國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

從平面的直線分割延伸到空間的平面分割

An Extension from straight-line-spliting of plane to plane-spliting of space

碩專班學生：陳舒蓁 撰

指導教授 ：張宜武 博士

中華民國 104 年 05 月 14 日

中文摘要

在這篇論文中，我是從對七橋問題的興趣，發現尤拉公式對於平面的直線分割提供了另一個角度切入，進而推導出一般化公式。進一步的想，如果尤拉公式在平面圖形上提供了這樣一個簡單的關係式，是否在空間中也依然可以有相類似的推論呢？所以我希望能找到這樣一個關係式，並且以正多面體為例，找到平面分割空間中各數值的變化與關聯性。

Abstract

In this paper, I was interested in Seven Bridges problems and found that Euler's formula for straight-line-spliting in plane provides another viewpoint, and then derive the generalized formula. Further that, if the Euler's formula provides such a simple relationship in the graph whether it is still can have similar relationship in space? So I hope to find such a relationship, and with regular polyhedron, for example, to find the change and the relevance of the plane-spliting in space.

目錄

中文摘要 i

Abstract ii

1 引言 1

2 尤拉公式 4

2.1 尤拉公式的一些證明 5

2.2 正多面體個數的限制與探討 12

3 平面中的直線分割 17

3.1 從尤拉公式延伸到連通的直線網 17

3.2 平面的分割 19

4 空間中的平面分割 24

4.1 從尤拉公式延伸到連通的平面網 24

4.2 空間的切割 26

5 正多面體的平面分割與結論 32

參考文獻 33

1 引言

十八世紀初期，在普魯士的柯尼斯堡，Pregel rivier 分成兩道支流流經此城市，並在此處沖積出一座小島。為了方便當地居民來回此小島與兩岸城區，他們在此河面上建起七座橋樑（如圖 1.1）。曾幾何時，走在這些橋上的人開始流傳著一個有趣的數學問題：「誰能一次走完這七座橋，而不重複通過任何一座？」這個問題一直沒有人找到答案，逐漸遠傳至瑞士數學家尤拉耳中。

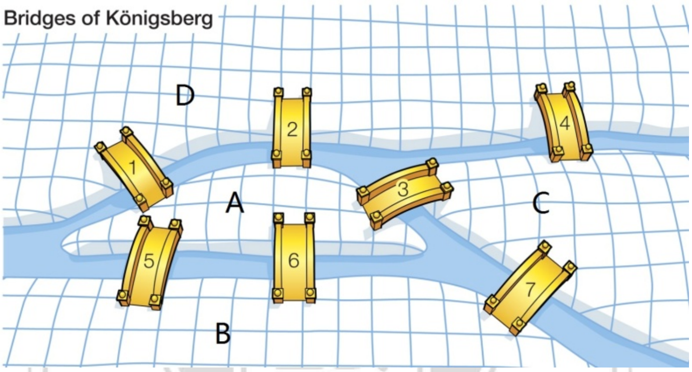


圖 1.1

尤拉認定這是一個有價值的數學問題，在尤拉以後的思考中，他拉進了德國數學家萊布尼茲的「位置幾何學」概念，它研究的對象只依賴於物體的相對位置和順序，而與幾何量的大小無關。根據這個思想，加以他所擅長的代數和計算方式，給出了這種類型問題的一般解，進而藉由分析提出了簡便的法則，完成了「柯尼斯堡七橋問題」的著名論文。

在此基礎上，尤拉在 1750 年的時候，對凸多面體提出了一個非常重要的公式－尤拉公式：

$$V - E + F = 2$$

其中，V 代表的是凸多面體的頂點的個數、E 代表的是凸多面體的稜邊的個數、F 代表的是凸多面體的面的個數。在這個公式中，可以進一步的討論，關於圖形與空間的關係。

尤拉是個擁有許多跨領域著作的數學家，在數學各分支都可以看到尤拉的身影，我們現在很常見到的數學符號許多都是尤拉所發明，例如：函數符號 $f(x)$、圓週率 π、自然對數的底 e、求和符號 Σ、$log\, x$、$sin\, x$、$cos\, x$ 以及虛數 i 等，就連號稱尤拉公式的式子，也在不同的領域都可以見到，例如：

（1） 三角形有關內心和外心的尤拉公式

$$R^2 - d^2 = 2R \cdot r$$

其中，R 為三角形外接圓的半徑，r 為三角形內切圓的半徑，d 為內外心的距離。

（2） 在複分析領域的尤拉公式，對於任意實數 x，存在

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sin\, x$$

當 $x = \pi$ 時，就成了數學家一致認為最令人著迷的公式：

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

（3） 在幾何學和代數拓樸學方面的尤拉公式則為

$$V - E + F = 2$$

亦即本篇文章主要探討與延伸的公式。

尤拉的多產由此可見一般。故此本文章中若提到尤拉公式，即是以（3）所提到，與凸多面體有關的公式，後不再贅述。

當尤拉提出凸多面體公式的時候，事實上，尤拉並不是第一個給出完整證明的人，完整的證明橫跨 200 多年，涵括了許多數學家的努力[7]，除了尤拉自己，還包括 René Descartes（1596－1650）、Adrien-Marie Legendre（1752－1833）和 Augustin-Louis Cauchy（1789－1857）等人的貢獻，也慢慢豐富起「幾何學」這一分支。這些數學家們都有自己獨到的想法與巧妙的證明，所以在本文的第二章，我們將先欣賞尤拉公式的兩種不同的巧妙證明，並且利用尤拉公式推論出正多面體個數的可能情形有多少種。

第三章則是將尤拉公式作一個延伸，我們希望能在直線網中，找出平面被直線（或曲線）所切割的區域，在頂點個數、直線數量（或曲線)、和區域個數之間找到一個關係式，並且利用較容易計算出的頂點個數和直線（或曲線）數量，推導出區域個數。

第四章則是繼續延伸尤拉公式到平面網中，從平面的直線分割推導到空間的平面分割來作討論。

第五章提到對正多面體的每一個面做延伸之後，其實際分割的空間數量與一般化公式推導出的空間數量，兩者之間也許存在著黃金比例的關聯。

2 尤拉公式

尤拉公式之所以獲得眾多數學家的關注與重視，來自於它提供一組不變量，讓我們不用為了檢查哪一種凸多面體是否存在，而整日裡與膠水、剪刀為伍，試圖拼湊出一個可能並不存在的多面體，卻不得其門而入，簡潔有力的尤拉公式即可滿足此項需求。

尤拉公式可以幫助我們判斷某些類型的凸多面體是否存在。

例如我們想知道：如果有一個有 6 個頂點和 12 個稜邊的凸多面體，那麼這個凸多面體的面是否都是三角形？[8]

證明：根據尤拉公式，由 $V=6$，$E=12$，得

$$F=2-V+E=2-6+12=8$$

因為一個邊會由兩個面共用，所以每個面的邊總和為兩倍的稜邊數，則平均每個面有 $2E/F=2\times 12/8=3$ 個稜邊，又每個面要有 3 個邊以上，得到此多面體的每一個面都是三角形。

另外，如圖 2.1 左圖的柱體，以八邊形為上下兩底面，我們可以得到一個有 10 個面的多面體，但它的頂點卻只有 16 個。另外如圖 2.1 右圖的錐體，以九邊形為底面，我們一樣可以得到另一個有 10 個面的多面體，但頂點也只有 10 個。當然也可以透過尤拉公式的檢查知道，要同時擁有 10 個面和 17 個頂點的簡單多面體是不存在的。

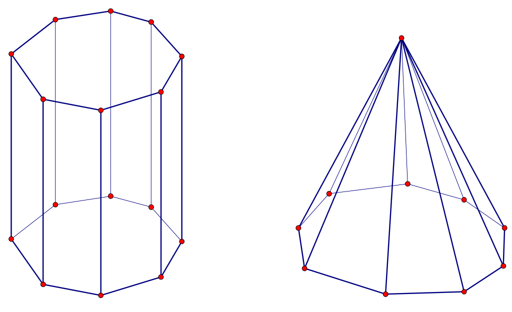


圖 2.1：這兩個多面體都有 10 個面，但是都沒有 17 個頂點。

在尤拉公式中所討論到的是針對簡單多面體的情形，簡單多面體（simple

polyhedron）又稱為單純多面體（simplicial polyhedron），它是一個表面由若干凸多邊形所組成的一個立體圖形，故亦稱為凸多面體；另外一種檢查方式：當一個多面體的任何一個面延伸成一個平面時，其他各面都在這個平面的同側，這樣的多面體就稱為凸多面體。以下本文中所提到的多面體皆屬於此類。

從各式各樣的多面體中，我們不難發現尤拉公式的確存在，沒有例外的情形發生，但如果以嚴謹的角度來看，這樣是不夠的，只能說剛好我們找到的多面體符合這個尤拉公式，但卻無法說明更多。我們會需要一個證明，一個無懈可擊且合乎邏輯的論證以說明所有的多面體都具備此項性質，這樣才能涵蓋那些我們不曾檢查過或來不及檢查的多面體。

2.1 尤拉公式的一些證明

有眾多數學家獨特的想法與巧妙的論證，讓我們可以從各種角度去欣賞尤拉公式，現在我們僅擷取其中兩種不同的論證，從這些論證中一窺尤拉公式的巧妙，和欣賞這些數學家對於數學無限想像的空間。

首先，柯西提供了一個圖像化的論證[1]。我們把它分成幾個階段來看。

第一個階段—將多面體轉換成平面圖

《第一步》：試想你拿了一個有一面朝上的多面體，然後把朝上的這一個面移除（如圖 2.2），就像是一個沒有上蓋的盒子。

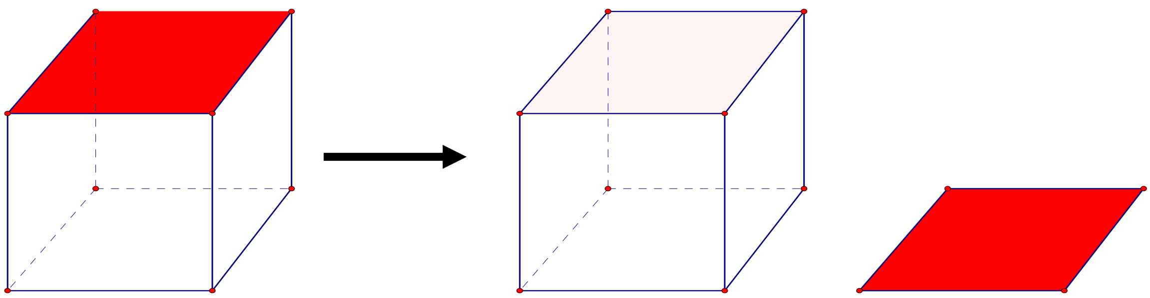


圖 2.2：移除朝上的一面

《第二步》：想像這是一個可以任意延展的盒子，你可以把它的邊和面慢慢向外拉，讓所有的邊和面都躺在同一個平面上（如圖 2.3）。

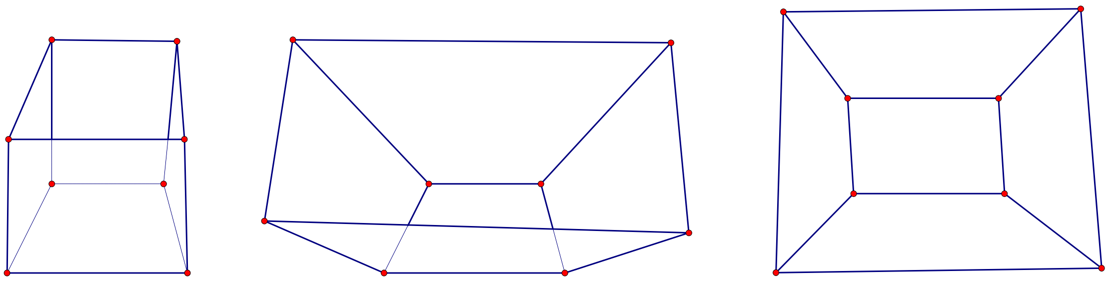


圖 2.3：把多面體轉換成平面圖（由左至右）

完成上述兩個步驟之後，我們可以得到一個新的平面圖，在這新的平面圖中，我們沒有新增加也沒有刪除任何物件，所以這個平面圖的頂點數和原多面體的頂點數一樣多，新的平面圖的邊數和原多面體的稜邊數也相同，平面圖的面數，即圍成的區域數量，若連平面圖外的區域也算進去，則數量亦跟原多面體是相同的。也就是說若原本多面體的頂點數、稜邊數和面數為 V 、E 、F ，新平面圖的頂點數、邊數和面數為 V' 、E' 、F' ，則彼此間的關係為：$V' = V$ 、$E' = E$ 、$F' = F - 1$ ，若尤拉公式為真，即 $V - E + F = 2$ ，那麼

$$V' - E' + F' = V - E + (F - 1) = 2 - 1 = 1$$

接下來我們只要透過此平面圖去檢查 $V' - E' + F'$ 的值都是 1，那麼尤拉公式的證明就結束了。接下來，我們將再進一步的去改變此平面圖，讓這個值比較容易計算。

第二個階段—三角化平面圖和簡化

在這個階段裡面，我們先將這一個平面圖三角化，也就是將平面圖中每一個不是三角形的面全部都切割成三角形，然後再一一檢查此三角化平面圖中的每一個面，將符合條件的面去掉，讓此三角化平面圖越來越簡潔。

《步驟一》：我們先檢查這個平面圖的其中一個面，若這個面超過三個邊，那我們就

在這個面上畫對角線，如下圖 2.4 所示：

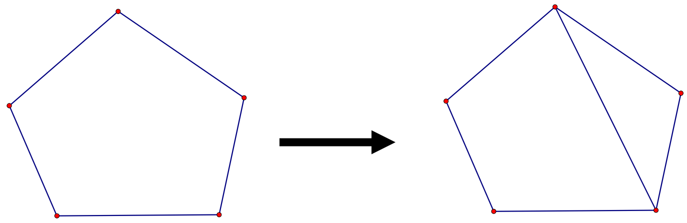


圖 2.4：利用對角線分割面

重複上述動作，直到這個面完全都只是三角形的圖形，如圖 2.5。

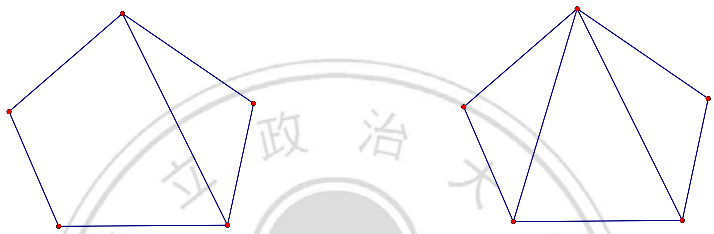


圖 2.5：完全分割成只有三角形的圖形。

如果有其他的面也超過三個邊，我們也利用步驟一的方式，讓其他的面都被分割成三角形的樣子。透過這樣的方式，我們會得到一個所有的面都是三角形的一個新的平面圖，如圖 2.6（f）所示。

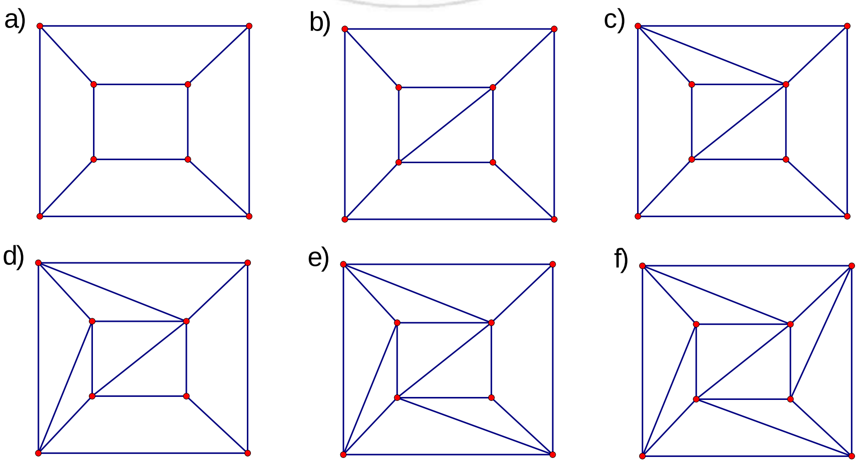


圖 2.6：步驟一的分解圖：將每一個不是三角形的面利用對角線分割成只有三角形的面。

現在我們來看看，當每多畫一條對角線時，產生了哪些變化。從圖 2.5 的五邊形來

看，每多畫一條對角線，原先的面會被一分為二，多出一個面來，而邊數則會比原來的圖形多一個邊，對於頂點的部份則不受影響。也就是說，在這樣把平面圖全分割成只含有三角形的面的新平面圖時，每多畫一條線，其面數會比原面數多 1，邊數也比原邊數多 1，即當原平面圖有 V' 個頂點、 E' 條邊和 F' 個面，新的平面圖有 V'' 個頂點、 E'' 條邊和 F'' 個面，然後我們得到

$$V''-E''+F''=V'-(E'+1)+(F'+1)=V'-E'-1+F'+1=V'-E'+F'$$

所以經過步驟一的改變，$V'-E'+F'$ 的值並不會跟著改變，也就是說，經過調整後的三角形平面圖其頂點數、邊數和面數之間的關係式仍保持跟原先平面圖的關係式有相同的值。這樣的圖形暫時還是算複雜的情形，我們接下來透過後續的幾個動作，將平面圖繼續做簡化。

《步驟二-1》：我們檢查這個三角形平面圖，在這個平面圖中，如果每一個面的三個邊都和圖形外的區域相鄰，那我們就已經找到最簡化的三角形平面圖，就不需要再往後面的步驟前進。

事實上這樣的情形只會出現在只有一個三角形的圖形上，我們可以很輕易的看出來，它的頂點數 $V'=3$ ，邊數 $E'=3$ ，面數 $F'=1$ ，則

$$V'-E'+F'=3-3+1=1$$

其值與尤拉公式所稱的 $V-E+F=2$ 所推衍出來的 $V'-E'+F'=1$ 相同，亦即尤拉公式的證明已經完成。如果還有任何一個面低於三個與外面區域相鄰的邊，那麼就繼續往後面的步驟走。

《步驟二-2》：如果找不到一個面的三個邊都跟外面區域相鄰的話，我們退而求其次，找一個面有兩個與外部區域相鄰的邊，移除這個面。

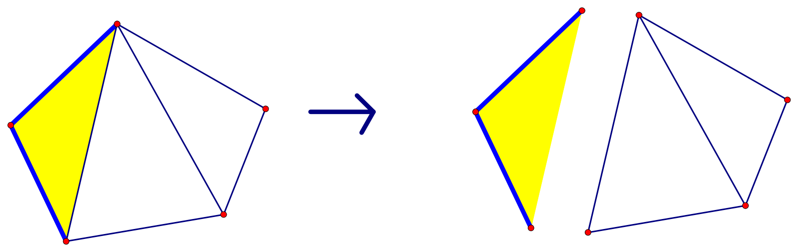


圖 2.7：移除一個頂點，兩個與外部區域相鄰的邊。

當移除這個面時，也同時會移除此面的兩個與外面區域相鄰的邊和單一凸出去在圖形外部的一個頂點，如圖 2.7 所示。在這樣的操作之下，若原平面圖的頂點數、邊數和面數為 V' 、 E' 、 F' ，新的平面圖頂點數、邊數和面數為 V'' 、 E'' 、 F'' ，則 $V''=V'-1$ 、 $E''=E'-2$ 、 $F''=F'-1$ ，我們得到

$$\begin{aligned} V''-E''+F'' &= (V'-1)-(E'-2)+(F'-1) \\ &= V'-1-E'+2+F'-1 \\ &= V'-E'+F' \end{aligned}$$

也就是說，在步驟二-2 中刪除一個面之後的新平面圖與原來的平面圖，頂點數、邊數和面數所形成的關係式其值沒有改變。每移除一個面之後，圖形就要再從步驟二-1 開始操作。如果平面圖在步驟二-2 中還是找不到有哪一個面恰有兩個邊與外面區域相鄰，則繼續往後面的步驟前進。

《步驟二-3》：當平面圖在步驟二-1 和步驟二-2 中都找不到符合條件的面時，我們接著找只有一個邊與外面區域相鄰的面，然後把這個面移除。

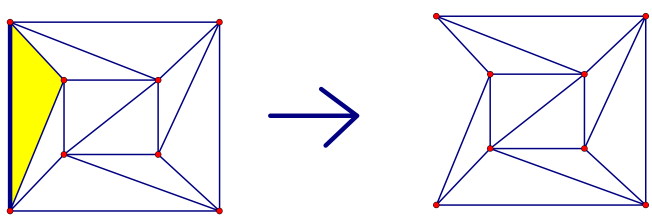


圖 2.8：移除只有一個邊與外面區域相鄰的面。

在步驟二-3 中，每移除一個面，也同時讓這個平面圖少了一個邊，如圖 2.8 所示。那

麼我們接著來檢查看看這樣的動作對 $V'-E'+F'$ 的值有甚麼樣的改變。以圖 2.8 為例，若左圖的頂點數、邊數和面數為 V' 、E' 、F' ，右圖頂點數、邊數和面數為 V'' 、 E'' 、 F'' ，且 $V''=V'$ 、 $E''=E'-1$ 、 $F''=F'-1$ ，我們得到

$$
\begin{aligned}
V''-E''+F'' &= V'-(E'-1)+(F'-1)\\
&= V'-E'+1+F'-1\\
&= V'-E'+F'
\end{aligned}
$$

所以，經過步驟二-3 的操作之後，新的平面圖跟原來的平面圖在頂點數、邊數和面數的關係式中，$V'-E'+F'$ 的值也是不受影響的。當移除符合條件的一個面之後，繼續回到步驟二-1 重新檢視，若達到步驟二-1 的條件，就可以開始計算 $V'-E'+F'$ 的值；如果還不符合步驟二-1 的條件，就繼續往步驟二-2 檢查。若有符合步驟二-2 的條件，就刪去符合條件的一個面，再回到步驟二-1；若還是沒有符合條件的任何一個面，才繼續前進到步驟二-3，刪去任何一個符合條件的面，之後再回到步驟二-1 重新檢視。在反覆操作之後，直到符合步驟二-1 的條件出現才停止，推導過程如圖 2.9。一次只移除一個面，且需依序移除，這樣可以避免將圖形分解成兩個部份，或是因為一次移除兩個面造成有一個邊延伸到外面卻不屬於任何一個面。

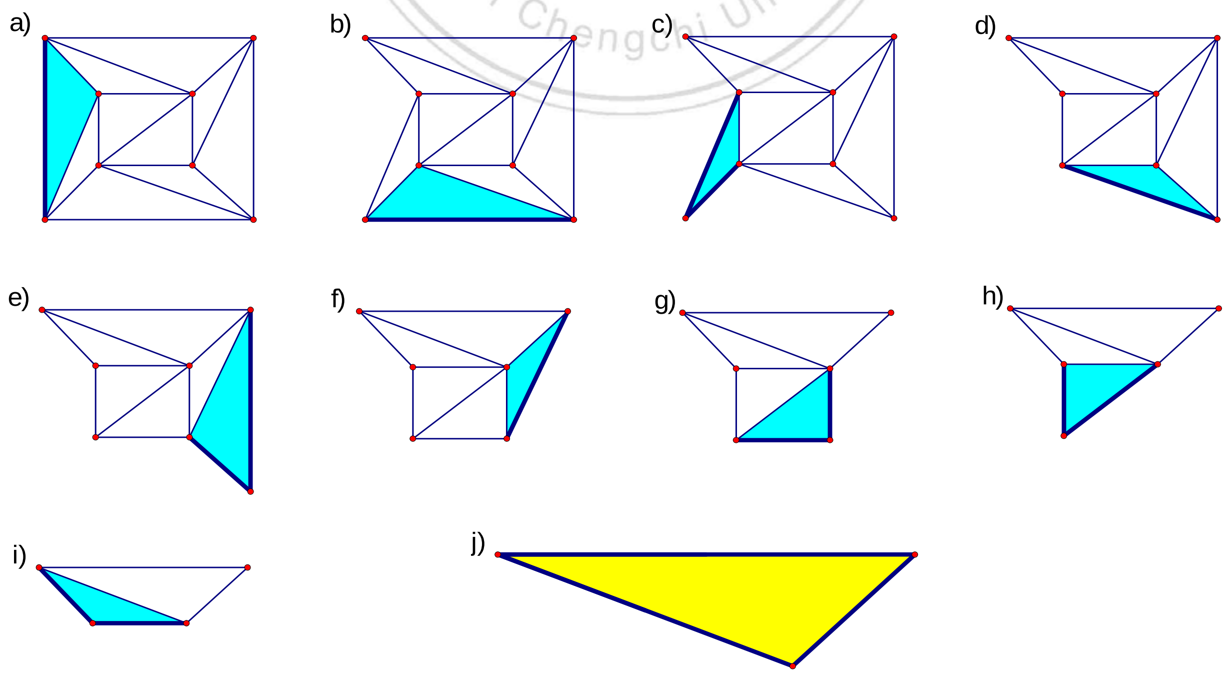


圖 2.9：將三角化平面圖依步驟二中檢視的順序逐步簡化至只剩單一個三角形。

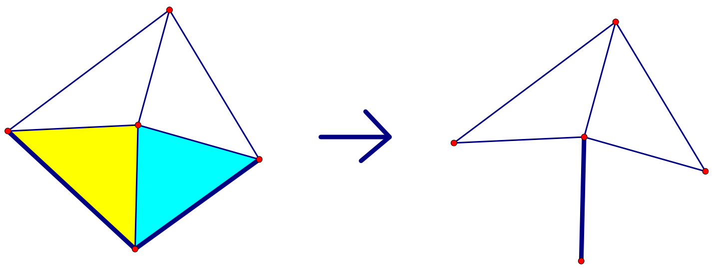


圖 2.10：同時移除兩個面和與外部區域相鄰的邊，會出現一個突在外部區域的邊。

結論：將任何一個簡單多面體透過第一階段，轉化成簡單平面圖，得到

$$V-E+F=V'-E'+F'+1$$

接著在第二階段將平面圖三角化，然後慢慢簡化到最後只剩下一個三角形。在這樣的轉變中，我們可以確認 $V'-E'+F'$ 的值沒有受到改變，所以到最後的三角形，我們得到

$$V'-E'+F'=3-3+1=1$$

也就是說

$$V-E+F=V'-E'+F'+1=1+1=2$$

到這裡柯西的證明方式就完成了，因為柯西的證明方法可以單純透過圖像化達到目的，對於一般人而言，圖像化的理解程度會比一堆文字的證明來的高，所以特別花了一些篇幅來介紹。接下來則是一般所熟知的證明方法，也是在一些圖論教科書中常引用的證明，利用數學歸納法得到尤拉公式的結果，在介紹此證明之前，我們需要先有一個定理和與其相關的定義作為基礎，以下提出的定義與定理可以幫助我們在利用數學歸納法證明尤拉公式時，能確保這些可平面化圖形確實符合所需的條件與應有的型態。

【定義 2.1】 一個圖稱為可平面化圖形（planar graph）意指它可以被畫成一個平面的圖形，且這個圖形中的任兩個邊除了各線段的兩端點以外不會有其他相交的點出現。

【定義 2.2】 Jordan curve 又稱為簡單封閉曲線（simple closed curve）。簡單封閉曲線，指的是沒有交叉而過的連續曲線，且曲線的起點和終點是同一個頂點。例如圓形、橢圓形和多邊形。

【定理 2.3】[2] （The Jordan Curve Theorem）一個由有限的許多線段所組成的簡單封閉多邊形曲線C（Jordan curve），將一個平面恰好分割成兩個各有一個 C 當邊界的面。

有定理 2.3 的支持，接下來要證明尤拉公式就容易多了。

【定理 2.4】[3]（尤拉公式）

$$V-E+F=2$$

其中，V 代表的是凸多面體的頂點的個數、E 代表的是凸多面體的稜邊的個數、F 代表的是凸多面體的面的個數。

證明：每一個凸多面體都可以表示成可平面化連通圖形 G，此時 G 會將平面分割成 F 個面、V 個頂點和 E 個邊，然後以 G 的面的個數，藉由數學歸納法證明這一個公式。

如果 G 只有一個面，那麼 G 就會是一個非環狀（由定理 2.3）且連通的圖形，也就是說它會是一個樹狀圖，而且它的邊數會比頂點數少 1。所以當 G 的面數為 1 時，

$$V-E+F=V-(V-1)+1=2$$

如果 G 不只一個面，那麼我們就從中選擇一個相鄰兩個面的邊 e ，然後移除 e 。因為一個邊在每一個面的邊界上只會出現一次，所以移除 e 之後，圖形仍然是連通的，也就是說，任何一條包含 e 的路徑，都可以從原先兩個相鄰的面的另外一邊繞過去。而且當移除了 e 之後，原本被分開的兩個面也會合併成一個面，也就是邊數和面數會同時都少 1：

$$V-(E-1)+(F-1)=V-E+F$$

透過這樣的方式，每一個可平面化連通圖形都可以歸納出這樣的一個結論。■

2.2 正多面體個數的限制與探討

凸多面體的個數當然是無限的，但如果我們把目光放到正多邊形上，假設有一個凸多

面體，它的表面全部都是由相同的正多邊形所組成，我們稱之為正多面體，那麼這樣的正多面體會有多少個？又各是由幾個正多邊形所組成的呢？這個問題恰好可以用尤拉公式來找到答案。從尤拉公式的條件限制中，我們可以找到符合正多面體條件的圖形只有五種，這些圖形又稱之為柏拉圖立體。現在我們先定義何為正多面體，然後再試著去找出，為什麼正多面體只有五種。[4]

【定義 2.5】 可稱之為正多面體的圖形，必須同時滿足以下三個條件：

1. 正多面體的面都是由正多邊形組成；
2. 正多面體的各個頂角都相等；
3. 正多面體的各個稜邊都相等。

從定義 2.5 出發，假設有一個正多面體 P，有 n 個頂角、m 條稜邊和 f 個表面。那麼這個 P 的可平面化圖 G（P）也會有 n 個點、m 條邊和 f 個面。因為 P 是正多面體，所以 G（P）中每一個點都一樣會有整數 s（≥ 3）條邊與它相連，而且每一個區域也都一樣由整數 t（≥ 3）個邊圍成。而每條邊會與兩個點相連，所以利用點在算邊的總數時，每一個邊會被重複算到兩次；相同的，每一個邊恰好是兩個相鄰的面的邊界，所以利用面在計算邊的總數時，每一個邊也會被重複算到兩次，所以我們得到 $sn = tf = 2m$。但是從尤拉公式知道 $n - m + f = 2$，所以將尤拉公式左右式子各乘以 4，得到

$$8 = 4n - 4m + 4f = 4n - 2m - 2m + 4f = 4n - sn - tf + 4f = n(4 - s) + f(4 - t)$$

，因為 n、f 都大於 0，所以 $4 - s \geq 0$ 或 $4 - t \geq 0$。也就是說，$3 \leq s \leq 4$ 或 $3 \leq t \leq 4$。

接下來一一討論所有可能的情形：

（i）當 $s = 3$ 時：$3n = tf = 2m$，且 $n + f(4 - t) = 8$。然後將 $n + f(4 - t) = 8$ 左右兩式各乘以 3，得到

$$24 = 3n + 3f(4 - t) = 3n + 12f - 3ft = tf + 12f - 3ft = f(12 - 2t)$$

所以

$$f(6-t)=12 \quad (1)$$

然後

$$8=n+f(4-t)=n+4f-tf=n+4f-3n=4f-2n$$

所以

$$n=2f-4 \quad (2)$$

從（1)、(2）有三種可能情形：(a） $t=3$ ，得到 $f=4$ ， $n=4$ ，和 $m=6$ ，這會是一個正四面體；(b） $t=4$ ，得到 $f=6$ ， $n=8$ ，和 $m=12$ ，這是一個正六面體，也叫做正方體；(c） $t=5$ ，得到 $f=12$ ， $n=20$ ，和 $m=30$ ，這是正十二面體。

（ii）當 $s=4$ 時： $4n=tf=2m$ ，且 $f(4-t)=8$ ，所以 t 只會是 3，得到 $f=8$ ， $n=6$ ，和 $m=12$ ，這是正八面體。

（iii）當 $t=3$ 時， $sn=3f=2m$ ，且 $n(4-s)+f=8$ 。則可以得到

$$24=3n(4-s)+3f=12n-3sn+3f=12n-2sn$$

所以

$$n(6-s)=12 \quad (3)$$

然後

$$8=4n-sn+f=4n-3f+f=4n-2f$$

得到

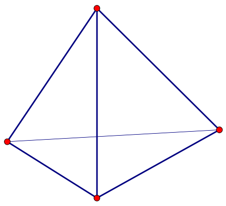
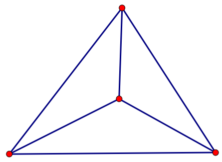
$$f=2n-4 \quad (4)$$

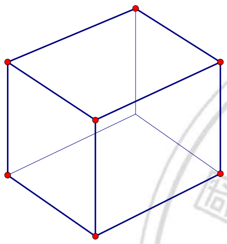
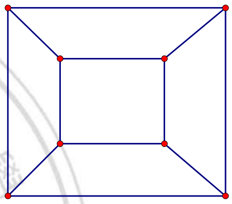
從（3)、(4）也有三種可能情形：(a） $s=3$ ，得到 $n=4$ ， $f=4$ ，和 $m=6$ ，也是正四面體；(b） $s=4$ ，得到 $n=6$ ， $f=8$ ，和 $m=12$ ，也是跟上述重複過的正八面體；(c） $s=5$ ，得到 $n=12$ ， $f=20$ ，和 $m=30$ ，這是正二十面體。

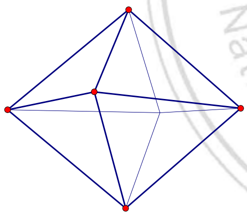
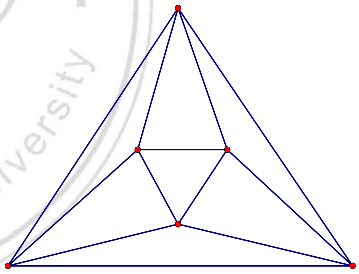
（iv）當 $t=4$ 時，在這情形下， $sn=4f=2m$ ，且 $n(4-s)=8$ ，所以 $s=3$ ，

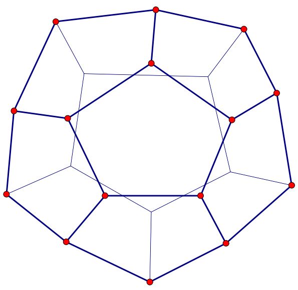
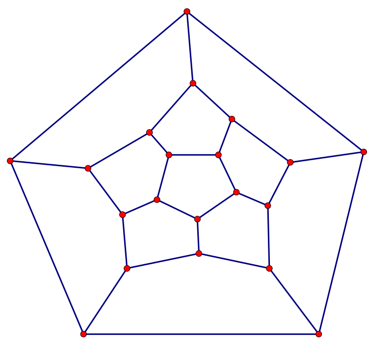
$n = 8$，$f = 6$，$m = 12$，也是已經出現過的正立方體。

綜合上述四種情形，共只有五種正多面體，分別是正四面體（由 4 個正三角形組成）、正六面體（由 6 個正方形組成）、正八面體（由 8 個正三角形組）、正十二面體（由 12 個正五邊形組成）和正二十面體（由 20 個正三角形組成）。這五個正多面體的可平面化圖如下：[4]


正四面體



正立方體



正八面體



正十二面體


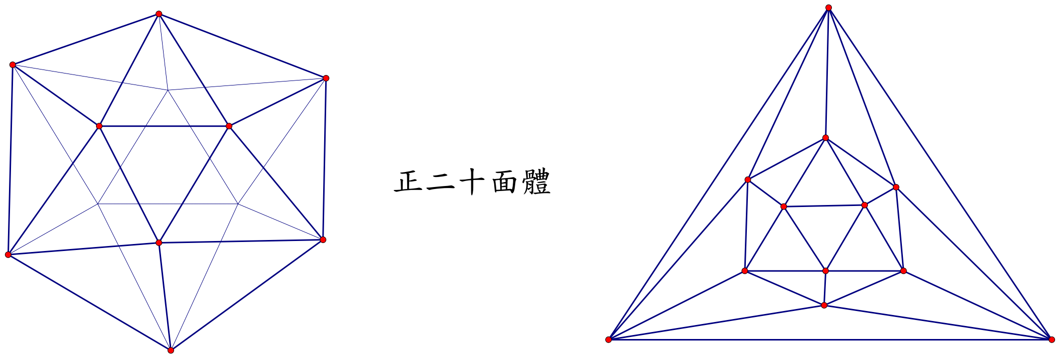


圖 2.11：五個正多面體的平面化。

3 平面中的直線分割

在尤拉研究任意的凸多面體時，發現凸多面體的頂點數、稜數與面數之間有著有趣的關係：頂點數－稜邊數＋面數＝2。這個關係式即是我們之前所提到的尤拉公式，亦被人稱為“尤拉示性數”。而在這裡所說的稜邊表現在平面圖上不一定是一個直線的線段，也可以是一條彎曲的線，而且每一個邊都有兩個端點，也就是說這裡所稱的稜邊是兩個頂點之間的連線。

另外一種由直線所構成的平面圖，這種單純由直線所構成的平面圖我們稱之為直線網。在直線網中，直線互相交錯而過，會將平面分割成許多部份，吾人好奇的是，能否從尤拉公式出發，找出這些直線將一個平面分割成多少部份？

3.1 從尤拉公式延伸到連通的直線網

【定義 3.1】 在直線網中，只有一個端點或沒有端點的邊叫做無限邊。邊界含有無限邊的面稱為無限面。[6]

例如圖 3.1 就是一個由五條直線構成的直線網，在這個直線網中，直線相交的地方就是一個端點，每一條直線可能會被其他直線切出一些端點，這些端點會將一條直線分成數個線段以及兩條射線（以第 1 條線為例，粗線部份，即直線最外側端點繼續延伸出去的部份），這兩條射線即是所謂的無限邊，而在這直線網中，包含這些無限邊的平面就是無限面。

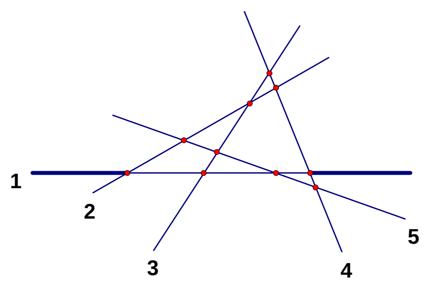


圖 3.1

由上述圖形可以發現，直線網中不只有一個無限面，如圖 3.2 所著色的區塊為部份無限面。如果該直線網中有相交的直線，則這直線網就會是連通的。不連通的直線網只會由互相平行的直線所構成，也就是每一條互相平行的直線都是一個無限邊，則此不連通的直線網其端點數一定是 0，面數會比邊數多 1。

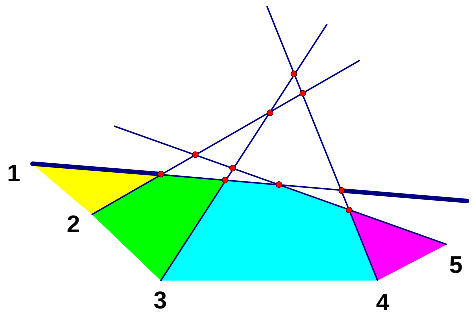


圖 3.2

【定理 3.2】 如果是連通的直線網，那麼有

$$P-L+R=1$$

其中 P 、 L 、 R 分別為連通直線網的頂點數、邊數（含稜邊與無限邊）和面數。

證明：我們假定有一個足夠大的圓可以把這個連通的直線網中的所有頂點都圍在圓裡面。這時候所有的無限邊都會與這個圓有一個交點，且只會有一個交點。所以在這個圓上的交點個數 P' 會等於這個直線網的無限邊個數L'，而這 P' 個點可以把圓分成 L' 段弧，其中，每段弧恰與原本的無限面逐一對應，如圖 3.3。於是我們得到 $P'=L'$ 。然後將圓以外的那些無限邊全部移除，得到一個連通平面圖，其頂點數、邊數和面數分別為 $P+P'$ 、 $L+L'$ 和 $R+1$ ，從尤拉定理得到

$$(P+P')-(L+L')+(R+1)=2$$

即 $P-L+R=1$ ，得證。■

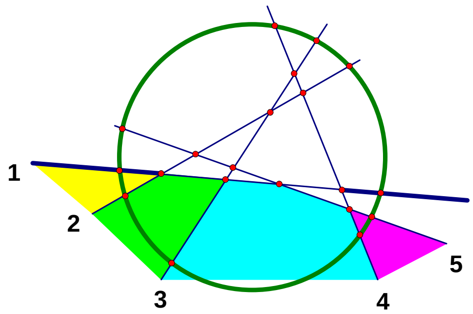


圖 3.3

如果不是連通的直線網，表示在這直線網中所有的直線都是互相平行，即 $P=0$ ，$R=L+1$ ，則 $P-L+R=0-L+(L+1)=1$ 。所以即便是不連通的直線網，其頂點數、邊數和面數也會有跟連通直線網相同的關係式。

【例 3.3】 如圖 3.2 為例，此圖由 5 條直線構成的直線網。其中 $P=10$ ，$L=25$ ，$R=16$ ，則有 $P-L+R=10-25+16=1$ 。

3.2 平面的分割

尤拉定理在直線網中是不成立的，但藉由定理 3.2 的路徑，提供我們可以從類似尤拉的一個角度去處理「直線可將平面分割成幾個部份」的問題。

【定理 3.4】 平面上有 n 條直線，其中任兩條不平行，任三條不共點，求證此 n 條直線把平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 個部份。

證明：因為 n 條直線中任何兩條都不平行，所以在 n 條直線中的每一條都與其他 $n-1$ 條直線相交，使得每一條直線上都會有 $n-1$ 個交點，且會被切出 n 段。也就是說，在每一條直線上都可以找到 $n-1$ 個頂點和 n 條邊。又每一個交點是由兩條直線相交而成的，在計算全部的頂點數時，要注意到有重複計算的部份。所以我們得到， $P=C_2^n=\frac{1}{2}n(n-1)$ ， $L=n\cdot n$ ，由定理 3.2 得：

$$
\begin{aligned}
R &= 1 + L - P \\
&= 1 + n^2 - \frac{1}{2}\,n\,(n-1) \\
&= 1 + n^2 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \\
&= \frac{1}{2}\,(n^2 + n + 2)
\end{aligned}
$$

，得證。■

【定義 3.5】 在平面上給定一條直線及線外一點，與此直線和點等距離的所有的點的集合，即為拋物線。

【定理 3.6】 平面上有 n 條拋物線，每兩條拋物線都只相交於兩點，且任三條不會相交於同一點。求證此 n 條拋物線把平面分成 n^2+1 個平面。

證明：在拋物線中，任取兩條拋物線會有兩個交點，而每一條拋物線都會與其他 $n-1$ 條拋物線有交點，所以會被切成 $2n-1$ 個邊，所以我們得到

$$P = C_2^n \times 2 = \frac{1}{2}n\,(n-1)\times 2 = n^2 - n$$

$$L = n\,(2n-1) = 2n^2 - n$$

由定理 3.2 得：

$$
\begin{aligned}
R &= 1 + L - P \\
&= 1 + (2n^2 - n) - (n^2 - n) \\
&= 1 + 2n^2 - n - n^2 + n \\
&= n^2 + 1
\end{aligned}
$$

，得證。■

【定理 3.7】 若有 n（$n \geq 3$）條直線，可將平面分割成多少部份？試就以下情形解答：

（a）n 條直線中恰有 m（$m \geq 2$）條互相平行，其他直線則互相不平行。而且 n 條直線中沒有任何三條直線共點。

（b）n 條直線中恰有 h（$h \geq 3$）條直線相交於一點，除此交點外，其他交點都只由兩條直線相交而成，且任兩條直線都沒有平行。

證明：（a）因為互相平行的 m 條直線中的一條，都與其他的（$n-m$）條直線相交，然後（$n-m$）條直線中的每一條都與（$n-1$）條直線相交；又任三條直線不共點，所以：

$$
\begin{aligned}
L &= m(n-m+1) + (n-m)(n-1+1) \\
&= mn - m^2 + m + n^2 - nm \\
&= n^2 + m - m^2 \\
P &= \frac{1}{2}\left[m(n-m) + (n-m)(n-1) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[mn - m^2 + n^2 - n - mn + m \right] \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - n - m^2 + m)
\end{aligned}
$$

從定理 3.2 可以得到，

$$
\begin{aligned}
R &= 1 + L - P \\
&= 1 + (n^2 + m - m^2) - \frac{1}{2}(n^2 - n - m^2 + m) \\
&= \frac{1}{2}(2 + 2n^2 + 2m - 2m^2 - n^2 + n + m^2 - m) \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - m^2 + n + m + 2) \\
&= \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1) + 1
\end{aligned}
$$

所以在（a）的情形下，可以將平面分割成 $\frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)+1$ 個部份。

（b）這 h 條交於同一點的直線，每一條直線都會與其他（$n-h$）條直線相交，也就是說在這 h 條直線上，扣除掉相交的那一個交點，都會有（$n-h$）個點和

（$n-h+2$）個邊。另外的（$n-h$）條直線，則會與（$n-1$）條直線相交，所以在這些直線上會有（$n-1$）個點和 n 個邊。所以：

$$P=\frac{1}{2}\left[h(n-h)+(n-h)(n-1)\right]+1$$

$$=\frac{1}{2}(n-h)(h+n-1)+1$$

$$L=h(n-h+2)+(n-h)n$$

$$=(n-h)(h+n)+2h$$

從定理 3.2 可以得到：

$$R=1+L-P$$

$$=1+\left[(n-h)(h+n)+2h\right]-\left\{\frac{1}{2}(n-h)(h+n-1)+1\right\}$$

$$=1+(n-h)(h+n)+2h-\frac{1}{2}(n-h)(h+n-1)-1$$

$$=\frac{1}{2}(n-h)(2h+2n-h-n+1)+2h$$

$$=\frac{1}{2}(n-h)(h+n+1)+2h$$

所以在（b）的情形下，可以將平面分割成 $\frac{1}{2}(n-h)(h+n+1)+2h$ 個部份。■

從定理 3.2 的證明，我們可以得到所有平面上的線將平面分割時，所得到的交點、線段和區域彼此之間有一個恆等式。但在實際運用上，我們關心的事情通常是這些直線（或拋物線）能將平面分割成多少部份，好能進一步的做分配與規劃，所以後續點出的定理 3.4、定理 3.6 和定理 3.7 在平面的分割上才是相形重要的公式。有了這三個延伸出的定理，我們就可以更迅速的解決直線分割平面的問題。

【例題 3.8】 平面上有 3 條互相不平行且不共點的直線，如圖 3.4。則分割的區域由定理 3.4 可得共有 $\frac{1}{2}(3^2+3+2)=7$ 個區域。若由圖 3.4 直接數，也是一樣有 7 個區域。

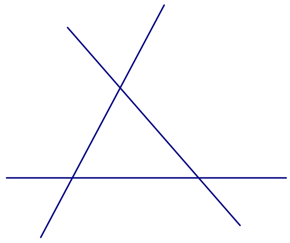


圖 3.4

【例題 3.9】 平面上有四條拋物線，每兩條拋物線只有兩個交點，任意三條拋物線不共點，如圖 3.5。則分割的區域由定理 3.6 可得共有 $4^2+1=17$ 個區域。由圖直觀之，亦如此。

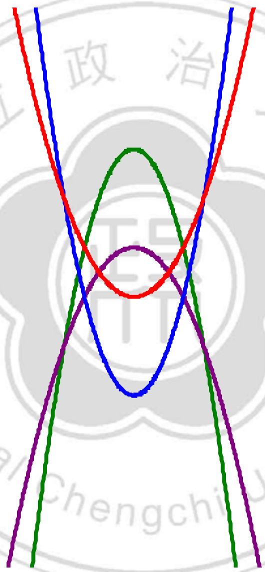


圖 3.5

4 空間中的平面分割

在討論過直線分割平面之後，我們好奇的是，在平面上既然可以從尤拉公式出發找出這些直線網將平面分割的關係式，進而得到求取直線分割平面的公式。那麼，在空間中是否也有相類似的關係式產生，譬如在空間中有數個平面互相交錯，那麼這些平面會將空間分割成多少部份？以下我們將先嘗試是否存在一個關係式，讓頂點、稜邊、平面、切割出的不同部份的空間之間，有一個固定的值出現。

4.1 從尤拉公式延伸到連通的平面網

法國數學家亨利・彭加勒（Jules Henri Poincaré）曾經將尤拉定理推廣到 n 維空間，利用與簡單多面體相當的流形（manifold），有相類似的關係式，稱為彭加勒定理。

【定理 4.1】[5]（彭加勒定理）簡單多面體的頂點、稜邊和面數被轉換成 0、1、2、......、（$p-1$）維的形象（image）。假設這些形象的個數分別用α_0、α_1、α_2、……、α_{p-1}，那我們可以得到下列的關係式：

$$(1-2)^{p}=1-\alpha_{p-1}+\alpha_{p-2}-\ldots\ldots\pm\alpha_1\mp\alpha_0=1-K，(p\in N)$$

，整理得到

$$K=1-(-1)^{p}，\begin{cases}K=2，如果\ p\ 是奇數\\ K=0，如果\ p\ 是偶數\end{cases}$$

，其中 K 為一常數，p 是自然數。

如果令彭加勒定理中的 $p=4$，將之推廣到由平面構成的平面網中，則可得到一個新的定理。

【定義 4.2】[6]數個平面將空間分割成若干個部分，則我們把這若干部份的空間稱為體。這些體中若包含有無限面的體，則稱其為無限體。

【定理 4.3】n 個不全部都平行的平面會構成一個平面網，如果其中有 P 個頂點、 L 條稜邊、 R 個面，這些平面把空間分割成 B 個體，那麼會有關係式：

$$P-L+R-B=-1$$

證明：以下我們將分成（i）$P=0$ 和（ii）$P\neq 0$ 兩種情況討論：

（i）當 $P=0$ 時，亦即構成平面網的所有平面都會經過同一條直線，或者它們的交線互相平行，如圖 4.1 的示意圖。這時平面網中的稜邊，都是無限邊，再做一個與這些無限邊垂直的平面，則在此平面上就會出現一個連通的直線網，譬如圖 4.2。則這個直線網上的頂點數、稜邊數和面數分別為 L 、 R 、 B 。由定理 3.2 可知 $L-R+B=1$ 。於是我們就可以得到：

$$P-L+R-B=P-(L-R+B)=0-1=-1$$

，即可得證。

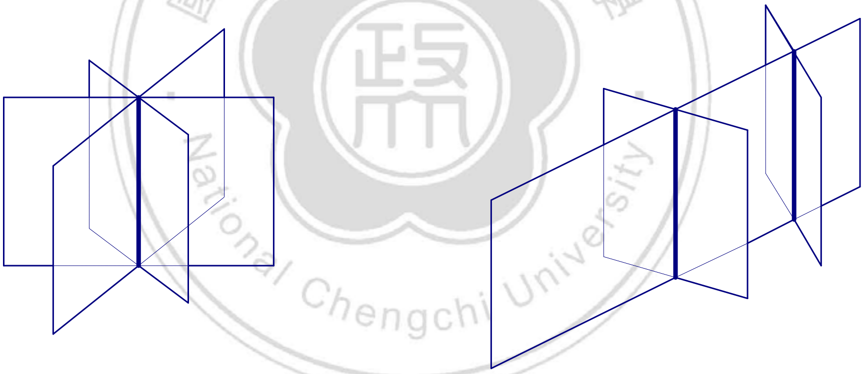


圖 4.1：$P=0$ 的示意圖

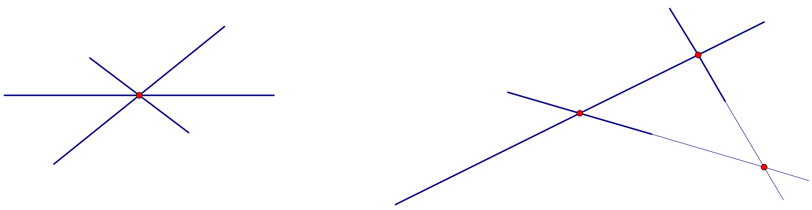


圖 4.2：在圖 4.1 上作一與稜邊相垂直的平面，在其上所形成的直線網。

（ii）當 $P\neq 0$ 時，我們可以想像有一個足夠大的球面，將所有的頂點都涵蓋在這個球面裡面。這樣的作法會在球面上出現一個連通圖，經過橡皮變形，我們會得到一個簡單多面體。此時，這個連通圖的頂點數、稜邊數和面數分別等於平面網中的無限稜

邊數 L' 、無限面個數 R' 和無限體個數 B'。根據尤拉定理，我們會得到 $L' - R' + B' = 2$ 。

接著拿掉所有的無限稜邊，然後無限面也會跟著減少，此時我們會得到一個和簡單多面體相當的流形，其頂點數、稜邊數、面數和體數分別為 P 、 $L - L'$ 、 $R - R'$ 和 $B - B' + 1$ ，由定理 4.1，得到

$$P - (L - L') + (R - R') - (B - B' + 1) = 0$$

，然後得到

$$(P - L + R - B) + (L' - R' + B') - 1 = 0$$

所以

$$P - L + R - B = -1$$

得證。■

【例題 4.4】 全部由互相平行的平面組成的平面網， $P = 0$ ， $L = 0$ ， $B = R + 1$ ，此時， $P - L + R - B = -1$ 。我們可以知道定理 4.3 的結果在平面全部互相平行的平面網中也是成立的。

4.2 空間的切割

有了定理 4.3 的關係式，我們接下來將利用此關係式來討論平面網可以把空間分割成多少部份。

【定理 4.5】 空間中有 n 個平面，其中，任兩個不平行，任三個不共線，任四個不共點，求證這 n 個平面把空間分割成 $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ 個部份。

證明：因為每一個平面都會與其他 $n - 1$ 個平面相交，所以在每一個平面上都會有一個由 $n - 1$ 條直線構成的直線網（其中任兩條不平行，任三條不共點），其頂點數、邊數、面數分別為（由定理 3.4）：

$$P_0 = C_2^{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$L_0 = (n-1)^2$$

$$R_0 = \frac{1}{2}\left[(n-1)^2 + (n-1) + 2\right] = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$$

接著看到整個平面網，因為有 n 個平面，且每三個平面相交才會有一個頂點，每兩個平面相交可以得到 1 條稜邊，得到：

$$P = \frac{1}{3}\,n\,P_0 = \frac{1}{6}\,n(n-1)(n-2)$$

$$L = \frac{1}{2}\,n\,L_0 = \frac{1}{2}\,n(n-1)^2$$

$$R = n\,R_0 = \frac{1}{2}\,n(n^2 - n + 2)$$

由定理 4.3，我們得到：

$$\begin{aligned} B &= P - L + R + 1 \\ &= \frac{1}{6}\,n(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\,n(n-1)^2 + \frac{1}{2}\,n(n^2 - n + 2) + 1 \\ &= \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6) \end{aligned}$$

故得證。■

【例題 4.6】 正四面體的各個面延伸之後，所得到的四個平面把空間分割成多少個部份？

解：依題意可知有四個平面所構成的平面網，每一個平面上都會有一個由三條直線構成的直線網，其頂點數、邊數和面數分別為 3、9 和 7，如圖 4.3。由於直線網中每個頂點都是三個平面的共點，所以可以知道總頂點數

$$P = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 = 4$$

因為正四面體的各個面延伸之後，任三個平面都不共線，所以得到邊數和面數

$$L = \frac{1}{2}(9 \times 4) = 18，R = 7 \times 4 = 28$$

由定理 4.3，我們得到

$$B = P - L + R + 1 = 4 - 18 + 28 + 1 = 15$$

所以得到，可把空間分割成 15 個部份。

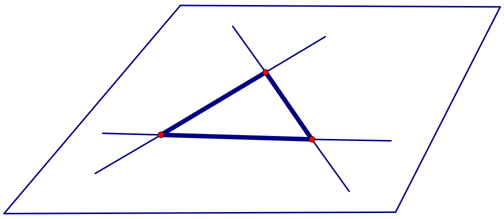


圖 4.3：正四面體其中一個平面上的直線網。

【例題 4.7】 正六面體的各個面延伸之後，所得到的六個平面把空間分割成多少個部份？

解：依題意可知有六個平面所構成的平面網，每一個平面上都會有一個由兩對平行直線所構成的直線網，其頂點數、邊數和面數分別為 4、12 和 9，如圖 4.4。由於直線網中每個頂點都是三個平面的共點，所以可以知道總頂點數

$$P = \frac{1}{3} \times 4 \times 6 = 8$$

因為正六面體的各個面延伸之後，任三個平面都不共線，所以得到邊數和面數

$$L = \frac{1}{2}(12 \times 6) = 36，R = 9 \times 6 = 54$$

由定理 4.3，我們得到

$$B = P - L + R + 1 = 8 - 36 + 54 + 1 = 27$$

所以得到，可把空間分割成 27 個部份。

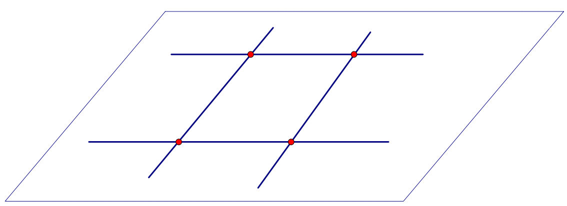


圖 4.4 正六面體其中一面的直線網。

【例題 4.8】 正八面體的各個面延伸之後，所得到的八個平面把空間分割成多少個部份？

解：依題意可知有八個平面所構成的平面網，每一個平面上都會有一個由三對平行直線所構成的直線網，其頂點數、邊數和面數分別為 6、21 和 16，如圖 4.5。在直線網中的 6 個頂點，屬於三條直線的公共頂點有 3 個，屬於兩條直線的公共頂點有 3 個，也就是說會有 3 個頂點是四個平面的共點，所以可以知道總頂點數

$$P=\frac{1}{4}\times 3\times 8+\frac{1}{3}\times 3\times 8=14$$

因為正八面體的各個面延伸之後，任三個平面都不共線，所以得到邊數和面數

$$L=\frac{1}{2}（21\times 8）=84，R=16\times 8=128$$

由定理 4.3，我們得到

$$B=P-L+R+1=14-84+128+1=59$$

所以得到，可以把空間分割成 59 個部份。

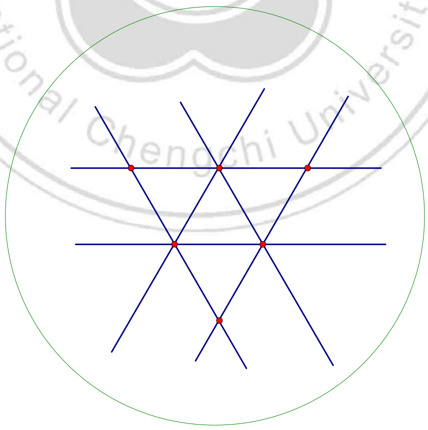


圖 4.5 正八面體其中一面的直線網。

【例題 4.9】 正十二面體的各個面延伸之後，所得到的十二個平面把空間分割成多少個部份？

解：依題意可知有十二個平面所構成的平面網，每一個平面上都會有一個由五對平行

直線所構成的直線網，其頂點數、邊數和面數分別為 15、50 和 36，如圖 4.6。在直線網中的 15 個頂點，屬於四條直線的公共頂點有 5 個，屬於兩條直線的公共頂點有 10 個，也就是說會有 5 個頂點是五個平面的共點，所以可以知道總頂點數

$$P=\frac{1}{5}\times 5\times 12+\frac{1}{3}\times 10\times 12=52$$

因為正十二面體的各個面延伸之後，任三個平面都不共線，所以得到邊數和面數

$$L=\frac{1}{2}（50\times 12）=300，R=36\times 12=432$$

由定理 4.3，我們得到

$$B=P-L+R+1=52-300+432+1=185$$

所以得到，可以把空間分割成 185 個部份。

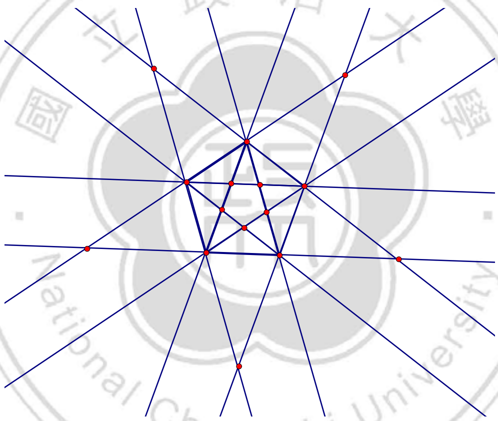


圖 4.6 正十二面體其中一面的直線網。

【例題 4.10】 正二十面體的各個面延伸之後，所得到的二十個平面把空間分割成多少個部份？

解：依題意可知有二十個平面所構成的平面網，每一個平面上都會有一個由 9 對平行直線所構成的直線網，其頂點數、邊數和面數分別為 48、150 和 103，如圖 4.7。在直線網中的 48 個頂點，屬於五條直線的公共頂點有 6 個，屬於四條直線的公共頂點有 6 個，屬於三條直線的公共頂點有 6 個，屬於兩條直線的公共頂點有 30 個，所以可以知道總頂點數

$$P=\frac{1}{6}（6\times 20）+\frac{1}{5}（6\times 20）+\frac{1}{4}（6\times 20）+\frac{1}{3}（30\times 20）=274$$

因為正二十面體的各個面延伸之後，任三個平面都不共線，所以得到邊數和面數

$$L=\frac{1}{2}（150\times 20）=1500，R=103\times 20=2060$$

由定理 4.3，我們得到

$$B=P-L+R+1=274-1500+2060+1=835$$

所以得到，可以把空間分割成 835 個部份。

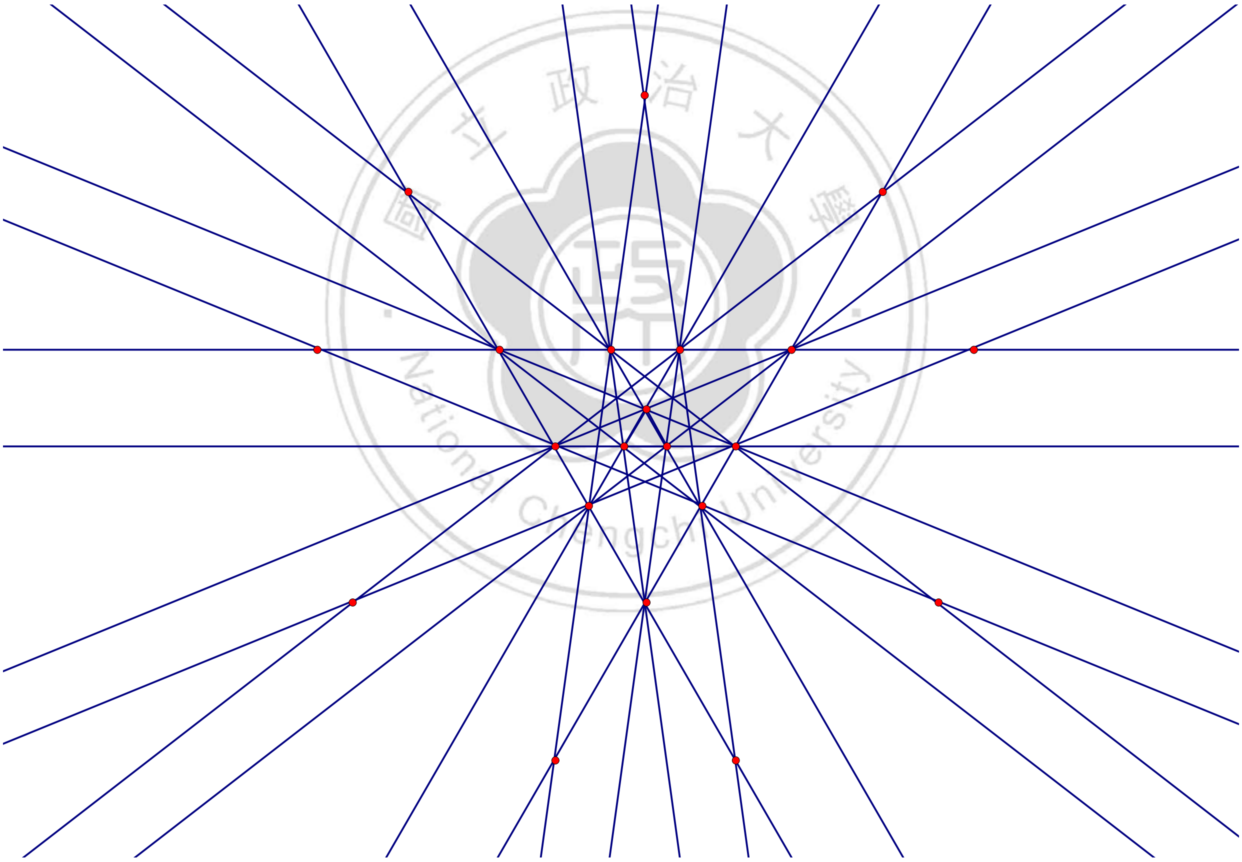


圖 4.7 正二十面體其中一面的直線網。

5 正多面體的平面分割與結論

若從定理 4.3 的結論，一一推導出五個正多面體各平面的延伸可將空間分割成若干個部份，若是直接套用定理 4.5 的方式，我們亦可以直接求出這些正多面體最多可以把空間分隔成多少部份。下表 5.1 即可看見，由定理 4.3 推導出的空間分割數量以及由定理 4.5 最多可能分割數量，我們試著找出其中的規律：

正多面體	正四面體（$n=4$）	正六面體（$n=6$）	正八面體（$n=8$）	正十二面體（$n=12$）	正二十面體（$n=20$）
定理 4.3 $P-L+R-B=-1$	15	27	59	185	835
定理 4.5 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$	15	42	93	299	1351
定理 4.2：定理 4.4 的比值	1	0.642857	0.634409	0.618729	0.618061

表 5.1 套用定理 4.2 及定理 4.4 所得空間分割數量表

若從正十二面體與正二十面體的比值來看，這個數字跟我們所熟知的黃金分割數（0.6180339887...）極為相近，所以有人曾經從這兩種正多面體做猜想[6]，這五個正多面體都會有這樣一個性質，也就是實際分割數量與最多分割數量的比值會很接近黃金分割數。但我們直接將數字提出來看，正四面體、正六面體和正八面體的比值並沒有很接近黃金分割數，不過卻越來越接近黃金分割數。所以我猜想，是不是面數越多越趨近於圓形的多面體，它的實際分割數量與最多分割數量的比值可能越來越接近黃金分割數。

參考文獻

[1] Abigail Kirk.（2007）, *Euler's polyhedron formula*.

Available from:http://plus.maths.org/content/eulers-polyhedron-formula

[2] Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall 1996.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier 1976.

[4] V.K. Balakrishnan, Ph.D., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory*, McGraw-Hill Companies, Inc. 1997

[5] Jules Henri Poincaré, *Papers on topology : analysis situs and its five supplements*, translated by John Stillwell, American Mathematical Society 2010, 61-68.

[6] 宋秉信，從尤拉公式到空間的平面分割，數學傳播，第 22 卷第 3 期，頁 54-60。

[7] 程釗，歐拉關於七橋問題的解一從數學史與數學教育的角度看，數學傳播，第 36 卷第 4 期，頁 42-47。

[8] 柳柏濂，從克隆綿羊談起—圖形實現理論漫議，數學傳播，第 32 卷第 2 期，頁 62-85。