國立政治大學應用數學系

數學教學碩士在職專班

碩士學位論文

類典型相關分析及其在

免試入學上採計成績之研究

A canonical correlation analysis type approach to model a criterion for enrolling high school students

碩專班學生：卓惠敏　撰

指導教授：宋傳欽　博士

中華民國 104 年 1 月 10 日

誌謝

在碩士求學生涯中，承蒙恩師宋傳欽教授的耐心包容與細心指導，給予論文方向的啟發與撰寫上的教導，使我獲益匪淺，在完成論文之際，感謝老師的諄諄教誨；其次要感謝口試委員姜志銘教授與譚克平教授，在百忙中撥冗指導並給予寶貴的意見，讓學生在完成這本論文時，能更臻完善。

再者，要感謝我的父母，於成長過程中，其民主開放的管教態度給予極大的發展空間，無論做任何事，總是給予最大的支持及鼓勵；最後，也要感謝老公的協助與陪伴、公婆的支持，讓我無後顧之憂得以完成論文。

謹以本論文獻給所有幫助過我的師長、同學、朋友與最親愛的家人，並獻上我最誠摯的感謝與祝福！

國立政治大學　應用數學系

數學教學碩士專班　卓惠敏

中華民國一百零四年一月十日

中文摘要

實施十二年國民基本教育，目的是為促進學生五育均衡發展，兼顧國中學習品質及日常生活表現。由於各校對成績的評分標準與評分方式皆不相同，因此如何使在校成績採計達到公平性將成為一項重要的問題。

戴岑熹 (2011) 考慮了國中在校綜合學科分數與基測總分間的相關性，以決定在校各學科的權重。而本研究延伸其概念與方法，將基測各科量尺分數考慮進來，於在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數的關聯性最密切的情況下，分析各學科權重的取決方式，希望能找出較理想的模式來代表學生在校三年的整體學習表現與成果，以做為免試升學採計在校成績的參考與依據。

本文的研究方法是運用典型相關分析的理論，但因權重的限制條件與傳統典型相關分析的要求不同，因此，便將其命名為「類典型相關分析」。在類典型相關分析中，我們證明了在校各學科分數及基測各科量尺分數的最佳權重，可先透過典型相關分析求得典型相關向量，若有必要的話，使用 Rao-Ghangurad 方法加以修正，最後，再將所獲得的非負典型相關向量正規化，即可獲得所要的結果，這是一個求最佳權重向量極便捷的途徑。在實例分析方面，我們發現了一個有趣的現象，即在校學科分數與基測考科量尺分數的最佳權重向量相當接近，即名稱相同的學科與考科幾乎有相同的權重。在比較了幾個權重分配方式不同的在校綜合學科分數後，我們也發現一般學校常用的等加權模式，其表現結果也頗優異。

關鍵詞：在校學科分數、國中基測量尺分數、主成份分析、類主成份分析、典型相關

分析、類典型相關分析

Abstract

The purpose of implementing the twelve-year compulsory education is to promote the balanced development of learning in students, taking into account their learning quality and normal daily performances in school. As the evaluation standard and method vary among schools, achieving fairness in calculating in-school grades has become an important issue.

Dai (2011) considered the correlations between the scores of in-school academic performance and the total score of the BCTEST for junior high schools, which decided to the weightings of all learning subjects. This study extended his concept and method, and took into account the scale scores of all learning subjects. In the closest case of the weightings of all learning subjects and find out the correlations between the scores of in-school academic performance and the BCTEST, and analyse the weightings of all learning subjects. We hope the study can find a better approach that can not only reflect students' learning situations and achievements for the three years in school but also provide a reference for the evaluation of entering senior high schools without entrance examinations.

The research method in this paper employs the theory of canonical correlation analysis. However, due to that fact that weight restrictions are different from the requirements of canonical correlation analysis, it is named as the canonical correlation analysis type approach. In the canonical correlation analysis type approach, we proved that the optimal weights for school subject score and test subject score scales can be obtained by finding the canonical correlation vectors using canonical correlation analysis. Then the Rao-Ghangurad method can further be used for amending, if needed. Finally, the non-negative canonical correlation vectors generated would be normalized to get the desired result. It is an extremely convenient way to obtain the optimal weight vector. In the case study, we found an interesting phenomenon as follows: When the optimal weight vectors for school subject score and test subject score scales were very close, subjects and tests of the same name had almost the same weight. After comparing several comprehensive school subject scores of different weight distribution, we also found that the results of the equal weighting model commonly used in schools also showed quite good results.

Keywords：scores of in-school academic performance, scores of the BCTEST for junior high schools, principal component analysis, principal component analysis type approach, canonical correlation analysis, canonical correlation analysis type approach

目錄

表目錄

圖目錄

第 1 章　緒論

本章共分為五節，第一節為研究動機；第二節為研究目的；第三節為研究問題及研究方法；第四節為研究對象及研究限制；第五節為研究流程。

1.1　研究動機

隨著經濟的全球化，國際之間的競賽日益白熱化，同時，有鑑於人力資源在知識經濟時代的重要性，各國無不卯足全力進行教育改革，而自由化、市場化可以算是主要的改革基調，台灣也不例外。為了提升國家競爭力，振興經濟、促進社會繁榮，邁向現代化與國際化的全人教育是知識經濟時代不可或缺的國家基本政策 (黃榮村，2003)。

近 50 年來，臺灣後期中等學校入學與考試方式的發展，分為高中職聯招時期和多元入學方案暨國民中學學生基本能力測驗實施時期兩個階段。在 2001 年前的高中職聯招時期，入學制度採分類型聯合招生考試併同聯合分發的方式設計，並以考試分數的高低決定學生選擇學校的先後順序。此種「單一考試、聯合分發」的入學設計無法解決學生分流所面對的問題。在 2001 年之後實施的高中職多元入學方案，希望在公平公正之前提下，改變傳統聯考以單一智育成績分發篩選，改以學生基本學習能力評量作為門檻檢定，期能導引國民中學教育轉向注重學生學習潛能之啟發與多元適性之發展。為加速入學制度的改革，緩解國中學生升學競爭壓力，教育部於 2009 年開始宣導推動擴大高中職及五專免試入學實施方案，期以漸進彈性、因地制宜等原則，逐步提高免試入學比率或名額，調整多元入學管道，建立適合各地區國中學生的升學方式。而為

因應新世紀的來臨、舒緩升學壓力、導引國中教學正常化，增進國中學生依其性向、興趣發展，獲得適才、適性的教育機會，教育部宣布於民國 103 年正式實施十二年國民基本教育，以達有教無類、因材施教、適性揚才、多元進路與優質銜接等五大理念。

在上述背景脈絡下，紙筆測驗始終被認為是較為客觀公平的評量方式，即使接軌十二年國民基本教育，採用紙筆測驗以外的多元方式 (如實作評量、檔案評量、口語評量等)，展現學生的不同能力，但在現行狀況下，仍需規劃實施教育會考，以做為學力檢定機制與免試入學「超額比序」的比序項目之一。從許多研究（李堯，2006；謝文全，2001；鍾宜興，2004）的歸納整理顯示，雖然各個國家的教育體系對於「設立不同性質學校以提供不同教育內容」有不同的時間點，但最終都必須將學生依照能力、性向差異分流進入各種類型的學校就讀。因此，如何設計可處理學生分流問題的入學制度，以臻公平性，也就成為重要的教育議題。

實施十二年國民基本教育，目的是為促進學生五育均衡發展，兼顧國中學習品質及日常生活表現，教育部訂有「免試入學超額比序參考項目」及「多元學習表現採計原則」(詳見十二年基本國民教育網站)。因此，無論是紙筆測驗或多元評量方式，建議應透過分數調整機制（moderation）以保公平性與可比較性，所得之最終評核分數多是作為後續畢業或升學的用途（Mercurio, 2008）。

戴岑熹 (2011)「高中職及五專免試入學採計國中在校學科分數加權機制之研究」一文中，其運用類主成份分析與類典型相關分析，決定各科在校成績的權重，以求得一個新的合成變量，其中，在「類典型相關分析」裏戴岑熹只考慮了國中在校學科分數與基測總分間的相關性，但並未考量到各科量尺分數，亦即基測各科的權重是相等的；因之本研究延伸其概念與方法論將各科量尺分數考慮進來，欲了解採計學生學習表現時，透過數學理論與統計分析的研究方法，分析各領域學科權重取決方式，探討國中在校學科分數 (以下皆稱為「在校綜合學科分數」) 與基測各科成績 (以下皆稱為「基測綜合量尺分數」) 的關聯性；典型相關分析與類典型相關分析的差別在於限制條

件的不同，典型相關分析為係數平方和等於 1，而類典型相關分析中，則是加權總和等於 1 與各科權重值大於或等於 0(亦即，每科的權重不必完全相同，不可為負，也不能全部為零)。因此本研究為了區別之便，將戴岑熹的研究方法稱為「特殊類主成份分析」與「特殊類典型相關分析」，而本研究則稱為「類主成份分析」與「類典型相關分析」，探討在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數間的相關性是否最為密切，以期達到符合客觀、公平的目的。

1.2 研究目的

十二年國民基本教育列車已然開始啟動，將配合十二年國民基本三大願景及七大目標，以「學生主體、課程連貫與統整、培養國民核心素養」為基本理念，實施課程教學與多元評量，然無論是紙筆測驗或多元評量方式，如何客觀公平、公正採計學生學習表現將是一門重要課題。根據台北市與新北市國民小學及國民中學學生成績評量補充規定，各個別學習領域學期成績乘以各該學習領域每週學習節數，所得總和再除以每週學習領域總節數為學習領域評量之學期總平均成績，亦即國民中小學學期總成績是以加權方式計算。因此，本研究仿照統計多變量分析中的典型相關分析方法，探討學生在校 (三學年前五學期) 各學科分數與基本學力測驗 (本文中簡稱「基測」) 各科量尺分數的關聯性，導出各學習領域最佳化權重之取決方式，期使學業總平均的採計方式能真實呈現其學習表現，以符合公平、公正原則。

1.3 研究問題及研究方法

本研究針對台北市與新北市地區，以網路形式蒐集資料，整理後採用 103 位學生三學年五學期的在校成績與 102 年度基測量尺成績，共計有國文、英文、數學、社會及自然等五個學科。雖然十二年國教實施後，將有利老師採用紙筆測驗以外的多元方式，如實作評量、檔案評量、口語評量等，展現學生的不同能力，但依舊規劃實施教育會考制度，由此可知紙筆測驗仍有存在的必要性。而基測主要採計這五科，因無法排除評分客觀公平性問題，所以暫未將藝術與人文、健康與體育及綜合活動等學習領域納入考量。

基於上述研究條件，本研究欲瞭解在量化學生的綜合學習表現時，考慮二種方式，一是運用「類主成份分析」建立出最佳數學模式，另一是利用「類典型相關分析」，選擇最佳化的權重，使得在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數的相關性為最大，以建構出採計權重的最佳模式。

本研究方法陳述如下：

1. 利用「類主成份分析」與「類典型相關分析」方法建立各科的線性組合：

經由數學分析軟體，並使用不同的研究方法，找出在校各科與基測各科的最佳權重，建置出數學線性模式，即為學生綜合學科能力表現分數，例：$A = 0.3$ 國文 $+0.5$ 數學 $+0.2$ 英文 $+0.15$ 社會 $+0.16$ 自然。

2. 以實例印證學理：

本研究運用多變量分析中的主成份分析與典型相關分析方法，希望運用加權比重的概念 (即加權總和為 1，每科權重大於或等於 0)，設定條件範圍與限制，企圖尋求一個最佳權重係數數學模式，並探求其與國中基本學力各科量尺分數的相關性，因為所用的方法類似典型相關分析，但條件設定的範圍與限制卻與傳統主成分分析與典型相關分析的要求不一致，所以我們的研究中，便將所用的研究方法命名為「類主成分分

析」與「類典型相關分析」。

3. 歸納研究結果與分析：

以變異解釋率與相關係數來分析與比較各種因不同研究方法所呈現不同學科權重所形成的結果，以明瞭學生綜合學科能力表現程度，並研究其與國中基本學力量尺分數的關聯度是否最為密切。

1.4 研究對象與研究限制

1.4.1 研究對象

本研究針對台北市與新北市地區，藉由問卷調查法以匿名方式進行資料蒐集，刪除不完整的資料，整理後採用 103 位學生國文、英文、數學、社會及自然等五個學科的在校成績 (三學年五學期) 與 102 年度基測量尺成績。

1.4.2 研究限制

1. 為舒緩過度升學壓力、確保學生學力品質及引導多元適性發展等因素實施十二年國教，原則上學生在校全部納入研究中各科應全部納入研究中，但因考量評分客觀公平性問題，所以暫未將藝術與人文、健康與體育及綜合活動等學習領域納入考量。
2. 本研究中所使用的類典型相關分析，是假設國中基本學力測驗量尺分數足以代表學生在國中三年中所具備的基本程度與能力，然後再分析國中三年的在校成績與基本學力測驗分數的最大相關。但因尚有其他的升學管道 (例：免試入學)，因之學生面對國中基本學力測驗的態度認真與否皆可能影響相關研究的結果。

1.5 研究流程

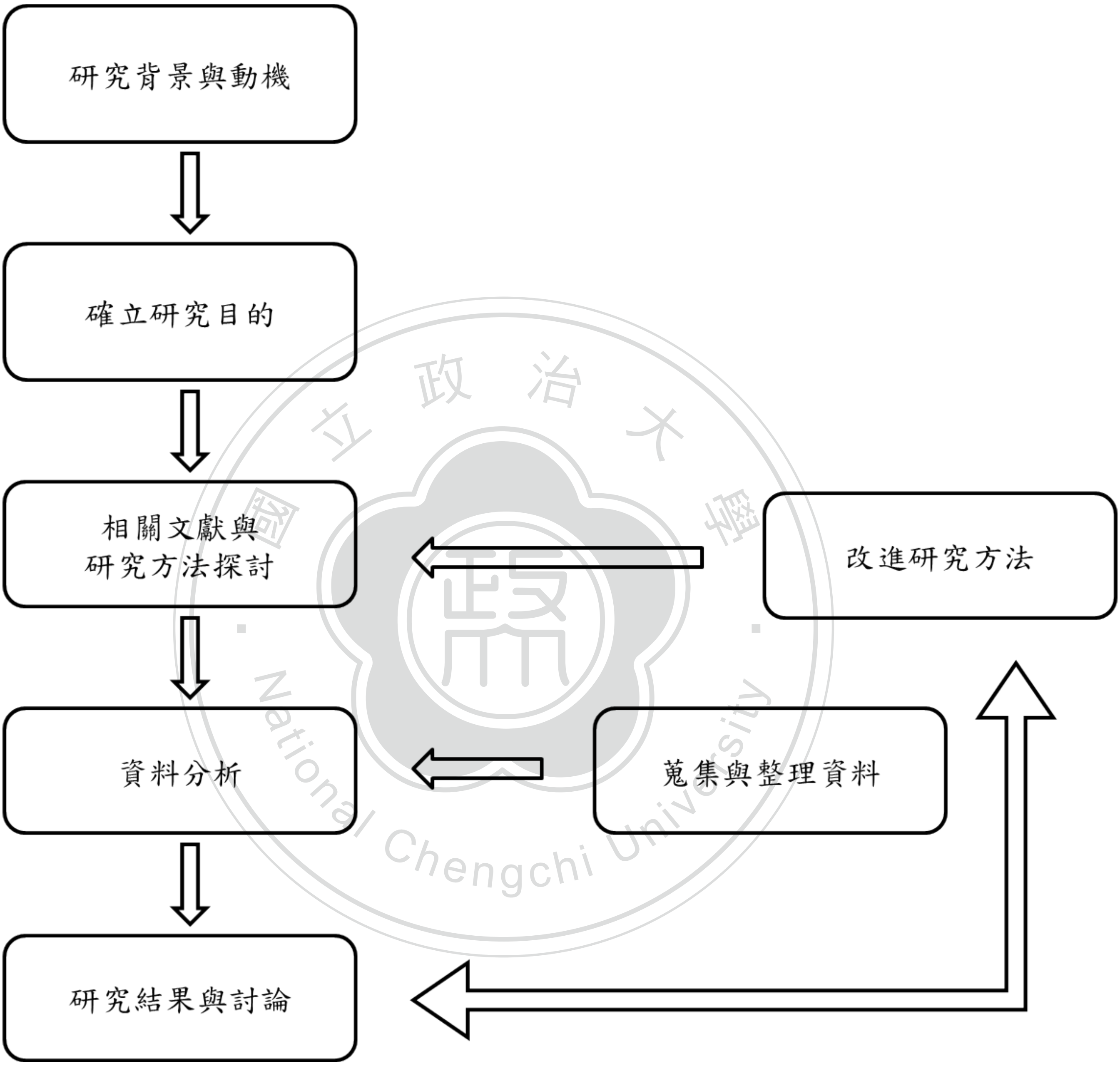

圖 1.1: 研究流程

第 2 章　文獻探討

2.1　典型相關分析

典型相關分析是由 Hotelling(1936) 所提出，主要是在研究多個準則變數 $Y_1, \cdots, Y_J$ 與多個預測變數 $X_1, \cdots, X_I$ 間的關係，即針對準則變數和預測變數找出好幾組的線性組合，在準則變數的線性組合間不相關以及預測變數的線性組合間也不相關的條件下，使得對應的兩組線性組合間之相關係數為最大。其所運用的數學方法陳述如下：

設

$$I \leqslant J，$$

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_I)'，\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_J)'，$$

$$X = (X_1, \cdots, X_I)'，Y = (Y_1, \cdots, Y_J)'$$

$$U = \sum_{i=1}^{I} a_i X_i，V = \sum_{i=1}^{J} b_j Y_j，$$

$$Cov(X) = \sum_{11}，$$

$$Cov(Y) = \sum_{22}，$$

$$Cov(X, Y) = \sum_{12}，$$

即 $\sum_{11}$、$\sum_{22}$ 分別為 X、Y 的共變異矩陣，$\sum_{12}$ 是 X 與 Y 的共變異矩陣，

則 U 與 V 的相關係數

$$\rho(U, V) = \frac{cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}}$$

$$= \frac{cov(a'X, b'Y)}{\sqrt{Var(a'X)}\sqrt{Var(b'Y)}}$$

$$= \frac{\mathbf{a}'\sum_{12}\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}'\sum_{11}\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}'\sum_{22}\mathbf{b}}} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

典型相關分析主要是找出準則變數與預測變數所對應的兩組線性組合間之最大相關係數，我們利用以下的定理結果來解決上述問題：

定理 1

設 $\rho_1^{\star^2} \geqslant \rho_2^{\star^2} \geqslant \cdots \geqslant \rho_I^{\star^2}$ 是 $\sum_{11}^{-\frac{1}{2}}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-\frac{1}{2}}$ 的特徵值，$e_1, \cdots, e_p$ 是對應的單位特徵向量，且 $f_1, \cdots, f_J$ 是對應於 $\sum_{22}^{-\frac{1}{2}}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-\frac{1}{2}}$ 最大 **J** 個特徵值之單位特徵向量，若 $a_k = \sum_{11}^{-\frac{1}{2}} e_k$，$b_k = \sum_{22}^{-\frac{1}{2}} f_k$，$U_k = a_k' X$，$V_k = b_k' Y$，則我們有以下結果：

$$\max_{a,b} \rho(U, V) = \rho(U_1, V_1) = \rho_1^\star$$

在 $\rho(U, U_1) = \rho(V, V_1) = 0$ 的條件下，$\max_{a,b} \rho(U, V) = \rho(U_2, V_2) = \rho_2^\star$

在 $\rho(U, U_1) = \rho(U, U_2) = \rho(V, V_1) = \rho(V, V_2) = 0$ 的條件下，$\max_{a,b} \rho(U, V) = \rho(U_3, V_3) = \rho_3^\star$

$$\vdots$$

在 $\rho(U, U_k) = \rho(V, V_k), k = 1, 2, \cdots, I-1$ 的條件下，

$$\max_{a,b} \rho(U, V) = \rho(U_I, V_I) = \rho_I^\star$$

證明：詳細證明過程請參閱 **Johnson and Wichern (2007)**。

(U_k, V_k) 稱為第 k 對的典型變量 **(Canonical variate)**，$k = 1, 2, \cdots, I$，$(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$ 則稱為第 k 對典型相關向量 **(Canonical correlation vector)**。

在典型相關分析中要選擇多少組典型變量? 此處可經由『卡方檢定』決定要選取多少組典型變量。先檢定最大的特徵值是否為 **0**，爾後再由大至小，一個接著一個對個別特徵值做檢定，特徵值顯著不為 **0** 的個數即為保留典型變量之組數。

2.2 特殊類典型相關分析

本節將簡介戴岑熹 **(2011)** 一文中所提及的類典型相關分析，因戴岑熹的「類典型相關分析」是本研究第三章「類典型相關分析」的特殊情況，為區別起見，因之將戴岑熹文中所提及的類典型相關分析稱為「特殊類典型相關分析」，茲將重點整理如下：

假設 $X_1, \cdots, X_I$ 為學生的 I 科學科成績，Y 是其基測總分，而其在校綜合學科分數則以 A 表示，即：

令

$$A = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_IX_I \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

$$a_i \geqslant 0，\sum a_i = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

在 (2.3) 的限制條件下求權重，使得學生的在校綜合學科分數與基測量尺總分的相關係數 $\rho(A, Y)$ 為最大，此即戴岑熹的「特殊類典型相關分析」之要點，$\rho(A, Y)$ 可進一步表示成：

$$\rho(A, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{I} a_i \cdot cov(X_i, Y)}{\sqrt{a' \sum a}\sqrt{V(Y)}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

在 (2.4) 中，一如我們所知，因為 $V(Y)$ 是常數，所以在求極值的過程中可將其忽略，而 X_i 和 Y 的 $Cov(X_i, Y)$ 未知，可以樣本的共變異數來取代，其詳細內容請參閱戴岑熹 (2011)。

第 3 章　類典型相關分析

3.1　基本理論

在改變權重的基本限制條件後，欲探討學生在校各學科成績的合理權重關係，因此運用與典型相關分析相類似的方法，探討學生的在校學科成績與基測各科量尺分數的關聯性，將所欲求的目標函數列為：學生的在校學科成績與基測各科量尺分數間的最大相關係數發生時所得之權重。其相關理論陳述如下：

假設共有 $X_1, \cdots, X_I$ 表示學生的 I 個科目在校成績，$Y_1, Y_1, \cdots, Y_J$ 為學生的基測量尺分數，在校學科成績常用來作為升學工具，權重如何適當地選擇？現今實施十二年國教，除了規畫特色招生外，亦實施教育會考制度，紙筆測驗的重要性仍可見一斑，而學生在校三年的日常學習表現能夠真實呈現該階段的學習狀態與性向潛能，因此若能找到一個不同於等加權平均方式且能更客觀地呈現出學生在此階段的學習能力程度，以期落實多元適性發展目標。所以權重決定方式為學生在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數的關聯性是最大的。

令

$$U = \sum_{i=1}^{I} a_i X_i$$

$$V = \sum_{j=1}^{J} b_j Y_j$$

分別代表在校與基測綜合分數，其中

$$a_i \geqslant 0，\sum a_i = 1，b_j \geqslant 0，\sum b_j = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

即 a_i 與 b_j 分別代表在校與基測綜合分數的權重。

令

$$Cov(X) = \sum_{11} = (\sigma^*_{ii'})$$

$$Cov(Y) = \sum_{22} = (\sigma^*_{jj'})$$

$$Cov(X,Y) = \sum_{12} = (\sigma_{ij})$$

由 (2.1) 式可推得：

$$\rho(U,V) = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i b_j \sigma_i j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{I}\sum_{i'=1}^{I} a_i a_{i'} \sigma_{ii'}{}^*}\sqrt{\sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J} b_j b_{j'} \sigma^{**}_{jj'}}}$$

在上式中，U 與 V 的相關係數 $\rho(U,V)$ 為權重 a_i、b_j 的函數，因之令

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i b_j \sigma_i j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{I}\sum_{i'=1}^{I} a_i a_{i'} \sigma_{ii'}{}^*}\sqrt{\sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J} b_j b_{j'} \sigma^{**}_{jj'}}}$$

類典型相關分析的問題即是在求權重使得兩加權分數的相關係數為最大；也就是在 (3.1) 限制條件下，求 **a** 與 **b** 使得 $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 為最大。

在 (3.1) 中，我們先不管 $a_i \geq 0$，$b_j \geq 0$，利用 **Lagrange** 乘數法求最佳權重解。

令

$$L(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda_1,\lambda_2) = f(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \lambda_1(a_1 + \cdots + a_I - 1) + \lambda_2(b_1 + \cdots + b_J - 1)$$

為了方便起見，令

$$\Delta = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i b_j \sigma_{ij}$$

$$\Delta^* = \sum_{i=1}^{I}\sum_{i'=1}^{I} a_i a_{i'} \sigma^*_{ii'}$$

$$\Delta^{**} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J} b_j b_{j'} \sigma^{**}_{jj'}$$

則

$$L(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^*}\sqrt{\Delta^{**}}} + \lambda_1(\sum_{i=1}^{I} a_i - 1) + \lambda_2(\sum_{j=1}^{J} b_j - 1)$$

將 L 對 a_i 求偏微分，得：

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \frac{\sqrt{\Delta^*}\sum_{j=1}^{J} b_j \sigma_{ij} - \Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta^*)^{-\frac{1}{2}} \times 2\sum_{i'=1}^{I} a_{i'} \sigma^*_{i'i}}{\Delta^*\sqrt{\Delta^{**}}} + \lambda_1, i = 1, \cdots, I \cdots\cdots\cdots (3.2)$$

註：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta^*}{\partial a_i} &= \frac{\partial}{\partial a_i}(\sum_{i=1}^{I}\sum_{i'=1}^{I} a_i a_{i'} \sigma^*_{ii'}) \\ &= \sum_{i'=1}^{I} a_{i'}\sigma^*_{i'i} + \sum_{i'=1}^{I} a_{i'}\sigma^*_{ii'} \\ &= \sum_{i'=1}^{I} a_{i'}\sigma^*_{i'i} (\because \sigma^*_{i'i} = \sigma^*_{ii'})\end{aligned}$$

同理，將 L 對 b_j 求偏微分，得：

$$\frac{\partial L}{\partial b_j} = \frac{\sqrt{\Delta^{**}}\sum_{i=1}^{I} a_i\sigma_{ij} - \Delta(\Delta^{**})^{-\frac{1}{2}}\sum_{j'=1}^{J} b_{j'}\sigma^{**}_{j'j}}{\sqrt{\Delta^*}\Delta^{**}} \cdots (3.3)$$

將 L 對 λ_1 偏微分，得：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^{I} a_i - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

將 L 對 λ_2 偏微分，得：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{j=1}^{J} b_j - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

由 (3.2)，令 $\frac{\partial L}{\partial a_i} = 0$，得：

$$\sqrt{\Delta^*}\sum_{j=1}^{J} b_j\sigma_{ij} - \Delta(\Delta^*)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i'=1}^{I} a_{i'}\sigma^*_{i'i} + \lambda_1\Delta^*\sqrt{\Delta^{**}} = 0, i = 1, 2, \cdots, I$$

或

$$\Delta^*\sum_{j=1}^{J} b_j\sigma_{ij} - \Delta\sum_{i'=1}^{I} a_{i'}\sigma^*_{i'i} + \lambda_1(\Delta^*)^{\frac{3}{2}}(\Delta^{**})^{\frac{1}{2}} = 0, i = 1, 2, \cdots, I$$

上式兩端乘上 a_i ，再加起來，得：

$$\Delta^*\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i b_j\sigma_{ij} - \Delta\sum_{i=1}^{I}\sum_{i'=1}^{I} a_i a_{i'}\sigma^*_{i'i} + \lambda_1(\Delta^*)^{\frac{3}{2}}(\Delta^{**})^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{I} a_i) = 0 \cdots (3.6)$$

或

$$\Delta^*\Delta - \Delta\Delta^* + \lambda_1(\Delta^*)^{\frac{3}{2}}(\Delta^{**})^{\frac{1}{2}} = 0$$

即

$$\lambda_1(\Delta^*)^{\frac{3}{2}}(\Delta^{**})^{\frac{1}{2}} = 0$$

故

$$\lambda_1 = 0$$

(3.6) 可化簡為：

$$\Delta^* \sum_{j=1}^{J} b_j\sigma_{ij} - \Delta \sum_{i'=1}^{I} a_{i'}\sigma_{i'i}^{*} \text{，} i = 1, 2, \cdots, I$$

由上式以矩陣和向量來表示可得：

$$\mathbf{a}' \sum_{11} \mathbf{a} \sum_{12} \mathbf{b} - \mathbf{a}' \sum_{12} \mathbf{b} \sum_{11} \mathbf{a} = 0 \cdots\cdots (3.7)$$

同理，由 (3.3)，令 $\frac{\partial L}{\partial b_j} = 0$ 可得：

$$\sqrt{\Delta^{**}} \sum_{i=1}^{I} a_i\sigma_{ij} - \Delta(\Delta^{**})^{-\frac{1}{2}} \sum_{j'=1}^{J} b_{j'}\sigma_{j'j}{}^{**} + \lambda_2\sqrt{\Delta^*}\Delta^{**} = 0, i = 1, 2, \cdots, I$$

兩端乘上 b_j ，再加起來，得：

$$\sqrt{\Delta^{**}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} a_ib_j\sigma_{ij} - \Delta(\Delta^{**})^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{j'=1}^{J} b_jb_{j'}\sigma_{j'j}^{**} + \lambda_2\sqrt{\Delta^*}\Delta^{**} = 0 \cdots (3.8)$$

即

$$\lambda_2\sqrt{\Delta^*}\Delta^{**} = 0$$

故

$$\lambda_2 = 0$$

(3.8) 可化簡為：

$$\Delta^{**} \sum_{i=1}^{I} a_i\sigma_{ij} - \Delta \sum_{j'=1}^{J} b_{j'}\sigma_{j'j}{}^{**} = 0, j = 1, 2, \cdots, J$$

上式以矩陣和向量來表示可得：

$$\mathbf{b}' \sum_{22} \mathbf{b} \sum_{21} \mathbf{a} - \mathbf{a}' \sum_{12} \mathbf{b} \sum_{22} \mathbf{b} = 0 \cdots\cdots (3.9)$$

其中，$\sum_{21} = \sum_{12}'$

由 (3.7) 可得：

$$(\mathbf{a}' \sum_{11} \mathbf{a})(\sum_{11})^{-1} \sum_{12} \mathbf{b} - (\mathbf{a}' \sum_{12} \mathbf{b})\mathbf{a} = 0 \cdots\cdots (3.10)$$

由 (3.9) 可得：

$$(\mathbf{b}' \sum_{22} \mathbf{b})(\sum_{22})^{-1} \sum_{21} \mathbf{a} - (\mathbf{a}' \sum_{12} \mathbf{b})\mathbf{b} = 0 \cdots\cdots (3.11)$$

由 (3.11) 中可得：

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}' \sum_{22} \mathbf{b}}{\mathbf{a}' \sum_{12} \mathbf{b}} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \mathbf{a}$$

將上式結果代入 (3.10) 式，得：

$$(\mathbf{a}'\sum_{11}\mathbf{a})\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\tfrac{\mathbf{b}'\sum_{22}\mathbf{b}}{\mathbf{a}'\sum_{12}\mathbf{b}}(\sum_{22})^{-1}\sum_{21}\mathbf{a}-(\mathbf{a}'\sum_{12}\mathbf{b})\mathbf{a}=0$$

或

$$\begin{aligned}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{12}'\mathbf{a} &= \tfrac{(\mathbf{a}'\sum_{12}\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\sum_{11}\mathbf{a})(\mathbf{b}'\sum_{22}\mathbf{b})}\mathbf{a} \\ &= \rho^2\mathbf{a}\end{aligned}$$

其中

$$\rho=\frac{\mathbf{a}'\sum_{12}\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{a}\sum_{11}\mathbf{a})(\mathbf{b}'\sum_{22}\mathbf{b})}}$$

故 **a** 是對應於特徵值為 ρ^2 的特徵向量。

同理可證：

$$\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\mathbf{b}=\rho^2\mathbf{b}$$

故 **b** 是對應於特徵值為 ρ^2 的特徵向量。

在類典型相關分析中, 我們使用 **Lagrange** 乘數法在推導最佳權重時，先暫不管 $a_i \geq 0,\ i=1,\cdots,I$，$b_j \geq 0,\ j=1,\cdots,J$ 的條件，故我們無法保證所求出的解皆為非負數，若 **Lagrange** 乘數解 **a** 中所有的 $a_i \geqslant 0$，**b** 中所有的 $b_j \geqslant 0$，此時可將它們正規化，得到我們所要的最佳權重解。若 **a** 中有 $a_i < 0$，或 **b** 中有 $b_j < 0$，我們以 **Rao-Ghangurad** 的修正法將解做修正，直到所有解皆符合我們的限制式條件為止；其處理步驟如下：

1. 分別求 $\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 與 $\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}$ 對應於最大特徵值之特徵向量 **a** 與 **b**。

2. 若向量 **a** 中所有的 $a_i \geq 0$，向量 **b** 中所有的 $b_j \geq 0$，此時可將它們正規化，得最佳權重解：

$$\tfrac{a_i}{\sum a_i}，i=1,\cdots,I，$$

$$\tfrac{b_j}{\sum b_j}，j=1,\cdots,J$$

3. 若 $a=(a_1,\cdots,a_I)$ 中有某些 $a_i<0$ 或 $b=(b_1,\cdots,b_J)$ 中有某些 $b_j<0$ 時，則令這

些 $a_i = 0$，$b_j = 0$。

4. 將步驟 **3** 中權重為 **0** 的科目或基測考科將它們去掉，然後重新執行上述步驟直到特徵向量 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 中所有的元素皆為非負數為止。

通常 $\sum_{11}$、$\sum_{22}$ 與 $\sum_{12}$ 是未知的，所以在處理實際問題時可用樣本共變異矩陣 S_{11}、S_{22} 與 S_{12} 來取代。

3.2 原始資料與標準化資料對最佳權重之影響

本節中我們希望了解在採用類典型相關分析時，原始資料與標準化資料對最佳權重有無影響以及使用這兩種資料時最佳權重的關係又是如何？

如第三章中所言，我們假設 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_I)$ 是學生的 I 科在校成績，而 $\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_J)$ 是其 J 科基測考科成績，令 $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{X_1}, \cdots, \widetilde{X_I})$ 與 $\widetilde{\mathbf{Y}} = (\widetilde{Y_1}, \cdots, \widetilde{Y_J})$ 分別表示標準化後的各科在校成績以及各基測考科成績。對標準化資料 $\widetilde{\mathbf{X}}$ 與 $\widetilde{\mathbf{Y}}$，欲求權重 $\widetilde{\mathbf{a}} = (\widetilde{a_1}, \cdots, \widetilde{a_I})$ 與 $\widetilde{\mathbf{b}} = (\widetilde{b_1}, \cdots, \widetilde{b_J})$ 使兩加權分數 $\widetilde{U} = \widetilde{a'}\widetilde{X}$ 與 $\widetilde{V} = \widetilde{b'}\widetilde{Y}$ 的關係最密切，即使相關係數 $\rho(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ 最大。由 (2.1) 可得：

$$\rho(\widetilde{U}, \widetilde{V}) = \frac{\tilde{a}'\widetilde{\sum_{12}}\tilde{b}}{\sqrt{\tilde{a}'\widetilde{\sum_{11}}\tilde{a}}\sqrt{\tilde{b}\widetilde{\sum_{22}}\tilde{b}}} \cdots\cdots (3.12)$$

其中，$\widetilde{\sum_{11}} = Cov(\widetilde{\mathbf{X}})$，$\widetilde{\sum_{22}} = Cov(\widetilde{\mathbf{Y}})$，$\widetilde{\sum_{12}} = Cov(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}})$，又 $\widetilde{\sum_{11}}$ 與 $\sum_{11}$、$\widetilde{\sum_{22}}$ 與 $\sum_{22}$ 以及 $\widetilde{\sum_{12}}$ 與 $\sum_{12}$ 有下列的關係：

$$\widetilde{\sum_{11}} = D_X^{-1} \sum_{11} D_X^{-1},$$

$$\widetilde{\sum_{22}} = D_Y^{-1} \sum_{22} D_Y^{-1},$$

$$\widetilde{\sum_{12}} = D_X^{-1} \sum_{12} D_Y^{-1}$$

故 (3.12) 可表示為

$$\rho(\widetilde{U}, \widetilde{V}) = \frac{\widetilde{a} D_X^{-1} \sum_{12} D_Y^{-1} \widetilde{b}}{\sqrt{\widetilde{a'} D_X^{-1} \sum_{11} D_X^{-1} \widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{b'} D_Y^{-1} \sum_{22} D_Y^{-1} \widetilde{b}}} \cdots\cdots (3.13)$$

其中，

$$D_X = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}^*} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\sigma_{ii}^*} \end{pmatrix},$$

$$
D_Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}^*} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\sigma_{jj}^*} \end{pmatrix}
$$

由 (3.12) 與 (3.13) 可知，若 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_I)$ 與 $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_J)$ 是原始資料的最佳權重，則 $\widetilde{\mathbf{a}} = \frac{D_X\mathbf{a}}{1'D_X\mathbf{a}}$ 與 $\widetilde{\mathbf{b}} = \frac{D_Y\mathbf{b}}{1'D_Y\mathbf{b}}$ 是標準化的最佳權重；反之，若 $\widetilde{\mathbf{a}} = (\widetilde{a_1}, \cdots, \widetilde{a_I})$ 與 $\widetilde{\mathbf{b}} = (\widetilde{b_1}, \cdots, \widetilde{b_J})$ 是標準化的最佳權重，則 $\mathbf{a} = \frac{D_X^{-1}\widetilde{a}}{1'D_X^{-1}\widetilde{a}}$ 與 $\mathbf{b} = \frac{D_Y^{-1}\widetilde{b}}{1'D_Y^{-1}\widetilde{b}}$ 是原始資料的最佳權重，其中，$1 = (1, \cdots, 1)'$。我們也可以看出不論資料有無標準化，在校加權成績與基測加權分數的最大相關係數皆是相同的。

前述原始資料與標準化資料之最佳權重關係亦由下列定理推得：

定理 **2**

(1)$\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 與 $\widetilde{\sum_{11}^{-1}}\widetilde{\sum_{12}}\widetilde{\sum_{22}^{-1}}\widetilde{\sum_{21}}$ 有相同特徵值。

(2) 若 $\mathbf{a}$ 是 $\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 的特徵向量，則 $D_X\mathbf{a}$ 是 $\widetilde{\sum_{11}^{-1}}\widetilde{\sum_{12}}\widetilde{\sum_{22}^{-1}}\widetilde{\sum_{21}}$ 的特徵向量；反之，若 $\widetilde{a}$ 是 $\widetilde{\sum_{11}^{-1}}\widetilde{\sum_{12}}\widetilde{\sum_{22}^{-1}}\widetilde{\sum_{21}}$ 的特徵向量，則 $D_X^{-1}\widetilde{a}$ 是 $\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 的特徵向量，若 $\mathbf{b}$ 是 $\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}$ 的特徵向量，則 $D_X\mathbf{b}$ 是 $\widetilde{\sum_{22}^{-1}}\widetilde{\sum_{21}}\widetilde{\sum_{11}^{-1}}\widetilde{\sum_{12}}$ 的特徵向量；反之，若 $\widetilde{b}$ 是 $\widetilde{\sum_{22}^{-1}}\widetilde{\sum_{21}}\widetilde{\sum_{11}^{-1}}\widetilde{\sum_{12}}$ 的特徵向量，則 $D_X^{-1}\widetilde{b}$ 是 $\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}$ 的特徵向量。

[證明]

由

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\sum_{11}^{-1}}\widetilde{\sum_{12}}\widetilde{\sum_{22}^{-1}}\widetilde{\sum_{21}} \\
&= D_X\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}D_X^{-1}
\end{aligned}
$$

可證得，詳細證明請參閱 **Hair, Black, Babin, and Anderson(2009)**。

故 **a,b** 是原始資料的最佳權重，而 $\widetilde{\mathbf{a}}$ 與 $\widetilde{\mathbf{b}}$ 是標準化的最佳權重，則我們有如下的結果：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{a_i} &= \frac{\sqrt{\sigma_{ii}^*}}{\sum\sqrt{\sigma_{ii}^*}a_i}a_i\text{，}\\
\widetilde{b_j} &= \frac{\sqrt{\sigma_{jj}^{**}}}{\sum\sqrt{\sigma_{jj}^{**}}b_j}b_j\text{，}\\
a_i &= (\tfrac{1}{\sqrt{\sigma_{ii}^*}}/\sum\tfrac{\widetilde{a_i}}{\sqrt{\sigma_{ii}^*}})\widetilde{a_i}\text{，} \qquad (3.14)\\
b_j &= (\tfrac{1}{\sqrt{\sigma_{jj}^{**}}}/\sum\tfrac{\widetilde{b_j}}{\sqrt{\sigma_{jj}^{**}}})\widetilde{b_j}
\end{aligned}
$$

上面權重之倍數關係，也可以簡單自下式看出端倪：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U} &= \widetilde{a_1}\widetilde{X_1}+\widetilde{a_2}\widetilde{X_2}+\cdots+\widetilde{a_I}\widetilde{X_I}\\
&= \widetilde{a_1}\cdot\tfrac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}^*}}+\widetilde{a_2}\cdot\tfrac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}^*}}+\cdots+\widetilde{a_I}\cdot\tfrac{X_I-\mu_I}{\sqrt{\sigma_{II}^*}}\\
&= \tfrac{\widetilde{a_1}}{\sqrt{\sigma_{11}^*}}\cdot X_1+\tfrac{\widetilde{a_2}}{\sqrt{\sigma_{22}^*}}\cdot X_2+\cdots+\tfrac{\widetilde{a_I}}{\sqrt{\sigma_{II}^*}}\cdot X_I+\\
&\quad (-\widetilde{a_1}\cdot\tfrac{\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}^*}}-\widetilde{a_2}\cdot\tfrac{\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}^*}}-\cdots-\widetilde{a_I}\cdot\tfrac{\mu_I}{\sqrt{\sigma_{II}^*}})
\end{aligned}
$$

將 $X_1,\cdots,X_I$ 的權重正規化後，同樣可獲得與 (3.14) 中相同的關係式。

3.3 實例分析

本節以實例說明如何求在校成績與基測成績的最佳權重，針對台北市與新北市地區，藉由問卷調查法以匿名方式進行資料蒐集，整理後得到 **103** 位學生三學年五學期的國文、英文、數學、社會及自然等在校成績與 **102** 年度基測量尺成績，資料檔請參閱附錄一，以下分別對原始資料與標準化資料求最佳權重。

一、原始資料

1. 求共變異數矩陣 S_{11}，S_{22}，S_{12}

以 **EXCEL** 軟體求得 **103** 筆樣本的在校五學科的共變異矩陣 S_{11}，基測五學科的共變異矩陣 S_{22} 以及在校五學科對基測五學科的共變異矩陣 S_{12}，得：

$$S_{11} = \begin{pmatrix} 601.3619 & 443.1682 & 410.9108 & 483.6184 & 300.4870 \\ 443.1682 & 535.3136 & 361.8434 & 378.7165 & 286.6290 \\ 410.9108 & 361.843 & 514.0637 & 394.9038 & 376.9481 \\ 483.6184 & 378.7165 & 394.9038 & 679.7993 & 295.0032 \\ 300.4870 & 286.6290 & 376.9481 & 295.0032 & 436.4730 \end{pmatrix}$$

$$S_{22} = \begin{pmatrix} 476.9690 & 343.7810 & 255.8198 & 296.0197 & 192.5724 \\ 343.7810 & 420.4643 & 229.3384 & 218.4212 & 174.9456 \\ 255.8198 & 229.3384 & 306.0843 & 219.2228 & 193.9228 \\ 296.0197 & 218.4212 & 219.2228 & 375.2751 & 148.3660 \\ 192.5724 & 174.9456 & 193.9228 & 148.3660 & 261.2275 \end{pmatrix}$$

$$S_{12}=\begin{pmatrix} 501.1271 & 378.7964 & 308.6372 & 335.2864 & 228.1374 \\ 403.3974 & 440.5612 & 262.8452 & 272.3072 & 199.2198 \\ 339.4261 & 310.9298 & 377.6765 & 286.2469 & 265.2772 \\ 427.9322 & 322.0888 & 304.8690 & 474.6481 & 223.4507 \\ 263.1259 & 242.7848 & 276.9367 & 208.313 & 307.4862 \end{pmatrix}$$

2. 求 $S_{11}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}$ 矩陣與 $S_{22}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}$ 矩陣對應於最大特徵值的特徵向量 **a**、**b**，其中 $S_{21}=S_{12}'$：

利用 **MALTAB**，可求得最大特徵值 $\rho_1=0.9729$，對應的在校成績之特徵向量 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(0.3941,0.3791,0.4592,0.5854,0.3839)$，以及基測成績之特徵向量 $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(0.3946,0.3212,0.5184,0.5550,0.4055)$。

3. 將 **a** 和 **b** 正規化，得最佳權重：

因向量 **a** 與 **b** 中的元素皆為非負值，將它們正規化後得在校學科成績的最佳權重向量 $(0.1790,0.1722,0.2086,0.2659,0.1744)$ 與基測量尺分數的最佳權重向量 $(0.1798,0.1464,0.2362,0.2529,0.1848)$，亦即所求的在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數為：

$U=0.1790X_1+0.1722X_2+0.2086X_3+0.2659X_4+0.1744X_5$

$V=0.1798Y_1+0.1464Y_2+0.2362Y_3+0.2529Y_4+0.1848Y_5$

而 U 與 V 的相關係數為：$\rho_1=0.98635112$。

二、標準化資料

1. 求相關矩陣 R_{11}，R_{22}，R_{12}

當我們將資料標準化後，則共變異矩陣 S_{11}，S_{22}，S_{12} 就變成相關矩陣 R_{11}，R_{22}，R_{12}，以 **EXCEL** 求之，得：

$$
R_{11} = \begin{pmatrix}
1 & 0.7811 & 0.7390 & 0.7564 & 0.5865 \\
0.7811 & 1 & 0.6393 & 0.5499 & 0.5279 \\
0.7390 & 0.6393 & 1 & 0.6468 & 0.6858 \\
0.7564 & 0.5499 & 0.6468 & 1 & 0.4739 \\
0.5865 & 0.5279 & 0.6858 & 0.4739 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
R_{22} = \begin{pmatrix}
1 & 0.7677 & 0.6695 & 0.6997 & 0.5456 \\
0.7677 & 1 & 0.6393 & 0.5499 & 0.5279 \\
0.6695 & 0.6393 & 1 & 0.6468 & 0.6858 \\
0.6997 & 0.5499 & 0.6468 & 1 & 0.4739 \\
0.5456 & 0.5279 & 0.6858 & 0.4739 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
R_{12} = \begin{pmatrix}
0.9357 & 0.7533 & 0.7194 & 0.7058 & 0.5756 \\
0.7983 & 0.9286 & 0.6493 & 0.6075 & 5327 \\
0.6855 & 0.6688 & 0.9521 & 0.6517 & 0.7239 \\
0.7515 & 0.6024 & 0.6683 & 0.9397 & 0.5303 \\
0.5767 & 0.5667 & 0.7577 & 0.5147 & 0.9106
\end{pmatrix}
$$

2. 求 $R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$ 矩陣與 $R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}$ 矩陣對應於最大特徵值的特徵向量 $\widetilde{\mathbf{a}}$、$\widetilde{\mathbf{b}}$，其中 $R_{21} = R_{12}'$：

利用 **MALTAB**，可求得最大特徵值 $\rho_1 = 0.9728$，對應的在校成績之特徵向量 $(\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3}, \widetilde{a_4}, \widetilde{a_5}) = (0.4035, 0.3640, 0.4349, 0.6353, 0.3344)$，以及基測成績之特徵向量 $(\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, \widetilde{b_3}, \widetilde{b_4}, \widetilde{b_5}) = (0.4556, 0.3467, 0.4802, 0.5672, 0.3464)$。

3. 將 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 正規化，得最佳權重：

因向量 $\widetilde{\mathbf{a}}$ 與 $\widetilde{\mathbf{b}}$ 中的元素皆為非負值，將它們正規化後得在校學科成績的最佳權重向量 $(0.1858, 0.1676, 0.2002, 0.2925, 0.1540)$，與基測量尺分數的最佳權重向量 $(0.2075, 0.1579, 0.2187, 0.2583, 0.1577)$，亦即所求的在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數為：

$\widetilde{U} = 0.1858\widetilde{X_1} + 0.1676\widetilde{X_2} + 0.2002\widetilde{X_3} + 0.2925\widetilde{X_4} + 0.1540\widetilde{X_5}$

$\widetilde{V} = 0.2075\widetilde{Y_1} + 0.1579\widetilde{Y_2} + 0.2187\widetilde{Y_3} + 0.2583\widetilde{Y_4} + 0.1577\widetilde{Y_5}$

而 $\widetilde{U}$ 與 $\widetilde{V}$ 的相關係數為：$\rho_1 = 0.9863$

3.4 在預測上的應用

教育部推動十二年國教，最主要目的是有效舒緩過度升學壓力，希望全面推動中小學教學正常化與五育均衡發展，藉此強化國中學生學習成就評量機制，並確保國中學生基本素質，因此規劃有百分之三十的國中生經由考試進入特色高中，其餘七成則透過在校成績分發進入優質高中就讀。在此背景下，我們可以利用類典型相關分析可獲得的結果，建立起一預測模型，以在校綜合學科分數預測基測綜合量尺分數。

令

$$U = a_1X_1 + \cdots + a_IX_I,$$
$$V = b_1Y_1 + \cdots + b_JY_J$$

分別表示經由類典型相關分析所獲得的在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數。假設有 N 位學生，將 N 位學生的在校學科原始成績與基測科目量尺分數分別代入上式，可得到學生成績資料檔 $(U_1, V_1), \cdots, (U_N, V_N)$ 共 N 筆，並運用 **MATLAB** 建立一預測模型 $V = \alpha + \beta U$，來預測基測綜合量尺分數。

由 **3.3** 節的實例中類典型相關分析所得的在校綜合學科分數與基測綜合量尺分數為：

$$U = 0.1790X_1 + 0.1722X_2 + 0.2086X_3 + 0.2659X_4 + 0.1744X_5$$
$$V = 0.1798Y_1 + 0.1464Y_2 + 0.2362Y_3 + 0.2529Y_4 + 0.1848Y_5$$

將 **103** 位學生的在校學科原始成績與基測科目量尺分數分別代入上式，可得到學生成績資料檔 $(U_1, V_1), \cdots, (U_{103}, V_{103})$ 共 **103** 筆，並經由 **MATLAB** 程式可得預測模型為：

$$V = 1.9367 + 0.7664U$$

未參加基本學力測驗的同屆學生可以透過在校成績，利用此預測模型預測其基測綜合量尺分數，以作為入學評比的參考依據，達到公平、公正目的。

第 4 章　類典型相關分析與典型相關分析之比較

本章中將針對典型相關分析與類典型相關分析的條件與結果做比較：

4.1　理論的比較

由定理 **1** 內容知，典型相關分析是在限制條件

$$a'\sum_{11}a=1\text{，}b'\sum_{22}b=1\cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

下，求 **a**、**b**，使得 (2.1) 相關係數為最大。

而由 (3.1) 式，我們知道類典型相關分析是在限制條件為

$$a_1+\cdots+a_I=1, a_i\geqslant 0\text{；}b_1+\cdots+b_J=1, b_j\geqslant 0$$

下，求 **a**、**b**，使得 (2.1) 相關係數為最大。

在解釋類典型相關分析中的最佳權重向量與典型相關分析中的典型相關向量之關係時，需用到下面的定理 **3**：

定理 3

給予矩陣 **A** 與 **B**，若 **AB** 與 **BA** 存在，則我們有：

(1)AB 與 **BA** 有相同的非零特徵值。

(2) 若 **v** 為 **AB** 的特徵向量，則 $B\mathbf{v}$ 為 **BA** 的特徵向量。

由典型相關分析理論知，若 $\mathbf{a}^*=(a_1^*,\cdots,a_I^*)$ 與 $\mathbf{b}^*=(b_1^*,\cdots,b_J^*)$ 為第一對的典型

相關向量時，即 $\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 滿足 (4.1)，使 (2.1) 最大時，由定理 **1** 與定理 **3** 可推知，$\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 分別為 $\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 與 $\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{22}$ 對應於最大特徵值的特徵向量，但典型相關向量中的元素可以為負值。又由第三章第一節的類典型相關分析理論知，若 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_I)$ 與 $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_J)$ 是最佳權重解時，則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 分別為 $\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 與 $\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}$ 對應於最大特徵值的特徵向量，但最佳權重向量中的元素必須為非負值，當 $\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ 與 $\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}$ 的最大特徵值之代數重數為 **1** 時，$\mathbf{a}^*$ 是 $\mathbf{a}$ 的倍數，$\mathbf{b}^*$ 是 $\mathbf{b}$ 的倍數。

觀察 (2.1) 可知，若 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_I)$ 與 $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_J)$ 使 (2.1) 最大時，則 $\forall r > 0, s > 0$，$r\mathbf{a} = (ra_1, \cdots, ra_I)$ 與 $s\mathbf{b} = (sb_1, \cdots, sb_J)$ 亦使 (2.1) 最大。故若 $\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 為第一對典型相關向量時，且向量中的元素皆為非負值，則我們可以將它們正規化，即可得最佳權重向量。

當第一對典型相關向量 $\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 中有負值時，我們以 **Rao-Ghangurad** 的修正法，將解做修正，即 $\mathbf{a}^* = (a_1^*, \cdots, a_I^*)$ 有某些 $a_i^* < 0$ 或 $\mathbf{b}^* = (b_1^*, \cdots, b_J^*)$ 有某些 $b_j^* < 0$ 時，可令它們為 $\mathbf{0}$，即不需考慮這些學科或考科，然後對其餘的學科或考科重新求特徵值及典型相關向量，直到典型相關向量中的元素皆為非負值為止。

4.2 實例說明

為了更清楚說明典型相關分析與類典型相關分析間的關係，接下來以 **3.3** 節中的標準化資料作說明，而原始資料可以仿照處理。利用 **SAS** 執行典型相關分析，其特徵值以及第一對至第五對的典型相關向量如表 **4.2.1** 與 **4.2.2** 所示：

表 4.2.1: 典型相關分析在校學科部份之結果

特徵值		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
		0.9729	0.7944	0.6629	0.5817	0.4536
典型相關向量	a_1^*	0.2147	-0.3180	-0.5994	0.8817	-1.6487
	a_2^*	0.1948	-0.8694	-0.6464	-0.4842	1.1664
	a_3^*	0.2313	0.9455	-0.0195	-1.7318	-0.4132
	a_4^*	0.3390	-0.3238	1.4335	0.0479	0.4646
	a_5^*	0.1782	0.5791	-0.1962	1.4207	0.5890

表 4.2.2: 典型相關分析基測考科部份之結果

特徵值		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
		0.9729	0.7944	0.6629	0.5817	0.4536
典型相關向量	b_1^*	0.2471	-0.4756	-0.4374	0.7679	-1.5417
	b_2^*	0.1889	-0.6671	-0.6069	-0.5370	1.2278
	b_3^*	0.2601	0.9470	-0.1805	-1.2173	-0.5916
	b_4^*	0.3083	-0.3411	1.3115	0.0175	0.5362
	b_5^*	0.1880	0.5657	-0.0886	1.1206	0.5763

自表 **4.2.1** 與表 **4.2.2** 中可知：

第一對典型相關向量為：

$$\mathbf{a}^* = (0.2147, 0.1948, 0.2313, 0.3390, 0.1782)$$

$$\mathbf{b}^* = (0.2471, 0.1889, 0.2601, 0.3083, 0.1880)$$

第一對典型變量為：

$$U^* = 0.2147X_1 + 0.1948X_2 + 0.2313X_3 + 0.3390X_4 + 0.1782X_5$$

$$V^* = 0.2471Y_1 + 0.1889Y_2 + 0.2601Y_3 + 0.3083Y_4 + 0.1880Y_5$$

U^* 與 V^* 的相關係數為：$\rho = \sqrt{0.9729} = 0.9863$。

因為第一對典型相關向量 $\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 中的元素都是非負值，所以採用類典型相關分析時，最佳權重向量即為將 $\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 正規化。為了方便起見，正規化後向量仍以 $\mathbf{a}^*$ 與 $\mathbf{b}^*$ 表示，得 $\mathbf{a}^* = (0.1854, 0.1682, 0.1997, 0.2927, 0.1539)$，$\mathbf{b}^* = (0.2072, 0.1584, 0.2181, 0.2586, 0.1577)$ ；此時加權分數為：

$$U^* = 0.1854X_1 + 0.1682X_2 + 0.1997X_3 + 0.2927X_4 + 0.1539X_5$$

$$V^* = 0.2072Y_1 + 0.1584Y_2 + 0.2181Y_3 + 0.2586Y_4 + 0.1577Y_5$$

U^* 與 V^* 的相關係數為：$\rho = \sqrt{0.9729} = 0.9863$。

上述結果與 **3.3** 節實例分析中「標準化」資料部份所獲得的結果相當。

第 5 章　評鑑綜合學科分數優劣之指標

本章共分為三節，在第一、二節中，提出二種評鑑綜合學科分數優劣之指標，分別為變異解釋率及與綜合基測量尺分數之相關度，第三節為不同加權綜合學科分數之比較。

5.1　變異解釋率

在主成份分析中，經常以主成份的變異數作為其對整體資料貢獻度之衡量，變異數愈大，表示該主成份愈能區分學生成績的高低。此處將定義變異數解釋率 E 做為評鑑綜合學科分數優劣的指標。所謂的變異解釋率 (**E**)，即是指學生綜合學科分數之變異數與各學科資料總變異之比值，說明如下：

令 $U = a_1X_1 + \cdots + a_IX_I$ 表示為學生的綜合學科分數，則

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{Var(U)}{\sum_{i=1}^{I}\sigma_{ii}^{*}} \\
&= \frac{Var(a'X)}{\sum_{i=1}^{I}\sigma_{ii}^{*}} \\
&= \frac{a'\sum a}{\sum_{i=1}^{I}\sigma_{ii}^{*}}
\end{aligned}
$$

其中，$a = (a_1, \cdots, a_I)$，$\sum$ 是 $(X_1, \cdots, X_I)$ 的共變異矩陣。而 $\sum$ 可以樣本共變異矩陣 S_{11} 取代，σ_i^2 可以樣本變異數 S_{ii}^{*} 取代之，因此可表示為：

$$E = \frac{a'S_{11}a}{\sum_{i=1}^{I}S_{ii}^{*}}$$

5.2 與綜合基測量尺分數之相關度

在校成績與升學息息相關，當採計的在校學科很多時，通常須將眾多成績轉化成單一分數，此時，權重的選擇就顯得極為重要。由於綜合學科分數的加權方式有很多種選擇，若在校的加權總分與基測的加權總分有高度密切關係，則表示可以此在校綜合學科分數作為高中入學時評比參考的依據，達到免試入學的目的，故我們可以考慮與基測綜合量尺分數的相關度，作為一個評鑑在校綜合學科分數優劣的指標。

5.3 不同加權綜合學科分數之比較

本節中運用了 **3.3** 節中所描述的 **103** 筆資料，在變異解釋率以及與綜合基測量尺分數相關度的評鑑指標下，對八種權重採計方式不同的綜合學科分數進行分析比較。八種權重分配不同的綜合學科分數之符號與建構方式說明如下：

(1) 綜合學科分數 $A_1 = 0.2X_1 + 0.2X_2 + 0.2X_3 + 0.2X_4 + 0.2X_5$ 係為等加權平均。

(2) 綜合學科分數 $A_2 = 0.4937X_1 + 0.4380X_2 + 0.4345X_3 + 0.4943X_4 + 0.3622X_5$ 係對在校學科成績執行主成份分析而獲得的第一主成份。

(3) 綜合學科分數 $A_3 = 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5$ 係對在校學科成績執行類主成份分析而獲得的第一主成份。

(4) 綜合學科分數 $A_4 = 0.6X_1 + 0.1X_2 + 0.1X_3 + 0.1X_4 + 0.1X_5$ 係對在校學科成績進行類主成份分析而獲得的第一主成份，但各學科之權重保障至少為 **0.1**。

(5) 綜合學科分數 $A_5 = 0.4X_1 + 0.15X_2 + 0.15X_3 + 0.15X_4 + 0.15X_5$ 係對在校學科成績執行類主成份分析而獲得的第一主成份，但各學科之權重保障至少為 **0.15**。

(6) 綜合學科分數 $A_6 = 0.2147X_1 + 0.1948X_2 + 0.2313X_3 + 0.3390X_4 + 0.1782X_5$ 係對標準化資料執行典型相關分析而獲得的第一典型變量。

(7) 綜合學科分數 $A_7 = 0.1790X_1 + 0.1722X_2 + 0.2086X_3 + 0.2659X_4 + 0.1744X_5$ 係對原始資料執行類典型相關分析而獲得的第一典型變量。

(8) 綜合學科分數 $A_8 = 0.1858X_1 + 0.1676X_2 + 0.2002X_3 + 0.2925X_4 + 0.1540X_5$ 係對標準化資料執行類典型相關分析而獲得的第一典型變量。

另一方面，由原始資料與標準化資料建構的基測綜合量尺分數分別為：

$V = 0.1798Y_1 + 0.1464Y_2 + 0.2362Y_3 + 0.2529Y_4 + 0.1848Y_5$

$\widetilde{V} = 0.2075Y_1 + 0.1579Y_2 + 0.2187Y_3 + 0.2583Y_4 + 0.1577Y_5$

對 $A1 \sim A_8$ 計算變異數、變異解釋率以及與基測綜合量尺分數之相關度後，得表

5.3.1 如下：

表 5.3.1: 八種在校綜合學科分數評鑑結果一覽表

在校綜合學科分數	變異數	變異解釋率 (%)	與基測綜合分數相關度	備註
$A_1 = 0.2X_1 + 0.2X_2 + 0.2X_3 + 0.2X_4 + 0.2X_5$	409.2587	14.79	0.9847	用原始資料等加權
$A_2 = 0.4937X_1 + 0.4380X_2 + 0.4345X_3 + 0.4943X_4 + 0.3622X_5$	2067.7	74.73	0.9853	用原始資料第一主成份
$A_3 = 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5$	679.7993	24.57	0.8628	用原始資料類主成份
$A_4 = 0.1X_1 + 0.1X_2 + 0.1X_3 + 0.6X_4 + 0.1X_5$	495.4686	12.18	0.9528	用原始資料類主成份
$A_5 = 0.15X_1 + 0.15X_2 + 0.15X_3 + 0.4X_4 + 0.15X_5$	440.0986	11.81	0.9803	用原始資料類主成份
$A_6 = 0.2147X_1 + 0.1948X_2 + 0.2313X_3 + 0.3390X_4 + 0.1782X_5$	1	20	0.9863	標準化典型變量
$A_7 = 0.1790X_1 + 0.1722X_2 + 0.2086X_3 + 0.2659X_4 + 0.1744X_5$	418.1419	15.1116	0.9863	原始資料類典型變量
$A_8 = 0.1858X_1 + 0.1676X_2 + 0.2002X_3 + 0.2925X_4 + 0.1540X_5$	0.7459	14.92	0.9863	標準化類典型變量

觀察表 **5.3.1** 的計算結果，有下列幾點值得我們注意：

1. 因主成份與典型變量的係數和不是 **1**，而類主成份與類典型變量的係數和都為 **1**，故以變異解釋率為標準評比各在校綜合學科分數優劣時，也許不盡公平。舉例來說，

在 A_7 中，我們將 A_7 中的權重向量長度調為 **1** 時，其變異解釋率則增加為 **73.25**%，而其與基測綜合相關度仍然是 **0.9863**。

2. 學校中常使用的等加權平均，即 A_1，雖不是最理想方式，但不失為採計成績的一種好方法。

3. 本研究中類典型相關分析的限制條件為加權總和等於 **1** 與各科權重值大於或等於 **0**，其限制條件的設定考量主要是因現今學校廣泛所採用的方式。

4. 表 **5.3.1** 的結果顯示，在主成份或類主成份分析所建構起來的在校綜合分數中，變異數愈大的學科，其所佔的權重比例就愈大，同樣地，典型或類典型相關分析也有相同的結果。

5. 由表 **5.3.1** 可看出，除了 A_3 外，其餘的綜合學科分數和基測綜合各科量尺分數都有高度相關。

第 6 章　總結

本文主要是探討類典型相關分析的理論以及於高中免試入學上在校學科成績之權重應如何採計的應用。我們將相關的研究結果歸納如下：

1. 在最佳權重向量時，可利用典型相關分析的理論，先求典型相關向量。若典型相關向量中的分量皆為非負值時，將它們正規化後，即得最佳權重向量。若典型相關向量中的分量有負值時，可透過 **Rao-Ghangurad** 的修正法將解做修正，直到所獲得的典型相關向量中的分量皆為非負值為止。整個過程可藉由 **SAS** 等統計軟體執行典型相關分析來協助完成。

2. 在對 **103** 位學生的資料做實例分析時，因所獲得的典型相關係數皆為非負值，直接正規化後即得所要求的最佳權重。

3. 在實例分析中，我們發現在校學科的最佳權重與基測考科的最佳權重幾乎對應相同。

4. 透過基測綜合分數對在校綜合成績所建立起的迴歸模型，對該屆未參加基本學力測驗的學生，我們可以其在校成績預測其基測綜合分數。

5. 實例分析顯示，因主成份與典型變量的係數和不是 **1**，而類主成份與類典型變量的係數和都為 **1**，故以變異解釋率為標準評比各綜合學科分數優劣時，也許不盡公平。

6. 實例分析也顯示，學校中常使用的等加權平均法，雖不是最理想方式，但也不失為採計成績的一種簡單、方便的方法。

7. 在本研究中，我們的樣本數小，代表性也許不夠充分，本研究結果僅適用於部份台北市與新北市的學校，恐不宜推論到其他個別縣市的學校。

8. 本研究中 103 筆資料係屬跨校成績，當在校成績正式列入入學制度中，作為各校甄選學生的主要依據時，若各校教師的評分嚴苛度寬嚴不一，教師的評分過程勢必受到更大的壓力，可能會影響其評分標準或評分方式。

9. 教育部宣布於民國 103 年正式實施十二年國民基本教育，以教育會考代替基本學力測驗，以做為學力檢定機制與免試入學「超額比序」的比序項目之一，在此背景脈絡下，本研究仍可作為其入學評比的參考依據。

我們也提出以下建議：

1. 建議各校應建置定期評量考試資料庫，甚或學校聯合命題，建立起量尺化的參數試題，期使試題參數指標不因樣本而異，避免分數的變異數流於人為操控問題，以符合命題公平性。因此，題庫具有改進測驗品質的潛能，在可預期的將來，它對測驗編製者的重要性將日益增加，同時對節省編製測驗所花的時間，亦將無可限量。(Hambleton & Swaminathan, 1985, PP. 255-256)

2. 本研究中所建置的模型，應可再分析更多年份或更多其他縣市的樣本資料，以期修正，並建構為更穩定的機制模型。

參考文獻

[1] 宋耀廷、周業太、吳佩嶼、林秀珊、曾芬蘭 (2010)。高中職入學制度中在校成績採計校正方式之比較。教育科學研究期刊，55(2)，73-113。

[2] 陳柏熹、邱佳民、曾芬蘭 (2010)。高中職入學制度中在校成績採計校正方式之比較。教育科學研究期刊，55(2)，115-139。

[3] 周祝瑛 (2009)。邁向十二年國民基本教育 – 由繁化簡的高中、職免試入學方案。教育資料集刊，第四十二輯 –2009 各國中等教育，25-42。

[4] 吳明清 (2009)。免費乎？免試乎？十二念國教的政策困境與出路。教育行政論壇，2，49-59。

[5] 楊思偉（2006）。推動十二年國民教育政策之研究。教育研究集刊，52（2），1-31。

[6] 戴岑熹 (2011)。高中職及五專免試入學採計國中在校學科分數加權機制之研究。國立政治大學應用數學系碩士論文。

[7] 陳順宇 (2004)。多變量分析。臺北市: 華泰書局

[8] 張建邦 (1997)。多變量分析。臺北市: 三民書局

[9] 陳耀茂 (1999)。多變量解析方法與應用。臺北市: 五南圖書出版

[10] 呂金河 (2005)。線性代數導論 (第八版)。華泰文化

[11]Anderson, T. W.(1984). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 2nd ed., New York: John Wiley and Sons, Inc

[12]Johnson, R. A. and Wichern, D. W.(2007).Applied Multivariate Statistical Analysis, 6th ed., Prentice Hall International, Inc

[13]Hambleton, R. K., and Swaminathan, H. (1985). Item response theory: Principles and applications. Boston: Kluwer.

[14]Kolman, B. and Hill, D. R.(2005). Introductory linear algebra -An applied first course. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall

[15]Hair, Black, Babin, and Anderson(2009). Multivariate Data Analysis, 7th ed.

附錄一　學生原始成績資料

在校成績					
學生編號	國文	英文	數學	社會	自然
1	25.3	40.7	32.8	12.6	65.3
2	95.1	98.2	84.5	94.3	69.2
3	72.9	62	70.2	95.1	68.5
4	62.3	79.4	55.2	84.9	20.3
5	35.7	56.4	34.3	45.2	43.9
6	42.3	76.3	62.1	51.8	52.5
7	88.3	80.6	81.5	78.3	72.6
8	78.8	72	87.6	77.4	52.3
9	52.4	60.5	87.3	60.2	81.6
10	87.3	84.3	54.2	89.7	53.4
11	30.3	38.1	21.5	31.8	20.2
12	29.2	43.2	44.3	30.9	47.5
13	88.6	83.3	84.5	89.7	58.1
14	76.4	93.7	52.6	89.2	48.8
15	27.3	42.4	21.3	21.5	31.3
16	85	72.8	69.4	43.7	74.8
17	85.3	80.5	87.8	88.4	98.6
18	94.5	94.7	85.3	86.4	84.3
19	75.2	76.5	93.6	79.8	85.2
20	42.1	30.5	58.7	61.5	67.7
21	85.6	89.4	79.5	97.8	69.2
22	42.5	30.5	50.1	41.2	79.5
23	83.7	78.9	68.2	51.7	68.3
24	50.6	52.6	79.2	85.4	64.8
25	55.2	25.3	78.7	61.8	68
26	96.7	86.8	84.3	96.7	87.7
27	25.5	20.3	21.2	14.6	30.1
28	96.8	89.4	86.1	87.5	84.9
29	78.4	76.7	85.6	97.2	97.8
30	47.2	22.8	43.7	14.9	44.2
31	26	52.1	68.6	79.4	64.3
32	39.4	32.4	43.9	13.8	41.8
33	97.3	92.9	92.4	69.7	88.5
34	37.7	41.7	82.3	23.2	76.8

35	88.7	72.6	78.1	43.7	79.5
36	85.4	78.5	72.7	77.7	77.6
37	46.3	36	43.4	45.4	40.2
38	38.4	38.6	23.5	14.3	31.4
39	90.2	77.7	69.4	78.2	79.2
40	80.2	85.7	73.6	50.4	74.3
41	73.4	60.1	72.1	75.8	78
42	31.7	42.6	25.4	42.8	22.1
43	30.3	40.8	34.9	31.6	48.5
44	31.4	25	32.8	21.7	31.9
45	27	51.6	33.5	29.6	41.3
46	41.6	63.9	44.3	79.7	89.1
47	29.8	37.8	35.4	36.1	20.8
48	86.3	83.4	87.8	98.7	95
49	86	86.3	93.6	87.2	78.6
50	94.3	88.4	82.7	94.7	59.6
51	96	82.7	86.6	89.5	77.2
52	75.2	56.3	64.8	72.3	68.5
53	79.7	88.3	83.2	78.5	68.9
54	41.2	28.2	35.1	14.4	30.1
55	85	87.4	78.1	77.8	74.3
56	57.5	77.9	69.8	53.4	84.2
57	82.6	60.4	79.8	98.4	68.8
58	81.1	50.2	86.4	78.8	67.4
59	82.5	44.6	64.2	60.3	59.7
60	84.8	77.8	65.6	76.6	57.5
61	50.4	68.5	78.3	46.1	69.7
62	95.6	70.7	67.6	96.6	66.1
63	92.4	90.6	87.1	89.4	94.4
64	61.5	51.3	43.2	51.8	58.5
65	42.4	33.5	41.6	60.4	43.6
66	33.1	54.2	40.3	52.1	46.8
67	87.4	78.8	73.9	86.4	67.3
68	82.4	95.3	77.2	52.8	68.7
69	69.7	90	51.3	88.3	69.3
70	96.1	87.2	68.4	93.9	87.6
71	46.1	78.4	87	41.6	77.6
72	45.8	62.4	63.3	46.5	75.5

73	60.4	42.6	31.2	53.6	26.9
74	92.9	72.9	35.3	86.9	21.6
75	90.7	97.3	87.4	97.5	77.8
76	50.9	52.3	41.7	32.4	40.2
77	31.2	50.3	51.9	62.8	65.9
78	71.5	92.4	68.8	88.9	73.1
79	31.8	31	25.4	24.2	33.4
80	98.5	93.6	84.7	95.1	79.7
81	38.3	31.8	35.1	27.8	50
82	89.7	85.7	86.9	88.2	89.7
83	78.2	81.3	72.7	69.5	76.3
84	95.5	78.3	87.3	87.1	67.4
85	88.3	89.6	73.8	78.4	74.7
86	95	83.7	85.6	95.2	94.2
87	84.2	80.5	84.8	86.9	69.7
88	95.2	79.1	87.8	87.8	40
89	92.5	52.2	20.3	69.7	42.7
90	86.4	83.6	88.3	89.6	54.7
91	93.5	82.9	78.7	98.7	76.8
92	36.5	40.5	21.3	43.8	34.9
93	31.7	10.8	31.4	87.5	38.1
94	67.3	68.1	68.5	78.4	77.1
95	92.6	79.1	79.3	74.9	89.7
96	27.6	31.3	22.4	24.7	12.3
97	78.2	41.3	69.6	92.3	72.9
98	76.8	20.6	94.5	99.4	64.3
99	58.7	60.6	78.3	78.2	87
100	77.6	61.4	78.4	88.9	85
101	48.6	57.2	40.4	69.5	41.1
102	38.6	16.8	30.1	86.1	42.7
103	97.1	97.2	95.8	95.9	86.8

基測成績					
學生編號	國文	英文	數學	社會	自然
1	40	19	23	25	41
2	86	78	67	75	54
3	62	26	51	78	54
4	54	68	49	72	18
5	40	50	31	25	33
6	50	62	44	33	44
7	78	68	49	67	56
8	69	62	75	62	43
9	54	28	67	53	53
10	78	68	46	69	32
11	25	32	18	15	16
12	23	39	31	22	33
13	82	70	75	77	43
14	69	76	41	69	33
15	21	36	12	12	27
16	75	60	51	23	56
17	75	66	64	69	78
18	86	78	64	75	61
19	67	66	75	64	64
20	26	42	46	51	52
21	76	72	62	78	54
22	28	14	41	49	62
23	74	72	54	32	56
24	32	39	62	64	50
25	24	42	60	51	53
26	84	68	67	75	68
27	30	14	18	13	22
28	88	76	67	67	66
29	69	60	70	77	77
30	24	20	36	15	27
31	41	42	57	56	50
32	32	22	36	14	38
33	90	78	75	56	65
34	32	32	64	19	58
35	79	58	62	23	63
36	75	70	59	65	54

37	32	32	36	17	30
38	30	20	18	23	28
39	88	64	57	57	62
40	69	72	57	22	57
41	65	48	59	65	60
42	24	18	20	32	22
43	51	68	36	25	39
44	26	22	7	22	23
45	41	42	26	25	32
46	52	50	31	61	70
47	24	22	28	25	17
48	77	68	70	78	64
49	77	70	75	64	62
50	86	78	65	74	47
51	88	68	67	71	54
52	58	42	41	57	53
53	58	78	67	64	54
54	32	20	31	22	19
55	77	68	62	57	53
56	51	58	54	41	49
57	73	52	62	77	62
58	71	22	67	57	53
59	71	58	49	32	56
60	75	64	49	59	33
61	45	58	57	44	46
62	88	58	51	75	51
63	82	74	64	67	72
64	52	36	36	36	43
65	45	25	39	48	20
66	48	30	36	43	35
67	77	66	41	59	52
68	71	76	51	51	46
69	62	72	42	59	53
70	88	68	49	69	67
71	38	66	67	40	38
72	46	50	49	46	35
73	51	35	26	44	25
74	82	56	31	64	18

75	80	78	67	69	68
76	45	32	39	35	32
77	52	46	44	51	33
78	65	74	51	67	28
79	21	20	20	30	30
80	90	74	64	72	63
81	32	26	36	32	40
82	77	68	64	67	71
83	67	72	57	51	56
84	82	62	70	65	52
85	77	74	57	64	58
86	84	72	67	67	72
87	75	78	70	59	54
88	84	66	75	69	33
89	82	42	36	51	20
90	75	70	51	72	32
91	84	66	59	77	58
92	30	32	28	44	29
93	50	14	26	56	35
94	52	52	54	59	60
95	82	68	59	51	69
96	28	22	18	30	13
97	69	42	54	57	58
98	67	12	75	80	28
99	32	50	76	51	67
100	65	48	68	54	64
101	32	46	31	56	35
102	30	14	26	59	39
103	88	76	78	67	46

附錄二 類典型相關分析：MATLAB 程式與計算結果

【程式內容】

```
S11=[ 601.3619    443.1682    410.9108    483.6184    300.4870
   443.1682    535.3136    361.8434    378.7165    286.6290
   410.9108    361.8434    514.0637    394.9038    376.9481
   483.6184    378.7165    394.9038    679.7993    295.0032
   300.4870    286.6290    376.9481    295.0032    436.4730];
S22=[ 476.9690    343.7810    255.8198    296.0197    192.5724
   343.7810    420.4643    229.3384    218.4212    174.9456
   255.8198    229.3384    306.0843    219.2228    193.9228
   296.0197    218.4212    219.2228    375.2751    148.3660
   192.5724    174.9456    193.9228    148.3660    261.2275];
S12=[ 501.1271    378.7964    308.6372    335.2864    228.1374
   403.3974    440.5612    262.8452    272.3072    199.2198
   339.4261    310.9298    377.6765    286.2469    265.2772
   427.9322    322.0888    304.8690    474.6481    223.4507
   263.1259    242.7848    276.9367    208.3130    307.4862];
R11=[ 1.0000     0.7811     0.7390     0.7564     0.5865
     0.7811     1.0000     0.6898     0.6278     0.5930
     0.7390     0.6898     1.0000     0.6680     0.7958
     0.7564     0.6278     0.6680     1.0000     0.5416
     0.5865     0.5930     0.7958     0.5416     1.0000];
R22=[ 1.0000     0.7677     0.6695     0.6997     0.5456
     0.7677     1.0000     0.6393     0.5499     0.5279
     0.6695     0.6393     1.0000     0.6468     0.6858
     0.6997     0.5499     0.6468     1.0000     0.4739
     0.5456     0.5279     0.6858     0.4739     1.0000];
R12=[ 0.9357     0.7533     0.7194     0.7058     0.5756
     0.7983     0.9286     0.6493     0.6075     0.5327
     0.6855     0.6688     0.9521     0.6517     0.7239
     0.7515     0.6024     0.6683     0.9397     0.5303
     0.5767     0.5667     0.7577     0.5147     0.9106];

E=inv(S11)*S12*inv(S22)*S21;
[x,y]=eig(E);
disp(E);
disp(x);
```

```
disp(y);
F=inv(S22)*S21*inv(S11)*S12;
[u,v]=eig(F);
disp(F);
disp(u);
disp(v);
G=inv(R11)*R12*inv(R22)*R21;
[x1,x2]=eig(G);
disp(G);
disp(x1);
disp(x2);
H=inv(R22)*R21*inv(R11)*R12;
 [u1,v1]=eig(H);
disp(G);
disp(u1);
disp(v1);
```

【程式結果】

在校(原始)**

0.6051	0.1499	0.0425	0.0648	0.0798
0.1757	0.6890	0.0148	0.0838	-0.0455
0.0241	0.0240	0.7315	0.0516	0.1615
0.1283	0.0709	0.0733	0.7624	0.0315
0.0775	0.0069	0.1208	0.0424	0.6774

-0.3941	-0.7290	-0.1991	-0.3648	0.3256
-0.3791	0.5466	-0.5770	-0.4170	-0.1895
-0.4592	-0.1976	0.6403	-0.0128	-0.6917
-0.5854	0.1932	-0.1907	0.8205	0.0166
-0.3839	0.3057	0.4256	-0.1402	0.6158

0.9729	0	0	0	0
0	0.4536	0	0	0
0	0	0.7944	0	0
0	0	0	0.6629	0
0	0	0	0	0.5817

基測(原始)**

0.6410	0.1658	0.0246	0.0745	0.0582
0.1719	0.6638	0.0265	0.0530	-0.0288
0.0149	0.0526	0.7389	0.0528	0.1707
0.1486	0.0656	0.0700	0.7479	0.0218
0.0738	0.0064	0.1260	0.0447	0.6738

-0.3946	-0.6512	-0.2812	-0.2586	0.3269
-0.3212	0.5524	-0.4201	-0.3822	-0.2435
-0.5184	-0.3120	0.6989	-0.1332	-0.6468
-0.5550	0.2554	-0.2273	0.8742	-0.0084
-0.4055	0.3289	0.4520	-0.0708	0.6445

0.9729	0	0	0	0
0	0.4536	0	0	0
0	0	0.7944	0	0
0	0	0	0.6629	0

0	0	0	0	0.5817

在校(標準化)***

0.6053	0.1589	0.0465	0.0611	0.0939
0.1655	0.6890	0.0148	0.0741	-0.0507
0.0226	0.0237	0.7314	0.0450	0.1754
0.1363	0.0797	0.0842	0.7623	0.0392
0.0659	0.0061	0.1114	0.0339	0.6774

-0.4035	-0.7516	-0.2138	-0.3529	0.3595
-0.3640	0.5315	-0.5885	-0.3819	-0.1964
-0.4349	-0.1884	0.6375	-0.0131	-0.7054
-0.6353	0.2119	-0.2186	0.8463	0.0188
-0.3344	0.2688	0.3922	-0.1149	0.5781

0.9728	0	0	0	0
0	0.4537	0	0	0
0	0	0.7944	0	0
0	0	0	0.6629	0
0	0	0	0	0.5815

基測(標準化)***

0.6053	0.1589	0.0465	0.0611	0.0939
0.1655	0.6890	0.0148	0.0741	-0.0507
0.0226	0.0237	0.7314	0.0450	0.1754
0.1363	0.0797	0.0842	0.7623	0.0392
0.0659	0.0061	0.1114	0.0339	0.677

-0.4556	-0.6998	-0.3351	-0.2861	0.4046
-0.3467	0.5571	-0.4723	-0.3989	-0.2817
-0.4802	-0.2685	0.6681	-0.1199	-0.6403
-0.5672	0.2434	-0.2408	0.8610	-0.0102
-0.3464	0.2619	0.4003	-0.0573	0.5889

0.9728	0	0	0	0
0	0.4537	0	0	0
0	0	0.7944	0	0
0	0	0	0.6629	0
0	0	0	0	0.5815

附錄三　類典型相關分析：SAS 統計軟體執行結果

【程式內容】

```
data test;
infile 'xy.txt';
input x1 x2 x3 x4 x5 y1 y2 y3 y4 y5;
proc cancorr
data    = test all;
var x1 x2 x3 x4 x5;
with y1 y2 y3 y4 y5;
run;
```

【程式結果】

CANCORR 程序
正準相關分析
VAR 變數 的標準化正準係數

	V1	V2	V3	V4	V5
x1	0.2147	-0.3180	-0.5994	0.8817	-1.6487
x2	0.1948	-0.8694	-0.6464	-0.4842	1.1664
x3	0.2313	0.9455	-0.0195	-1.7318	-0.4132
x4	0.3390	-0.3238	1.4335	0.0479	0.4646
x5	0.1782	0.5791	-0.1962	1.4207	0.5890

WITH 變數 的標準化正準係數

	W1	W2	W3	W4	W5
y1	0.2471	-0.4756	-0.4374	0.7679	-1.5417
y2	0.1889	-0.6671	-0.6069	-0.5370	1.2278
y3	0.2601	0.9470	-0.1805	-1.2173	-0.5916
y4	0.3083	-0.3411	1.3115	-0.0175	0.5362
y5	0.1880	0.5657	-0.0886	1.1206	0.5763