中各同義詞之間的關係

針對幾何定義中的無向性距離及逆操作絕對值運算之方向性，學生在判別同義詞時，會因為方向而出現概念混淆的現象，一般來說在數理計算上，對於方位移動，會以加減做為方向區分，但所謂向左（右）移動後的長度單指是的兩數間的距離，中低能力學生會在文句之解讀上發生困擾。

4. 以偏概全絕對值之定義

中低能力學生易發生將概念以偏概全的錯誤歸納，在研究中發現產生以偏概全的部分有：直覺認為只有要題目出現「相差」即是使用減法，忽略相差與距離同義皆為正；誤用絕對值內無論是正數或負數其值必為正數，認定此未知數的解必為正負某數，例如：$|\pm 2| = 2$，因此若$|x+1| = 3$，因$x = 2$為其一解，則歸納出$x = \pm 2$，抑或是誤認為x解一定是一正一負。

5. 文字符號概念之理解困難

對於題目中出現未知數之符號表徵時，學生在理解其性質有困難，以至於無法解決絕對值相關問題，例如：中、低能力的學生易發生$|-x| = x$之錯誤情形，並且誤認為x為正數而$-x$必為負數，其原因之一便是無法理解文字符號的涵義，直觀認為只要有負號出現，其值必為負數；或是在有限制x範圍條件時，學生無法判定x的值為何，因此採用代入正整數或整數求值作答；此外，學生在使用符號時，錯誤使用相同文字符號表示不同意義的值，產生與題目條件相斥的情形。

第二節 正式研究試題本之反思

本研究將絕對值概念分為「距離」: 距離之無向性及同義詞的判斷、「方向」: 計算絕對值之逆操作能力及「圖形」: 活用絕對值之幾何及算術概念三向度，由此三向度設計絕對值相關概念，藉此幫助瞭解學生在此概念的錯誤原因。本研究之「絕對值相關概念試題本」之題目某部分不同於一般例行式試題，包含開放式問題、同義詞的敘述、及函數圖形的解題判斷，研究中發現，若學生在絕對值的算術概念及幾何概念夠清楚的話，所有題目皆可明確判斷。但在試題中因大量使用到未知數文字符號，因此對於未知數之抽象概念無法理解的學生而言，較無法判別其能力到達那個程度，此外，第 9 題第 4 小題原設計是希望學生能使用「兩點間的距離」求解，但由學生表現，幾乎全體學生均使用「去絕對值運算」作代數處理，未符合判別該向度之能力，所以研究者僅能藉由訪問詢問學生是否具備此能力。

第三節 研究者的成長

在這段時間的研究中，為了釐清研究者本身對於絕對值概念的理解，及周全所有對於絕對值之相關概念，與教育夥伴、指導教授多次腦力激盪過程中，體會到集思廣益的重要性；並且在翻閱相關書籍及教科書時，讓從事教育工作者的研究者，在絕對值教材的詮釋上有更深刻的體悟，同時，研究者從訪問中瞭解題高與學生對談之技巧與傾聽學生想法的重要性，這促進了個人教學之反思，對研究者未來之教職生涯助益良多。此外，在做研究的過程裡，研究者除了增加蒐集資料的能力，也瞭解到研究之精隨，更在此探索到內在的自我。

第四節 建議

一、 教學上的建議

1. 加強絕對值之幾何概念

現行國內國中教科書中，絕對值概念介紹所佔之篇幅非常小，而在課程內容豐富的狀況下，安排絕對值相關例題的空間有限，研究者發現目前教科書皆以幾何觀點解釋絕對值，但在研究中顯示，普遍學生在數線上表示距離的能力遠低於絕對值的計算能力，而幾何概念清晰的學生在解決絕對值相關類型時，有較佳的表現。因此建議教師在進行絕對值的教學時，增加學生在數線上表示距離的練習，並加強在數線上表示距離的呈現方式，包含與原點的距離、兩點間的距離及變化點移動後的距離…等牽扯到方向變化的題目，加強學生幾何概念，並協助學生釐清「移動後的長度」、「移動後的位置與原點的距離」及「相差」與「距離」之同義關係。

2. 加強絕對值之幾何概念及算術概念間的轉化

從研究發現，多數中低能力學生對於絕對值幾何及算術定義無法活用，針對不同題型進行轉化，而傾向使用單一算術概念，以至於無法解決所有絕對值相關概念之題型。金玉麒（1987）也指出運用代數意義與幾何意義交互引證，有助於釐清學生對於絕對值相關概念的迷思，因此建議教師在教學時多強調不同題目的算術解法與幾何解法多元觀點，讓學生熟悉兩者間的轉換，亦可多給予學生練習分辨的機會。

3. 使用最正確之教學口訣幫助學生建立正確概念

學生容易依本身舊經驗結合新概念或自行發現的解題技巧，而將概念定義簡化為容易記頌的口訣，因此產生錯誤之迷思概念，因此在教學中協助學生使用正確口訣，將會讓學生減少錯亂的現象，例如：多數學生認知絕對值就是「無論絕

對值內是正數或負數出來都是正數」，可改為「任何數的絕對值為非負數」，並加強非負數指的是所有正數及 0。

4. 訓練學生以解釋概念舉出正例與反例

在訪問過程中，研究者發現能明確舉出題目反例的學生，代表該生真正瞭解此概念，並且能正確判斷題幹說明，因此，多鼓勵學生解釋概念並舉出正反例有助於幫助學生隨時釐清概念。

5. 提高提問技巧

因本研究採取訪問之質性方法蒐集資料，因此與學生多次的訪問中發現，學生會從教師的提問用詞及語調，臆測老師想要獲得什麼答案，而選擇回答方式，因此在教學現場中，若要更精準瞭解學生真實想法，對於不同的教學目的，教師需使用不同的提問方式，如此一來可達到最大成效；例如採用開放式問句，你認為如何？或是適當使用具有提示效果的問法，當然提問方式會因為各種外在因素而異，並非適用所有情境，例如學生個人與教師之間關係、學生對語意的解讀等，有賴教師本身視情況而定。

二、研究上的建議

1. 本研究對象僅包含研究者個人所任教之九年級學生，建議可擴大研究對象人數，或是對於各年級分別進行討論，更能代表全體學生在此單元之表現。
2. 因本研究僅討論學生在絕對值相關概念中所可能發生的錯誤概念，建議未來可加入更多向度的分析，例如函數概念、文字符號等不同因素對學生判斷解題之影響。

附錄一

絕對值概念預試試題本

______班______號 姓名：____________

作答說明：
1. 這份測驗的主要目的是想了解你對於『絕對值』概念的學習情況，在試題中都留有空白空間，希望你利用此空間寫下所有計算過程，讓我們能清楚了解你的解題過程。
2. 請勿塗改任何過程，若有寫錯的地方請直接劃掉或打『×』，例如：~~1234~~。
3. 本試題共 36 題，請同學每題都作答，盡量不要空白。感謝你的協助！

第一部分暢所欲言

1. 你認為什麼是「絕對值」？請詳細說明，並舉例。

「絕對值」就是：

2. 你認為$|-3|$是什麼？請詳細說明。你覺得$|-3|$可以在數線上解釋嗎?

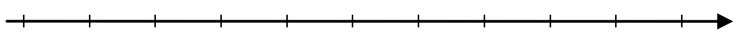
怎麼解釋?

你認為$|3|$和$|-3|$有哪些關連性？

$|-3|$就是：

$|-3|$ □可以 □不可以 在數線上解釋(請在□打✓)

如果可以請解釋：



$|3|$和$|-3|$有哪些關連性？

3. 你認為$|-2+6|$是什麼？請詳細說明。你覺得$|-2+6|$可以在數線上解釋嗎?

怎麼解釋?你認為$|-2+6|$和$|2-6|$有哪些關連性？

$\lvert -2+6 \rvert$就是：
$\lvert -2+6 \rvert$ □<u>可以</u> □<u>不可以</u> 在數線上解釋(請在□打✓) 如果可以請解釋： 
$\lvert -2+6 \rvert$和$\lvert 2-6 \rvert$有哪些關連性？

第二部分 計算思考題

4. 關於$|2-7|$的敘述，你認為下列<u>哪些</u>是正確的?正確請在□內打✓(可複選)

□A.$|2-7|=|-5|=-5$
□B.$|2-7|=|-2+7|$
□C.$|2-7|=-(2-7)$
□D.$|2-7|=|7-2|$
□E.$|2-7|=+5$ 或 -5

5. 關於$|11-6|$的敘述，你認為下列<u>哪些</u>是正確的?正確請在□內打✓(可複選)

□A.$|11-6|$可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離

□B.$|11-6|$等於數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度

□C.$|11-6|$等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度

□D.$|11-6|$等於數線上坐標 11 向左移動 6 單位後與原點的距離

□E.$|11-6|$等於數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置

□F.6 和 11 相差的值可以用$|11-6|$來表示

6. 請計算下列各絕對值：

(1) $|-10|=$__________。

(2) $|20-9|=$__________。

7. 請完成計算絕對值的過程：請於□中填入＋、－

(1) $|7-12|=(\square 7)-(\square 12)$

(2) 已知 x 為大於 3 的任意數，則$|x-1|=(\square x)-(\square 1)=$___________。

8. 關於$|x-5|$的敘述，你認為下列<u>哪些</u>是正確的?正確請在□內打✓

□A.$|x-5|$一定是正數

□B.$|x-5|=|5-x|$

□C.$|x-5|=1$

□D.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度

□E.$|x-5|$等於數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度

□F.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為 x 與原點的距離

□G.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離

□H.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離

9. 請根據以下各題所給的方程式，求出所有符合之 x 的數值:

(1) $|x|=2$，$x=$_________。　(2) $|x-5|=0$，$x=$_________。

(3) $|x-5|=1$，$x=$_________。　(4) $|x+3|=4$，$x=$_________。

10. 請化簡下列各題(化簡指的是不使用絕對值來表示，可以使用未知數之式子形式表現)：

(1) 假設k為正整數，那$|k|$可以化簡為________________。

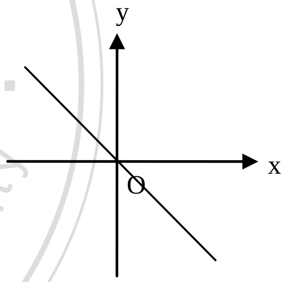
(2) 假設k為負整數，那$|k|$可以化簡為________________。

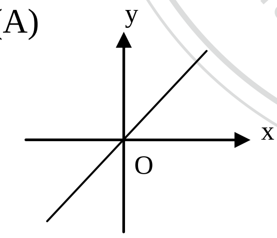
(3) 假設k為任意實數，那$|k|$可以化簡為________________。

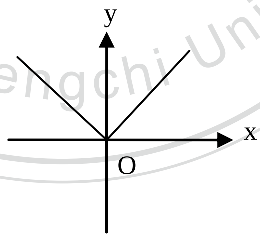
(4) 已知x為任意實數，且$1<x<6$，則$|x+3|+|x-10|$可以化簡為__________。

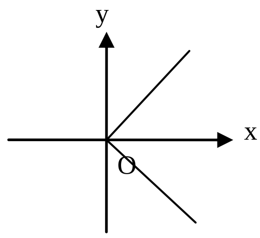
11. (　　　　)已知$y=f(x)=-x$的圖形如右，

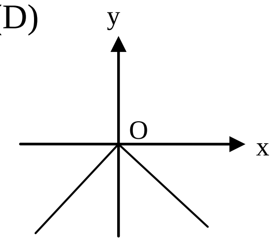
則$y=g(x)=|-x|$的圖形應為下列哪一個？

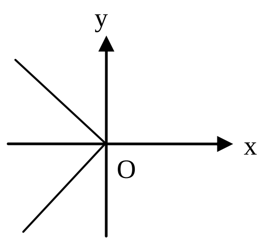


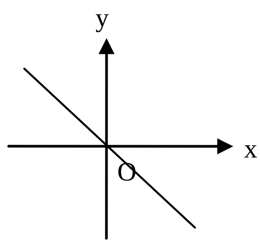
(A)


(B)


(C)


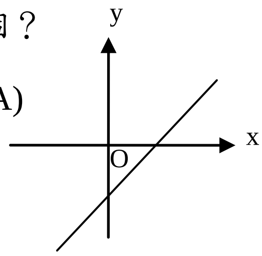
(D)


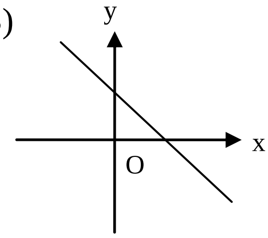
(E)


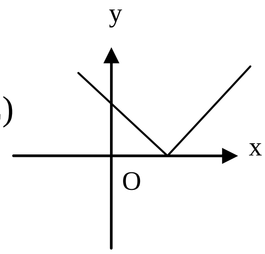
(F)


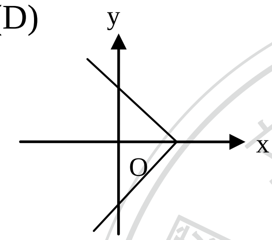
請說明選擇此選項的原因：

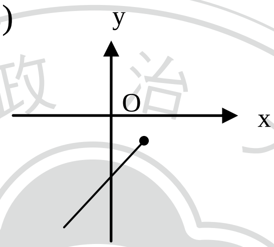
12. (　　　　)請問 $y=f(x)=|x-5|$，且 $x\le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？

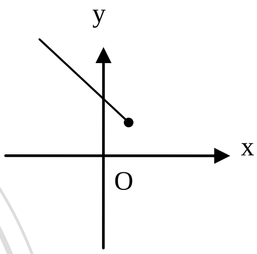
(A)


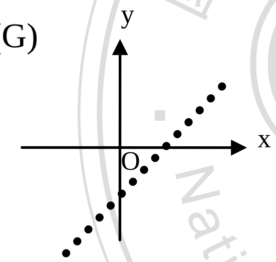
(B)


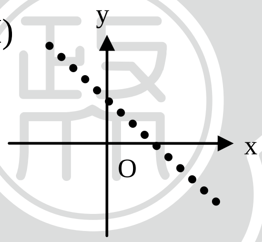
(C)


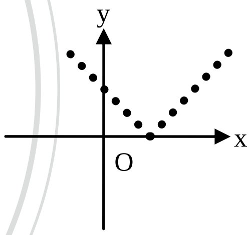
(D)


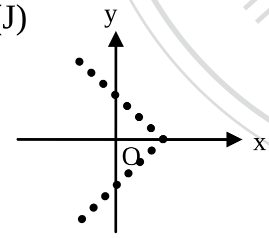
(E)


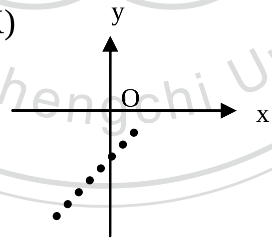
(F)


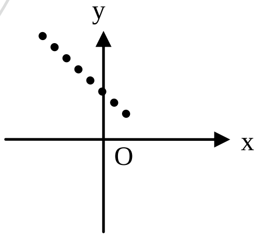
(G)


(H)


(I)


(J)


(K)


(L)


請說明選擇此選項的原因：

附錄二

絕對值概念正式試題本

______班_______號 姓名：______________

作答說明：

1. 這份測驗的主要目的是想了解你對於『絕對值』概念的學習情況，在試題中都留有空白空間，希望你利用此空間寫下所有計算過程，讓我們能清楚了解你的解題過程。
2. 請勿塗改任何過程，若有寫錯的地方請直接劃掉或打『×』，例如：~~1234~~。
3. 本試題共 30 題，請同學每題都作答，盡量不要空白。感謝你的協助！

第一部分暢所欲言

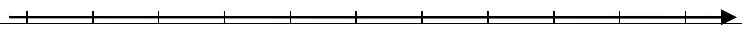
1. 你認為什麼是「絕對值」？請詳細說明，並舉例。

「絕對值」就是：	舉例：

2. 你認為$|-3|$是什麼？請詳細說明。你覺得$|-3|$可以在數線上解釋嗎?

   怎麼解釋?

   你認為$|3|$和$|-3|$有哪些關連性？

$\|-3\|$就是：
$\|-3\|$ □<u>可以</u> □<u>不可以</u> 在數線上解釋(請在□打✓) 如果可以請解釋： 
$\|3\|$和$\|-3\|$有哪些關連性？

3. 你認為$|-2+6|$是什麼？請詳細說明。你覺得$|-2+6|$可以在數線上解釋嗎?

怎麼解釋?你認為$|-2+6|$和$|2-6|$有哪些關連性？

$|-2+6|$就是：

$|-2+6|$　□可以 □不可以　在數線上解釋(請在□打✓)

如果可以請解釋：

$|-2+6|$和$|2-6|$有哪些關連性？

第二部分 計算思考題

4. 關於$|11-6|$的敘述，你認為下列哪些是正確的?正確請在□內打✓(可複選)

□A.$|11-6|$可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離

□B. 數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成$|11-6|$

□C. $|11-6|$等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度

□D. $|11-6|$等於數線上坐標點 11 向左移動 6 單位後與原點的距離

□E. 數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置坐標等於$|11-6|$

□F. 6 和 11 相差的值可以用$|11-6|$來表示

□G.$|11-6|=|6-11|=-(6-11)$

5. 請計算絕對值：$|9-20|=$______。

6. 請完成計算絕對值的過程：請於□中填入＋、－，並寫出化簡後的答案。

(1) $|7-12|=(\square 7)-(\square 12)=$______。

(2) 已知x為大於 3 的任意數，則$|x-1|=(\square x)-(\square 1)=$______。

7. 關於$|x-5|$的敘述，你認為下列哪些是正確的?正確請在□內打✓

□A.$|x-5|$一定是正數

□B.$|x-5|=|5-x|$

□C.$|x-5|=1$

□D.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x移動到坐標 5 的長度

□E.數線上坐標-5 移動到某一點坐標為x的長度可以寫成$|x-5|$

□F.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x與-5 的距離

□G.$|x-5|$等於數線上某一點坐標為x向左移動 5 個單位後與原點的距離

8. 請根據以下各題所給的方程式，求出所有符合之x的數值:

(1) $|x|=2$，$x=$______。 (2) $|x|+4=0$，$x=$______。

(3) $|x+3|=4$，$x=$______。 (4) $|x-5|=1$，$x=$______。

9. 請化簡下列各題(化簡指的是不使用絕對值來表示，可以使用未知數之式子形式表現)：

(1) 假設 k 為正整數，那 $|k|$ 可以化簡為________________。

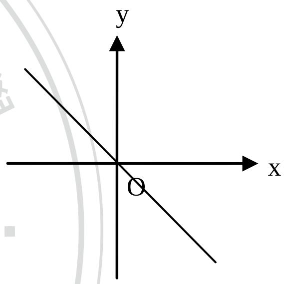
(2) 假設 k 為負整數，那 $|k|$ 可以化簡為________________。

(3) 假設 k 為任意數，那 $|k|$ 可以化簡為_______________。

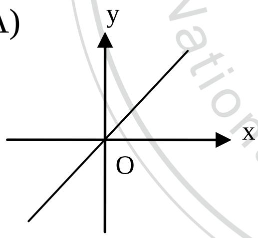
(4) 已知 x 為任意數，並且 $1<x<6$，那麼 $|x+3|+|x-10|$ 可以化簡為__________。

10. (　　　　)已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，

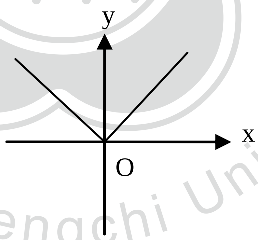
則 $y=g(x)=|-x|$ 的圖形應為下列哪一個？



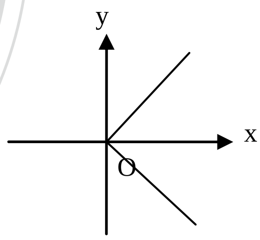
(A)



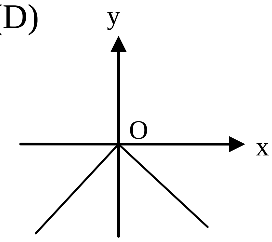
(B)



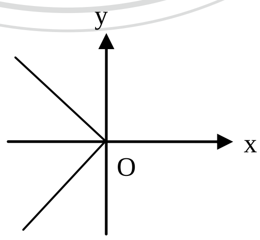
(C)



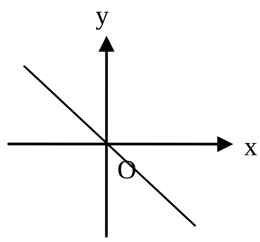
(D)



(E)

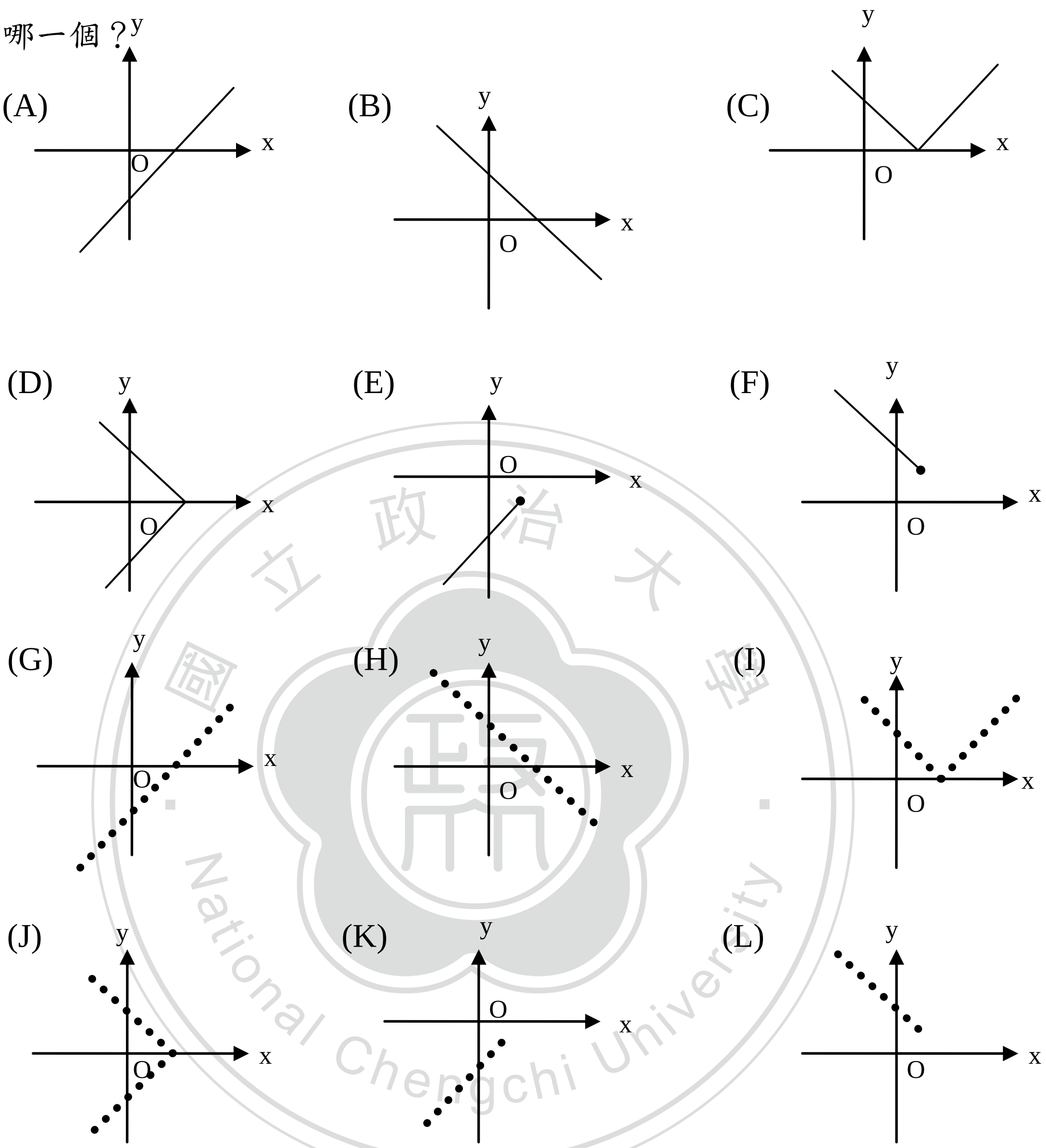


(F)



請說明選擇此選項的原因：

11. (　　　　　)請問 $y = f(x) = |x-5|$，並且符合 $x \le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？



請說明選擇此選項的原因：

附錄三

學生背景資料問卷

姓名：______________ 年齡：__________ 年級：________ 性別：□男 □女

父親職業：____________ 母親職業：____________

有無參加課外加強補習(含個別家教)：

□有 ______科，一周______小時、______科，一周______小時、

______科，一周______小時、______科，一周______小時

□無

當我遇到數學有問題的時候，我會去問：______________

	非常不同意	不同意	還好	同意	非常同意
1. 我很喜歡數學	1	2	3	4	5
2. 我覺得數學很簡單	1	2	3	4	5
3. 我的數學成績很好	1	2	3	4	5
4. 我平常會跟同學討論數學	1	2	3	4	5
5. 家中有人指導我的數學功課	1	2	3	4	5
6. 國中學習這些概念時，我學得很好	1	2	3	4	5
7. 國中學習這些概念時，我覺得老師教得很清楚	1	2	3	4	5
8. 國中學習這些概念時，我上課都很認真	1	2	3	4	5
9. 我瞭解數學中「移動」的意思	1	2	3	4	5
10. 我瞭解數學中「距離」的意思	1	2	3	4	5
11. 我瞭解數學中「絕對值」的意思	1	2	3	4	5
12. 我瞭解數學中「去絕對值符號」的意思	1	2	3	4	5
13. 我瞭解數學中「函數圖形」的意思	1	2	3	4	5
14. 我覺得「移動」的計算很簡單	1	2	3	4	5
15. 我覺得「距離」的的計算很簡單	1	2	3	4	5
16. 我覺得「絕對值」的計算很簡單	1	2	3	4	5
17. 我覺得「去絕對值符號」的計算很簡單	1	2	3	4	5
18. 我覺得「正負數加減」的計算很簡單	1	2	3	4	5
19. 我覺得「移動」的應用很簡單	1	2	3	4	5
20. 我覺得「距離」的應用很簡單	1	2	3	4	5
21. 我覺得「絕對值」的應用很簡單	1	2	3	4	5
22. 我覺得「去絕對值符號」的應用很簡單	1	2	3	4	5
23. 我覺得「正負數加減」的應用很簡單	1	2	3	4	5
24. 我覺得「函數圖形」的應用很簡單	1	2	3	4	5
25. 我的國文成績很好	1	2	3	4	5
26. 在做數學題目的時候，我會在沒有瞭解題目的情況下就進行計算	1	2	3	4	5
27. 在回答數學的應用題時，我都很清楚地了解題目的意思 因為：	1	2	3	4	5

附錄四

絕對值相關概念訪問流程記錄表

訪談學生：______________

提出該生紙筆測驗的紙本，分段訪談

根據第一部份該生的回答，進一步詢問當時回答之想法，為什麼?是否還有遺漏?

第一部分
1. 你認為什麼是「絕對值」？請詳細說明，並舉例。 學生想法
2. 你認為$\vert -3\vert$是什麼？請詳細說明。你覺得$\vert -3\vert$可以在數線上解釋嗎?怎麼解釋? 你認為$\vert 3\vert$和$\vert -3\vert$有哪些關連性？ 學生想法
3. 你認為$\vert -2+6\vert$是什麼？請詳細說明。你覺得$\vert -2+6\vert$可以在數線上解釋嗎? 怎麼解釋?你認為$\vert -2+6\vert$和$\vert 2-6\vert$有哪些關連性？ 學生想法

第二部分

- 將學生錯誤題號圈選出，並詢問學生解題時的想法：
  1. 可不可以說一下，你為什麼這樣的方法算？為什麼這樣寫？
  2. 這樣的解題策略是哪來的？（例如:自己想的、老師講解過、教科書上或其他）
  3. 這題的解題關鍵是什麼？
  4. 為什麼你沒有用到題目的哪個條件？
  5. 那與你在第一部分認為絕對值的定義有什麼不同？（使用非同一概念解題者）
  6. 你覺得哪一個答案是最好的答案（當答案有多個時）
  7. 答案只有一個嗎？（當答案只有一個時）
  8. 如果不用這個方法算，你會使用什麼方法？
  9. 用猜的應該也有些感覺讓你猜這個答案的吧？你是依照哪一個條件去判斷的？
     那你為什麼不猜另一個？
- 如果學生在訪問時發現似乎有別的答案時：
  1. 為什麼你認為有別的答案？
  2. 所以你認為答案應該是什麼？
  3. 那為什麼先前沒有發現這個解法（或想法）？
- 針對無法回答的學生
  1. 你覺得題目的意思是什麼？
  2. 這題要用到什麼觀念？
  3. 把解題過程寫出來給該生看，依照步驟來檢視他是否有這個概念

<table>
<tr><td colspan="2">向度</td><td>問題
情境</td><td>作答錯誤題號</td><td colspan="2">錯誤題數</td></tr>
<tr><td rowspan="2">距離</td><td rowspan="2">無向距離</td><td>數字</td><td>4A 、 4F</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>符號</td><td>7B 、 7F 、 9(4)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">學生答題情況</td><td colspan="3">訪問記錄</td></tr>
<tr><td colspan="3">4A.$\left|11-6\right|$可以解釋為數線上坐標 6 和坐標 11 的距離

4F.6 和 11 相差的值可以用$\left|11-6\right|$來表示

7B.$\left|x-5\right|=\left|5-x\right|$

7F.$\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 與-5 的距離

9(4)已知 x 為任意數，並且$1<x<6$，那麼$\left|x+3\right|+\left|x-10\right|$可以化簡為_________。</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">向度</td><td>問題情境</td><td>作答錯誤題號</td><td colspan="2">錯誤題數</td></tr>
<tr><td rowspan="2">距離</td><td rowspan="2">長度</td><td>數字</td><td>4B 、 4C 、 4D 、 4E</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>符號</td><td>7D 、 7E 、 7G</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">學生答題情況</td><td colspan="3">訪問記錄</td></tr>
<tr><td colspan="3">4B 數線上坐標 6 向右移動到坐標 11 的長度可以寫成$\left|11-6\right|$

4C. $\left|11-6\right|$等於數線上坐標-6 向左移動到坐標-11 的長度

4D $\left|11-6\right|$等於數線上坐標點 11 向左移動 6 單位後與原點的距離

4E 數線上坐標 11 向左移動 6 單位後的位置坐標等於$\left|11-6\right|$

7D $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 移動到坐標 5 的長度

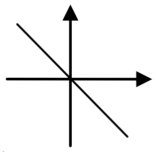
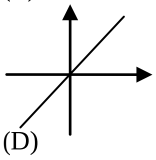
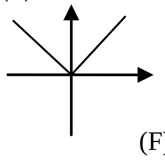
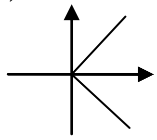
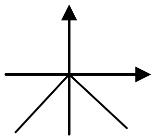
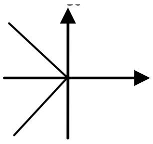
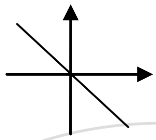
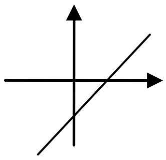
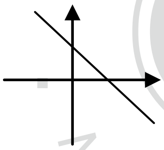
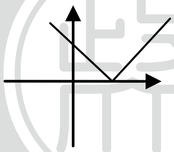
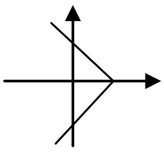
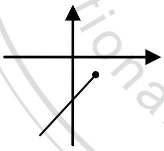
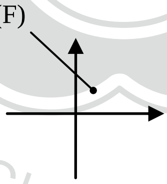
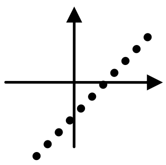
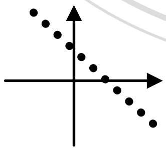
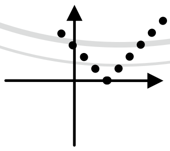
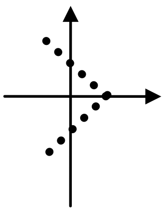
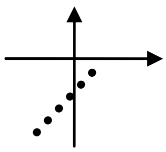
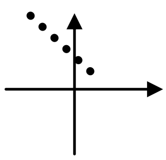
7E 數線上坐標-5 移動到某一點坐標為 x 的長度可以寫成$\left|x-5\right|$

7G $\left|x-5\right|$等於數線上某一點坐標為 x 向左移動 5 個單位後與原點的距離</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

向度		問題情境		作答錯誤題號	錯誤題數	
方向感	正負數運算	數字		4G 、 5		
		符號		8(1) 、 8(2) 、 8(3) 、 8(4)		
學生答題情況			訪問記錄			
4G.$\lvert 11-6\rvert=\lvert 6-11\rvert=-(6-11)$ 5.$\lvert 9-20\rvert=$________。 8(1)$\lvert x\rvert=2$，$x=$________。 8(2)$\lvert x\rvert+4=0$，$x=$________。 8(3)$\lvert x+3\rvert=4$，$x=$________。 8(4)$\lvert x-5\rvert=1$，$x=$________。						

向度		問題情境		作答錯誤題號	錯誤題數	
方向	去絕對值運算法則	數字		6(1)		
		符號		6(2)、7A、7C、9(1)、9(2)、9(3)		
學生答題情況			訪問記錄			
6(1)$\lvert 7-12\rvert=(\square 7)-(12)$ =________。 6(2)已知 x 為大於 3 的任意數，則 $\lvert x-1\rvert=(\square x)-(\square 1)$ =____________。 7A.$\lvert x-5\rvert$一定是正數 7C.$\lvert x-5\rvert=1$ 9(1)假設 k 為正整數，那$\lvert k\rvert$可以化簡為______________。 9(2)假設 k 為負整數，那$\lvert k\rvert$可以化簡為______________。 9(3)假設 k 為任意數，那$\lvert k\rvert$可以化簡為______________。						

向度	問題情境	題號	錯誤題數

<table>
<tr><td>圖形</td><td>去絕對值運算法則</td><td>絕對值函數圖形</td><td>10 、 11</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">學生答題情況</td><td colspan="2">訪問記錄</td></tr>
<tr><td colspan="3">10.已知 $y=f(x)=-x$ 的圖形如右，
則 $y=g(x)=\left|-x\right|$ 的圖形應為下列哪一個?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

(F)
</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">11.請問 $y=f(x)=\left|x-5\right|$，且 $x\le 2$ 的圖形最有可能為下列哪一個？
(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

(F)

(G)

(H)

(I)

(J)

(K)

(L)
</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

參考文獻

一、 英文文獻

Ahuja, M. (1976). An approach to absolute value problems. *The Mathematics Teachers*, *69*(7), 594-596.

Brumfiel, C. (1980). Teaching the absolute value function. *The Mathematics Teachers*, *73*(1), 24-30.

Dreyfus, T. (1985). A graphical approach to solving inequality. *School Science and Mathematics*, *85*(8), 561-662.

Almog, N., & Ilany, B.-S. (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Education Studies in Mathematics, 81*, 347-364.

Ozmantar, M., & Roper, T. (2004). Mathematical abstraction through scaffolding. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 481–488.

Parish, C. R. (1992). Inequalities, absolute value, and logical connectives. *The Mathematics Teacher*, *85*(9), 756-757.

Sink, S. C. (1979). |Understanding absolute value|<0. *The Mathematics Teachers, 72*, 191-195.

Shuell, T. (1990). Phases of meaningful learning. *Review of Educational Research*, *60*, 531-547.

Siegel, A. W. (1981). The externalization of cognitive maps by children and adults: A search of ways to ask better questions. In L. S. Liben, A. H. Patterson & N. Newcomb (Eds.), *Spatial representation and behavior across the lifespan* (pp.167-194). New York, NY: Academic Press.

Taira, K. T. (1987). *Error reduction strategies for whole number operations in grade* *four*. Unpublished doctoral dissertation of the Brigham Young University, Provo, Utah.

二、中文文獻

王克先(1996)。**學習心理學**。臺北市：桂冠圖書公司。

左台益(2013)。**國民中學數學第一冊**。臺南市：南一書局企業股份有限公司。

李美君(2007)。**高職學生線型函數相關特徵概念錯誤類型之分析研究**。未出版之碩士論文，國立政治大學應用數學研究所，臺北市。

李靜瑤(1994)。**高雄市國二學生數學解題歷程之分析研究**。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學數學研究所，高雄市。

周何總主編(1987)。**國語活用辭典**。臺北市：五南圖書出版股份有限公司。

金玉麒(1987)。**國中生絕對值與不等式概念的錯誤分析及補救教學**。(NSC75-0111-S017-005)。臺北市：行政院國家科學委員會。

洪碧芳(2003)。**青少年的絕對值與不等式開念發展研**(NSC91-2522-S-240-002)。臺北市：行政院國家科學委員會。

張立群(2003)。**台南地區國一學生整數的加減法單元錯誤類型之分析研究** 。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學數學系，高雄市。

張春興(1996)。**教育心理學**。臺北市：東華書局。

張景媛(1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念之研究。**國立台灣師範大學教育心理與福導學系教育心理學報**，**27**，175-200。

陳昭地(1986)。**國民中學數學科教科書第一冊**。國立編譯館。

陳瑾儀(2012)。**國一學生一元一次不等式錯誤類型分析之研究**。未出版之碩士論文，國立政治大學應用數學研究所，臺北市。

楊秀菁(2012)。**高中生絕對值概念學習之錯誤類型分析研究－以彰化地區某高中為例**。未出版之碩士論文，國立中興大學應用數學研究所， 臺中市。

楊瑞智(1990)。四則運算的錯誤類型及教學上的應用。**國教月刊，36**(9-10)。

趙文敏(1985)。**數學史第一卷**。臺北市，協進圖書公司。

劉雲章(2003)。**數學溯源－數學名詞的故事**。新竹市，凡異出版社。

黃武雄(1979)。中國數學史簡說。數學傳播第三卷第三期。2013 年 12 月 28 日，取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_3_06/index.html。

蘇慧娟(1998)。**高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型之分析研究**。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學數學研究所，高雄市。