國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

碩 士 學 位 論 文

二元指數族中參數之最大概似估計與最大擬概似估計異同的研究

On the Maximum Likelihood and Maximum Pseudo-Likelihood Estimations of Bivariate Exponential Family Parameters

碩士班學生：許雲峰 撰

指導教授：宋傳欽 博士

姜志銘 博士

中華民國 104 年 07 月 09 日

國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

許雲峰 君所撰之碩士學位論文

二元指數族中參數之
最大概似估計與最大擬概似估計異同的研究

On the Maximum Likelihood and Maximum Pseudo-Likelihood Estimations of Bivariate Exponential Family Parameters

業經本委員會審議通過

論文考試委員會委員：

陳慶山 姜志銘 余俊鈞

指導教授：姜志銘 余俊鈞

系主任：陳恭

中 華 民 國 104 年 07 月 09 日

謝辭

本論文能夠順利完成，首先要感謝指導教授宋傳欽博士以及姜志銘博士的悉心指導，在研究所這段期間給了我許多的建議，平時也很關心我的學習狀況，在撰寫論文期間，總是不厭其煩地幫助我解決問題，使我的論文能更加完善。

此外，要謝謝在研究所一起學習的同學們，謝謝王思堯、羅文隆、王偉名、黃明怡，讓我遇到問題時可以互相討論，謝謝學弟妹陳治宗、曾郁婷、涂健晏、鄭鴻輝，讓我有一起吃飯遊玩的時光。

最後要感謝我的家人以及我的女朋友欣怡，謝謝我的爸爸、媽媽，給了我一個良好的學習環境與溫暖的家庭，在我需要的時候給予支持與鼓勵，謝謝弟弟能一起互相的幫忙與協助。有了家人辛苦的工作與默默的付出，才能讓我專注於課業的研究，你們的關心與愛心，更讓我體會到家人的重要。而在研究所這段時間，謝謝女朋友欣怡一路的陪伴，你的關心與幫助，讓我能更快完成我的論文，往更多的理想前進。

許雲峰　謹致于

國立政治大學應用數學系

中華民國一百零四年七月

二元指數族中參數之最大概似估計與最大擬概似估計異同的研究

許雲峰

中文摘要

當密度函數難以完整表示，例如無法求得其正規化常數，則求最大概似估計(MLE)時會有困難。因此一種替代方案就是使用擬概似函數去求得最大擬概似估計(MPLE)以取代 MLE。本研究之目的在探討二元指數族中參數之 MLE 與 MPLE 的異同。文中先以常見的三個機率模型：卜瓦松–二項分配、三項分配與二元常態分配，探討模型參數的 MLE 與 MPLE；接著推導一般二元指數族中獲得參數之 MPLE 的擬概似方程式；最後考慮 2×2 列聯表中，方格內參數為三種不同情況下的 MLE 與 MPLE。當中兩種情況可以求出其精確解，而第三種則無法求出。針對第三種情況，利用 Matlab 程式以模擬的方式，計算出參數的 MLE 與 MPLE，以進行分析比較，並觀察兩者之均方差如何受參數值影響。

關鍵詞：二元指數族、最大概似估計、概似方程式、最大擬概似估計、擬概似方程式、2×2 列聯表、均方差

On the Maximum Likelihood and Maximum Pseudo-Likelihood Estimations of Bivariate Exponential Family Parameters

Yun-Fong Hsu

Abstract

If the density function is hard to express completely, e.g. hard to get normalizing constant, then it would be difficult to find the maximum likelihood estimate (MLE). An alternative way is to use pseudo-likelihood function to find the maximum pseudo-likelihood estimate (MPLE) instead of MLE. This research is to study the similarities and differences of the MLE and MLPE on the bivariate exponential distribution parameters. We first derive the MLE and the MPLE of parameters in Poisson-binomial distribution, trinomial distribution, and bivariate normal distribution. Then, we derive the pseudo-likelihood equation to be used for solving MPLE of parameters in bivariate exponential family. Finally, we consider three cases on the cell probabilities of the 2x2 contingency table. There are exact solutions on MLE and MPLE for the first two of these three cases. However, on the third case, there is no exact solution and we use Matlab program to do the numerical calculations for analyzing and comparing MLE and MPLE. We observe how the changes of mean square errors using MLE and those using MPLE affected by the value changes of parameters.

Keywords：bivariate exponential family, maximum likelihood estimate,
likelihood equation, maximum pseudo-likelihood estimate,
pseudo-likelihood equation, 2x2 contingency table, mean square errors

目次

謝辭.....iv

中文摘要.....v

Abstract.....vi

目次.....viii

表目次.....x

1. 簡介.....1

1.1 研究動機.....1

1.2 研究目的.....3

1.3 研究架構.....4

2. 最大概似估計(MLE)與最大擬概似估計(MPLE).....5

2.1 最大概似估計(MLE).....5

2.2 最大擬概似估計(MPLE).....7

3. 一些分配中參數的 MLE 與 MPLE 之推導.....9

3.1 卜瓦松-二項分配.....9

3.2 三項分配.....12

3.3 二元常態分配.....15

4. 兩變數指數族中參數的 MLE 與 MPLE 之探討.....20

5. 2×2 列聯表中參數的 MLE 與 MPLE 之探討.....25

5.1 方格內參數為 θ_1、θ_2、θ_3.....26

5.2 方格內參數為 θ_1、θ_2、θ_2.....32

5.3 方格內參數為 θ_1、$2\theta_2$、θ_2.....35

6. 針對 2×2 列聯表中參數為 θ_1、$2\theta_2$、θ_2 時 MLE 與 MPLE 之模擬分析與比較.....38

6.1 MLE 與 MPLE 在模擬數據上之計算.....38

6.2 MLE 與 MPLE 之比較.....40

7. 結論.....42

參考文獻.....44

附錄 附表.....-1-

附錄 1 MPLEmethod.m 程式碼.....-1-

附表 2 MPLEmethod.m 各項計算數據.....-5-

附表 2.1-2.9：θ_1、θ_2 取不同值時 MLE 之均方差.....-5-

附表 2.10-2.18：θ_1、θ_2 取不同值時 MPLE 之均方差.....-9-

附表 2.19-2.27：θ_1、θ_2 取不同值時 $\hat{\theta}_2$ 之偏誤、變異數和均方差.....-13-

附表 2.28-2.36：θ_1、θ_2 取不同值時 $\tilde{\theta}_2$ 之偏誤、變異數和均方差.....-17-

附表 2.37-2.45：θ_1、θ_2 取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數.....-21-

表目次

表 5-1 2×2 列聯表模型(格子中的值分別為機率值 $f(i,j)$ 及觀察值 n_{ij}).....25

表 5-2 參數為 θ_1、θ_2、θ_3 的列聯表模型.....26

表 5-3 參數為 θ_1、θ_2、θ_2 的列聯表模型.....32

表 5-4 參數為 θ_1、$2\theta_2$、θ_2 的列聯表模型.....35

1. 簡介

1.1 研究動機

最大概似估計(MLE)是統計上常用的估計，但當密度函數難以完整表示時，例如正規化常數無法求得，要得到最大概似估計會有困難。Arnold (1991)提到一個二元指數分配，其密度函數為：

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = k(\theta)\exp\{-(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\theta\mathrm{xy})\}$$

$$\mathrm{x}>0, \mathrm{y}>0, \theta>0$$

我們只知道

$$\{k(\theta)\}^{-1} = \int_0^\infty e^{-u}(1+\theta u)^{-1}du$$

卻無法直接求出$k(\theta)$，因此無法利用最大概似估計法去估計θ。故一種替代的方案是：利用條件密度函數的乘積，求出擬概似函數，進而求得最大擬概似估計(MPLE)以取代最大概似估計。

若我們考慮上述例子的條件分配$\mathrm{X}|\mathrm{Y}=\mathrm{y}$與$\mathrm{Y}|\mathrm{X}=\mathrm{x}$，可以發現兩者皆為指數分配，其密度函數分別為：

$$f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(\mathrm{x}|\mathrm{y}) = (1+\theta\mathrm{y})\exp(-\mathrm{x}(1+\theta\mathrm{y})),\quad \mathrm{x}>0, \theta>0$$

$$f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = (1+\theta\mathrm{x})\exp(-\mathrm{y}(1+\theta\mathrm{x})),\quad \mathrm{y}>0, \theta>0$$

而樣本數為 n 時的擬概似函數為：

$$PL(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_{X|Y}(x_i|y_i)\cdot f_{Y|X}(y_i|x_i)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\{(1+\theta x_i)(1+\theta y_i)\}\exp\{-\sum_{i=1}^{n} x_i(1+\theta y_i)-\sum_{i=1}^{n} y_i(1+\theta x_i)\}$$

根據擬概似函數，可以知道擬概似估計 $\tilde{\theta}$ 滿足以下等式：

$$\sum_{i=1}^{n}\{\frac{x_i}{1+\tilde{\theta}x_i}+\frac{y_i}{1+\tilde{\theta}y_i}\}=2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

由數值分析的方法我們可求得 $\tilde{\theta}$ 的近似值，即 θ 的估計值。

因此，在一般情況下，若無法求得概似函數時，可以嘗試利用上述方法求得未知參數的估計。

1.2 研究目的

本研究目的在對二元指數族中的一些常見例子，如卜瓦松–二項分配、三項分配、二元常態分配以及與四項分配有關的2×2列聯表等，經由概似函數或擬概似函數，探討參數之最大概似估計與最大擬概似估計間的異同。當兩者(或兩者之一)無法以公式解表示時，則利用模擬的方式進行分析與比較。希望透過理論推導與模擬分析，解釋說明在統計推論上用最大擬概似估計取代最大概似估計的合理性。

1.3 研究架構

本論文一共分為七章：第一章介紹研究的動機、目的與架構；第二章說明何謂最大概似估計與最大擬概似估計；第三章先以三個常見的分配為例，推導其最大概似估計與最大擬概似估計；第四章對一般兩變數指數族參數的情況，推導其概似方程式與擬概似方程式；第五章對2×2列聯表的三種不同情況，探討其最大概似估計與最大擬概似估計；第六章針對第五章之第三種情況進行最大概似估計和最大擬概似估計之模擬分析與比較；第七章為結論。

2. 最大概似估計(MLE)與最大擬概似估計(MPLE)

本章介紹何謂最大概似估計與最大擬概似估計，並透過概似函數與擬概似函數分別求出此兩估計。

2.1 最大概似估計(MLE)

一般來說母體之參數$\boldsymbol{\theta}$是未知的，若從母體隨機抽出一組樣本，再利用此樣本去找到一個$\boldsymbol{\theta}$的估計值$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，使得這組樣本發生的可能性為最大，則此$\hat{\boldsymbol{\theta}}$值稱為$\boldsymbol{\theta}$的最大概似估計值。

設$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n$為抽自母體$\mathbf{X}$(密度函數為$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$)的$m$維隨機向量，則向量$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n)$的聯合密度函數為：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n;\boldsymbol{\theta}) &= f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1;\boldsymbol{\theta}) \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_2;\boldsymbol{\theta}) \cdots f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n;\boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i;\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

【定義 2.1】 將聯合密度函數$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n;\boldsymbol{\theta})$視為$\boldsymbol{\theta}$的函數$L(\boldsymbol{\theta})$，則稱$L(\boldsymbol{\theta})$為概似函數 (likelihood function)。

【定義 2.2】 設$L(\boldsymbol{\theta})$為概似函數，若$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n)$使$L(\boldsymbol{\theta})$為最大時，則$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n)$稱為$\boldsymbol{\theta}$的最大概似估計式 (maximum likelihood estimator)，而

$\hat{\theta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$稱為$\theta$的最大概似估計值 (maximum likelihood estimate)。

為了方便起見，無論是最大概似估計值或最大概似估計式，皆以 MLE 來表示。

一般求算 MLE 的步驟如下：

先找到概似函數

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta})$$

對$L(\boldsymbol{\theta})$取 log 後再對$\boldsymbol{\theta}$微分，令

$$\frac{d \log L(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = 0$$

為方便起見，我們稱上述等式為概似聯立方程式，其解$\hat{\boldsymbol{\theta}}$即為$\boldsymbol{\theta}$之 MLE。但也有情況是無法用微分的技巧求出 MLE。

2.2 最大擬概似估計(MPLE)

【定義 2.3】 令 2.1 節中第 i 個 m 維隨機向量為 $\mathbf{X}_i = (\mathrm{X}_{i,1}, \mathrm{X}_{i,2}, \cdots, \mathrm{X}_{i,m})$ 且 $\mathbf{X}_{i,-j} = (\mathrm{X}_{i,1}, \cdots, \mathrm{X}_{i,j-1}, \mathrm{X}_{i,j+1}, \cdots, \mathrm{X}_{i,m})$。若給定 $\mathrm{X}_{i,j} \big| \mathbf{X}_{i,-j}$ 的條件密度函數 $f_{ij}(\mathrm{x}_{i,j} \big| \mathbf{x}_{i,-j})$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$j = 1, 2, \cdots, m$，則 $\boldsymbol{\theta}$ 的擬概似函數(pseudolikelihood function)為

$$PL(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(\mathrm{x}_{i,j} \big| \mathbf{x}_{i,-j})$$

【定義 2.4】 若 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 使 $PL(\boldsymbol{\theta})$ 最大，則稱 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n)$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的最大擬概似估計式(maximum pseudolikelihood estimator)，而 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 稱為 $\boldsymbol{\theta}$ 的最大擬概似估計值(maximum pseudolikelihood estimate)。

為了方便起見，無論是最大擬概似估計值或最大擬概似估計式，皆以 MPLE 來表示。

一般求算 MPLE 的步驟如下；

先找到擬概似函數

$$PL(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(\mathrm{x}_{i,j} \big| \mathbf{x}_{i,-j})$$

對 $PL(\boldsymbol{\theta})$ 取 log 後再對 θ 微分，令

$$\frac{d\log PL(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}=0$$

為方便起見，我們稱上述等式為擬概似聯立方程式，其解 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 即為 $\boldsymbol{\theta}$ 之 MPLE。但也有情況是無法用微分的技巧求出 MPLE。

3. 一些分配中參數的 MLE 與 MPLE 之推導

本章針對三種不同的分配，進行 MLE 與 MPLE 之推導，其中 3.1 節為卜瓦松−二項分配，3.2 節為三項分配，3.3 節為二元常態分配。

3.1 卜瓦松−二項分配

假設 X 服從卜瓦松分配，即 $f_X(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$，$x=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$，又給定 $X=x$ 時，Y 服從二項分配，即 $f_{Y|X}(y|x)=\binom{x}{y}\theta^y(1-\theta)^{x-y}$，$y=0,1,2,\cdots,x$，$0<\theta<1$。

為了推導參數中的 MLE 與 MPLE，我們需要先求出聯合密度函數 $f_{XY}(x,y)$ 與條件密度函數 $f_{X|Y}(x|y)$，其推導過程如下：

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) \\ &= \binom{x}{y}\theta^y(1-\theta)^{x-y}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \end{aligned}$$

$$x=0,1,2,\cdots，y=0,1,2,\cdots,x，0<\theta<1，\lambda>0$$

為了求出條件密度函數 $f_{X|Y}(x|y)$，我們先求出邊際密度函數 $f_Y(y)$：

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{x=y}^{\infty}\binom{x}{y}\theta^y(1-\theta)^{x-y}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^y e^{-\lambda}\sum_{x=y}^{\infty}\frac{x!}{y!(x-y)!}\frac{(1-\theta)^x\lambda^x}{x!} \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^y e^{-\theta\lambda}\frac{1}{y!}\sum_{x=y}^{\infty}\frac{e^{-[(1-\theta)\lambda]}[(1-\theta)\lambda]^x}{(x-y)!} \end{aligned}$$

令 $t=x-y$ ，$x=t+y$ ，則

$$f_Y(y)=(\frac{\theta}{1-\theta})^y e^{-\theta\lambda}\frac{1}{y!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{e^{-[(1-\theta)\lambda]}[(1-\theta)\lambda]^{t+y}}{t!}$$

$$=(\frac{\theta}{1-\theta})^y e^{-\theta\lambda}\frac{1}{y!}[(1-\theta)\lambda]^y\cdot 1$$

$$=\frac{e^{-\theta\lambda}(\theta\lambda)^y}{y!}$$

$$y=0,1,2,\cdots,0<\theta<1,\lambda>0$$

由 Y 的機率密度函數 $f_Y(y)$ 可知，$Y\sim \text{Poisson}(\theta\lambda)$ 。

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\binom{x}{y}\theta^y(1-\theta)^{x-y}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\frac{e^{-\theta\lambda}(\theta\lambda)^y}{y!}}$$

$$=\frac{x!}{y!(x-y)!}\theta^y(\theta\lambda)^{-y}(1-\theta)^{x-y}e^{\theta\lambda}e^{-\lambda}\lambda^x\frac{y!}{x!}$$

$$=\frac{e^{-[(1-\theta)\lambda]}[(1-\theta)\lambda]^{x-y}}{(x-y)!}$$

$$x=y,y+1,y+2,\cdots,0<\theta<1,\lambda>0$$

由 $X|Y$ 的機率密度函數 $f_{X|Y}(x|y)$ 可知，$X|Y\sim \text{Poisson}((1-\theta)\lambda)$ 。

有了聯合密度函數 $f(x,y)$ 與條件機率密度函數 $f_{X|Y}(x|y)$ 及 $f_{Y|X}(y|x)$ 後，以下我們進行 MLE 與 MPLE 的推導：

假設 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$ 為隨機樣本，故概似函數為：

$$L(\theta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f_{XY}(x_i,y_i)$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i}{y_i}\cdot\theta^{\sum_{i=1}^{n}y_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i}e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

將 $L(\theta,\lambda)$ 取 log 並分別對 θ 與 λ 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i}{\theta} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i}{1-\theta} = 0 \\ -n + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

由上述兩式我們可以解出 θ 與 λ 的 MLE：

$$(\hat{\theta},\hat{\lambda}) = \left(\frac{\bar{\mathrm{y}}}{\bar{\mathrm{x}}}, \bar{\mathrm{x}}\right)$$

以下我們進行 MPLE 的推導：

首先擬概似函數為：

$$\begin{aligned} PL(\theta,\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(\mathrm{x}_i|\mathrm{y}_i)\, f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(\mathrm{y}_i|\mathrm{x}_i) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} \binom{\mathrm{x}_i}{\mathrm{y}_i} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i} e^{-n(1-\theta)\lambda} [(1-\theta)\lambda]^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} (x_i - y_i)!} \end{aligned}$$

將 $PL(\theta,\lambda)$ 取 log 並分別對 θ 與 λ 微分，並令微分後的式子為 0，得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i}{\theta} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i}{1-\theta} + n\lambda + \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right)}{(1-\theta)} = 0 \\ -n(1-\theta) + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

由上述兩式我們可以解出 θ 與 λ 的 MPLE：

$$(\tilde{\theta},\tilde{\lambda}) = \left(\frac{\bar{\mathrm{y}}}{\bar{\mathrm{x}}}, \bar{\mathrm{x}}\right)$$

結論：因此在卜瓦松−二項分配的情況下，θ 及 λ 的 MLE 與 MPLE 是相同的。

3.2 三項分配

假設 (X,Y) 具有三項分配，即

$$f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{n!}{\mathrm{x}!\mathrm{y}!(n-\mathrm{x}-\mathrm{y})!}\theta_1^{\mathrm{x}}\theta_2^{\mathrm{y}}(1-\theta_1-\theta_2)^{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}}$$

$$\mathrm{x}=0,1,\cdots,n\text{，}\ \mathrm{y}=0,1,\cdots,n\text{，}\ \mathrm{x}+\mathrm{y}\le n\text{，}$$

$$0<\theta_1<1\text{，}\ 0<\theta_2<1\text{，}\ 0<\theta_1+\theta_2<1$$

故概似函數為：

$$L(\theta_1,\theta_2)=\frac{n!}{\mathrm{x}!\mathrm{y}!(n-\mathrm{x}-\mathrm{y})!}\theta_1^{\mathrm{x}}\theta_2^{\mathrm{y}}(1-\theta_1-\theta_2)^{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}}$$

將 $L(\theta_1,\theta_2)$ 取 log 並分別對 θ_1 與 θ_2 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{x}}{\theta_1}-\dfrac{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}}{1-\theta_1-\theta_2}=0 & (3.1)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{y}}{\theta_2}-\dfrac{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}}{1-\theta_1-\theta_2}=0 & (3.2)\end{cases}$$

由上述兩式我們可以解出 θ_1 與 θ_2 的 MLE：

$$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)=(\frac{\mathrm{x}}{n},\frac{\mathrm{y}}{n})$$

接下來我們進行 MPLE 的推導：

首先 $\mathrm{X}|\mathrm{Y}$、$\mathrm{Y}|\mathrm{X}$ 的條件機率函數分別為：

$$f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(\mathrm{x}|\mathrm{y})=\binom{n-\mathrm{y}}{\mathrm{x}}(\frac{\theta_1}{1-\theta_2})^{\mathrm{x}}(\frac{1-\theta_1-\theta_2}{1-\theta_2})^{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}},\quad 0\le\mathrm{x}\le n-\mathrm{y}$$

$$f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(\mathrm{y}|\mathrm{x})=\binom{n-\mathrm{x}}{\mathrm{y}}(\frac{\theta_2}{1-\theta_1})^{\mathrm{y}}(\frac{1-\theta_1-\theta_2}{1-\theta_1})^{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}},\quad 0\le\mathrm{y}\le n-\mathrm{x}$$

故擬概似函數為：

$$PL(\theta_1,\theta_2)=f_{X|Y}(x|y)\,f_{Y|X}(y|x)$$
$$=\binom{n-y}{x}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}\right)^{x}\left(\frac{1-\theta_1-\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{n-x-y}\cdot\binom{n-x}{y}\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)^{y}\left(\frac{1-\theta_1-\theta_2}{1-\theta_1}\right)^{n-x-y}$$

將 $PL(\theta_1,\theta_2)$ 取 log 並分別對 θ_1 與 θ_2 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\theta_1}+\dfrac{n-x}{1-\theta_1}-\dfrac{2(n-x-y)}{1-\theta_1-\theta_2}=0 & (3.3)\\[2ex] \dfrac{y}{\theta_2}+\dfrac{n-y}{1-\theta_2}-\dfrac{2(n-x-y)}{1-\theta_1-\theta_2}=0 & (3.4)\end{cases}$$

由 $\theta_1(1-\theta_1)(1-\theta_1-\theta_2)\times(3.3)$ 以及 $\theta_2(1-\theta_2)(1-\theta_1-\theta_2)\times(3.4)$ 可以得到：

$$\begin{cases}(1-\theta_1-\theta_2)(1-\theta_1)x+\theta_1(1-\theta_1-\theta_2)(n-x)-2\theta_1(1-\theta_1)(n-x-y)=0\\ (1-\theta_1-\theta_2)(1-\theta_2)x+\theta_2(1-\theta_1-\theta_2)(n-y)-2\theta_2(1-\theta_2)(n-x-y)=0\end{cases}$$

把上述兩式作整理可以得到：

$$\begin{cases}(1-\theta_1-\theta_2+2\theta_1\theta_2)x+(2\theta_1-2\theta_1^{2})y-\theta_1(1-\theta_1+\theta_2)n=0 & (3.5)\\ (2\theta_2-2\theta_2^{2})x+(1-\theta_1-\theta_2+2\theta_1\theta_2)y-\theta_2(1-\theta_2+\theta_1)n=0 & (3.6)\end{cases}$$

由 $\theta_2\times(3.5)+\theta_1\times(3.6)$ 可以得到：

$$(\theta_2-\theta_2^{2}+\theta_1\theta_2)x+(\theta_1-\theta_1^{2}+\theta_1\theta_2)y-2\theta_1\theta_2 n=0 \qquad (3.7)$$

接下來把(3.7)表示成以下方程式：

$$\theta_2(1-\theta_1-\theta_2)x+\theta_1(1-\theta_2-\theta_2)y-2\theta_2\theta_2(n-x-y)=0 \qquad (3.8)$$

由(3.8)除以 $\theta_1\theta_2(1-\theta_1-\theta_2)$ 可以得到：

$$\frac{x}{\theta_1}+\frac{y}{\theta_2}-\frac{2(n-x-y)}{1-\theta_1-\theta_2}=0 \qquad (3.9)$$

由(3.9)−(3.3)以及(3.9)−(3.4)可以得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{x}}{\theta_1} - \dfrac{\mathrm{n}-\mathrm{y}}{1-\theta_2} = 0 & (3.10) \\ \dfrac{\mathrm{y}}{\theta_2} - \dfrac{\mathrm{n}-\mathrm{x}}{1-\theta_1} = 0 & (3.11) \end{cases}$$

由 $\theta_1\,(1-\theta_2)\times(3.10)$以及 $\theta_2\,(1-\theta_1)\times(3.11)$可以得到：

$$\begin{cases} \mathrm{x}-\theta_2\mathrm{x}-\theta_1 n+\theta_1\mathrm{y}=0 & (3.12) \\ \mathrm{y}-\theta_1\mathrm{y}-\theta_2 n+\theta_2\mathrm{x}=0 & (3.13) \end{cases}$$

由 $\theta_2\times(3.12)-\theta_1\times(3.13)$以及 $(3.12)+(3.13)$可以得到：

$$\begin{cases} \theta_2\mathrm{x}-\theta_1\mathrm{y}=0 & (3.14) \\ x-\theta_1 n+y-\theta_2 n=0 & (3.15) \end{cases}$$

接下來我們把(3.14)中的 $\theta_1=\dfrac{\theta_2\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ 代入(3.15)可以得到：

$$\theta_2 n(\mathrm{x}+\mathrm{y})-\mathrm{y}(\mathrm{x}+\mathrm{y})=0 \qquad (3.16)$$

由(3.16)我們可以解出 $\theta_2=\dfrac{\mathrm{y}}{n}$，並代入(3.14)，可以得到 $\theta_1=\dfrac{\mathrm{x}}{n}$，故 $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)=(\dfrac{\mathrm{x}}{n},\dfrac{\mathrm{y}}{n})$ 即為 (θ_1,θ_2) 的 MPLE。

結論：因此在 (X, Y) 具有三項分配的情況下，θ_1 及 θ_2 的 MLE 與 MPLE 是相同的。

3.3 二元常態分配

假設(X, Y)具有二元常態分配，即(X, Y)的聯合分配為：

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}q(x,y)\right)$$

其中

$$q(x,y)=\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\,2}}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\,2}}$$

$$\mu_1\in R,\ \mu_2\in R,\ \sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ |\rho|<1$$

$(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ 的 MLE 為：

$$(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\rho})=\left(\bar{x},\bar{y},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}},\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}\right)$$

詳細內容可參考 Bickel, P. J. and Doksum, K. A. (1977).

接下來我們進行 MPLE 的推導：

首先 $X|Y$、$Y|X$ 的條件密度函數分別為：

$$f_{X|Y}(x|y)=(2\pi\sigma_1^{\,2}(1-\rho^2))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)]^2/2\sigma_1^{\,2}(1-\rho^2)\right)$$

$$f_{Y|X}(y|x)=(2\pi\sigma_2^{\,2}(1-\rho^2))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-[(y-\mu_2)-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)]^2/2\sigma_2^{\,2}(1-\rho^2)\right)$$

故擬概似函數為：

$$PL(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X|Y}(x|y) f_{Y|X}(y|x)$$

$$= (4\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)^2)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\cdot \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y_i-\mu_2)]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{-\sum_{i=1}^{n}[(y_i-\mu_2)-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_i-\mu_1)]^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right)$$

其中

$$\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$$

將 $PL(\boldsymbol{\theta})$ 取 log 並分別對 μ_1、μ_2、σ_1、σ_2 與 ρ 微分，並令微分後的式子為 0，經過化簡可得到以下等式：

$$\begin{cases} \sigma_2(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1) - 2\sigma_1\rho\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2) = 0 \\ \sigma_1(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2) - 2\sigma_2\rho\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1) = 0 \\ \sigma_2(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 - 2\sigma_1\rho\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)(y_i-\mu_2) - n\sigma_1^2\sigma_2(1-\rho^2) = 0 \\ \sigma_1(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2 - 2\sigma_2\rho\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)(y_i-\mu_2) - n\sigma_2^2\sigma_1(1-\rho^2) = 0 \\ \sigma_2^2\rho\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 + \sigma_1^2\rho\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2 - \sigma_1\sigma_1(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)(y_i-\mu_2) \\ -n\sigma_1^2\sigma_2^2\rho(1-\rho^2) = 0 \end{cases}$$

上述五個等式我們分別記為(3.17)、 (3.18) 、 (3.19) 、 (3.20) 、(3.21)。

令 $\mathrm{u}=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i-\mu_1)$ ， $\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i-\mu_2)$ ，則(3.17)、(3.18)可以改寫成：

$$\sigma_2(1+\rho^2)\mathrm{u}-2\sigma_1\rho\mathrm{v}=0 \tag{3.22}$$

$$\sigma_1(1+\rho^2)\mathrm{v}-2\sigma_2\rho\mathrm{u}=0 \tag{3.23}$$

我們將(3.22)、(3.23)寫成以下形式：

$$\mathrm{Ab}=\mathbf{0}$$

其中

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\sigma_2(1+\rho^2) & -2\sigma_1\rho\\ -2\sigma_2\rho & \sigma_1(1+\rho^2)\end{bmatrix}\qquad \mathrm{b}=\begin{bmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{v}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

因為 A 的行列式值 $\det(\mathrm{A})=\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^2\neq 0$ ，故可以解出：

$$\mathrm{b}=\begin{bmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

由 $\mathrm{u}=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i-\mu_1)=0$ 且 $\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i-\mu_2)=0$ ，可以得到 (μ_1,μ_2) 的解為：

$$(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2)=(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}})$$

接下來把 $(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2)=(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}})$ 代入(3.19)、(3.20)、(3.21)並令 $\mathrm{s}_i=(\mathrm{x}_i-\bar{\mathrm{x}})^2$ 、

$\mathrm{t}_i=(\mathrm{y}_i-\bar{\mathrm{y}})^2$ ， $i=1,2,\ldots,n$ ，可以得到：

$$\sigma_2(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i{}^2-2\sigma_1\rho\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i\mathrm{t}_i-n\sigma_1{}^2\sigma_2(1-\rho^2)=0 \tag{3.24}$$

$$\sigma_1(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{t}_i{}^2-2\sigma_2\rho\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i\mathrm{t}_i-n\sigma_2{}^2\sigma_1(1-\rho^2)=0 \tag{3.25}$$

$$\sigma_2{}^2\rho\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i{}^2+\sigma_1{}^2\rho\sum_{i=1}^{n}\mathrm{t}_i{}^2-\sigma_1\sigma_1(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i\mathrm{t}_i-n\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2\rho(1-\rho^2)=0 \tag{3.26}$$

將 $\sigma_2 \times (3.24) - \sigma_1 \times (3.25)$，可以得到：

$$\sigma_2{}^2 \sum_{i=1}^{n} s_i{}^2 - \sigma_1{}^2 \sum_{i=1}^{n} t_i{}^2 = 0 \tag{3.27}$$

由(3.27)可以知道：

$$\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i{}^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i{}^2}$$

故我們設 $\sigma_1{}^2 = (\sum_{i=1}^{n} s_i{}^2) \cdot k$ 且 $\sigma_2{}^2 = (\sum_{i=1}^{n} t_i{}^2) \cdot k$，其中 $k > 0$

由 $\rho\sigma_2 \times (3.24) + \rho\sigma_1 \times (3.25) - (3.26)$可以得到：

$$\rho\sigma_2{}^2 \sum_{i=1}^{n} s_i{}^2 + \rho\sigma_1{}^2 \sum_{i=1}^{n} t_i{}^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \sum_{i=1}^{n} s_i t_i = 0$$

由上述等式可以得到：

$$\rho = \frac{2\sigma_1\sigma_2 \sum_{i=1}^{n} s_i t_i}{\sigma_2{}^2 \sum_{i=1}^{n} s_i{}^2 + \sigma_1{}^2 \sum_{i=1}^{n} t_i{}^2}$$

$$= \frac{2\sum_{i=1}^{n} s_i t_i}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{n} s_i{}^2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sum_{i=1}^{n} t_i{}^2}$$

$$= \frac{2\sum_{i=1}^{n} s_i t_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i{}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i{}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i{}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i{}^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i t_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i{}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i{}^2}}$$

最後將 $\sigma_1{}^2=(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i{}^2)\cdot k$ 、 $\sigma_2{}^2=(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{t}_i{}^2)\cdot k$ 、 $\rho=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i\mathrm{t}_i/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i{}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{t}_i{}^2}$ 代回(8)可以得到：

$$[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i{}^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{t}_i{}^2-(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}_i\mathrm{t}_i)^2](1-nk)=0$$

由上述等式可知 $k=\dfrac{1}{n}$ ，因此可以得到 (σ_1,σ_2) 的解：

$$(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2)=\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}_i-\overline{\mathrm{x}})^2}{n}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{y}_i-\overline{\mathrm{y}})^2}{n}}\right)$$

故

$$(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\tilde{\rho})=\left(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}_i-\overline{\mathrm{x}})^2}{n}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{y}_i-\overline{\mathrm{y}})^2}{n}},\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i-\overline{\mathrm{x}})(\mathrm{y}_i-\overline{\mathrm{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}_i-\overline{\mathrm{x}})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{y}_i-\overline{\mathrm{y}})^2}}\right)$$

即為 $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ 的 MPLE

結論：因此在 (X,Y) 具有二元常態分配的情況下，μ_1、μ_2、σ_1、σ_2 與 ρ 的 MLE 與 MPLE 是相同的。

4. 兩變數指數族中參數的 MLE 與 MPLE 之探討

本章以一般兩變數指數族為例，推導出一般的概似方程式與一般的擬概似方程式。再以三項分配為例，利用一般的擬概似方程式套用三項分配的條件，說明套用後的結果與三項分配的擬概似方程式是相等的。

假設 (X,Y) 為兩變數指數族，即其聯合密度函數為：

$$f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\boldsymbol{\theta})=\exp[p_1(\boldsymbol{\theta})k_1(\mathrm{x},\mathrm{y})+p_2(\boldsymbol{\theta})k_2(\mathrm{x},\mathrm{y})+h(\mathrm{x},\mathrm{y})+q(\boldsymbol{\theta})]$$

其中 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ 為其參數向量，$(\mathrm{x},\mathrm{y})\in S$，$S$ 與 $\boldsymbol{\theta}$ 無關，以下我們進行 $\boldsymbol{\theta}$ 的 MLE 與 MPLE 之探討。

假設 $(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)\cdots(\mathrm{x}_n,\mathrm{y}_n)$ 為隨機樣本，則概似函數

$$L(\boldsymbol{\theta})=\exp[p_1(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{n}k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)+p_2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{n}k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)+\sum_{i=1}^{n}h(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)+nq(\boldsymbol{\theta})]$$

$L(\boldsymbol{\theta})$ 取 log 後分別對 θ_j 微分，$j=1,2,\cdots,m$，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\sum_{i=1}^{n}k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\frac{\partial}{\partial\theta_j}p_1(\boldsymbol{\theta})+\sum_{i=1}^{n}k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\frac{\partial}{\partial\theta_j}p_2(\boldsymbol{\theta})+n\frac{\partial}{\partial\theta_j}q(\boldsymbol{\theta})=0 \qquad (4.1)$$

$$j=1,2,\cdots,m$$

上述等式之解 $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ 即為 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 的 MLE。

接下來我們進行 MPLE 的探討：

對擬概似函數 $PL(\boldsymbol{\theta})$ 取 log 後，可以得到：

$$\log PL(\boldsymbol{\theta}) = \log \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i) f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) - \sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i) - \sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)$$

分別對 θ_j 微分，可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log PL(\boldsymbol{\theta}) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i)}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)}{f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\int \frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) d\mathrm{y}_i}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\int \frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) d\mathrm{x}_i}{f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)}$$
$$j = 1, 2, \cdots, m$$

由指數族的定義，可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \exp[p_1(\boldsymbol{\theta}) k_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + p_2(\boldsymbol{\theta}) k_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + h(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + q(\boldsymbol{\theta})]$$
$$= f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot [p_1(\boldsymbol{\theta}) k_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + p_2(\boldsymbol{\theta}) k_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + h(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + q(\boldsymbol{\theta})]$$
$$j = 1, 2, \cdots, m$$

故

$$\frac{\int \frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) d\mathrm{y}}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} [\int \frac{f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})} k_i(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \frac{\partial}{\partial \theta} p_i(\boldsymbol{\theta}) d\mathrm{y}] + \int \frac{f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})} \frac{\partial}{\partial \theta} q(\boldsymbol{\theta}) d\mathrm{y}$$
$$= \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} [\int f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(\mathrm{y}|\mathrm{x}) k_i(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \frac{\partial}{\partial \theta} p_i(\boldsymbol{\theta}) d\mathrm{y}] + \int f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(\mathrm{y}|\mathrm{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} q(\boldsymbol{\theta}) d\mathrm{y}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \theta} p_1(\boldsymbol{\theta}) E(k_1(\mathrm{x}, \mathrm{y})|\mathrm{x}) + \frac{\partial}{\partial \theta} p_2(\boldsymbol{\theta}) E(k_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})|\mathrm{x}) + \frac{\partial}{\partial \theta} q(\boldsymbol{\theta})$$
$$j = 1, 2, \cdots, m$$

同理

$$\frac{\int \frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y})d\mathrm{x}}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})} = \frac{\partial}{\partial \theta} p_1(\boldsymbol{\theta}) E(k_1(\mathrm{x},\mathrm{y})|\mathrm{y}) + \frac{\partial}{\partial \theta} p_2(\boldsymbol{\theta}) E(k_2(\mathrm{x},\mathrm{y})|\mathrm{y}) + \frac{\partial}{\partial \theta} q(\boldsymbol{\theta})$$

$$j = 1, 2, \cdots, m$$

因此，$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log PL(\boldsymbol{\theta})$ 經過改寫並令其為 0 可以得到：

$$2 \cdot [\frac{\partial}{\partial \theta_j} p_1(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} k_1(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) + \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_2(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} k_2(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) + n \frac{\partial}{\partial \theta_j} q(\boldsymbol{\theta})]$$

$$-[\frac{\partial}{\partial \theta_j} p_1(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} E(k_1(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)|\mathrm{x}_i) + \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_2(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} E(k_2(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)|\mathrm{x}_i) + n \frac{\partial}{\partial \theta_j} q(\boldsymbol{\theta})] \quad (4.2)$$

$$-[\frac{\partial}{\partial \theta_j} p_1(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} E(k_1(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)|\mathrm{y}_i) + \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_2(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} E(k_2(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)|\mathrm{y}_i) + n \frac{\partial}{\partial \theta_j} q(\boldsymbol{\theta})] = 0$$

$$j = 1, 2, \cdots, m$$

上述等式之解 $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_m)$ 即為 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ 的 MPLE。

第三章的三種模型：卜瓦松−二項分配、三項分配和二元常態分配皆為指數族的情況。我們以 3.2 節的三項分配為例，利用式(4.2)代入三項分配，說明代入後的擬概似聯立方程式與 3.2 節是相等的。

首先，3.2 節中 (X, Y) 具有三項分配，即

$$f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{n!}{\mathrm{x}!\mathrm{y}!(n-\mathrm{x}-\mathrm{y})!} \theta_1^{\mathrm{x}} \theta_2^{\mathrm{y}} (1-\theta_1-\theta_2)^{n-\mathrm{x}-\mathrm{y}}$$

$$\mathrm{x} = 0, 1, \cdots, n \text{，} \mathrm{y} = 0, 1, \cdots, n \text{，} \mathrm{x}+\mathrm{y} \le n \text{，}$$

$$0 < \theta_1 < 1 \text{，} 0 < \theta_2 < 1 \text{，} 0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$$

我們把 $f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 以指數族方式表示，整理成以下形式：

$$f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\exp\left[\mathrm{x}\ln(\frac{\theta_1}{1-\theta_1-\theta_2})+\mathrm{y}\ln(\frac{\theta_2}{1-\theta_1-\theta_2})+n\ln(1-\theta_1-\theta_2)+\ln(\frac{n!}{\mathrm{x}!\mathrm{y}!(n-\mathrm{x}-\mathrm{y})!})\right]$$

因為 $f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 即為三項分配的概似函數，故與本章的概似函數 $L(\boldsymbol{\theta})$ 比較可知：

$$p_1(\boldsymbol{\theta})=\ln(\frac{\theta_1}{1-\theta_1-\theta_2})\text{、}\ p_2(\boldsymbol{\theta})=\ln(\frac{\theta_2}{1-\theta_1-\theta_2})$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)=\mathrm{x}\text{、}\sum_{i=1}^{n}k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)=\mathrm{y}$$

$$\sum_{i=1}^{n}h(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)=\ln(\frac{n!}{\mathrm{x}!\mathrm{y}!(n-\mathrm{x}-\mathrm{y})!})\text{、}nq(\boldsymbol{\theta})=n\ln(1-\theta_1-\theta_2)$$

其中

$$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$$

另外，在 (X,Y) 具有三項分配的條件下，我們可以得到：

$$\sum_{i=1}^{n}E(k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)|\mathrm{x}_i)=E(\sum_{i=1}^{n}k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Big|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)=E(\mathrm{X}|\mathrm{X}=\mathrm{x})=\mathrm{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n}E(k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)|\mathrm{x}_i)=E(\sum_{i=1}^{n}k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Big|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)=E(\mathrm{Y}|\mathrm{X}=\mathrm{x})=(n-\mathrm{x})(\frac{\theta_2}{1-\theta_1})$$

$$\sum_{i=1}^{n}E(k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)|\mathrm{y}_i)=E(\sum_{i=1}^{n}k_1(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Big|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{y}_i)=E(\mathrm{X}|\mathrm{Y}=\mathrm{y})=(n-\mathrm{y})(\frac{\theta_1}{1-\theta_2})$$

$$\sum_{i=1}^{n}E(k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)|\mathrm{y}_i)=E(\sum_{i=1}^{n}k_2(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Big|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{y}_i)=E(\mathrm{Y}|\mathrm{Y}=\mathrm{y})=\mathrm{y}$$

故式(4.2)在 $j=1$ 時可以寫成：

$$2\cdot[\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial\theta_1}p_1(\boldsymbol{\theta})+\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial\theta_1}p_2(\boldsymbol{\theta})+n\frac{\partial}{\partial\theta_1}q(\boldsymbol{\theta})]-[\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial\theta_1}p_1(\boldsymbol{\theta})+(n-\mathrm{x})(\frac{\theta_2}{1-\theta_1})\frac{\partial}{\partial\theta_1}p_2(\boldsymbol{\theta})+n\frac{\partial}{\partial\theta_1}q(\boldsymbol{\theta})]$$
$$-[(n-\mathrm{y})(\frac{\theta_1}{1-\theta_2})\frac{\partial}{\partial\theta_1}p_1(\boldsymbol{\theta})+\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial\theta_1}p_2(\boldsymbol{\theta})+n\frac{\partial}{\partial\theta_1}q(\boldsymbol{\theta})]=0$$

即

$$(1-\theta_1-\theta_2+2\theta_1\theta_2)\mathrm{x}+2(\theta_1-\theta_1{}^2)\mathrm{y}-n\theta_1(1-\theta_1+\theta_2)=0$$

而在 3.2 節中的式(3.3)經過通分化簡後同樣可以得到

$$(1-\theta_1-\theta_2+2\theta_1\theta_2)\mathrm{x}+2(\theta_1-\theta_1{}^2)\mathrm{y}-n\theta_1(1-\theta_1+\theta_2)=0$$

故可以知道兩式是相等的。

同理，式(4.2)在 $j=2$ 時，跟 3.2 節中的式(3.4)也是相等的。

5. 2×2列聯表中參數的 MLE 與 MPLE 之探討

本章節主要探討二維列聯表模型下的參數估計，設X 、Y 是2×2 列聯表中的兩個變數，且每一個變數的值僅為 0 或 1，它們所在第 i 列第 j 行的聯合機率值為 $f(i,j)=P(\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$，其中 $f(i,j)$ 與未知參數 θ 有關。另外全部 n 個觀察值中，落在第 i 列第 j 行的總個數令為 n_{ij}，因此 $n=n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}$。我們可將上述之符號整理成表 5-1 的型式如下：

表 5-1：2×2 列聯表模型(格子中的值分別為機率值 $f(i,j)$ 及觀察值 n_{ij})

X \ Y	0	1
0	n_{00} $f(0,0)$	n_{01} $f(0,1)$
1	n_{10} $f(1,0)$	n_{11} $f(1,1)$

在 $f(0,0)=\theta$，$f(0,1)=\theta$，$f(1,0)=\theta$，$f(1,1)=1-3\theta$ 的情況下，其中 $0<\theta<1$ Arnold (1991)求出 θ 的 MLE 和 MPLE，分別為 $\dfrac{n_{00}+n_{01}+n_{10}}{3n}$ 和 $\dfrac{n_{01}+n_{10}}{3n_{01}+3n_{10}+2n_{11}}$，故兩種估計值並不相同。

本節推廣 Arnold (1991)的結果，把表 5-1 方格內的機率值改成(θ_1、θ_2、θ_3)或(θ_1、θ_2、θ_2)或(θ_1、θ_2、$2\theta_2$)，分別於 5.1 節、5.2 節及 5.3 節作理論探討。

5.1 方格內參數分別為θ_1、θ_2、θ_3

當方格內參數分別為θ_1、θ_2、θ_3時，整理成表 5-2 的列聯表型式如下：

表 5-2：參數為θ_1、θ_2、θ_3的列聯表模型

X \ Y	0	1
0	n_{00} θ_1	n_{01} θ_2
1	n_{10} θ_3	n_{11} $1-\theta_1-\theta_2-\theta_3$

以下進行 MLE 的推導：

首先，X 、Y 的聯合機率函數為：

$$f_{XY}(x,y)=\theta_1^{(1-x)(1-y)}\theta_2^{(1-x)y}\theta_3^{x(1-y)}(1-\theta_1-\theta_2-\theta_3)^{xy}$$

$$(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\text{，}$$

$$0<\theta_1<1\text{，}0<\theta_2<1\text{，}0<\theta_3<1\text{，}0<\theta_1+\theta_2+\theta_3<1$$

故概似函數為：

$$L(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\prod_{i=1}^{n}f_{XY}(x_i,y_i)=\theta_1^{n_{00}}\theta_2^{n_{01}}\theta_3^{n_{10}}(1-\theta_1-\theta_2-\theta_3)^{n_{11}}$$

其中

$$n_{00}=n-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{y}_i-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{y}_i \text{ ，} n_{01}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{y}_i-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{y}_i \text{ ，}$$

$$n_{10}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{y}_i \text{ ，} n_{11}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{y}_i \text{ 。}$$

將 $L(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 取 log 並分別對 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases}\dfrac{n_{00}}{\theta_1}-\dfrac{n_{11}}{1-\theta_1-\theta_2-\theta_3}=0\\ \dfrac{n_{01}}{\theta_2}-\dfrac{n_{11}}{1-\theta_1-\theta_2-\theta_3}=0\\ \dfrac{n_{10}}{\theta_3}-\dfrac{n_{11}}{1-\theta_1-\theta_2-\theta_3}=0\end{cases}$$

由上述等式我們可以得到

$$\frac{n_{00}}{\theta_1}=\frac{n_{01}}{\theta_2}=\frac{n_{10}}{\theta_3}=\frac{n_{11}}{\theta_4}=\frac{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}=\frac{n}{1} \tag{5.1}$$

其中 $\theta_4=1-\theta_1-\theta_2-\theta_3$

由(5.1)我們可以得到 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 的 MLE：

$$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3)=(\frac{n_{00}}{n},\frac{n_{01}}{n},\frac{n_{10}}{n})$$

以下來我們進行 MPLE 的推導：

首先，由 X 、 Y 的聯合機率函數我們可以求出 X 、 Y 的邊際機率函數，分別為：

$$f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})=(\theta_1+\theta_2)^{1-\mathrm{x}}(1-\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{x}} \quad ,\mathrm{x}=0,1$$
$$f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y})=(\theta_1+\theta_3)^{1-\mathrm{y}}(1-\theta_1-\theta_3)^{\mathrm{y}} \quad ,\mathrm{y}=0,1$$

而擬概似函數

$$
\begin{aligned}
PL(\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= \prod_{i=1}^{n} f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(\mathrm{x}_i|\mathrm{y}_i) f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(\mathrm{y}_i|\mathrm{x}_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)}{f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)} \frac{f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{f^2{}_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)}{f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i) f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)}
\end{aligned}
$$

對 $PL(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 取 log 可以得到：

$$
\log PL(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 2\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i) - \sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i) - \sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i)
$$

由 X 、 Y 的聯合機率函數與邊際機率函數可知：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i) = n_{00}\log(\theta_1) + n_{01}\log(\theta_2) + n_{10}\log(\theta_3) + n_{11}\log(1-\theta_1-\theta_2-\theta_3) \\
&\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i) = (n_{00}+n_{01})\log(\theta_1+\theta_2) + (n_{10}+n_{11})\log(1-\theta_1-\theta_2) \\
&\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i) = (n_{00}+n_{10})\log(\theta_1+\theta_3) + (n_{01}+n_{11})\log(1-\theta_1-\theta_3)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

令 $\theta_4 = 1-\theta_1-\theta_2-\theta_3$，故(5.2)可以改寫成：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i) = n_{00}\log(\theta_1) + n_{01}\log(\theta_2) + n_{10}\log(\theta_3) + n_{11}\log(\theta_4) \\
&\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_i) = (n_{00}+n_{01})\log(\theta_1+\theta_2) + (n_{10}+n_{11})\log(\theta_3+\theta_4) \\
&\sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_i) = (n_{00}+n_{10})\log(\theta_1+\theta_3) + (n_{01}+n_{11})\log(\theta_2+\theta_4)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

利用 Lagrange 乘數法將 $\log PL(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)+\lambda(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-1)$ 分別對 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4、λ 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{2n_{00}}{\theta_1}-\dfrac{n_{00}+n_{01}}{\theta_1+\theta_2}-\dfrac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_3}=-\lambda & (5.4) \\ \dfrac{2n_{01}}{\theta_2}-\dfrac{n_{00}+n_{01}}{\theta_1+\theta_2}-\dfrac{n_{01}+n_{11}}{\theta_2+\theta_4}=-\lambda & (5.5) \\ \dfrac{2n_{10}}{\theta_3}-\dfrac{n_{10}+n_{11}}{\theta_3+\theta_4}-\dfrac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_3}=-\lambda & (5.6) \\ \dfrac{2n_{11}}{\theta_4}-\dfrac{n_{10}+n_{11}}{\theta_3+\theta_4}-\dfrac{n_{01}+n_{11}}{\theta_2+\theta_4}=-\lambda & (5.7) \\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=1 \end{cases}$$

由(5.4)−(5.7)，(5.4)−(5.5)−(5.6)+(5.7)，(5.4)−(5.5)以及(5.4)−(5.6)可以得到：

$$\frac{n_{00}\theta_2-n_{01}\theta_1}{\theta_1(\theta_1+\theta_2)}+\frac{n_{00}\theta_3-n_{10}\theta_1}{\theta_1(\theta_1+\theta_3)}+\frac{n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_3}{\theta_4(\theta_3+\theta_4)}+\frac{n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_2}{\theta_4(\theta_2+\theta_4)}=0 \tag{5.8}$$

$$\frac{n_{00}\theta_2-n_{01}\theta_1}{\theta_1\theta_2}-\frac{n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_3}{\theta_3+\theta_4}=0 \tag{5.9}$$

$$\frac{n_{00}\theta_2-n_{01}\theta_1}{\theta_1\theta_2}+\frac{n_{00}\theta_3-n_{10}\theta_1}{\theta_1(\theta_1+\theta_3)}-\frac{n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_2}{\theta_2(\theta_2+\theta_4)}=0 \tag{5.10}$$

$$\frac{n_{00}\theta_2-n_{01}\theta_1}{\theta_1(\theta_1+\theta_2)}+\frac{n_{00}\theta_3-n_{10}\theta_1}{\theta_1+\theta_3}-\frac{n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_3}{\theta_3(\theta_3+\theta_4)}=0 \tag{5.11}$$

令 $p=n_{00}\theta_2-n_{01}\theta_1$，$q=n_{00}\theta_3-n_{10}\theta_1$，$r=n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_3$，$s=n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_2$，則(5.8)、(5.9)、(5.10)、(5.11)可以改寫成以下形式：

$$\mathrm{Ab}=\mathrm{O}$$

其中

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1(\theta_1+\theta_2)} & \frac{1}{\theta_1(\theta_1+\theta_3)} & \frac{1}{\theta_4(\theta_3+\theta_4)} & \frac{1}{\theta_4(\theta_2+\theta_4)} \\ \frac{1}{\theta_1\theta_2} & 0 & -\frac{1}{\theta_3\theta_4} & 0 \\ \frac{1}{\theta_1\theta_2} & \frac{1}{\theta_1(\theta_1+\theta_3)} & 0 & -\frac{1}{\theta_2(\theta_2+\theta_4)} \\ \frac{1}{\theta_1(\theta_1+\theta_2)} & \frac{1}{\theta_1\theta_3} & \frac{1}{\theta_3(\theta_3+\theta_4)} & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}=\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix}, \mathrm{O}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

因為A的行列式值

$$\det(\mathrm{A})=\frac{\theta_1\theta_2(\theta_3+\theta_4)+\theta_3\theta_4(\theta_1+\theta_2)}{\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\theta_4^2(\theta_1+\theta_2)(\theta_3+\theta_4)(\theta_1+\theta_3)(\theta_2+\theta_4)}\neq 0$$

因此可以解出：

$$\mathrm{b}=\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故可以得到：

$$n_{00}\theta_2-n_{01}\theta_1=0$$

$$n_{00}\theta_3-n_{10}\theta_1=0$$

$$n_{10}\theta_4-n_{11}\theta_3=0$$

$$n_{01}\theta_4-n_{11}\theta_2=0$$

由上述等式可以得到：

$$\frac{\theta_1}{n_{00}}=\frac{\theta_2}{n_{01}}$$

$$\frac{\theta_1}{n_{00}}=\frac{\theta_3}{n_{10}}$$

$$\frac{\theta_3}{n_{10}}=\frac{\theta_4}{n_{11}}$$

$$\frac{\theta_2}{n_{01}} = \frac{\theta_4}{n_{11}}$$

故

$$\frac{n_{00}}{\theta_1} = \frac{n_{01}}{\theta_2} = \frac{n_{10}}{\theta_3} = \frac{n_{11}}{\theta_4} = \frac{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4} = \frac{n}{1} \tag{5.12}$$

由(5.12)我們可以得到θ_1、θ_2、θ_3的 MPLE：

$$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3) = (\frac{n_{00}}{n}, \frac{n_{01}}{n}, \frac{n_{10}}{n})$$

結論：因此在二維列聯表模型下，方格內參數分別為θ_1、θ_2、θ_3時，θ_1、θ_2、θ_3的 MLE 與 MPLE 是相同的。

5.2 方格內參數分別為θ_1、θ_2、θ_2

當方格內參數分別為θ_1、θ_2、θ_2時，整理成表 5-3 的列聯表型式如下：

表 5-3：參數為θ_1、θ_2、θ_2的列聯表模型

X \ Y	0	1
0	n_{00} θ_1	n_{01} θ_2
1	n_{10} θ_2	n_{11} $1-\theta_1-2\theta_2$

以下進行 MLE 的推導：

首先，X 、Y 的聯合機率函數為：

$$f_{XY}(x,y)=\theta_1^{(1-x)(1-y)}\theta_2^{(1-x)y}\theta_2^{x(1-y)}(1-\theta_1-2\theta_2)^{xy}$$

$$(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\text{，}$$

$$0<\theta_1<1\text{，}\ 0<\theta_2<1\text{，}\ 0<\theta_1+2\theta_2<1$$

故概似函數為：

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f_{XY}(x_i,y_i)=\theta_1^{n_{00}}\theta_2^{n_{01}}\theta_2^{n_{10}}(1-\theta_1-2\theta_2)^{n_{11}}$$

將$L(\theta_1,\theta_2)$取 log 並分別對θ_1、θ_2微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{n_{00}}{\theta_1} - \dfrac{n_{11}}{1-\theta_1-2\theta_2} = 0 \\ \dfrac{n_{01}+n_{10}}{\theta_2} - \dfrac{2n_{11}}{1-\theta_1-2\theta_2} = 0 \end{cases}$$

由上述等式我們可以得到：

$$\frac{n_{00}}{\theta_1} = \frac{n_{01}+n_{10}}{2\theta_2} = \frac{n_{11}}{\theta_3} = \frac{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}{\theta_1+2\theta_2+\theta_3} = \frac{n}{1} \tag{5.13}$$

其中 $\theta_3 = 1-\theta_1-2\theta_2$

由(5.13)我們可以得到 θ_1、θ_2 的 MLE：

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = (\frac{n_{00}}{n}, \frac{n_{01}+n_{10}}{2n})$$

以下來我們進行 MPLE 的推導：

首先，由 X、Y 的聯合機率函數我們可以求出 X、Y 的邊際機率函數，分別為

$$f_X(\mathrm{x}) = (\theta_1+\theta_2)^{1-\mathrm{x}}(1-\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{x}} \quad , \mathrm{x} = 0,1$$
$$f_Y(\mathrm{y}) = (\theta_1+\theta_2)^{1-\mathrm{y}}(1-\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{y}} \quad , \mathrm{y} = 0,1$$

仿照 5.1 節推導 MPLE 的過程，在找到擬概似函數後，令 $\theta_3 = 1-\theta_1-2\theta_2$，利用 Lagrange 乘數法，將 $\log PL(\theta_1,\theta_2,\theta_3) + \lambda(\theta_1+2\theta_2+\theta_3-1)$ 分別對 θ_1、θ_2、θ_3、λ 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{2n_{00}}{\theta_1} - \dfrac{n_{00}+n_{01}}{\theta_1+\theta_2} - \dfrac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_2} = -\lambda & (5.14) \\ \dfrac{2(n_{01}+n_{10})}{\theta_2} - \dfrac{n_{00}+n_{01}}{\theta_1+\theta_2} - \dfrac{n_{10}+n_{11}}{\theta_2+\theta_3} - \dfrac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_2} - \dfrac{n_{01}+n_{11}}{\theta_2+\theta_3} = -2\lambda & (5.15) \\ \dfrac{2n_{11}}{\theta_3} - \dfrac{n_{10}+n_{11}}{\theta_2+\theta_3} - \dfrac{n_{01}+n_{11}}{\theta_2+\theta_3} = -\lambda & (5.16) \\ \theta_1+2\theta_2+\theta_3 = 1 \end{cases}$$

由 $2\times(5.14)-(5.15)$，$2\times(5.16)-(5.15)$以及$(5.14)-(5.16)$可以得到：

$$\frac{(\theta_1+2\theta_2)[2n_{00}\theta_2-(n_{01}\theta_1+n_{10}\theta_1)]}{\theta_1\theta_2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{2n_{11}\theta_2-(n_{01}\theta_3+n_{10}\theta_3)}{\theta_2(\theta_2+\theta_3)}=0$$

$$\frac{2n_{00}\theta_2-(n_{01}\theta_1+n_{10}\theta_1)}{\theta_2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{(2\theta_2+\theta_3)[2n_{11}\theta_2-(n_{01}\theta_3+n_{10}\theta_3)]}{\theta_2\theta_3(\theta_2+\theta_3)}=0$$

$$-\frac{2n_{00}\theta_2-(n_{01}\theta_1+n_{10}\theta_1)}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+\theta_3)}+\frac{2n_{11}\theta_2-(n_{01}\theta_3+n_{10}\theta_3)}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+\theta_3)}+\frac{2\theta_2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{\theta_1\theta_3(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+\theta_3)}=0$$

接著利用 5.1 節同樣的做法，我們可以得到θ_1、θ_2的 MPLE 如下：

$$(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)=(\frac{n_{00}}{n},\frac{n_{01}+n_{10}}{2n})$$

結論：因此在二維列聯表模型下，方格內參數分別為θ_1、θ_2、θ_2時，θ_1、θ_2的 MLE 與 MPLE 是相同的。

5.3 方格內參數分別為θ_1、$2\theta_2$、θ_2

當方格內參數分別為θ_1、$2\theta_2$、θ_2時，整理成表 5-4 的列聯表型式如下：

表 5-4：參數為θ_1、$2\theta_2$、θ_2的列聯表模型

X \ Y	0	1
0	n_{00} θ_1	n_{01} $2\theta_2$
1	n_{10} θ_2	n_{11} $1-\theta_1-3\theta_2$

以下進行 MLE 的推導：

首先，X、Y 的聯合機率函數為：

$$f_{XY}(x,y)=\theta_1^{(1-x)(1-y)}(2\theta_2)^{(1-x)y}\theta_2^{x(1-y)}(1-\theta_1-3\theta_2)^{xy}$$

$$(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\text{，}$$

$$0<\theta_1<1\text{，}\ 0<\theta_2<1\text{，}\ 0<\theta_1+3\theta_2<1$$

故概似函數為：

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f_{XY}(x_i,y_i)=\theta_1^{n_{00}}(2\theta_2)^{n_{01}}\theta_2^{n_{10}}(1-\theta_1-3\theta_2)^{n_{11}}$$

將$L(\theta_1,\theta_2)$取 log 並分別對θ_1、θ_2微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{n_{00}}{\theta_1} - \dfrac{n_{11}}{1-\theta_1-3\theta_2} = 0 \\ \dfrac{n_{01}+n_{10}}{\theta_2} - \dfrac{3n_{11}}{1-\theta_1-3\theta_2} = 0 \end{cases}$$

由上述等式我們可以得到：

$$\frac{n_{00}}{\theta_1} = \frac{n_{01}+n_{10}}{3\theta_2} = \frac{n_{11}}{\theta_3} = \frac{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}{\theta_1+3\theta_2+\theta_3} = \frac{n}{1} \tag{5.17}$$

其中 $\theta_3 = 1-\theta_1-3\theta_2$

由(5.17)我們可以得到 θ_1、θ_2 的 MLE：

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = (\frac{n_{00}}{n}, \frac{n_{01}+n_{10}}{3n}) \tag{5.18}$$

以下來我們進行 MPLE 的推導：

首先，由 X 、 Y 的聯合機率函數我們可以求出 X 、 Y 的邊際機率函數，分別為

$$f_X(\mathrm{x}) = (\theta_1+2\theta_2)^{1-\mathrm{x}}(1-\theta_1-2\theta_2)^{\mathrm{x}} \quad , \mathrm{x} = 0,1$$
$$f_Y(\mathrm{y}) = (\theta_1+\theta_2)^{1-\mathrm{y}}(1-\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{y}} \quad , \mathrm{y} = 0,1$$

因為 5.1 節推導 MPLE 的方法無法適用於本節中，故找到擬概似函數後，分別對 θ_1、θ_2 微分，並令微分後的式子為 0，可得到以下等式：

$$\begin{cases} \dfrac{2n_{00}}{\theta_1} - \dfrac{2n_{11}}{1-\theta_1-3\theta_2} - \dfrac{n_{00}+n_{01}}{\theta_1+2\theta_2} + \dfrac{n_{10}+n_{11}}{1-\theta_1-2\theta_2} - \dfrac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_2} + \dfrac{n_{01}+n_{11}}{1-\theta_1-\theta_2} = 0 \\ \dfrac{2(n_{01}+n_{10})}{\theta_2} - \dfrac{6n_{11}}{1-\theta_1-3\theta_2} - \dfrac{2(n_{00}+n_{01})}{\theta_1+2\theta_2} - \dfrac{2(n_{10}+n_{11})}{1-\theta_1-2\theta_2} - \dfrac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_2} + \dfrac{n_{01}+n_{11}}{1-\theta_1-\theta_2} = 0 \end{cases}$$

上述兩式我們分別記為(5.19)與(5.20)。

因為上述等式不易求解，故於下一章中，利用模擬觀察值的方式對 MLE 與 MPLE 進行比較。

郭名展(2014)提到當 $n_{00}:n_{01}:n_{10}=\theta:2\theta:3\theta$ 時，MPLE 之解即為 MLE。而在本節例子也有相同的情形，當 $n_{00}:n_{01}:n_{10}=\theta_1:2\theta_2:\theta_2$ 時，可以發現上述等式之解即為 MLE。

6. 針對2×2列聯表中參數為θ_1、$2\theta_2$、θ_2 時 MLE 與 MPLE 之模擬分析與比較

本章針對2×2列聯表內參數分別為θ_1、$2\theta_2$、θ_2的情形，利用 Matlab 程式設計出一套程式，命名為 MPLEmethod.m。我們可以透過此程式模擬觀察值，並計算出參數的 MLE 與 MPLE 以及對應的均方差(MSE)。最後對所獲得的計算結果進行分析比較。

6.1 MLE 與 MPLE 在模擬數據上之計算

為了簡化 MPLEmethod.m 的計算， 5.3 節中的(5.19)與(5.20)可改寫如下：

$$\frac{2n_{00}}{\theta_1}-\frac{2(n_{01}+n_{10})}{\theta_2}+\frac{4n_{11}}{1-\theta_1-3\theta_2}+\frac{n_{00}+n_{01}}{\theta_1+2\theta_2}-\frac{n_{10}+n_{11}}{1-\theta_1-2\theta_2}=0 \tag{5.21}$$

$$\frac{4n_{00}}{\theta_1}-\frac{2(n_{01}+n_{10})}{\theta_2}+\frac{2n_{11}}{1-\theta_1-3\theta_2}-\frac{n_{00}+n_{10}}{\theta_1+\theta_2}+\frac{n_{01}+n_{11}}{1-\theta_1-\theta_2}=0 \tag{5.22}$$

故上述兩式的解仍然是(θ_1,θ_2)的 MPLE。

MPLEmethod.m 分為兩個部分，介紹如下：

第一部分：在給定n值時，利用(5.21) 、(5.22)兩式計算出n_{00}、n_{01}、n_{10}、n_{11}所有可能組合下(θ_1,θ_2)的 MPLE，再將所有的 MPLE 儲存，供第二部分程式讀取使用以減少大量運算時間。

第二部分：在給定(θ_1,θ_2)後，模擬出n_{00}、n_{01}、n_{10}、n_{11}四個觀察值，並將觀察值代入(5.18)以得到(θ_1,θ_2)之 MLE，另外，根據所獲得的觀察值n_{00}、n_{01}、

n_{10}、n_{11}，讀取儲存在第一部分裡的 MPLE。重覆此過程 m 次，最後再分別計算出 m 筆 MLE 與 MPLE 各分量的偏誤、變異數和均方差。

模擬的方式如下：

選定 $n=100$，$m=3000000$。令 $\theta_1=0.1,0.2,\ldots,0.9$，$\theta_2=0.01,0.02,\cdots$，$\theta_2$ 的選取範圍要符合 $\theta_1+3\theta_2<1$。對每一組 (θ_1,θ_2)，由 MPLEmethod.m 可以得到 3000000 筆的 MLE 與 MPLE 以及對應的偏誤、變異數和均方差。詳細程式碼可參考附錄 1。

6.2 MLE 與 MPLE 之比較

本節利用 6.1 節所獲得的計算結果，進行(θ_1,θ_2)的 MLE 和 MPLE 之分析與比較。其內容為：觀察$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$與$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$如何受$(\theta_1,\theta_2)$位置的影響，並且比較 MLE 與 MPLE 的異同。

【定義 6.1】 (θ_1,θ_2)的 MLE$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$與 MPLE$(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$之均方差，定義如下：

$$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))=\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)+\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$$

$$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))=\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)+\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$$

首先，觀察$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$與$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$如何受$(\theta_1,\theta_2)$位置的影響。選定$\theta_1(=0.1,0.2,0.3,0.4)$，以由小變大的方式選取$\theta_2$(從 0.01 開始，以 0.01 為間距，取值到受$\theta_1+3\theta_2<1$限制之上限)，去觀察$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$與$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$的變化情形，可以發現不管是$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$或$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$，其變化趨勢皆是先變大再變小，並在$\theta_2=0.16$的附近會有極大值。但$\theta_1=0.5,0.6,\cdots,0.9$時，$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$與$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$之趨勢僅隨$\theta_2$的變大而變大。僅將部分數據內容以附表 2.1 至附表 2.18 呈現。

上述所觀察到的現象，我們僅以 MLE 解釋如下：

由附表 2.1 至附表 2.9 的數據顯示：$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$之變化主要受$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$影響，而附表 2.19 至附表 2.27 的數據又顯示：$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$主要受$\mathrm{V}ar(\hat{\theta}_2)$影響，因此我們對$\mathrm{V}ar(\hat{\theta}_2)$作進一步的探討。

由(5.18)可以得到θ_2的 MLE 為：

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n_{01}+n_{10}}{3n}$$

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}ar(\hat{\theta}_2) &= \mathrm{V}ar(\frac{n_{01}+n_{10}}{3n}) \\
&= \frac{1}{9n^2}[\mathrm{V}ar(n_{01})+\mathrm{V}ar(n_{10})+2\mathrm{Cov}(n_{01},n_{10})] \\
&= \frac{1}{9n^2}[n\cdot 2\theta_2(1-2\theta_2)+n\cdot\theta_2(1-\theta_2)-2n\cdot 2\theta_2\cdot\theta_2] \\
&= \frac{1}{9n^2}[-9n\theta_2{}^2+3n\theta_2] \\
&= -\frac{1}{n}[(\theta_2-\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36}]
\end{aligned}$$

由上式可以看出當$\theta_2=\frac{1}{6}$時，$\mathrm{V}ar(\hat{\theta}_2)$會有極大值發生，故能解釋為何$\theta_2$取值在 0.16 附近時，$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$皆比較大。而當$\theta_1=0.5,0.6,\cdots,0.9$時，$\theta_2$的選取受到$\theta_1+3\theta_2<1$的限制，最大只能選取到 0.16，故$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$的變化只有遞增情形。在 MPLE 的部分，$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$之變化主要也受$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$影響，而$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$主要也受$\mathrm{V}ar(\tilde{\theta}_2)$影響，但$(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$無法以公式表示，以致無法用上面的方式對$\mathrm{V}ar(\tilde{\theta}_2)$作進一步的探討。

取$\alpha=0.05$，分別建立$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$和$(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$的信賴區間，發現彼此並無交集，故可以知道 MLE 與 MPLE 之間是存在差異的，接著分別計算 MLE、MPLE 與真正值的相對誤差後，發現誤差值皆很小，再由附表 2.37 至附表 2.45 可以觀察出：MLE$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$和 MPLE$(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$與真正參數值皆很接近，故$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$與$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$有相同表現是合理的。

7. 結論

當求最大概似估計有困難時，使用最大擬概似估計是一種替代的方案，我們對二元指數族中的一些常見例子，探討其參數之最大概似估計與最大擬概似估計間的異同。在卜瓦松-二項分配、三項分配與二元常態分配的情況下，推導參數的 MLE 與 MPLE，發現它們皆是相同的。一般來說，MPLE 的推導較 MLE 來得困難許多。對一般的二元指數族，我們也推導出參數的擬概似方程式。

至於 2×2 列聯表的部分，我們考慮三種情況，在各種情況下分別去推導 MLE 與 MPLE，當中兩種情況(5.1 節與 5.2 節)的 MLE 與 MPLE 是相同的，而第三種情況(亦即方格內參數分別為 θ_1、$2\theta_2$、θ_2，見 5.3 節)下，因為擬概似方程式較為複雜，無法以公式呈現出 MPLE (除非樣本觀察值與對應方格內參數成比例)，故針對此第三種情況，設計程式以模擬觀察值的方式求出 (θ_1,θ_2) 的 MLE $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 與 MPLE $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$，並分別計算出 MLE 與 MPLE 的 MSE。當固定 θ_1(θ_1 在 0.1 至 0.4)，θ_2 在允許範圍內 $(0<\theta_2<\frac{1-\theta_1}{3})$ 由小變大的情形下，觀察發現 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 的均方差 $\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ 與 $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$ 的均方差 $\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$ 皆會先變大再變小，且在 $\theta_2=0.16$ 附近時，$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ 與 $\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$ 同時有極大值發生。而固定 θ_1(θ_1 在 0.5 至 0.9)，θ_2 在允許範圍內 $(0<\theta_2<\frac{1-\theta_1}{3})$ 由小變大的情形下，觀察發現 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 的均方差 $\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ 與 $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$ 的均方差 $\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$ 皆慢慢變大。雖然無法求出 $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$ 的公式解，以致於無法直接解釋上述 $\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2))$ 的變化行為，然而透過分析 $\hat{\theta}_2$ 的變異數，我們可以解釋上述 $\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ 的變化行為。透過分別建立 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 和 $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$ 的信賴區間，我們進一步發現兩者並無

交集，故 MLE 與 MPLE 之間存在差異，但 MLE、MPLE 與真正參數值的相對誤差皆很小，進一步顯示這兩者與真正參數值皆很接近，故前述 $\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ 與 $\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ 有相同變化行為是合理的。根據本研究之理論推導與模擬分析，以 MPLE 來取代 MLE 是合理可行的。

參考文獻

Arnold, B. C. and Press, S. J. (1989). “Compatible Conditional Distributions.” *Journal of the American Statistical Association* 84(405): 152-156.

Arnold, B. C. and Strauss, D. (1991). “Pseudolikelihood Estimation: Some Examples.” *Journal of the Indian Journal of Statistics* 53(2): 233-243.

Bickel, P. J. and Doksum, K. A. (1977). “Mathematical Statistics：basic ideas and selected topics.” San Francisco: Holden-Day.

Strauss, D. and Ikeda. M. (1990). “Pseudolikelihood Estimation for Social Networks.” *Journal of the American Association* 85(409):204-212.

郭名展(2014)，2×2 列聯表模型下 MLE 與 MPLE 之比較，國立政治大學應用數學系碩士論文。

附錄 附表

附錄 1

MPLEmethod.m 程式碼

第一部分：

```
clc
clear all
syms x y
W=eval(['load("D:\asd100.mat")']);
data = W.data;
clear W
aaa=0;
for b1=88:97
    b1
    for b2=1:(98-b1)
        disp(b2)
        for b3=1:(99-b1-b2)
            b4=100-b1-b2-b3;
            eq1=4*b2*x^3 - 2*b2*x^2 - 2*b3*x^2 - 2*b2*x^4 + 4*b3*x^3 -
2*b3*x^4 + 4*b1*y^2 - 20*b1*y^3 + 24*b1*y^4 - 23*b1*x*y^2 - 6*b1*x^2*y +
38*b1*x*y^3 + 3*b1*x^3*y + 15*b2*x*y^2 + 16*b2*x^2*y - 18*b2*x*y^3 -
13*b2*x^3*y + 18*b3*x*y^2 + 17*b3*x^2*y - 18*b3*x*y^3 - 13*b3*x^3*y +
6*b4*x*y^2 + 3*b4*x^2*y - 10*b4*x*y^3 - 3*b4*x^3*y + 19*b1*x^2*y^2 -
27*b2*x^2*y^2 - 27*b3*x^2*y^2 - 11*b4*x^2*y^2 + 3*b1*x*y - 3*b2*x*y -
4*b3*x*y;
            eq2=4*b2*x^3 - 2*b2*x^2 - 2*b3*x^2 - 2*b2*x^4 + 4*b3*x^3 -
2*b3*x^4 + 4*b1*y^2 - 16*b1*y^3 + 12*b1*y^4 - 20*b1*x*y^2 - 6*b1*x^2*y +
25*b1*x*y^3 + 3*b1*x^3*y + 9*b2*x*y^2 + 13*b2*x^2*y - 9*b2*x*y^3 -
11*b2*x^3*y + 12*b3*x*y^2 + 14*b3*x^2*y - 9*b3*x*y^3 - 11*b3*x^3*y +
3*b4*x*y^2 + 3*b4*x^2*y - 5*b4*x*y^3 - 3*b4*x^3*y + 16*b1*x^2*y^2 -
18*b2*x^2*y^2 - 18*b3*x^2*y^2 - 8*b4*x^2*y^2 + 3*b1*x*y - 2*b2*x*y -
3*b3*x*y;
            [xi,yi]=solve(eq1,eq2);
            U=eval([xi,yi]);
```

```
                for m=1:size(U,1)
                    if U(m,1)>0 && U(m,2)>0 && (U(m,1)+3*U(m,2))<1
                        aaa=m;
                    end
                end
                data(b1,b2,b3,:)=U(aaa,:);
            end
        end
        eval(['save("D:\asd100.mat","data")']);
end

eval(['save("D:\asd100.mat","data")']);
```

第二部分：

```
clc
clear all

tic;

format long
syms x y

WW=eval(['load("D:\asd100.mat")']);

totali = 3000000;
totalj = 1;    *(totalj的選擇要使s+0.03totalj<1)
totalb = 100;

s=0.2;    *(s的選擇為0.1~0.9)

bi=zeros(totali,4);
H=zeros(totali,2);

for j=1:totalj
    tj=0.01*j;

    j
```

```
for i=1:totali
    disp(i)
    bi(i,:)=histc(randsample(1:4,totalb,'true',[s,2*tj,tj,1-s-3*tj]),1:4);
    while bi(i,1)*bi(i,2)*bi(i,3)*bi(i,4)==0
        bi(i,:)=histc(randsample(1:4,totalb,'true',[s,2*tj,tj,1-s-3*tj]),1:4);
    end
end

b1=bi(:,1);
b2=bi(:,2);
b3=bi(:,3);
b4=bi(:,4);

for i=1:totali
    disp(i)
    H(i,:)=WW.data(b1(i),b2(i),b3(i),:);
end

LH=[bi(:,1)/totalb,(bi(:,2)+bi(:,3))/(3*totalb)];

Mj=mean(H);
Vj=var(H);
LMj=mean(LH);
LVj=var(LH);

Pmean(j,:)=[Mj];
Pvar(j,:)=[Vj];
Lmean(j,:)=[LMj];
Lvar(j,:)=[LVj];

PR=(H(:,1)-s)'*(H(:,1)-s)/totali;
PSj=(H(:,2)-tj)'*(H(:,2)-tj)/totali;
LR=(LH(:,1)-s)'*(LH(:,1)-s)/totali;
LSj=(LH(:,2)-tj)'*(LH(:,2)-tj)/totali;

PRSj=PR+PSj;
Pmse(j,:)=[PR PSj];
```

```
    Pmsesum(j,:)=[PRSj];
    LRSj=LR+LSj;
    Lmse(j,:)=[LR LSj];
    Lmsesum(j,:)=[LRSj];

    kj(j,:)=[tj];

end

Pmean
Pvar
Lmean
Lvar
Pmse
Pmsesum
Lmse
Lmsesum

toc
```

附表 2

MPLEmethod.m 各項計算數據

附表 2.1：$\theta_1 = 0.1$，θ_2 取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^4)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ $(\times 10^4)$
0.1	0.01	8.91509566667924	3.2558344444480	9.24067911112
0.1	0.06	9.00009000001279	16.3620288888839	10.63629288890
0.1	0.11	8.99208066667941	24.5553148148148	11.44761214816
0.1	0.16	8.99031300001273	27.7455611111101	11.76486911112
0.1	0.21	8.99888100001281	25.8995488888884	11.58883588890
0.1	0.26	9.00231400001278	19.0773988888872	10.91005388890
0.1	0.29	8.98934800001273	12.2856011111024	10.21790811112

註：$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) = \mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1) + \mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$

附表 2.2：$\theta_1 = 0.2$，θ_2 取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.2	0.01	1.586237800001	3.2583785185000	1.618821585186
0.2	0.05	1.598698833335	14.0496837037000	1.739195670372
0.2	0.09	1.598720333335	21.9115559259000	1.817835892594
0.2	0.13	1.599289933335	26.4682655556000	1.863972588890
0.2	0.16	1.600043500001	27.7181966667000	1.877225466668
0.2	0.21	1.599773733335	25.9016225926000	1.858789959260
0.2	0.26	1.594331133335	18.8006111111000	1.782337244446

附表 2.3：$\theta_1 = 0.3$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.3	0.01	2.081933166667	3.2599655556000	2.114532822223
0.3	0.05	2.096991000001	14.0360807407000	2.237351807408
0.3	0.09	2.102963933334	21.8991411111000	2.321955344445
0.3	0.13	2.097753200001	26.3922618519000	2.361675818519
0.3	0.16	2.100266566667	27.7438318519000	2.377704885186
0.3	0.19	2.098436733334	27.2097325926000	2.370534059260
0.3	0.23	2.088468266667	23.6335748148000	2.324804014815

附表 2.4：$\theta_1 = 0.4$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.4	0.01	2.382212500000	3.2598462963000	2.414810962963
0.4	0.04	2.396330433334	11.5098003704000	2.511428437037
0.4	0.07	2.398909100000	18.3925733333000	2.582834833334
0.4	0.10	2.397380866667	23.3372192593000	2.630753059260
0.4	0.13	2.399225133334	26.4371125926000	2.663596259260
0.4	0.16	2.400891633334	27.7388466667000	2.678280100000
0.4	0.19	2.391032966667	27.0819600000000	2.661852566667

附表 2.5：$\theta_1 = 0.5$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.5	0.01	2.479935200000	3.2582851852000	2.512518051852
0.5	0.03	2.484678700000	8.7196244444000	2.571874944445
0.5	0.06	2.497233900000	16.3535259259000	2.660769159260
0.5	0.08	2.497331600000	20.2500985185000	2.699832585186
0.5	0.11	2.502226433334	24.5938566667000	2.748165000000
0.5	0.13	2.501112833334	26.4621392593000	2.765734225926
0.5	0.16	2.486750366667	27.5900051852000	2.762650418519

附表 2.6：$\theta_1 = 0.6$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.6	0.01	2.373588100000	3.2541603704000	2.414407237037
0.6	0.03	2.388877266667	8.7357125926000	2.470379359260
0.6	0.05	2.397494800000	14.0559107407000	2.538819707408
0.6	0.07	2.399894333334	18.4005266667000	2.586072766667
0.6	0.09	2.396979266667	21.9147800000000	2.617974033334
0.6	0.11	2.392567100000	24.5705681481000	2.642346681482
0.6	0.13	2.396979266667	26.2743988889000	2.648121388889

附表 2.7：$\theta_1 = 0.7$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.7	0.01	2.085406900001	3.2568777778000	2.117975677778
0.7	0.02	2.069186333334	5.7494744444000	2.126681077778
0.7	0.03	2.078182200001	8.7352518518000	2.165534718519
0.7	0.05	2.093025866667	14.0386674074000	2.233412540741
0.7	0.07	2.099482866667	18.3926407407000	2.283409274075
0.7	0.08	2.098890700001	20.2951274074000	2.301841974075
0.7	0.09	2.080105833334	21.8270548148000	2.298376381482

附表 2.8：$\theta_1 = 0.8$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.8	0.01	1.590652200001	3.2647429630000	1.623299629631
0.8	0.02	1.561348233335	5.7581240741000	1.618929474075
0.8	0.03	1.572956133335	8.7295018518000	1.660251151853
0.8	0.04	1.580343166668	11.5066311111000	1.695409477779
0.8	0.05	1.582002200001	14.0536592593000	1.722538792594
0.8	0.06	1.569800100001	16.2828640741000	1.732628740742

附表 2.9：$\theta_1 = 0.9$，θ_2取不同值時 MLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1)$ $(\times 10^4)$	$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2))$ $(\times 10^4)$
0.9	0.01	8.13348400001302	3.2607662962998	8.45956062964301
0.9	0.02	8.41088833334493	5.7344640740702	8.98433474075195
0.9	0.03	8.76780033334594	8.6455251851729	9.63235285186323

附表 2.10：$\theta_1 = 0.1$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^4)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^4)$
0.1	0.01	8.95428535562282	3.2698567867714	9.28127103430
0.1	0.06	9.05898285030772	16.3928529631726	10.69826814662
0.1	0.11	9.04810721930568	24.6979456359901	11.51790178290
0.1	0.16	9.04257228694369	28.0220296909965	11.84477525604
0.1	0.21	9.05082776934705	26.2642497687732	11.67725274622
0.1	0.26	9.06059780949660	19.3610865283204	10.99670646233
0.1	0.29	9.05826875804457	12.4326245925811	10.30153121730

註：$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)) = \mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1) + \mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$

附表 2.11：$\theta_1 = 0.2$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.2	0.01	1.593914754859	3.2735502751000	1.626650257610
0.2	0.05	1.604012985802	14.0716841437000	1.744729827239
0.2	0.09	1.605115236086	22.0275116001000	1.825390352087
0.2	0.13	1.606027387027	26.7103562850000	1.873130949877
0.2	0.16	1.607160136460	28.0497953210000	1.887658089670
0.2	0.21	1.608501005427	26.2942958311000	1.871443963738
0.2	0.26	1.608089241521	19.0252701015000	1.798341942536

附表 2.12：$\theta_1 = 0.3$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.3	0.01	2.091197095263	3.2755493052000	2.123952588315
0.3	0.05	2.100432315331	14.0602388128000	2.241034703459
0.3	0.09	2.107119405646	22.0221553939000	2.327340959585
0.3	0.13	2.103157324515	26.6489032508000	2.369646357023
0.3	0.16	2.106998815359	28.0776615697000	2.387775431056
0.3	0.19	2.107993041585	27.5759060722000	2.383752102307
0.3	0.23	2.105971507738	23.8854041708000	2.344825549446

附表 2.13：$\theta_1 = 0.4$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.4	0.01	2.391757684694	3.2756355075000	2.424514039768
0.4	0.04	2.398250499374	11.5184721042000	2.513435220415
0.4	0.07	2.400622062333	18.4612316592000	2.585234378924
0.4	0.10	2.399602587237	23.4927725617000	2.634530312855
0.4	0.13	2.402701965772	26.6758878726000	2.669460844497
0.4	0.16	2.407806409211	28.0330507839000	2.688136917051
0.4	0.19	2.404290104161	27.3274530396000	2.677564634557

附表 2.14：$\theta_1 = 0.5$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.5	0.01	2.488809846473	3.2739993201000	2.521549839674
0.5	0.03	2.487936024398	8.7195521915000	2.575131546313
0.5	0.06	2.497994379904	16.3991376647000	2.661985756551
0.5	0.08	2.498008637893	20.3447613339000	2.701456251232
0.5	0.11	2.503608814592	24.7622241090000	2.751231055682
0.5	0.13	2.504630011769	26.6714287297000	2.771344299066
0.5	0.16	2.497287197533	27.7773590862000	2.775060788396

附表 2.15：$\theta_1 = 0.6$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.6	0.01	2.389200183742	3.2698871311000	2.421899055053
0.6	0.03	2.387738681477	8.7354420546000	2.475093102024
0.6	0.05	2.400149834727	14.0793519664000	2.540943354391
0.6	0.07	2.402773246402	18.4625804533000	2.587399050935
0.6	0.09	2.399233676317	22.0138168882000	2.619371845199
0.6	0.11	2.398377603488	24.6951878532000	2.645329482020
0.6	0.13	2.392464692399	26.3968477121000	2.656433169520

附表 2.16：$\theta_1 = 0.7$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.7	0.01	2.090321087941	3.2725949866000	2.123047037806
0.7	0.02	2.076917268285	5.7524635089000	2.134441903375
0.7	0.03	2.085135841038	8.7345091295000	2.172480932333
0.7	0.05	2.096161358723	14.0561347507000	2.236722706231
0.7	0.07	2.100231777933	18.4389113677000	2.284620891611
0.7	0.08	2.099369726662	20.3525794536000	2.302895521198
0.7	0.09	2.081518916513	21.8904362649000	2.300423279162

附表 2.17：$\theta_1 = 0.8$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^3)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^3)$
0.8	0.01	1.592106024595	3.2799065889000	1.624905090484
0.8	0.02	1.569830978602	5.7606403500000	1.627437382102
0.8	0.03	1.581236071994	8.7265984628000	1.668502056622
0.8	0.04	1.585786079167	11.5081055791000	1.700867134958
0.8	0.05	1.584375986618	14.0642775371000	1.725018761989
0.8	0.06	1.570706348727	16.3017797048000	1.733724145775

附表 2.18：$\theta_1 = 0.9$，θ_2取不同值時 MPLE 之均方差

θ_1	θ_2	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_1)$ $(\times 10^4)$	$\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\mathrm{MSE}((\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ $(\times 10^4)$
0.9	0.01	8.19986889362316	3.2742151260503	8.52729040622819
0.9	0.02	8.46934693457774	5.7345584967944	9.04280278425717
0.9	0.03	8.80822798732940	8.6403748374197	9.67226547107137

附表 2.19：$\theta_1 = 0.1$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{13})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.1	0.01	84414072.6841960	2.4116945215601	3.2558344444480
0.1	0.06	12977.6061032	16.3619045668130	16.3620288888839
0.1	0.11	207.3284408	24.5553209266114	24.5553148148148
0.1	0.16	2468.7392725	27.7455456722833	27.7455611111101
0.1	0.21	145.7542828	25.8995560645872	25.8995488888884
0.1	0.26	2.0450473	19.0774052275038	19.0773988888872
0.1	0.29	2158583.2195520	12.2640193669513	12.2856011111024

註：$\text{MSE}(\hat{\theta}_2) = \text{Bias}^2(\hat{\theta}_2) + \text{Var}(\hat{\theta}_2)$

附表 2.20：$\theta_1 = 0.2$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{12})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.2	0.01	8439257.40192536	2.4144535832000	3.2583785185000
0.2	0.05	7467.64828457	14.0489416219000	14.0496837037000
0.2	0.09	55.66818162	21.9115576631000	21.9115559259000
0.2	0.13	2.51398630	26.4682741267000	26.4682655556000
0.2	0.16	25.32326049	27.7182033738000	27.7181966667000
0.2	0.21	29.05210156	25.9016283212000	25.9016225926000
0.2	0.26	667728.67524378	18.7338444882000	18.8006111111000

附表 2.21：$\theta_1 = 0.3$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{11})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.3	0.01	846761.500726647	2.4132048592000	3.2599655556000
0.3	0.05	960.400004802	14.0351250192000	14.0360807407000
0.3	0.09	2.032006206	21.8991463788000	21.8991411111000
0.3	0.13	6.020035626	26.3922646293000	26.3922618519000
0.3	0.16	9.357337791	27.7438317423000	27.7438318519000
0.3	0.19	1.174204446	27.2097404884000	27.2097325926000
0.3	0.23	180472.355973674	23.4531102765000	23.6335748148000

附表 2.22：$\theta_1 = 0.4$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{13})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.4	0.01	84619254.5961657	2.4136545549000	3.2598462963000
0.4	0.04	455068.4463944	11.5052535211000	11.5098003704000
0.4	0.07	446.2240269	18.3925750019000	18.3925733333000
0.4	0.10	1.3120504	23.3372270250000	23.3372192593000
0.4	0.13	158.4039976	26.4371198209000	26.4371125926000
0.4	0.16	21.5763457	27.7388556972000	27.7388466667000
0.4	0.19	888556.6085239	27.0730834583000	27.0819600000000

附表 2.23：$\theta_1 = 0.5$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{11})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.5	0.01	846050.983523118	2.4122350058000	3.2582851852000
0.5	0.03	25690.931229251	8.6939364112000	8.7196244444000
0.5	0.06	224.760276257	16.3533066167000	16.3535259259000
0.5	0.08	9.765831944	20.2500955026000	20.2500985185000
0.5	0.11	5.730490055	24.5938591342000	24.5938566667000
0.5	0.13	1.186419776	26.4621468936000	26.4621392593000
0.5	0.16	25734.878068789	27.5642794953000	27.5900051852000

附表 2.24：$\theta_1 = 0.6$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{12})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.6	0.01	84483300.1943724	2.4093281716000	3.2541603704000
0.6	0.02	2639424.8748817	8.7093212469000	8.7357125926000
0.6	0.03	93868.1092287	14.0549767446000	14.0559107407000
0.6	0.05	1105.7691284	18.4005217426000	18.4005266667000
0.6	0.07	13.4118728	21.9147859638000	21.9147800000000
0.6	0.08	9.3092787	24.5705754076000	24.5705681481000
0.6	0.09	566030.5224593	26.2178045758000	26.2743988889000

附表 2.25：$\theta_1 = 0.7$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^{14})$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.7	0.01	843560390.267033	2.4133181920000	3.2568777778000
0.7	0.02	144467311.877083	5.6050090009000	5.7494744444000
0.7	0.03	25700844.157668	8.7095539108000	8.7352518518000
0.7	0.05	905331.110400	14.0377667556000	14.0386674074000
0.7	0.07	2.022710	18.3926468694000	18.3926407407000
0.7	0.08	58.777804	20.2951341137000	20.2951274074000
0.7	0.09	2171824.433910	21.8248902654000	21.8270548148000

附表 2.26：$\theta_1 = 0.8$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^9)$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.8	0.01	8481.05121514333	2.4166386470000	3.2647429630000
0.8	0.02	1459.85195279737	5.6121407496000	5.7581240741000
0.8	0.03	251.31394412610	8.7043733589000	8.7295018518000
0.8	0.04	46.35217633776	11.5019997273000	11.5066311111000
0.8	0.05	4.69895020178	14.0531940487000	14.0536592593000
0.8	0.06	27.72706014921	16.2800967948000	16.2828640741000

附表 2.27：$\theta_1 = 0.9$，θ_2取不同值時$\hat{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^7)$	$\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.9	0.01	84.6148589232915	2.4146185119100	3.2607662962998
0.9	0.02	14.1414643002900	5.5930512955003	5.7344640740702
0.9	0.03	1.1204937985569	8.6343231251684	8.6455251851729

附表 2.28：$\theta_1 = 0.1$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{12})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.1	0.01	8561651.42541896	2.4136924488079	3.2698567867714
0.1	0.06	1565.67298015	16.3927018600933	16.3928529631726
0.1	0.11	1.43318346	24.6979537253204	24.6979456359901
0.1	0.16	288.56506485	28.0220101751573	28.0220296909965
0.1	0.21	85.75901355	26.2642499476159	26.2642497687732
0.1	0.26	769.81480561	19.3610160005133	19.3610865283204
0.1	0.29	240699.82123141	12.4085587466275	12.4326245925811

註：$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2) = \text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2) + \text{Var}(\tilde{\theta}_2)$

附表 2.29：$\theta_1 = 0.2$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{12})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.2	0.01	8565450.82983585	2.4170059978000	3.2735502751000
0.2	0.05	8926.44328691	14.0707961897000	14.0716841437000
0.2	0.09	237.96954371	22.0274951456000	22.0275116001000
0.2	0.13	22.09038967	26.7103629794000	26.7103562850000
0.2	0.16	5.56084771	28.0498041149000	28.0497953210000
0.2	0.21	75.16273456	26.2942970796000	26.2942958311000
0.2	0.26	698104.73964510	18.9554659459000	19.0252701015000

附表 2.30：$\theta_1 = 0.3$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{13})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.3	0.01	85958700.2971047	2.4159631075000	3.2755493052000
0.3	0.05	113873.3886210	14.0591047653000	14.0602388128000
0.3	0.09	1388.0249558	22.0221488543000	22.0221553939000
0.3	0.13	1.0084144	26.6489121237000	26.6489032508000
0.3	0.16	1202.1249683	28.0776589077000	28.0776615697000
0.3	0.19	1221.9598268	27.5759030446000	27.5759060722000
0.3	0.23	18315025.4898625	23.7022618167000	23.8854041708000

附表 2.31：$\theta_1 = 0.4$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{13})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.4	0.01	85912286.4918442	2.4165134481000	3.2756355075000
0.4	0.04	509058.4619345	11.5133853573000	11.5184721042000
0.4	0.07	1875.4774482	18.4612190582000	18.4612316592000
0.4	0.10	632.7356939	23.4927740653000	23.4927725617000
0.4	0.13	27.5465615	26.6758964890000	26.6758878726000
0.4	0.16	5.1909330	28.0330600764000	28.0330507839000
0.4	0.19	920466.6341181	27.3182574794000	27.3274530396000

附表 2.32：$\theta_1 = 0.5$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{11})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.5	0.01	858948.737457003	2.4150513877000	3.2739993201000
0.5	0.03	27419.964830658	8.6921351241000	8.7195521915000
0.5	0.06	301.570190676	16.3988415608000	16.3991376647000
0.5	0.08	31.586622328	20.3447365288000	20.3447613339000
0.5	0.11	17.483031670	24.7622148800000	24.7622241090000
0.5	0.13	2.963498932	26.6714346567000	26.6714287297000
0.5	0.16	25814.704496136	27.7515536322000	27.7773590862000

附表 2.33：$\theta_1 = 0.6$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{11})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.6	0.01	857706.119634666	2.4121818155000	3.2698871311000
0.6	0.03	28127.428371521	8.7073175287000	8.7354420546000
0.6	0.05	1116.940626332	14.0782397185000	14.0793519664000
0.6	0.07	27.377393327	18.4625592301000	18.4625804533000
0.6	0.09	6.560035536	22.0138176661000	22.0138168882000
0.6	0.11	1.061224461	24.6951950237000	24.6951878532000
0.6	0.13	56383.678833024	26.3404728134000	26.3968477121000

附表 2.34：$\theta_1 = 0.7$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^{13})$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.7	0.01	85636376.2099816	2.4162320299000	3.2725949866000
0.7	0.02	14957849.6191414	5.6028868804000	5.7524635089000
0.7	0.03	2733996.3694693	8.7071720682000	8.7345091295000
0.7	0.05	103332.9347085	14.0551061064000	14.0561347507000
0.7	0.07	51.5687912	18.4389169983000	18.4389113677000
0.7	0.08	9.3335860	20.3525861444000	20.3525794536000
0.7	0.09	217589.8025519	21.8882676630000	21.8904362649000

附表 2.35：$\theta_1 = 0.8$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^9)$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.8	0.01	8606.79101137401	2.4192282941000	3.2799065889000
0.8	0.02	1509.43338493023	5.6096988814000	5.7606403500000
0.8	0.03	265.68143789014	8.7000332190000	8.7265984628000
0.8	0.04	49.86178766822	11.5031232347000	11.5081055791000
0.8	0.05	5.16273873940	14.0637659511000	14.0642775371000
0.8	0.06	27.49482744725	16.2990356551000	16.3017797048000

附表 2.36：$\theta_1 = 0.9$，θ_2取不同值時$\tilde{\theta}_2$之偏誤、變異數和均方差

θ_1	θ_2	$\text{Bias}^2(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^7)$	$\text{Var}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$	$\text{MSE}(\tilde{\theta}_2)$ $(\times 10^5)$
0.9	0.01	85.7771191615827	2.4164447399269	3.2742151260503
0.9	0.02	14.5393518763121	5.5891668410841	5.7345584967944
0.9	0.03	1.1812876752063	8.6285648368567	8.6403748374197

附表 2.37：$\theta_1 = 0.1$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.1	0.01	0.099103350000038	0.012905410000055	0.098469570446259	0.012926029976849
0.1	0.06	0.100008546666680	0.060036024444622	0.100023938079091	0.060039568585774
0.1	0.11	0.100007266666678	0.109995446666707	0.100044971337943	0.109998802843594
0.1	0.16	0.100017403333348	0.159984287777775	0.100058506446175	0.159983012797027
0.1	0.21	0.100025743333349	0.210003817777924	0.100066452570307	0.209990739383738
0.1	0.26	0.100003373333348	0.260000452221990	0.100046037251526	0.259972254463321
0.1	0.29	0.099882226666689	0.289535394444765	0.099932734366184	0.289509388319308

附表 2.38：$\theta_1 = 0.2$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.2	0.01	0.198208940000487	0.012905040000056	0.197688267726407	0.012926679147060
0.2	0.05	0.199925096667115	0.050086415555802	0.199890725913453	0.050094479856514
0.2	0.09	0.199945580000450	0.090007461111286	0.199946457331123	0.090015426261495
0.2	0.13	0.199982020000444	0.129998414444481	0.199992077580765	0.130004700041454
0.2	0.16	0.200006803333781	0.159994967777778	0.200017869205981	0.159997641855027
0.2	0.21	0.199988560000435	0.210005390000145	0.199992077580765	0.209991330355569
0.2	0.26	0.199391840000458	0.259182853333089	0.199425075357521	0.259164473375861

附表 2.39：$\theta_1 = 0.3$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.3	0.01	0.297316216666989	0.012909916666722	0.296957805368736	0.012931871421074
0.3	0.05	0.299890360000335	0.050098000000245	0.299860509821669	0.050106711474838
0.3	0.09	0.299991240000331	0.090004507777951	0.299984376897801	0.090011781447092
0.3	0.13	0.300023293333683	0.129992241111145	0.300012945112016	0.129999682444589
0.3	0.16	0.299986483333677	0.160009673333340	0.299974520285629	0.160010964145969
0.3	0.19	0.300031713333663	0.189996573333331	0.300019627935904	0.189988945770824
0.3	0.23	0.298253273333667	0.228656600000098	0.298264495055546	0.228646669830017

附表 2.40：$\theta_1 = 0.4$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.4	0.01	0.396448463333233	0.012908938888945	0.396264100770390	0.012931079775302
0.4	0.04	0.399686496666524	0.040213323333556	0.399655603750571	0.040225623239480
0.4	0.07	0.400000043333186	0.070006680000201	0.399989483066257	0.070013694807221
0.4	0.10	0.400016326666540	0.100000362222368	0.400000685405959	0.100007954468517
0.4	0.13	0.399999359999867	0.129996020000030	0.399973773237835	0.130001659715683
0.4	0.16	0.399984783333185	0.160001468888891	0.399950714045984	0.160000720481296
0.4	0.19	0.399397849999879	0.189701913333320	0.399379796851952	0.189696608069633

附表 2.41：$\theta_1 = 0.5$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.5	0.01	0.495484986666444	0.012908695555611	0.495478427461470	0.012930782723876
0.5	0.03	0.499131516666630	0.030506862222199	0.499134412600126	0.030523640762648
0.5	0.06	0.499924636666661	0.060047408889067	0.499918115082155	0.060054915406825
0.5	0.08	0.500024313333339	0.080009882222394	0.500008677911117	0.080017772625672
0.5	0.11	0.500004870000017	0.110007570000036	0.499971526027698	0.110013222341574
0.5	0.13	0.500002203333323	0.130003444444478	0.499957553022627	0.130005443802836
0.5	0.16	0.498472503333250	0.159492704444443	0.498442085573238	0.159491918269408

附表 2.42：$\theta_1 = 0.6$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.6	0.01	0.594629796666681	0.012906601111167	0.594800465725245	0.012928662014700
0.6	0.03	0.599049309999976	0.030513753333311	0.599112280093052	0.030530352980302
0.6	0.05	0.599792559999956	0.050096885555801	0.599801325626953	0.050105685411781
0.6	0.07	0.599972209999976	0.070010515555755	0.599956507655529	0.070016546115353
0.6	0.09	0.599967389999961	0.090003662222396	0.599931030179950	0.090008099404630
0.6	0.11	0.599954173333327	0.109996948888926	0.599903927755977	0.109996742355973
0.6	0.13	0.596487853333319	0.129247650000027	0.596452585506251	0.129249109336634

附表 2.43：$\theta_1 = 0.7$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.7	0.01	0.693729376664542	0.012904411111167	0.694073134484923	0.012926369358266
0.7	0.02	0.697301666664362	0.021201945555660	0.697522598202423	0.021223022878737
0.7	0.03	0.698818193330994	0.030506959999977	0.698932616129174	0.030522876311327
0.7	0.05	0.699756033330973	0.050095148889137	0.699762325646112	0.050101652808475
0.7	0.07	0.699965773330943	0.069999857777981	0.699927403115664	0.070002270876289
0.7	0.08	0.699876876664291	0.080000766666835	0.699825409060744	0.080000966104858
0.7	0.09	0.698933723330987	0.089852628889062	0.698882842056348	0.089852490745188

附表 2.44：$\theta_1 = 0.8$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.8	0.01	0.792813066674123	0.012912224444500	0.793312490250174	0.012933733289066
0.8	0.02	0.796926643340882	0.021208243333438	0.797230872835383	0.021228589998710
0.8	0.03	0.798678200007552	0.030501312222199	0.798813170324436	0.030515442953090
0.8	0.04	0.799380130007512	0.040215295555778	0.799409072597553	0.040223297531711
0.8	0.05	0.799509880007522	0.050068548889136	0.799478645649801	0.050071852200658
0.8	0.06	0.797435730007538	0.059833485555734	0.797385466188259	0.059834184357049

附表 2.45：$\theta_1 = 0.9$，θ_2取不同值時 MLE 與 MPLE 之平均數

θ_1	θ_2	Mean$(\hat{\theta}_1)$	Mean$(\hat{\theta}_2)$	Mean$(\tilde{\theta}_1)$	Mean$(\tilde{\theta}_2)$
0.9	0.01	0.891865413328949	0.012908863333388	0.892437347076238	0.012928773107661
0.9	0.02	0.895887203327889	0.021189178888994	0.896137950875444	0.021205792348471
0.9	0.03	0.893229263328590	0.030334737777754	0.893247543872468	0.030343698658014