國立政治大學 應用數學系

碩士 學位論文

有關整數分割的對射證明

About Bijective Proofs of Integer Partitions

國立政治大學 National Chengchi University

碩士班學生：涂健晏　撰
指導教授：李陽明　博士

中華民國 103 年 12 月 26 日

國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

涂健晏君所撰之碩士學位論文

有關整數分割的對射證明
About Bijective Proofs of Integer Partitions

業經本委員會審議通過
論文考試委員會委員：

指導教授：

系主任：

中華民國 103 年 12 月 26 日

致謝

在政大求學的這兩年半，時間轉眼間就過去了。

首先，我要感謝我的指導教授李陽明老師，謝謝老師您在學業上的指導以及鼓勵，也常常犧牲自己額外的時間跟我 meeting 使我大大小小的考試得以順利通過，完成學業，在此，我要向老師致上最深的敬意。感謝口試委員林英仁老師，大老遠的來幫我口試，提供寶貴的建議，使本文能盡善盡美。感謝余屹正老師讓我有機會可以擔任助教，有這機會能夠學習，也謝謝老師的關心與鼓勵。感謝在政大教導過我的師長們，陳天進老師，張宜武老師還有宋傳欽老師。感謝王思堯學長，王偉名學長，在課業上的能夠適時給予建議與傾聽，還有許雲峰學長和羅文隆學長，黃明怡學姊，陳治宗和曾郁婷同學，在這邊念書，有你們都不會無聊。

最後，我要感謝我的父母和家人，有你們的支持和陪伴，讓我能夠好好專注在自己的學業上，最基本的我可以不用為了生活費而煩惱，謝謝你們，我愛你們。

涂健晏

國立政治大學應用數學系

中華民國 104 年 1 月

National Chengchi University

中文摘要

在本篇論文，我們討論兩個組合等式，先利用整數分割及生成函數來證明，再給一個簡潔的方式證明這些整數分割之間的對應; 第一章我們先對生成函數、整數分割、2 的冪分割以及相異項與奇項分割作一個簡單的介紹，第二章說明並證明 2 的奇冪分割和偶冪分割的對射，第三章說明並證明相異項與奇項分割的對射。

國立政治大學
National Chengchi University

Abstract

This paper discusses two combinatorial identities. We begin by proving the identities using bijective generating functions of integer partitions, then we find a bijective proof for these combinational identities. In the first chapter, we introduce generating functions, integer partitions, partitions into the powers of two, partitions into distinct parts, and partitions into odd parts. In the next chapter, we prove the bijection between partitions into the powers of two with odd number of parts and partitions into the powers of two with even number of parts. In the last chapter, we prove the bijection between distinct parts and odd parts.

國立政治大學
National Chengchi University

目錄

口試委員會審定書 i
致謝 ii
中文摘要 iii
Abstract iv
目錄 v
第一章 序論 1
第一節 生成函數 1
第二節 整數分割 5
第三節 2 的冪分割 7
第四節 相異項與奇項分割 10
第二章 $(1-x)g^*(x)=1$ 的對射證明 12
第一節 2 的冪分割的對射證明 12
第三章 $\prod_{k\geq 1}(1+x^k)=\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$ 的對射證明 17
第一節 相異項與奇項分割的對射證明 17
第四章 展望 24
第一節 更多關於整數分割的探討 24
參考文獻 25

國立政治大學 National Chengchi University

第一章

序論

第一節　生成函數

設有三個相異的物品 a , b , c , 我們選取一個物品的方式有 3 種 , 也就是 a 或 b 或 c , 用 $a+b+c$ 表示 , 選取兩個物品的方式有 3 種 , 也就是 ab 或 bc 或 ca , 用 $ab+bc+ca$ 表示 , 選取三個物品的方式有 1 種 , 也就是 abc 都被選到 , 用 abc 表示 , 不選取任何物品的方式也就是選取 0 個物品的方式 , 定義為 1 種 。

考慮多項式 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$, 並將其展開

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+(abc)x^3$$

發現到 , 右式 x 的次冪為選取物品的個數 , 係數為選取的情形 , 左式 $(1+ax)$ 看成對¨a¨這個物品¨選¨或¨不選¨, 類似的 , b , c 也是可以¨選¨或¨不選¨, 我們把變數 x 看成一個指標 , 用來辨識選取物品的個數 。

如果只考慮發生的情形數 , 則令 $a=b=c=1$, 得到 $1+3x+3x^2+x^3$, 係數即為選取的方法數 。

由上面的例子 , 對於生成函數我們有以下定義 。

定義 1.1

設 $\{a_r\}_{r=0}^{\infty} = a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots$ 為一個序列，則

$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots$ 是 a_r 的生成函數。

例 1

設 a_r 為從 3 顆綠色球，4 顆紅色球，5 顆藍色球，6 顆黃色球當中選取 r 個球的方法數，求 a_r 的生成函數。

解：

設 e_1 為選取綠球的個數

e_2 為選取紅球的個數

e_3 為選取藍球的個數

e_4 為選取黃球的個數

我們有以下表示法

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r \qquad \text{其中 } 0 \le e_1 \le 3, 0 \le e_2 \le 4, 0 \le e_3 \le 5, 0 \le e_4 \le 6$$

因為 x^r 由 $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$ 組成，所以 a_r 的生成函數為 $\underbrace{(1+x+x^2+x^3)}_{e_1}$

$\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4)}_{e_2}\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)}_{e_3}\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}_{e_4}$ ■

例 2

設 a_r 為有 n 個相異的骰子，其點數和為 r 的方法數，求 a_r 的生成函數。

解：

將骰子編號，從 1 號到 n 號

設 e_1 為第 1 顆骰子出現的點數

e_2 為第 2 顆骰子出現的點數

$\cdots$

e_n 為第 n 顆骰子出現的點數

我們有以下表示法

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = r \qquad \text{其中 } 1 \le e_1 \le 6, 1 \le e_2 \le 6, \cdots, 1 \le e_n \le 6$$

國立政治大學 National Chengchi University

因為 x^r 由 $x^{e_1}x^{e_2}\cdots x^{e_n}$ 組成，所以 a_r 的生成函數為 $\underbrace{(x+x^2+x^3+x^4++x^5+x^6)}_{e_1}$

$\underbrace{(x+x^2+x^3+x^4++x^5+x^6)}_{e_2}\cdots\underbrace{(x+x^2+x^3+x^4++x^5+x^6)}_{e_n}$

$=(x+x^2+x^3+x^4++x^5+x^6)^n$ ■

例 3

設 a_r 為有 6 個相異的骰子，前三顆骰子點數分別為奇數，後三顆骰子點數分別為偶數，其點數和為 r 的方法數，求 a_r 的生成函數。

解：

將骰子編號，從 1 號到 n 號

設 e_1 為第 1 顆骰子出現的點數

e_2 為第 2 顆骰子出現的點數

$\cdots$

e_6 為第 6 顆骰子出現的點數

我們有以下表示法

$$e_1+e_2+\cdots+e_6=r \qquad \text{其中 } e_1,e_2,e_3=1,3,5\,,e_4,e_5,e_6=2,4,6$$

因為 x^r 由 $x^{e_1}x^{e_2}\cdots x^{e_6}$ 組成，所以 a_r 的生成函數為 $\underbrace{(x+x^3+x^5)}_{e_1}\underbrace{(x+x^3+x^5)}_{e_2}$

$\underbrace{(x+x^3+x^5)}_{e_3}\underbrace{(x^2+x^4+x^6)}_{e_4}\underbrace{(x^2+x^4+x^6)}_{e_5}\underbrace{(x^2+x^4+x^6)}_{e_6}$

$=(x+x^3+x^5)^3(x^2+x^4+x^6)^3$ ■

例 4

設 a_r 為有 6 個相異的骰子，第 i 顆的骰子不能出現點數 i，其點數和為 r 的方法數，求 a_r 的生成函數。

解：

將骰子編號，從 1 號到 n 號

設 e_1 為第 1 顆骰子出現的點數

e_2 為第 2 顆骰子出現的點數

國立政治大學 National Chengchi University

$\cdots$

e_6 為第 6 顆骰子出現的點數

我們有以下表示法

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_6 = r \qquad \text{其中 } e_1 = 2,3,4,5,6\,,\, e_2 = 1,3,4,5,6\,,\, e_3 = 1,2,4,5,6$$

$$e_4 = 1,2,3,5,6\,,\, e_5 = 1,2,3,4,6\,,\, e_6 = 1,2,3,4,5$$

因為 x^r 由 $x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_6}$ 組成，所以 a_r 的生成函數為 $\underbrace{(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}_{e_1}$

$\underbrace{(x+x^3+x^4+x^5+x^6)}_{e_2}\underbrace{(x+x^2+x^4+x^5+x^6)}_{e_3}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5+x^6)}_{e_4}$

$\underbrace{(x+x^2+x^3+x^4+x^6)}_{e_5}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^4+x^5)}_{e_6}$

$= \prod_{i=1}^{6}[(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) - x^i]$ ■

國立政治大學 National Chengchi University

第二節　整數分割

整數分割意思是將正整數 n 分割成許多正整數的和的方法數，一般而言，在談論整數分割，是不考慮順序的。例：3 可以寫成 1+2 或 2+1，但將這兩種視為一種。
另外，在高中時曾經遇過下列問題：把 n 個相同的球放入 n 個相同的盒子，允許有空盒子的方法數有多少種? 此問題即為整數分割的問題。

設 P_n 為整數 n 的分割數，e_k 為對其中一個分割，k 所使用的次數，例：$7 = 1+1+1+1+3$，$e_1 = 4$，$e_3 = 1$，則我們有以下等式

$$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + ne_n = n \qquad \forall\, i\,,\, 1 \le i \le n\,,\, e_i \ge 0$$

考慮 $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$　　x^r 表示整數 1 使用 r 次

$(x^2)^0 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots + (x^2)^r + \cdots$　　$(x^2)^r$ 表示整數 2 使用 r 次

$(x^3)^0 + (x^3)^1 + (x^3)^2 + (x^3)^3 + \cdots + (x^3)^r + \cdots$　　$(x^3)^r$ 表示整數 3 使用 r 次

$\vdots$　　$\vdots$

$(x^k)^0 + (x^k)^1 + (x^k)^2 + (x^k)^3 + \cdots + (x^k)^r + \cdots$　　$(x^k)^r$ 表示整數 k 使用 r 次

$\vdots$　　$\vdots$

所以，整數分割的生成函數 $g(x)$ 為

$$\begin{aligned} g(x) = {} & (1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots) \\ & (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2r} + \cdots) \\ & (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{3r} + \cdots) \\ & \cdots \\ & (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots + x^{kr} + \cdots) \\ & \cdots \\ = {} & \tfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^k)\cdots} = \textstyle\prod_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{1-x^i} = \sum_{n\ge 0} P_n\, x^n \end{aligned}$$

整數 n 的分割數 P_n 即為 x^n 的係數，且定義 $0 = 0$，也是一種分割。

國立政治大學 National Chengchi University

例 1

a_r 為 r 可以寫成相異正整數和的方法數 (不考慮順序), 求 a_r 的生成函數。

解:

設 $g(x)$ 為 a_r 的生成函數

對於整數 1, 只能¨選¨或¨不選¨, 所以生成函數 $g(x)$ 有因式 $(1+x)$

對於整數 2, 只能¨選¨或¨不選¨, 所以生成函數 $g(x)$ 有因式 $(1+x^2)$

對於整數 3, 只能¨選¨或¨不選¨, 所以生成函數 $g(x)$ 有因式 $(1+x^3)$

$\cdots$

因此, $g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^k)\cdots$ ■

例 2

設可以用價值 2 元 3 元和 5 元的郵票, 支付 r 元的郵資, a_r 為郵資 r 支付的方法數, 求 a_r 的生成函數。

解:

設 $g(x)$ 為 a_r 的生成函數

e_2 為 2 元郵票使用的次數, 所以生成函數 $g(x)$ 有因式 $(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)$

e_3 為 3 元郵票使用的次數, 所以生成函數 $g(x)$ 有因式 $(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$

e_5 為 5 元郵票使用的次數, 所以生成函數 $g(x)$ 有因式 $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)$

我們有以下表示法

$$2e_2+3e_3+5e_5=r \qquad \text{其中 } e_2, e_3, e_5 \geq 0$$

因此, $g(x) = (1+x^2+x^4+x^6+\cdots)\,(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$
$(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)$ ■

國立政治大學 National Chengchi University

第三節　2 的冪分割

定義 1.2

設 $n > 0$ 為一整數滿足 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = n$ 且

$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq n$, 其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ 為整數 , 則我們用符號

$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 表示為整數 n 的一個分割 , k 為此分割的項數 ; P_n 為整數 n 的所有分割之個數 。

設 $n > 0$ 為一整數滿足 $1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ne_n = n$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $e_i \geq 0$, 其中 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 為整數 , 則我們用符號 $[e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n]$ 表示為整數 n 的一個分割 , e_i 表整數 i 在一分割的使用次數 。

例 :

$(1, 1, 2, 4)$ 為整數 8 的一個分割 。

$[2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ 為整數 8 的一個分割 。

定義 1.3

設 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個分割且 $\forall\, i$, $1 \leq i \leq k$, $a_i = 2^t$, 其中 $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 則稱 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個 2 的冪分割 。

如果 k 為奇數 , 則稱 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個 2 的奇冪分割 。

如果 k 為偶數 , 則稱 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個 2 的偶冪分割 。

例 :

$(2, 2, 4)$ 為整數 8 的一個 2 的奇冪分割 , 其中 $k = 3$ 。

$(1, 1, 1, 1, 2, 2)$ 為整數 8 的一個 2 的偶冪分割 , 其中 $k = 6$ 。

定義 1.4

設 S_n 為整數 n , $n \geq 2$ 的所有 2 的奇冪分割所成之集合 , s_n 表示整數 n , $n \geq 2$ 的所有 2 的奇冪分割之個數 。

設 T_n 為整數 n , $n \geq 2$ 的所有 2 的偶冪分割所成之集合 , t_n 表示整數 n , $n \geq 2$ 的所有 2 的偶冪分割之個數 。

國立政治大學 National Chengchi University

例：

$S_9 = \{(1,4,4),(1,1,1,2,4),(1,2,2,2,2),(1,1,1,1,1,2,2),(1,1,1,1,1,1,1,1,1)\}$ 且

$s_9 = 5$。

$T_9 = \{(1,8),(1,2,2,4),(1,1,1,1,1,4),(1,1,1,2,2,2),(1,1,1,1,1,1,1,2)\}$ 且 $t_9 = 5$。

引理 1.5

設 $g^*(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots$

我們有 $(1-x)g^*(x) = 1$。

證：

$\forall n \geq 1$，$\exists\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得 $2^k \leq n < 2^{k+1}$

考慮 x^n 的係數，$n \geq 1$

右: x^n 的係數為 0，$n \geq 1$

左:$(1-x)g^*(x)$

$= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})(1+x^{2^{k+1}})(1+x^{2^{k+2}})\cdots$

因為 $2^k \leq n < 2^{k+1}$，且 x 的次方 $\geq 2^{k+1}$ 時，乘上其它任意的因式，次方也 $\geq 2^{k+1}$

而我們要找的 x 次方是小於 2^{k+1}

所以，對於 $(1+x^{2^{k+1}})$ 因式，選擇 1 來做乘積，而不是 $x^{2^{k+1}}$

類似的，$(1+x^{2^{k+2}})\,(1+x^{2^{k+3}})\cdots$，都是選擇 1 來做乘積

所以，左邊要找 x^n 項的係數，

我們只需要看 $(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})$ 之乘積

而 $(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})$

$= 1 - x^{2^{k+1}}$

因此，x^n 的係數為 0，$n \geq 1$ ■

定理 1.6

給定整數 $n \geq 2$，$s_n = t_n$。

證：

設 $g^*(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots$

根據引理 1.5 , $(1-x)g^*(x)=1$

$\Rightarrow 1-x=\frac{1}{g^*(x)}=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots}=\frac{1}{1+x}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+x^4}\frac{1}{1+x^8}\cdots\frac{1}{1+x^{2^k}}\cdots$

考慮 x^n 的係數 , $n\geq 2$

設 $\frac{1}{1+x}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^{r_0}+\cdots$

$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\cdots+(-x^2)^{r_1}+\cdots$

$\frac{1}{1+x^{2^2}}=1+(-x^{2^2})+(-x^{2^2})^2+(-x^{2^2})^3+\cdots+(-x^{2^2})^{r_2}+\cdots$

$\cdots$

$\frac{1}{1+x^{2^k}}=1+(-x^{2^k})+(-x^{2^k})^2+(-x^{2^k})^3+\cdots+(-x^{2^k})^{r_k}+\cdots$

則 $\sum_{r_0+2^1r_1+2^2r_2+2^3r_3+\cdots+2^kr_k=n}(-1)^{r_0+r_1+r_2+\cdots+r_k}x^n=0$, 其中 $2^k\leq n<2^{k+1}$

設滿足 $r_0+2^1r_1+2^2r_2+2^3r_3+\cdots+2^kr_k=n$ 且 $r_0+r_1+r_2+r_3+\cdots+r_k$ 為奇數的有 m_1 組

設滿足 $r_0+2^1r_1+2^2r_2+2^3r_3+\cdots+2^kr_k=n$ 且 $r_0+r_1+r_2+r_3+\cdots+r_k$ 為偶數的有 m_2 組

則 $[\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{m_1}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m_2}]\,x^n=0$

因此 , $m_1=m_2$ ■

由定理 1.6 , 從生成函數的觀點 , 我們知道對於整數 $n\geq 2$, n 的 2 的奇冪分割個數和 n 的 2 的偶冪分割個數會相等 , 因為從生成函數的觀點較繁瑣 , 而且對於沒學過生成函數的同學 , 較為不易了解 , 因此我們要找一個函數對應的方式 , 能夠直接說明 n 的 2 的奇冪分割集合和 n 的 2 的偶冪分割集合的個元素個數會一樣。

國立政治大學 National Chengchi University

第四節　相異項與奇項分割

定義 1.7

設 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個分割且 $\forall\, i$, $1 \le i \le k$, 滿足

$1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k \le n$, 則稱 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個相異項分割。

我們用符號 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 表示為整數 n 的一個相異項分割。

例：

$(1,2,3,5)$ 為整數 11 的一個相異項分割。

定義 1.8

設 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個分割且 $\forall\, i$, $1 \le i \le k$, 滿足 a_i 為奇數且

$1 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_k \le n$, 則稱 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$ 為 n 的一個奇項分割。

我們常用符號 $[\, e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n \,]$ 表示為整數 n 的一個奇項分割 , 其中 e_i 代表 i 使用的次數。

例：

$(1,1,1,1,1,3,3)$ 為整數 11 的一個奇項分割。

我們常用符號 $[5,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0]$ 表示為整數 11 的一個奇項分割。

定義 1.9

設 $\mathfrak{D}_n$ 為整數 n , $n \ge 1$ 的所有相異項分割所成之集合 , d_n 為整數 n , $n \ge 1$ 的所有相異項分割之個數。

設 $\mathcal{O}_n$ 為整數 n , $n \ge 1$ 的所有奇項分割所成之集合 , ϑ_n 為整數 n , $n \ge 1$ 的所有奇項分割之個數。

例：

$\mathfrak{D}_5 = \{(5), (1,4), (2,3)\}$ 且 $d_5 = 3$ 。

$\mathcal{O}_5 = \{(5), (1,1,3), (1,1,1,1,1)\}$ 且 $\vartheta_5 = 3$ 。

國立政治大學 National Chengchi University

定理 1.10

給定整數 n , $n \geq 1$, $d_n = \vartheta_n$ 。

證 :

d_n 的生成函數為 $\prod_{k\geq 1}(1+x^k)$

ϑ_n 的生成函數為 $\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$

$\prod_{k\geq 1}(1+x^k)$

$= \prod_{k\geq 1}(1+x^k)\prod_{k\geq 1}\frac{1-x^k}{1-x^k}$

$= \frac{\prod_{k\geq 1}1-x^{2k}}{\prod_{k\geq 1}1-x^k}$

$= \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$ ■

由定理 1.10 , 從生成函數的觀點 , 我們知道對於整數 $n \geq 1$, n 的相異項分割個數和 n 的奇項分割個數會相等 , 因為從生成函數的觀點較繁瑣 , 而且對於沒學過生成函數的同學 , 較為不易了解 , 因此我們要找一個函數對應的方式 , 能夠直接說明 n 的相異項分割集合和 n 的奇項分割集合的個元素個數會一樣 。

國立政治大學 National Chengchi University

第二章

$(1-x)g^*(x)=1$ 的對射證明

第一節　2 的冪分割的對射證明

定義 2.1

設 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k)$ 是整數 n 的分割，$n\geq 1$，若 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 中最大項的個數為 α，寫成 $maxnum(a_1,a_2,\cdots,a_k)=\alpha$。

註：$\alpha\geq 1$。

例：

$\alpha=maxnum(1,1,1,3,3,5,5,5)=3$。

定義 2.2

$\forall n\geq 2$，

(1) 設 $S_n^{(1)}$ 為整數 n 的所有 2 的奇冪分割之集合，其中 $\alpha=1$。

(2) 設 $S_n^{(2)}$ 為整數 n 的所有 2 的奇冪分割之集合，其中 $\alpha\geq 2$。

(3) 設 $T_n^{(1)}$ 為整數 n 的所有 2 的偶冪分割之集合，其中 $\alpha=1$。

(4) 設 $T_n^{(2)}$ 為整數 n 的所有 2 的偶冪分割之集合，其中 $\alpha\geq 2$。

註：$S_n=S_n^{(1)}\cup S_n^{(2)}$，$T_n=T_n^{(1)}\cup T_n^{(2)}$。

$S_n^{(1)}\cap S_n^{(2)}=\emptyset$，$T_n^{(1)}\cap T_n^{(2)}=\emptyset$。

國立政治大學 National Chengchi University

例：

$S_9^{(1)} = \{(1,1,1,2,4)\}$。

$S_9^{(2)} = \{(1,4,4),(1,2,2,2,2),(1,1,1,1,1,2,2),(1,1,1,1,1,1,1,1,1)\}$。

$T_9^{(1)} = \{(1,8),(1,2,2,4),(1,1,1,1,1,4),(1,1,1,1,1,1,1,2)\}$。

$T_9^{(2)} = \{(1,1,1,2,2,2)\}$。

當 $n \geq 2$

定義函數 $f : S_n^{(1)} \to T_n^{(2)}$ 為 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, \frac{x_k}{2}, \frac{x_k}{2})$

函數 f 是對射函數。

證:

[函數 f 是定義良好的函數]

$\forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in S_n^{(1)}$, $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, \frac{x_k}{2}, \frac{x_k}{2})$

如果 $x_k = 1$, 則 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = 1$

$\Rightarrow \alpha = maxnum(x_1, x_2, \cdots, x_k) = k = n \geq 2$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_k) \notin S_n^{(1)}$

$\Rightarrow x_k > 1$

$\Rightarrow x_k \geq 2$

設 $x_{k-1} = 2^t$, $x_k = 2^u$, $t < u$

$\Rightarrow t \leq u - 1$

$\Rightarrow x_{k-1} \leq \frac{x_k}{2} = 2^{u-1}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, \frac{x_k}{2}, \frac{x_k}{2}) \in T_n^{(2)}$

如果 $(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in S_n^{(1)}$

則 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = f(y_1, y_2, \cdots, y_k)$

由以上敘述，我們知道這函數是好的定義。■

[函數 f 為單射函數]

給定 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = f(y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$

$\underline{claim}$: $k = \ell$

證：

國立政治大學 National Chengchi University

假設 $k \neq \ell$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, \frac{x_k}{2}, \frac{x_k}{2}) \neq (y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-1}, \frac{y_\ell}{2}, \frac{y_\ell}{2})$

$\Rightarrow f(x_1, x_2, \cdots, x_k) \neq f(y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$ 矛盾

$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = f(y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, \frac{x_k}{2}, \frac{x_k}{2}) = (y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-1}, \frac{y_\ell}{2}, \frac{y_\ell}{2})$

$\Rightarrow x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\cdots$, $x_{k-1} = y_{\ell-1}$, $\frac{x_k}{2} = \frac{y_\ell}{2}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$ ■

[函數 f 為蓋射函數]

$\forall\ (z_1, z_2, \cdots, z_{\ell-1}, z_\ell) \in T_n^{(2)}$

設 $z_{\ell-1} = z_\ell = 2^t$

$\Rightarrow z_{\ell-2} < z_{\ell-1} + z_\ell = 2^{t+1}$

$\exists\ (z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-2}, z_{\ell-1} + z_\ell) \in S_n^{(1)}$ 使得

$f(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-2}, z_{\ell-1} + z_\ell) = (z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-2}, \frac{z_{\ell-1}+z_\ell}{2}, \frac{z_{\ell-1}+z_\ell}{2})$

$\Rightarrow f(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-2}, z_{\ell-1} + z_\ell) = (z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-1}, z_\ell)$ ■

定義函數 $g : S_n^{(2)} \to T_n^{(1)}$ 為 $g(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k) = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k)$

函數 g 是對射函數。

證：

[函數 g 是定義良好的函數]

$\forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in S_n^{(2)}$, $g(x_1, x_2, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k)$

設 $x_{k-1} = x_k = 2^t$

$\Rightarrow x_{k-2} < x_{k-1} + x_k = 2^{t+1}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k) \in T_n^{(1)}$

如果 $(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in S_n^{(2)}$

則 $g(x_1, x_2, \cdots, x_k) = g(y_1, y_2, \cdots, y_k)$

由以上敘述，我們知道這函數是好的定義。■

國立政治大學 National Chengchi University

[函數 g 為單射函數]

給定 $g(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k) = g(y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-1}, y_\ell)$

$\underline{claim}: k = \ell$

證 :

假設 $k \neq \ell$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k) \neq (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{\ell-2}, y_{\ell-1} + y_\ell)$

$\Rightarrow g(x_1, x_2, \cdots, x_k) \neq g(y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$ 矛盾

$g(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k) = g(y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-1}, y_\ell)$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-2}, y_{\ell-1} + y_\ell)$

$\Rightarrow x_1 = y_1 \,,\, x_2 = y_2 \,,\, \cdots \,,\, x_{k-2} = y_{\ell-2} \,,\, x_{k-1} + x_k = y_{\ell-1} + y_\ell$

$(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k), (y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-1}, y_\ell) \in S_n^{(2)} \,,\, x_{k-1} = x_k \,,\, y_{\ell-1} = y_\ell$

$\Rightarrow x_1 = y_1 \,,\, x_2 = y_2 \,,\, \cdots \,,\, x_{k-2} = y_{\ell-2} \,,\, 2x_k = 2y_\ell$

$\Rightarrow x_1 = y_1 \,,\, x_2 = y_2 \,,\, \cdots \,,\, x_{k-1} = y_{\ell-1} \,,\, x_k = y_\ell$

$\Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$ ■

[函數 g 為蓋射函數]

$\forall\, (z_1, z_2, \cdots, z_\ell) \in T_n^{(1)}$

設 $z_{\ell-1} = 2^t \,,\, z_\ell = 2^u \,,\, t < u$

$\Rightarrow t \leq u - 1$

$\Rightarrow z_{\ell-1} \leq \frac{z_\ell}{2} = 2^{u-1}$

$\exists\, (z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-1}, \frac{z_\ell}{2}, \frac{z_\ell}{2}) \in S_n^{(2)}$ 使得

$g(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-1}, \frac{z_\ell}{2}, \frac{z_\ell}{2}) = (z_1, z_2, \cdots, z_{\ell-1}, \frac{z_\ell}{2} + \frac{z_\ell}{2})$

$\Rightarrow g(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{\ell-1}, \frac{z_\ell}{2}, \frac{z_\ell}{2}) = (z_1, z_2, \cdots, z_{\ell-1}, z_\ell)$ ■

國立政治大學 National Chengchi University

例

$n = 9$

奇冪分割	偶冪分割
$(1,4,4)$	$(1,8)$
$(1,1,1,2,4)$	$(1,2,2,4)$
$(1,2,2,2,2)$	$(1,1,1,1,1,4)$
$(1,1,1,1,1,2,2)$	$(1,1,1,2,2,2)$
$(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$	$(1,1,1,1,1,1,1,2)$

$n = 10$

奇冪分割	偶冪分割
$(1,1,8)$	$(2,8)$
$(2,4,4)$	$(1,1,4,4)$
$(1,1,2,2,4)$	$(2,2,2,4)$
$(2,2,2,2,2)$	$(1,1,1,1,2,4)$
$(1,1,1,1,1,1,4)$	$(1,1,2,2,2,2)$
$(1,1,1,1,2,2,2)$	$(1,1,1,1,1,1,2,2)$
$(1,1,1,1,1,1,1,1,2)$	$(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

國立政治大學 National Chengchi University

第三章

$\prod_{k\geq 1}(1+x^k)=\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$ 的對射證明

第一節　相異項與奇項分割的對射證明

定義 3.1

給定 $r\in\mathbb{N}$, 則 $r=2^a\times b$, $a\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 其中 b 為奇數 , 則我們稱 b 為 r 的最大奇因數 , 用符號 $\vartheta(r)=b$ 表示 ,

稱 2^a 為 r 的最大 2 冪因數 , 用符號 $e(r)=2^a$ 表示。

註 : $r=e(r)\vartheta(r)$ 。

例 :

$r=60$

$e(r)=2^2$, $\vartheta(r)=15$ 。

引理 3.2

$x=y$ 若且為若 $\vartheta(x)=\vartheta(y)$ 且 $e(x)=e(y)$ 。

證 :

($\Leftarrow$) 根據定義 3.1

($\Rightarrow$)

國立政治大學 National Chengchi University

設 $x = 2^t \cdot x'$, $gcd(2^t, x') = 1$

$y = 2^u \cdot y'$, $gcd(2^u, y') = 1$

(1)$2^t | x = y$

$\Rightarrow 2^t | y$, $gcd(2^t, y') = 1$

$\Rightarrow 2^t | 2^u$

(2)$2^u | y = x$

$\Rightarrow 2^u | x$, $gcd(2^u, x') = 1$

$\Rightarrow 2^u | 2^t$

根據 (1)(2)$\Rightarrow 2^u = 2^t$ ■

定理 3.3

給定 $r \geq 1$, $r = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$, 其中 $\forall i$, $1 \leq i \leq n-1$,

$a_i = 0$, 1 且 $a_n = 1$

我們可以唯一的表示 r 以上述的形式。

證 :

[存在] 對 r 做強數學歸納法

$r = 1$, $1 = 2^0$ 　存在

設對 $r = 1, 2, \cdots, k$, r 可以表示成上述的形式

當 $r = k+1$，可假定 $k+1 > 1$

則 $2^m < k+1 \leq 2^{m+1}$, $m \geq 0$

(1) $k+1 = 2^{m+1}$ 　成立

(2) $2^m < k+1 < 2^{m+1} : k+1 > k+1-2^m > 0$

根據強數學歸納法 , $k+1-2^m = a_t 2^t + a_{t-1} 2^{t-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$, $a_t = 1$

<u>*claim*</u> : $t < m$

證 :

如果不是 , 則 $t \geq m$

$k+1-2^m \geq a_t 2^t \geq 2^m$

$k+1 \geq 2^m + 2^m = 2^{m+1}$

國立政治大學 National Chengchi University

[唯一] 對 r 做強數學歸納法

$r = 1\,, 1 = 2^0$ 　唯一

設對 $r = 1, 2, \cdots, k$ 　成立

當 $r = k+1$, 可假定 $k+1 > 1$

設 $r = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$

$\quad = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0$, 其中 $a_n = b_m$

則 $2^n \le r < 2^{n+1}$ 且 $2^m \le r < 2^{m+1}$

(1) $a_n 2^n \ne b_m 2^m$

(1.1) $a_n 2^n > b_m 2^m \Rightarrow 2^n > 2^m \Rightarrow n > m \Rightarrow n-1 \ge m$

考慮 $r = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$

$\quad \ge 2^n > 2^n - 1$

$\quad = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0$

$\quad \ge 2^m + 2^{m-1} + \cdots + 2^1 + 2^0$

$\quad \ge b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0 = r$

$\Rightarrow r > r$ 矛盾

(1.2) $a_n 2^n < b_m 2^m \Rightarrow 2^n < 2^m \Rightarrow n < m \Rightarrow n \le m-1$

考慮 $r = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0$

$\quad \ge 2^m > 2^m - 1$

$\quad = 2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 2^1 + 2^0$

$\quad \ge 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2^0$

$\quad \ge a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0 = r$

$\Rightarrow r > r$ 矛盾

(2) $a_n 2^n = b_m 2^m$

$\Rightarrow 2^n = 2^m$

$\Rightarrow n = m$

$\Rightarrow r - 2^n = r - 2^m < k+1$

根據強數學歸納法 , $r - 2^n = r - 2^m$ 表示法唯一

設 $r - 2^n = r - 2^m = 2^{c_1} + 2^{c_2} + \cdots + 2^{c_k}$, $c_1 > c_2 > \cdots > c_k$

國立政治大學 National Chengchi University

$\underline{claim}: c_1 < m$

證：

如果不是，則 $c_1 \geq m$

$r - 2^m = 2^{c_1} + 2^{c_2} + \cdots + 2^{c_k} \geq 2^{c_1} \geq 2^m$

$r - 2^m \geq 2^m$

$r \geq 2^m + 2^m = 2^{m+1}$ 矛盾 ■

定義函數 $f : \mathfrak{D}_n \to \mathcal{O}_n$ 為 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$

$y_v = \sum_{\vartheta(t)=v} e(t)$

函數 f 是對射函數。

證：

[函數 f 為單射函數]

$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$

$f(u_1, u_2, \cdots, u_\ell) = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$

$\underline{claim}: k = \ell$

證：

假設 $k > \ell$

則 $\exists z$，其中 z 為奇數

使得 $q > r$，其中 $\vartheta(x_{i_1}) = \vartheta(x_{i_2}) = \cdots = \vartheta(x_{i_q}) = z$

$$\vartheta(u_{j_1}) = \vartheta(u_{j_2}) = \cdots = \vartheta(u_{j_r}) = z$$

[如果 $\nexists$ 上述的 z，則 $k \leq \ell$ 矛盾]

$y_z = e(x_{i_1}) + e(x_{i_2}) + \cdots + e(x_{i_q})$

$\quad = e(x_{j_1}) + e(x_{j_2}) + \cdots + e(x_{j_r})$ 矛盾

[$e(x_{i_1}), e(x_{i_2}), \cdots, e(x_{i_q})$ 皆相異]

[$e(u_{j_1}), e(u_{j_2}), \cdots, e(u_{j_r})$ 皆相異]

$k < \ell$ 同理可證

國立政治大學 National Chengchi University

設 $x_k = e(x_k)\vartheta(x_k)$, 其中 $2^a = e(x_k)$, $b = \vartheta(x_k)$

$\Rightarrow y_b \geq e(x_k)$

如果 $x_k > u_\ell > u_{\ell-1} > \cdots > u_1 \geq 1$

$y_b \leq 2^{a-1} + 2^{a-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^a - 1 = e(x_k) - 1$

$\Rightarrow y_b \geq e(x_k)$ 且 $y_b \leq e(x_k) - 1$ 矛盾

因此 , $x_k \leq u_\ell$

設 $u_\ell = e(u_\ell)\vartheta(u_\ell)$, 其中 $2^c = e(u_\ell)$, $d = \vartheta(u_\ell)$

$\Rightarrow y_d \geq e(u_\ell)$

如果 $u_\ell > x_k > x_{k-1} > \cdots > x_1 \geq 1$

$y_d \leq 2^{c-1} + 2^{c-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^c - 1 = e(u_\ell) - 1$

$\Rightarrow y_d \geq e(u_\ell)$ 且 $y_d \leq e(u_\ell) - 1$ 矛盾

因此 , $x_k \geq u_\ell$

$\Rightarrow x_k = u_\ell$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}) = [y_1, y_2, \cdots, y_b - e(x_k), \cdots, y_n]$

$f(u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}) = [y_1, y_2, \cdots, y_b - e(x_k), \cdots, y_n]$

根據強數學歸納法

設 $x_i = u_i$, $\forall i$, $2 \leq i \leq k$

$\exists! h$, $1 \leq h \leq n$ 使得 $z_h = 2^t$ 且 $\forall i$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\} - \{h\}$, $z_i = 0$

$\Rightarrow f(x_1) = f(u_1) = [z_1, z_2, \cdots, z_h, \cdots, z_n]$

$\Rightarrow x_1 = u_1 = 2^t \times h$

$\Rightarrow x_i = u_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq k$ ■

[函數 f 為蓋射函數]

設 $t = max\{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq n \text{ , } a = 2k - 1 \ \ for \ \ k \in \mathbb{N}\}$

任意給定 u , $1 \leq u \leq n$, 滿足 $y_u \geq 1$

根據定理 3.3 的存在性 , $y_u = 2^{u_1} + 2^{u_2} + \cdots + 2^{u_s}$, $u_1 > u_2 > \cdots > u_s$

設 $A_u = \{2^{u_1} \times u, 2^{u_2} \times u, \cdots, 2^{u_s} \times u\}$

類似的 , 我們有 A_1 , A_3 , $\cdots$, A_t

國立政治大學 National Chengchi University

<u>*claim*1</u> : 在 A_i 的元素皆相異

任意給定 $\alpha, \beta \in A_i$, 則 $e(\alpha) \neq e(\beta)$

根據引理 3.2 , $\alpha \neq \beta$

<u>*claim*2</u> : 如果 $i \neq j$, 則 $A_i \cap A_j = \emptyset$

任意給定 $\alpha \in A_i, \beta \in A_j$

則 $\vartheta(\alpha) = i, \vartheta(\beta) = j$

$i \neq j$

$\Rightarrow \vartheta(\alpha) \neq \vartheta(\beta)$

根據引理 3.2 , $\alpha \neq \beta$

設 $A = A_1 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_t$

<u>*claim*3</u> : 集合 A 中的所有元素 , 能夠按大小順序重新排列 , 用符號 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 表示 , 其中 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$

對 $|A| = k$ 做數學歸納法

$k = 1$ 成立

設對 $k = r$ 成立

當 $k = r + 1$, 可假定 $r + 1 > 1$

根據良序原理 , $minA$ 存在 , 令其為 x_1

考慮集合 , $A - \{x_1\}$, 根據數學歸納法 , 將集合內元素令為 $x_2, x_3, \cdots, x_{r+1}$ 並滿足 $x_2 < x_3 < \cdots < x_{r+1}$

因此 , $\exists\ (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathfrak{D}\ (n)$

使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ ■

國立政治大學 National Chengchi University

例

$n = 9$

相異項分割	奇項分割
(9)	$[0,0,0,0,0,0,0,0,1] = (9)$
$(1,8)$	$[2,0,0,0,0,0,1,0,0] = (1,1,7)$
$(2,7)$	$[1,0,1,0,1,0,0,0,0] = (1,3,5)$
$(3,6)$	$[0,0,3,0,0,0,0,0,0] = (3,3,3)$
$(4,5)$	$[4,0,0,0,1,0,0,0,0] = (1,1,1,1,5)$
$(1,2,6)$	$[3,0,2,0,0,0,0,0,0] = (1,1,1,3,3)$
$(1,3,5)$	$[6,0,1,0,0,0,0,0,0] = (1,1,1,1,1,1,3)$
$(2,3,4)$	$[9,0,0,0,0,0,0,0,0] = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

$n = 10$

相異項分割	奇項分割
(10)	$[1,0,0,0,0,0,0,0,1,0] = (1,9)$
$(1,9)$	$[0,0,1,0,0,0,1,0,0,0] = (3,7)$
$(2,8)$	$[0,0,0,0,2,0,0,0,0,0] = (5,5)$
$(3,7)$	$[3,0,0,0,0,0,1,0,0,0] = (1,1,1,7)$
$(4,6)$	$[2,0,1,0,1,0,0,0,0,0] = (1,1,3,5)$
$(1,2,7)$	$[1,0,3,0,0,0,0,0,0,0] = (1,3,3,3)$
$(1,3,6)$	$[5,0,0,0,1,0,0,0,0,0] = (1,1,1,1,1,5)$
$(1,4,5)$	$[4,0,2,0,0,0,0,0,0,0] = (1,1,1,1,3,3)$
$(2,3,5)$	$[7,0,1,0,0,0,0,0,0,0] = (1,1,1,1,1,1,1,3)$
$(1,2,3,4)$	$[10,0,0,0,0,0,0,0,0,0] = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

國立政治大學 National Chengchi University

第四章

展望

第一節　更多關於整數分割的探討

有關整數分割的問題，既多元又有趣，例如：

定義 4.1 設 $A_k(n)$ 為將整數 n 分割成奇數的和，奇數允許重複，奇數有 k 種的方法數。

定義 4.2 設 $B_k(n)$ 為將整數 n 分割成相異項和，用 $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ 表示，滿足 k 個不相連的連續序列所組成的方法數。

定理 4.3 $A_k(n) = B_k(n)$。

關於定理 4.3 的證明可以參考 George E. Andrews. The theory of partitions.

例：

$A_3(14) = 7$，其組成為

$(1,1,3,9)$，$(1,1,5,7)$，$(1,3,3,7)$，$(1,1,1,1,3,7)$，$(1,3,5,5)$，$(1,1,1,3,3,5)$，$(1,1,1,1,1,1,3,5)$

$B_3(14) = 7$，其組成為

$(1,3,10)$，$(1,4,9)$，$(1,5,8)$，$(2,4,8)$，$(2,5,7)$，$(1,2,4,7)$，$(1,3,4,6)$

因為定理 4.3 的證明過於冗長，所以我們也是想要找個簡潔的方式去直接說明它們之間的對應的關係，但是由於時間的關係，希望以後有機會可以繼續研究，還有像是其他有關於整數分割的問題，在 George E. Andrews. The theory of partitions 這本書中，也有許多介紹，如果對於整數分割有興趣的學弟妹，可以繼續努力將對應找出來。

國立政治大學 National Chengchi University

參考文獻

[1] *National Institute for Compilation and Translation*. http://terms.naer.edu.tw/.

[2] George E. Andrews. *Number theory*. New York : Dover Publications, 1938.

[3] George E. Andrews. *The theory of partitions*. London ; Reading, Mass. : Addison-Wesley Pub. Co., Advanced Book Program, 1976.

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford Univ.Press, London and New York., 1960.

[5] D. R. Hickerson. *Identities relating the number of partitions into an even and odd number of parts*. J. Combinatorial Theory A15, 1973.

[6] D. R. Hickerson. *A partition identity of Euler type*. Amer. Math. Monthly 81, 1974.

[7] Chung Laung Liu. *Introduction to combinatorial mathematics*. McGraw-Hill, 1968.

[8] Fred S. Roberts ; Barry Tesman. *Applied combinatorics*. Upper Sadle River, N.J. : Prentice-Hall, 2005.

[9] Alan Tucker. *Applied combinatorics*. Hoboken, N.J. : John Wiley and Sons, 2012.

國立政治大學 National Chengchi University