國　立　新　竹　師　範　學　院
「新竹師院學報」第七期（民國 82 年）：17 ～ 57

幼兒數學知識結構及其發展趨勢之文獻探討

簡楚瑛

壹、前　言

六〇年代時，以布魯納 (Bruner) 等人爲首的學科專家，重新界定了知識在課程中所居之地位。他們把重點放在內存於知識本身的「邏輯秩序」(The Logical Order)，以及構成各種學習領域之特徵的「概念架構」(The Structure Of Concepts) 和「探究的原理」(Principles of inquiry) 之上（黃炳煌，民 79 ，頁 90）。

基本概念之了解乃是走向適當學習轉移之主要通道。布魯納即曾說過：「知識乃是我們所建造而用來賦予經驗中的常規性以意義和結構的一種模式。任何一門知識中具有組織功能的概念，都是爲使經驗更富經濟性和連貫性而創造出來的。我們發明一些諸如物理學中的「力」(Force)，化學中的「化合力」(Bond)，心理學中的「動機」(motive)，以及文學中「體裁」(Style)，無非是爲要達到「理解」此一目的。具有組織功能的基本概念之力量主要是在，它允許我們去了解、甚至於去預測或改變我們所處的世界。此外，它也具有爲我們的經驗提供知識性工具的力量。」因此，他乃認爲：「知識的結構—亦即使某一概念緊跟著另一概念的知識之連貫性和出處——及是教育上應當強調之重點。」(Bruner ，1962 ，P.120 ；黃炳煌，民 79 ，頁 90-91)。

無論是教材之選擇與編撰者或是學科的老師，都必需先了解其所編撰或是任教學科的知識結構，因爲若是對該學科之知識結構缺乏了解，他便無法判定那些教材較爲重要，那些教材較爲次要，那些概念的學習應該放在另外一些概念學習之前，也就無法選擇適當的教材在適當的時機呈現給學生。

本研究乃針對學前階段之數學科目的知識結構——亦即概念結構加以探討。

從許多有關數學知識之結構的著作中歸納出來，學前階段之數學知識大抵可以分成數、量、空間和邏輯關係四方面來談 (Baroody ，1989 ； Ginsburg ，1983 ；簡楚瑛，民 77)。下面即依序分四段加以探討。

貳、數知識結構及其發展趨勢

一、唱數

根據福森和霍爾(Fuson & Hall，1983)的研究主張，數目會因其使用情境的不同，而有不同的意義。他們認爲數目字所應用的情境包括下列的情形：數的順序、計數、基數、測量和序數。

「唱數」通常被稱爲「背誦計數」(Rote Counting)。「背誦計數」可以描述爲孩子最早的「唱數」。對幼兒來說，「唱數」只是一組無意義的口頭吟誦，而且內容是強記的。佛森等人(Fuson、Richards & Briars，1982)的報告中顯示，幼兒學習數序的順序如下：首先是慣常使用數序中的最慣常的部分；其次是按慣常順序的不慣常部分能夠爲一個孩子所經常說出(如5、8，9，11)；最後則是並不具有經常性的部分能夠在不同的機會中說出。另外，佛森和霍爾(1983)對幼兒後期在唱數上的發展表示了意見，他們認爲：對後期的努力來說，「背誦計數」並不是一個很恰當的描述，因爲它常會讓人誤以爲幼兒學習數序的整個過程都只是靠強記而已。事實上，在學習的後半階段中，「規則學習」(Rule Governed)才是學習的中心部分。而十幾的數目字也可以用規則來說明，即是10加上個位數即可。對幼兒來說，他只要學習到上述的規則再加上對於10、20、30、40等十位數的學習，即可從1數到99。

從幼兒數錯數的過程中，我們可以發現幼兒自身在學習時所定的規則。這些錯誤顯示幼兒不僅在模仿成人，同時也在努力建立自己的規則。這些錯誤是邏輯性的，雖然不正確，但是，是幼兒自己抽繹出來的規則。

雖然大部分六歲的幼兒都已經學習到數序的「規則學習」，但是他們許多並沒有了解到10、20、30等十位數的模式與個位數的類似之處。

隨著經驗的增加，幼兒逐漸用比較詳細與彈性的方式來運用他對於數序的心智印象。福森等人指出(Fuson et al., 1982)當幼兒對數愈來愈熟時，幼兒較能指明下一個是那個數。

在四或五歲時，幼兒不再必須從「一」開始來回答有關數序的問題，他一直可以這樣回答到28(Fuwon et al., 1982)。一個較晚發生的能力是敘述某數之前是何數的能力，這與往前數數有關，這部分將在本段最後的部分會再談到。

中產階級的幼兒能從1數到100的年齡範圍是從兩歲到六歲之間。吉爾曼和賈利特(Gelman & Gallistel, 1978)的報告說，他們16個兩歲大的受試者中的15個，能夠由「1，2，3」開始數序，然後以不同的方式繼續下去。許多的報告中說明了，

孩子所能，然後以不同的方式繼續下去。許多的報告中說明了，孩子所能說出數字順序的平均長度由三歲半至四歲的13到五歲半至六歲的51，而在每一個年齡層的情形都有所不同。從四歲半至六歲的孩子所能說出的數序顯示出他們已能了解10、20、30等以外的兩位數是遵照個位數的模式，但是他們仍未解決「十位數」的問題。(Fuson & Richards，1979；Fuson & Mierkiewicz，1980；Fuson、Richards & Briars，1982)。許多二歲到三歲的幼兒可以從一數到二，任何多於二的數量都稱爲三；四歲大的幼兒可能從一數到三十九；但這並不表示幼兒了解計數的原則及數的概念，譬如，他們不見得了解「三這個數字是介於二和四之間」、「三和五之間的間距與一和三之間的間距是相等的」概念(Gelman，Merk，and Merkin，1986)。

漢瑞克森(Hendrickson，1979)所做的研究顯示，剛進小學一年級的孩童約有超過百分之八十的人能正確地數到30，而百分之95則能正確地數到18。貝爾和柏恩(Bell & Burns，1981)在芝加哥附近的小城市做研究，發現五歲的幼兒中有半數能正確地數到30，四分之一能數到30至70之間，四分之一能數到196到201之間，能否正確地數到100，教師的教學因素與幼兒的個別因素同等重要。從上述研究顯示，對中產階級的幼兒來說，只要教師提供適當的練習，六歲的幼兒都能正確地數到100。

二、計數

所謂「計數」(Counting)，根據福森和霍爾(1983)的定義：計數是將數目字依序指定(Pointing)到物體上，而被指定的物體都是「可數之物(Countables)——存在於空間與時間中的物體。在每次正確的計數中，每一個可數之物都是僅與一個數目字連在一起，而每個數目字都有一個指定之物。數目字與可數之物的匹配是要藉著「指定」的活動來完成(Fuson & Hall，1983，頁55)。

根據撒克斯(Saxe)的定義是：

「對應關係的漸進總和」(The Progressive Summation Of Correspondences)，也就是說，每一個計數的字也就是基數，它們所陳述的是在計數順序中的數字與所數對象間的對應關係所成的集合之「基數性」。例如，在一個數目爲8的集合中，數字5即代表了在數前五個對象之「五個對應關係的總和」。這種觀點的意思即是指當一個計數的數字產生之後，它就帶有一基數的意義(Saxe，1979)。

計數活動本身包涵了那些特質或是能力呢？經由一系列的研究，吉爾曼和賈利特(Gelman & Gallistel，1978)指出計數活動包含以下五個原則：

1.「一一對應」原則(The One-To-One Correspondence Principle)：

計數時要點一個、唸一個數目標記；亦即每一個物體應該只有一個數目字與之對

應。

2.「固定數字」原則(The Stable-Order Principle)：

用以計數的數目標記必須每次相同，遵守一定的順序(但不一定要是1，2，3，也可以是a，b，c)。

3.「基數」原則(The Cardinal Principle)：

點到最後一個，其數目標記即爲這堆東西的個數。

4.「抽數」原則(The Abstraction Principle)：

以上三個原則適用於任何可數的項目(無論是實物、想像的事物或物體之間的空間)。

5.「次序無關」原則(The Order-irrelevant Principle)：

每個項目被點到的順序(無論從那一個開始數起)不影響總數。

下面即針對「一對一」原則和「次序無關」原則之內涵及其年齡發展趨勢做進一步的分析；有關「數序」問題，在前面「唱數」部分已談過了，此處不再贅述；有關「基數」原則部，留到後面再談。

1.一一對應原則

當幼兒能夠以正確的順序方式將數目字一一唱出來時，並不一定表示他已具備了計數的能力。換言之，一個三歲大的幼兒或許已能正確地從一數到十，但是他無法算出一個含有三個或是更多個物體之組群所含有的數量來。這表示「計數」是一種複合的概念，幼兒必須將「數目字」與「指出一組群中的每一物體」的能力聯合在一起以創造出「標籤」(Tags)與物體間的一一對應的關係。福森和墨奇微茲(Fuson & Mierkiewicz，1980)指出：在幼兒計算物體的數量時能夠使用指定的方法前需要先了解三種對應關係：

(1)一個數目字與「指定」活動在時間上的對應關係。

(2)「指定」活動與物體在空間上的對應關係。

(3)最後則是數目字與物體之間的對應關係。

計數時可能發生的錯誤則是發生在字與指定活動、指定活動與物體之間的對應關係上。福森和墨奇微茲(1980)則認爲這些錯誤與年紀和物體的特性有關。

波理爾斯和斯格勒(Briars & Seigler，1981)指出「指定」是孩子計數概念中的重要部份。指定活動的「內化」則與年齡有關。福森和墨奇微茲(1980)的研究顯示，三歲的孩子在計數時必須摸著物體，而四、五歲的孩子則只要指著物體即可，其中有些五歲孩子甚至不需指著物體。在後續用相同物體來做對象的研究中，發現大學生只需用固定的目視而不需借用外在的指定動作。同時，該研究顯示，96個三歲到

五歲大的幼兒都能在計數時同時「指定」所數的物體，但是二歲的幼兒就無法進行指定的活動，巴魯帝(Baroody ， 1987)和吉爾曼、賈利特(1978)的研究也得到類似的結果。

2.次序無關原則

吉爾曼和賈利特(1978)將物體能從任何秩序開始來數的原則稱爲「次序無關原則」(The Order-irrelevance)。在他們的實驗中要求幼兒將同一個群體自不同的地方開始從「一」數起，結果發現有三分之二的五歲幼兒能夠做好此項工作；一些幼兒甚至能解釋爲何同一個物體在不同的計數活動中有不同的數目名稱。京思柏格和盧梭(1981)則報告他們的四、五歲的受試者比較能按不同的次序開始數，但是他們較不能預先知道不同次序的計數會導致相同的基數出現。大約只有四分之一的四歲幼兒與五分之二的五歲幼兒能預先知道。對於「次序無關」原則的進一步研究也許並不只是檢視不同次序下計數的結果，而是去檢視孩子是否明瞭此一原則的限制。例如，對基數內容來說「次序無關原則」是正確的，但對序數內容來說該原則就不適用了。因此，關於此一原則的理解至少有兩個關鍵點：理解計數的「次序」並不重要以及其爲何不重要的原因。前者可用經驗來加以驗證(特別是對小組群來說)，而後者則需對計數——基數間之轉換(Count-cardinal Transition)有——高層之概念上的理解。

筆者認爲「計數」除了應包括吉爾曼和賈利特(1978)所提的五個原則外，應該再加一個「不重複、不遺漏」原則。當我們觀察幼兒數東西時，可以發現，有些東西他們重複數了，有的則略過了，比如，他們可能會如圖1(a)的方式數〝1，2，3，......10〞。這表示幼兒並未意識到爲了避免漏掉或重複數過的東西而應有將物體按照順序排列之邏輯的必要性，爲了正確計算數目，就應將物體依順序排列，這並不表示我們要幼兒將物體排成一行的順序關係，而是要在腦海中有如圖1(b)所顯示的順序來。

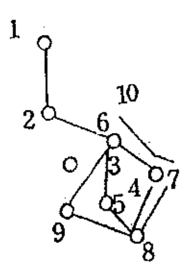


圖1(a) 四歲小孩的數法圖

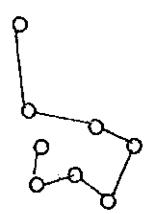


圖1(b) 物體排列的心像圖

幼兒何時具備物體排列之心像圖的能力，則也是一個值得深討的題目。

三、基數

在幼兒學習如何應用計數方法的過程中，重要的一步是幼兒學習到將計數過程中最後的一個數字做爲這一集合的數目。薛佛等人(Schaeffer，Eggleston & Scott 1974)將此稱爲「基數律」，而吉爾曼和賈利特(1978)則稱爲「基數原則」。薛佛等人認爲當幼兒能正確地反應出一個集合中有多少物體時，才算是學習到了「基數律」；而吉爾曼等人則認爲可從下列四種行爲中任一種行爲推論出「基數原則」的存在：

1. 能夠立即以正確的基數對「多少」的問題做反應。
2. 在計數時最後一個字能夠加以強調(如較大聲或較慢的速度)。
3. 在計數時重覆最後一個數字。
4. 對於先前曾數過的對象，在後來問其數目時，能夠不需再數即能正確地講出基數。

當幼兒在被問及「這一群體中有多少物體？」時，如果他的反應是再數一次時，那就表示他仍然未具有「基數」的概念。在幼兒被問及「多少」的問題時，他的實際反應會有兩個階段：一、先是去計數；二、計數中的最後一字被視爲基數而將其說出。例如「五」，幼兒知道就是計數五個物體過程中的最後一個數目字，也就是說幼兒學到一個數目字能同時表示一個集合的名字與計數的結果。例如當我們對幼兒說：「這裡有五顆彈珠，把五顆彈珠放入茶杯中。」不了解基數律的幼兒可能會必須重數一遍彈珠，然後再把彈珠放入茶杯中；而相反地，了解基數律的幼兒就會直接把彈珠放入茶杯中。

在福森和墨奇微茲(1980)的研究中發現：三、四歲的幼兒在同個群體中出現不同的計數結果時，通常都不會注意到有兩個不同的答案出現。而一些五歲的幼兒與所有的高中學生則會注意到不同並再重數一次。這表示福氏等人的研究認爲五歲的幼兒已發展出基數的概念了。京思柏格和盧梭(1981)的研究雖然發現到社經地位與幼兒基數能力之發展間，在四歲半前是呈正相關的，但是在平均年齡四歲八個月時，無論那個階層的幼兒都能展現出對於基數概念的理解。

四、數列(即數的順序)、計數與基數意義的統整

幼兒最初對於數字的使用有三方面，數序的使用(在一順序中說出數字)、計數的使用(在指出物體的同時說出數字)和基數的使用(用單一的數字來稱呼一個物體或更多的物體)。某些幼兒在兩歲時就開始這種對於數字的使用(Durkin，Shire，Riem，Crowther，& Rutter，1986；Wagner & Allace，1982)，在接下來的六年中，這三種對於數字的使用會逐漸關聯在一起。而數序計數和基數間的關係如何，

根據福森等人(1982)的看法是在數序中所說的數目字意義反應了其關係上的改變(見表1)。

在字串(String)的階段只與順序(Sequence)有關，而這順序甚至還沒分化爲分開的數目字。

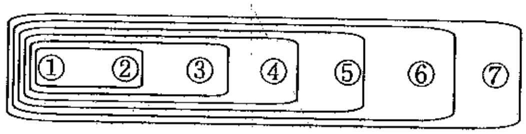
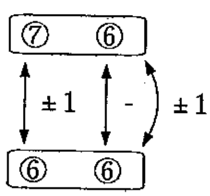
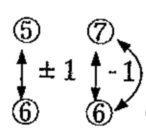
在無法中斷的序列(Unbreakable list)的階段中，順序開始分開爲個別的數目字，之後每個數目字會與一物體配在一起(Steffe，Von Glasersfeld，Richards，& Cobb，1983)。起初，幼兒的計數没有基數的意義，後來會逐漸把所數之物體的最後一個數目字與基數意義關聯在一起(Gelman & Gallistel，1978；Schaeffer，Eggleston & Scott，1974)。雖然他們關於基數律的使用最初僅是一種「最後一字」的反應(Fuson，1988)，但是幼兒很快就學會怎樣去做「計數——基數意義間的轉變」(Fuson，1988；Fuson & Hall，1983)。爲了要數出某一群物體的數目，幼兒必須學會將數字的基數意義轉變爲它同時是所數的最後一數字的計數意義。也就是說幼兒必須學習怎樣做相反的「基數——計數間意義的轉變」(Fuson，1988)。

在可中斷鍊(Breakable Chain)的階段中，幼兒能從任何的數目字開始說出數序。

而在可數鍊(Numerable Chain)的階段，並不是物體本身提供了加、減法的情境，而是幼兒使用數序的本身提出了情境。也許在數數序的過程中聽來很像是早期的數物體，但是在這個階段中，物體不成爲加數，而記載第二個加數的方法必須去使用，以使得最後的總和正確。孩子通常使用聽覺與視覺的模式、或是自己的手指與數兩次(Double Counting)來記得這第二個加數(Fuson，1982；Steffe et al., 1983；Steinberg，1984)。

在最後的雙向鍊／眞正數字上的計數(Bidirectional Chain/Truly Numerical Counting)的階段中，所有數序中的數字都成爲數序中的數目字與一個基數數字(Fuson，1988)。每個數字都意味著到它爲止的所有數目字(包括它自身)。而且其後的數目字都較前一字大了「一」，無論在基數或順序的意義上來說。這種「基數化的數列」(Cardinalized Sequence)合乎了皮亞傑對於可眞正地進行操作之基數的要求。

表1 在數字序列中的發展層級 (Fuson et al., 1982)

序列層級	相關的意義	在不同數目字中序列與關係之內的概念架構	
字串 (String)	序列(sequence)	1234567	數目字未能分開來
無法中斷的序列 (Unbreakable list)	序列	1-2-3-4-5-6-7	數目字已能分開來
	序列－計數	1-2-3-4-5-6-7 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	數字與物體配成對
	序列－計數－基數	1-2-3-4-5-6-7->[7] ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	計算物體後有一基數的結果
可中斷鍊 (Breakable Chain)	序列－計數－基數	4→4-5-6-7→[7] [○] ○ ○ ○	加數在計算總和之中出現，在第一個加數中，原有的計數過程透過基數—計數的轉變而有所簡化。
		[④] [⑤ ⑥ ⑦] 4 [keeping- truck method for the second addend]	數序成爲基數的項目，在第一個加數與第二個加數的呈現方式間有著對應關係。
雙向鍊 (Bidirection Chain) 眞正數字上的計數		  7+6=12+1=13 6+6=12 [⑧ ⑤]→[⑧②③]→[⑩③]→[⑬] 知道每個數字的各種組合方式 ⑤ ①④ ②③ ③② ④①	[n-1] cardinal [n] ordinal  5+7=12 6+6=12

五、序數

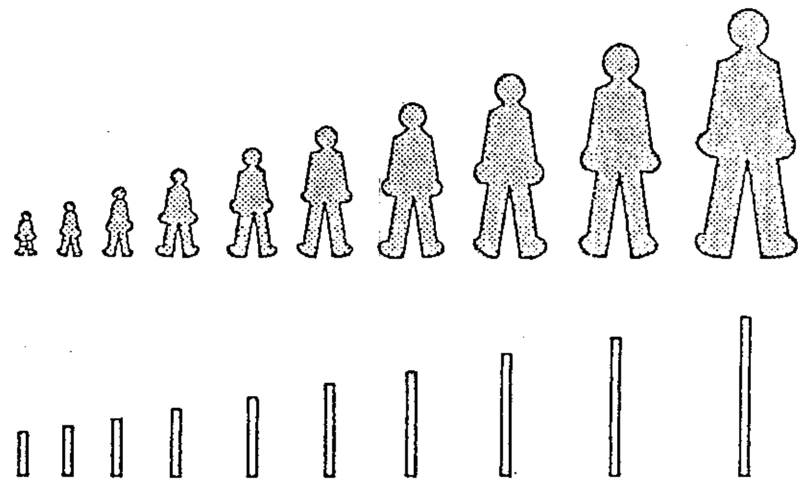
序數通常用以描述一整個已經定義好的集合中某一物相對大小和相對位置。柏林(Beilin，1975)在他研究中發現，在54個樣本中只有一個兩歲和三歲的幼兒能按序說出序數到第五。然而，有57%的五歲孩子、91%六歲幼兒與98%的七歲孩子能數到第五，而同時只有2%、46%的五、六、七歲孩子能數到第廿三，也就是說序數順序的發展較計數順序要晚了許多。爲了了解幼兒對於序數理解與使用的發展情形，我們必須先分析幼兒學習序數概念過程中，包括了那些次概念的學習，以及次概念的發展情況，下面即一一敘述之。目前關於幼兒如何學習到序數之過程的研究還不多，但福森和霍爾(1983)的報告中，將序數的學習分成對於「序列」的理解和對序數內容加以標記兩個次概念來談。

1.序列

序列(Seriation)亦稱排列次序(Ordination)，係指具體運思期兒童處理物體差異時，能按照由大而小或從小至大的次序排列，建立其間不同關係的能力(Piaget & Inhelder，P.101)。序列包括兩方面，其一爲在一序列物體間的內在對應(Intrinsic Correspondence)；其二爲某序列與另一序列物體間的外在對應(Extrinsic Correspondence)或序列對應(Serial Correspondence)，易言之，序列本身即含有對應的關係(Piaget，1965，P.102)。

皮亞傑有關序列的實驗中，較爲簡單者爲「木偶與木杖問題」(Doll-and-Stick Problem)。其程序如下：實驗者先提供兒童十個高度不同的木偶與十枝長度不一的木杖，但後者的長度比前者的高度爲小；繼則告以木偶將外出散步，須作一安排，使每個木偶易於找著屬於自己的木杖(如圖2(a))，若兒童能將木偶與木杖均按大小順序，循相同方向，排成平行的兩列時；實驗者再將木杖散於，顛倒其與木偶對應的位置(如圖2(b))，再度要求兒童找出某個木偶所適用的木杖，在這項試驗中，運思前期兒童與具體運思期兒童的反應，便有不同(Piaget，1965，P.97；王文科，民72，頁256)。

(a)



(b)

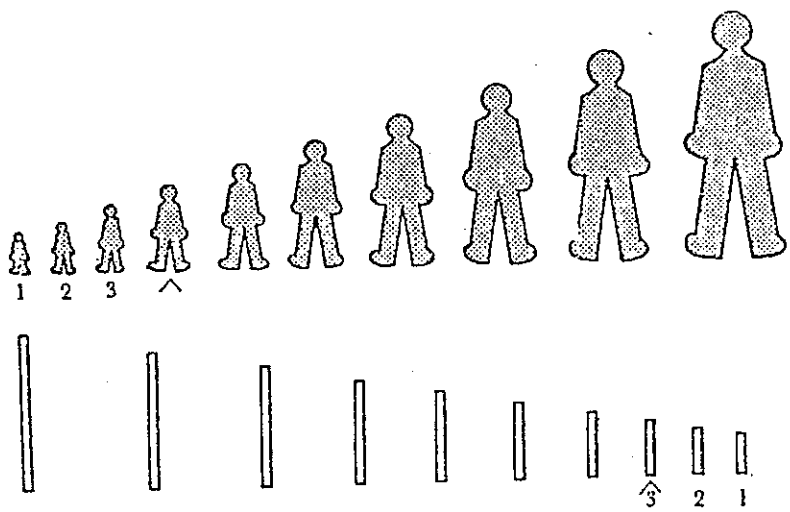


圖2　木偶與木仗問題

資料來源：Phillips(1975), P.103, 105.

皮亞傑認爲運思前期兒童缺乏某元素比後一元素爲小，而比前一元素爲大的結構，亦缺乏遞移性 (Transitivity) 運思能力 (所謂遞移性是指當 C 大於 B ，且 B 大於 A 時，可推論而得 C 大於 A) 。根據皮亞傑的看法是六歲以下的幼兒能夠做好兩兩的比較 (Pair-by-Pair Comparisons) ，但是他們不能將此兩兩比較的結果統合爲一個具有順序的集合，或是把一個比較過程中遺漏的物體插入已排好的集合中。皮亞傑認爲幼

兒之所以不能做好後者的工作是因為幼兒無法同時認為一個物體會比某一物體大而又比另一物體小。按皮亞傑的看法，通常幼兒能如此做的時候是接近具體運思期的開始時候，也就是大約6-8歲的時候。但是某些研究者則認為在「前運思期」的幼兒也有「排序」的能力。如，班那德(Brainerd，1974)指出一種早期的排序能力，他稱之為「被知覺到的序數性」(Perceived Ordinality)：三歲的孩子對於三個按順序排列的物體能夠知覺到。布萊克斯克和金(Blackstock & King，1973)則發現四歲和五歲的幼兒能夠在重新構築一個按順序排列的集合之前就挑選出一個這樣的集合。思構(Siegel，1972)考察了她所說的「連續排序」的概念：她在實驗中提供了未按長短順序排列的幾根棍子，要幼兒指出兩根棍子中那根較短或較長；三根棍子中較短的與中間的是那些；四根棍子中那根最長或是第二短的。結果發現，在廿次的實驗中，三、四、五歲的孩子都能發現那根是較長或較短、最長或是最短。至於三根中那根是中間，與第二短的工作，三歲孩子都無法做到；而四、五歲的孩子最後是能做好挑選中間長度的工作，但只有很少能挑好第二短的工作。研究發現，四至八歲孩子在後兩項工作上呈現的是穩定的進步。

各種序列能力的獲得，與保留能力的獲致一樣，有按照順序而發展的典型年齡。兒童最先獲得的，是排列長度次序的能力，約在七歲左右，相當於具體運思期的開始；其次是重量次序排列的能力(即將同樣大小但重量不同之物體排列的能力)，約在九歲時獲得；至於體積系列的安排能力，須俟十二歲左右始能具備(Piaget，1967，P. 51；王文科，民72，頁256)。

2.將序數內容予以標記

序數的使用和基數是不同的，譬如，用計數來決定序數其所受的限制就與基數不同。第一、序數中的計數必須開始於一特定的起點，而且其順序必須按照序數的內容來進行，直等到所要的物體出現。因此，「次序無關」原則並不適用於序數。同時，序數的計算也不是集合中每個物體都非數不可，只要數到自已想要的序數即可。

幼兒有可能會以序數數字(如第一、第二、第三等)來數，但是在3-6 歲的幼兒身上，我們通常看到幼兒往往是先用基數數字來數，到最後再改以序數數字。(如一、二、三、四，第四，這是第四)。這種「計數——序數的轉變」很明顯地是依附於「知道序數數字」上。

在福森和霍爾(1983)的研究中發現，有許多五歲的幼兒無法回答以序數發問的問題，但是他們卻了解以基數方式來問的同樣問題。柏林(1975)也指出孩子在使用「第二」與「第三」的能力間有很大的差異。五、六、七歲的幼兒在正確指出不同色棒中的第二與第三時百分比分別為33%與8%、63%與33%、82%與58%。在相

同的樣本中，分別有57%　，91%與98%的幼兒能夠數到第五。

與基數一樣，序數間的關係也可以用相同的方式來決定：知覺上的比較、配對與計數。皮亞傑發現，六歲以下的幼兒會將相對位置和絕對位置混淆在一起，幼兒會選擇與某一物體相對的另一集合中的物體而非根據該物在集合中的位置來決定。

此外，皮亞傑也發現幼兒會把在指定物體之前的基數(不包括該物的基數)與它的對應物體的序數混淆在一起，大約在八歲時，幼兒已經將數字的序數與基數的意義統合在一起了。

前面序列中談的是長度、重量和體積裡的相對關係，由於只涉及到序列和標記的問題，因此未提包括更多次概念要素之「數量的多少」或是「數字的大小」的問題。下面即略述這一部分的內涵！

3.數量之多少或是數字之大小的比較

根據巴魯蒂(Braoody，1987)的報告指出：數量多少和數字大小的比較需要四種能力的統整：唱數、計數、基數和序數四種能力的統整。對幼兒來說，數目字並不表示相對的大小或多與少，是到了最後才學習到數目的順序原來與大小有關。也許非常小的幼兒就能大概分清10　與1的大小，因爲10在順序中較1出現的早了許多。但只有在接近五歲時左右，幼兒才能分清鄰近數目字的大小。

大約在三歲時，幼兒會發現，較高的數目字是與較大的數連在一起的(Wagner & Walters，1982)，他們會了解2在順序上不僅是在1之後，而且在量上面也較1爲大。大約在三歲半時，幼兒會了解3比2大(Schaeffer et al., 1974)。大概在四歲時，幼兒會發現一個通則，在順序中較後出現的數目字就是比較前出現的數目字爲多的數。甚至在幼兒還未進入學校之前，他們就已知道兩個在數列中，相距甚遠的數間的大小(如3與9，2與8)(Resnick，1983)。當「就在其後」的關係逐漸熟稔時，幼兒較能做出精確的比較(相鄰兩數)。事實上，大部分的幼兒在五歲時，都已能做出5以下甚或10的比較。

潤絲尼克(Resnick，1983)指出，大部分幼兒在他們五、六歲之時，已經建構了一套數字的表徵，這種表徵可以稱之爲「心理數字線」。也就是說，每個數字都與線上的某一位置相對應，而個別位置的連接則以「接續」(Successor Or Next)的方式相連接，然後方向的標誌則用以指明線上的較後位置是較大的數(見圖3)。心理數字線具有計數與比較的功能，有許多的數學問題可因此獲得解決。

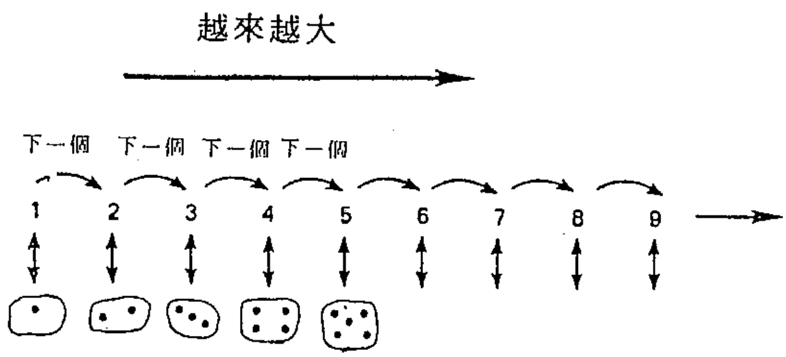


圖3　「心理數字線」圖

許多研究(Schaeffer，Eggleston & Scott，1974；Sekuler & Mierkiewicz，1977；Siegler & Robinson，1982)認爲幼兒在五歲或之能夠正確地進行大小比較的工作——至少對較小的數目可以。

由五歲幼兒在比較兩個較接近的數字要花較長的時間看來，他們的比較是直接從兩個數所在的位置進行比較。我們可以再將六歲幼兒的「心理數字線」再加上兩個其他的特點：(1)沿著方向記號一直下去的位置是較大的數；(2)能直接進入一個數字的位置表徵中，而不用再去數它。這兩項特點在非正式的數學(Informal Arithmetic)中都佔有重要的角色。

「心理數字線」可以藉著計數的運算來建立數量，並且也可以直接進行數量的比較。藉著計數與比較，幼兒可以解決不少的數量問題。京思柏格(Ginsburg，1977)認爲許多學前幼兒所進行的數學運算都是基於計數的基礎上來進行的。如加法就是先建構一個與加數相同的集合，然後將此加數集合與原來集合聯合在一起：(1)先數出一個與較大數目相合的集合；(2)再從此一集合中數出所指定的減數的集合；(3)再數原有集合中還有多少數目的物體是剩下的。

除了前述的「往前數」(Forward Counting)之外，還有「往後數」，這意味著「心理數字線」上各數的連接也可視爲「往後數——下一個」「Backward-nxt」(見圖4)　。關於「往後數」的表現是以從較大的數往下數來進行減法。

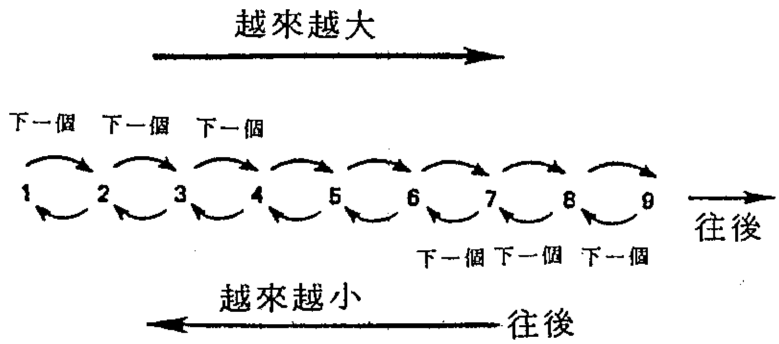


圖4　「心理數字線」圖

參、量知識結構及其發展趨勢

一､測量

測量的本質是近似質。卡本特和奧斯本(Carpenter & Osborne，1976) 認爲學校教材裡所教的測量是十分精確的測量，這情形使得教材中的世界與眞實的世界中有段差距，如此可能會影響到學生對於測量系統的理解。事實上，對實際的測量情境來說，測量「量」必須有其上限與下限，而且在此範圍内進行估計。測量中知覺的實在性(Preceptual Reality)總是與概算和錯誤有關。

皮亞傑的研究工作對我們在探討幼兒測量概念發展的時候提供了重要的貢獻。皮亞傑認爲在測量過程中，有兩個基本的運作，一是保留性(Conservation)，一是遞移性(Transitivity)。

1.保留性：

保留性的觀念與一情境中某些重要方面的「不變性」(Invariance)有關，這種對於不變性的了解是發展測量概念過程中的基本要素。

2.遞移性：

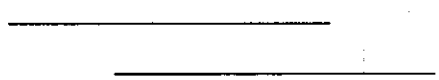
假如有座塔擺在幼兒面前，我們要求幼兒在另一不同高的層級上再建一座與此塔同高的塔，我們提供給幼兒的是一些磚和與塔高同長度的棍子。假如幼兒能由原塔的高度等於棍子長度與棍子長度等於另一塔的高度，推算出來兩座塔的高度是相等的，那幼兒就算已學到了「遞移性」。因爲他已能用中介物來進行比較。

關於幼兒測量觀念之發展的研究，大部分都來自皮亞傑的研究，並且測量的項目

也大多與空間中的度量(如長度)有關。根據皮氏等人的研究指出，測量概念的發展可分成如下的五個階段(Piaget ，Inhelder And Szeminska ，1960)

1.最初階段：

在幼兒學校(Infant School)一、二歲之前的小孩子並沒有表現出保留概念的能力。他的判斷主要來自於單一的知覺特點。如，幼兒對下圖的判斷就是這兩條線並不相等，因爲它們的終點並沒有對齊。



而面積與體積的判斷則是以物體的長度爲標準，如「它比較大，因爲它比較長」。在這階段的幼兒無法予測量工具以任何測量意義。他也缺乏保留性與遞移性的概念。

2.第二階段：保留與遞移概念開始出現。

這一階段的孩子開始以他自己身上的手臂或肩膀等肢體來作爲大概的測量工具，如「手臂長」、「肩膀寬」等。這一階段通常發生於六至七歲左右。這階段的幼兒仍不曉得測量單位必須相等。

3.第三階段：保留概念與遞移概念的成形。

這一階段大約在七、八歲左右到達。當孩子可以用棍子或手指、鉛筆所畫的線等中介物來畫出與原先物體同長的物體時，就表示他已進入了此一階段。幼兒也能開始了解二度平面，如面積的測量，並且開始有物質保留的概念。他能統合自己所看到的兩個不同的角度並因而作出正確的判斷。

4.第四階段：對於較小測量單位的理解。

大概八歲至十歲左右的幼兒能夠理解到當他去測量某一物時，測量結果是由一些較小的測量單位所組成的。測是的過程對幼兒來說，一直都是嘗試錯誤的過程，但是現在幼兒會用較精密的方法進行測量。皮亞傑認爲此一階段的幼兒已發展了線段、面積與容量的概念，但是體積的概念則仍要稍晚才能發生。

5.測量概念發展的最後階段。

要等到皮亞傑所說的形式運作期開始時，幼兒的測量概念才算得到完全的發展。皮亞傑認爲此一階段大概是在11 、12歲左右。

皮亞傑認爲長度與面積的概念是最先發展的，大約是在幼兒6 、7歲時。接下來，孩童分別開始在7 、8歲與9 、10歲時產生質量保留與重量保留的概念。至於體積保留的概念則要等到11 、12歲時才有所發展。不過卡本特和奧斯本(1976)對長度與面積的概念是否同時發生，抱持著質疑的態度。

而福哥門(Fogelman，1970)的研究則在肯定重量保留概念開始於9、10歲的同時，仍有25%的十一歲孩子與15%的十二歲孩子沒有重量保留的概念。

在測量時，除了上述皮氏所提的保留性和遞移性兩要素外，另外福森和霍爾(Fuson & Hall，1983)所提之「單位」(Unit)的概念和「估計」也是二個很重要的要素。

1.單位

在測量之時，孩子必須先注意到測量的對象，然後把所欲測量的向度與其他向度分別出來。因此在測量時，孩子必須先把欲測量的向度分成或創造出許多單位(Units)。這種劃分單位的過程，必須牽涉到「在單位後加上物體的名稱」(Filling Units)或「用單位來包括測量的對象」(Covering With Units)。在Filling Units方面，每個孩子都必須學到兩方面：所有欲測量的物體都必須「用完」(知道每一物體都有一單位)；和每一測量的單位都必須被「塡滿」(每一單位都有物體爲其對象)。明顯地，許多一年級的美國學生與蘇俄學生都知道前者，但是對於後者卻不知(Carpenter，1976；Gal'perin & Georgiev，1969)。在做完Fillingunits或Covering With Units的工作後，幼兒必須數這些單位，並且做一個計數——測量間的轉移(Count-measuretransition)，也就是將數目字之計數意義轉向至測量意義。

對幼兒來說，在他們把單位放在每一次計數結果之後是不容易的工作。對那些剛學「單位替換」(Unit Placement)工作的孩子來說，當計數脫離整個過程之時，他們可能會遺失掉計數的結果。

對幼兒來說，更有效的使用測量程序是使用一帶有數目字的單位尺度(Scale)，幼兒必須學習各種不同的「尺度」：量杯、溫度計、重量計、時鐘等。而每種「尺度」都有不同的測量方法。在1977～1978年的NAEP的數學研究報告(National Assessment Of Educational Progress)中發現，有77%的九歲孩童與40%的13歲孩童在看到自量尺上「1」處開始而終於「5」處的線段，會認爲該段線段長度爲「5」而不是「4」(Carpenter，Corbitt，Kenper，Lindquist & Reys，1981)。這種反應顯示這些孩童還未把測量的基本觀念當成構成線段的單位數字來使用。至於在間接的「尺度」方面(如溫度、體積等)，這些測量結果的獲得則必須仰賴其他的「尺度」或是「公式」的計算來獲得。孩童必須學習到如何使用這些公式。

許多研究顯示：五歲幼兒與小學一、二年級的孩童，當他們被給予了兩個物體的測量數字時，能夠很明顯地使用這些文字來決定這兩個物體是否是相等的。更進一步地說，測量數字的出現，使孩童有著較沒有測量數字的情境更爲正確的反應，也使得他的保留性判斷更具有普遍性(Bearison，1969；Carpenter，1975；Carpenter

& Lewis，1976；Hiebert，1979；Inhelder，Sinclair & Bovet，1974；Kingsley & Hall，1967)。

然而，事實上，一些研究也顯示了幼兒也許一直都只把測量字詞當成基數字詞來看待(也就是說他們忽略了伴隨在每個數目字後的單位)。當兩個物體間的對待或次序關係在最初時透過知覺的方式建立起來之後，然後又以不同大小的單位予以測量，孩子的反應是傾向於最後的測量數字而非那最初建立的關係(Carpenter，1975；Hiebert，1979)。舉例來說，當等量的水以不同的單位來測量時，一杯水的測量結果是5，而另一個則是3，那幼兒通常會回答第一個杯中的水較多。類似的結果也發生於不對等的關係中。在此，對幼兒來說，就有一種新的「相同」的問題產生了：兩個測量數字只有在具有相同單位時，才有相同的測量意義。幼兒需要建立一個更複雜的規則：相同單位和相同測量數字才是相同的測量。甚且幼兒必須學習上述規則的逆規則。卡本特和里維茲(1976)認為一～二年級的幼兒都知道這個逆規則，但是當他們面臨物體的外在特徵與測量結果有所不同時，他們就不知去使用這個規則。

在幼兒能自發地去使用測量數字之前，他們就已有能力有效地使用測量數字了。幼兒保留概念的獲得，有部分是來自於日常經驗中對於測量程序的使用。從另一方面來說，對於保留觀念的理解也可能是來自於對於單位概念的內在推理；而非外在的測量行動；或是透過數字情境中的保留概念的一般化規則來獲得保留概念的理解。正如班納德(Brainerd，1979)所說的，有不同的方法可以達到對於保留概念的理解，而且這些方法在各個幼兒的身上都有所不同。

測量數字與基數數字間的關係

測量數字與基數數字相同的地方在於他們都用以描述集合中「單位的數字性」(The Numerousness Of The Units)。在美國的托兒所(Preschool)和小學中的課程在開始時都特別強調基數數字，然後才以次要方式轉到測旺數字的考量上。他們都強調去數個別的物體，然後計算的引入也是與具體的物體有關。即使當一個測量模式如數線被引入課程中時，它也是使用一種「基數化」的方式。例如四就是四個蛙跳而不是四個單位的長度。因此，對美國的孩子來說，一個測量數字看來只是「特殊的」、帶有某些單位的「基數」。一些蘇俄的教育心理學者就主張(Davydov，1975，1982；Gal'perin & Georgiev，1969；Minskaya，1975)，孩子應該趁早開始學習數字的最廣義的意義，而不是只基於具體物體的基礎上把數字當成自然數來學習，數的概念應從自然數拓展到分數與小數。蓋爾潘和喬治弗(Gal'perin & Georgiev，1969)的研究顯示，在早期課程中，當幼兒用不同的非標準或標準的單位來測量物體

時，可以避免幼兒在理解測量意義時所犯下的錯誤，並且也為理解基數的關係與操作立下了良好的基礎。尤其是幼兒應該了解，單位應該是一集合(Aggregate)，而非個別的物體。如前述的，卡本特(1971，1975)與赫柏特(1979)就在美國小學一、二年級幼兒的身上發現這種對於測量的「整體性」(Fullness)與「大小」的忽視。蒙古美瑞(Montgomery，1973)則發現，對二、三年級的孩童來說，只要經過九天的教導，就可以知道測量單位的重要性。

了解我們記數系統的測量基礎對幼兒來說是件非常困難的事情。安德伍(Underwood，197)認為，從將「十」視為是十個個別物體所成的集合到將「十個一」視為是一單一的單位，這是非常困難的。通常二年級或之後的與兒童的數字系統觀念都還是基數的意義，而非基於十進位的測量基礎。

2.估計

要產生測量的結果，「估計」也是一種重要的方法。我們所擁有的許多數值資料都不是精確的。大概的數值對我們來說有時就已足夠，甚至在某些環境下更是為我們所需要的。例如在計算城市人口的時候，估計數有時更為我們所常用。

估算能力雖有其重要性，但是對於數值估算的研究，特別是關於幼兒如何獲得和使用估算能力的研究，仍是相當地少。估計可分為兩類，一類是直接的，另一類則是間接的，前者所牽涉的數值資料來源只有欲估算的對象本身。麥德勒和薛波(Mandler & Schebo，1980)所估的研究顯示，在0.2秒的呈現時間內，成人能夠用心算(Mental Counting)的方法數出4，5，6的數目，但對於較大的數目則採用了估計的方法。當數目字為7的時候，精確為30%，但在數字為11的時候，精確的程度則降到5%以下。直接估算與數值資料有關，而這些數值資料也是來自整個空間和物體排列的密度。舉例來說，普林格(Pringle，1980)認為，當處於不同空間與不同密度的同類物體需要作相對的計數時，一種「常態化的過程」(Normalizing)就發生了；也就是說其中一類的物體被轉化與其他類物體在空間上相同或密度上相同，而可以在其中一個向度上加以比較。

在日常生活中，間接的做算較直接的估算更為普遍，間接估算與估計對象之外的數值資料有關。絲葛等人(Siegel，Goldsmith & Madson，1980)，已經區分了兩種間接估算的程序：一種是「水準基標」(Bench Mark)的使用，也就是藉由一些已知的群體與估算對象的相似性來進行估算。「水準基標」的使用通常運用於長度與大小的估計，也與估算者過去的記憶有關。第二種間接估算的程序則名之為「分析——重組」，它是先將要估算的群體分成幾個子集合，而這些子集合是可以使用「水準基標」等其他方法去決定數目的；然後再將這些子集合重新組合起來。卡爾和瓦拉克

Klahr & Wallace ，1973) 曾經討論過這種估算的程序，並且指出它主要是一種測量的程序。「分析——重組」的過程顯然比「水準基標」的程序更為複雜。

絲葛等人 (1980) 的研究也告訴我們，對於具有較大數目的集合的估算 (超過 100)，事實上對成人來說也是相當困難的，更何況是幼兒 (尤其是小學的孩子)，當他們在面臨較大數目的群體時，常會放棄估算或是亂猜。在絲葛的研究中顯示幼兒對於小群體的估算 (採用「水準基標」) 最早由八歲開始。

對於數目的估算顯然是需要不同種類的經驗。年紀小的幼兒也許缺乏經驗，所以他們的估算能力也許相當弱。估算能力的知識與技能在小學的中後期會逐漸獲得，並且隨著經驗的成長，即使在成人時期，估算能力也會獲得成長。

二時間

「說出時間」與「時間的概念」間是有區別的。拉維爾 (Lovell ，1966) 認為幼兒能說出時間並不表示他就有時間的概念。例如現在時間是十點鐘，而他也知道用餐時間是十二點，但是他卻說不出現在是用餐時間之前還是之後。事實上，卡斯拉克 (Kerslake ，1975) 就指出一個教學的目的只在教幼兒說出時間的教學活動，往往會對幼兒的時間觀念產生影響。如當教師快速地轉動時鐘臂，要幼兒說出幾點鐘時，幼兒對於時間的觀念可能因而受到扭曲。

幼兒對於時間觀念的理解是如何發展的？皮亞傑 (1969) 認為幼兒要獲得時間的觀念，必須先掌握到兩個重要的事實：*1.* 一連串事件的發生是依時間的順序 (Order) 而發生的；*2.* 在兩個事件之間有間隔的存在，而間隔是具有時間的「持續性」(Duration) 的。愛迷絲 (Ames ，1946) 曾針對了美國「較高智力」(Superior Intelligence) 的幼兒的時間概念的發展作了研究。雖然愛迷絲所採的樣本是屬於「較高智力」的，結果並不適於那些智力較低的孩的子，但是她的研究結果仍顯示了一定的發展程序。

1. 18 個月大的幼兒，對於過去或未來均很少能感受到，他不能等候，「現在」是他唯一的時間名詞。
2. 21 個月大的幼兒，他的主要時間名詞仍是「現在」，不過他對未來也開始有些印象，他可以對「過一會兒」(in a minute) 有所反應而能夠等待。
3. 24 個月大的幼兒，雖然仍是以「現在」為主，但「未來」的時間名詞也成了他的語彙的一部分，如「等一下」、「快了」等。同時他也有了不同的字來表示現在，如「現在」、「今天」等。他並未開始用特殊的字來表示「過去」，但是已經開始

用不正確的動詞過去式。這一階段的幼兒仍不能回答與時間概念有關的問題，但是他已能了解成人所做的承諾，如「喝完果汁再玩黏土」。

4. 30 個月大的幼兒，雖然他的時間字彙仍然非常有限，但是他已具有對於現在、未來、過去等不同時態的不同字彙。如他能說出更精細的時間名詞「上午」、「下午」等。但在過去方面，他所能用的字彙則較未來爲少。

5. 30 至 36 個月大的幼兒在時間語彙上的進步較前面任何一段時間間隔都大。大部分基本的時間語彙此時都已進入了孩子的字彙中。而「延續性」的語彙如「所有的時間」、「整天」、「有二個星期」此時也成爲幼兒的時間語彙。幼兒有「說出時間」的表現，但卻常用錯字。他們更常用到「時間」這個字，無論是單獨的或與其他字在一起。這一階段的幼兒也能回答一些關於時間觀念的問題，如「他多大？」「他什麼時間去睡覺？」「他明天要作些什麼？」等問題。

6. 42 個月大的幼兒，無論在過去或未來時態的使用上都是非常正確的。不過孩子有時會在過去時態中使用未來式。

7. 48 個月的時候，過去式、現在式與未來式都同等而自由的使用。而一些較廣泛的時間名詞，如「明年夏天」、「去年夏天」等也都能正確地使用。

8. 五歲大的時候，幼兒能說出今天是幾號，或以正確的順序說出星期幾，能說出在星期天之後是星期幾。

9. 六歲大的時候，幼兒開始理解什麼是四季，並且對於時間的持續性 (Duration) 有著進一步的了解。

10. 七歲時，幼兒能說出四季，月份；至於什麼是年，他仍然不清楚。

11. 八歲時，幼兒不只能說出現在是什麼時候，他也能說出今年是那一年，今天是月中的那一天。他開始對「什麼是時間？」這類較一般性的問題有所理解。

在愛迷絲 (1946) 的樣本中，她發現 4 歲的幼兒就能說出現在是上午或下午。而布萊德里 (Bradley ， 1948) 在一個更具代表性的樣本中，則發現平均要到六歲才能分出上午或下午。布萊德里則發現在使用星期、月、年等字眼上，要等到八歲左右才能完成。不過拉維爾 (1966) 認爲，在愛迷絲的研究中，「孩子對字的使用，並不意味著他對此字已有所掌握。」值得注意的是，即使在愛迷絲的研究中，大部分的幼兒要到了七歲左右，他才能說出時間。

而要求幼兒看錶或鐘來說出時間時，哈里斯 (Harris ， 1981) 認爲從數字錶、鐘上看並講出時間，對幼兒來說要比從傳統指針式而無數字手錶或鐘來得容易。根據格尼斯 (Greenes ， 1979) 的看法，幼兒在根據傳統手錶講出時間時，所常遭遇的困難是來自於幼兒「空間能力」之不足。特別是當他在分辨方向如左右、上下等方面仍有

困難時，他就不容易分清楚6和9，三點和九點，11點45分和12點15分有何不同。卡拉克(Kerslake，1975)認爲最好將「看錶」與幼兒日常生活中有意義的事件連結在一起，例如史賓格(Springer，1952)就發現，50%的五歲幼兒和84%的六歲幼兒能正確的回答：「你什麼時候放學？」的問題；而愛迷絲(1946)的幼兒則在五、六歲時就對他們何時起床、上學、吃飯、睡覺作出回答。

三金錢

貨幣(或稱爲金錢)體系與其他的測量體系有許多相同之處，但也有不同處。吉甫生(Gibson，1981)指出了三種在金錢處理上的知覺與數學技能：

1. 對於錢幣的認識。
2. 對等關係(Equivalence)。
3. 實際的情境。

1. 對於錢幣的認識方面：

加瑞(Gary，1981)的研究中發現幼兒在認識錢幣前就應已經對於書寫的數字感到熟悉了。吉甫生(1981)的研究中發現，平均能力(Average Ability)之六至七歲的孩子能夠辨識出通用的硬幣和紙幣，而五至六歲的幼兒則無此能力；不過吉甫生的樣本非常小，有一些六歲以下的幼兒也具有此能力，這可能是因爲他們常有使用錢的經驗(Dickson et al., 1984)。

2. 對等關係：

這與對錢幣之相對價值的理解有關，也牽涉到了對於數目字系統的掌握，特別是1，5，10，100等數字的關係。

錢幣的衡量必須基於下列價值來看：

(1)它的相對價值(即5元較1元多，但較10元少)。

(2)它的單位價值(10元等於10個1元)。

(3)其他的對等關係(如10元等2個5元等)。

因此，對於對等關係的了解牽涉到了許多關於數的基本觀念，如保留、計數、順序(Ordering)、加法、加倍、減半和數字間的連結等。所以泰爾和梅格斯(Thyer & Maggs，1971)就指出金錢是一個較困難的概念，在幼兒太小時，錢是不適宜當作數的「中介」教給幼兒的。

3. 實際的情境：

實際地處理問題可以幫助幼兒應付實際生活中的買賣情形，也有可能增加幼兒對

於基本數字關係的掌握。吉甫生(1981)指出，一般七至八歲的幼兒能夠回答日常生活中的「購物問題」(錢的數目在50分以下)，但六至七歲的幼兒則一般無此能力。

肆、空間知識結構及其發展趨勢

普拉凱特(Plunkett，1979，L. Dikson et al., 1984)認爲與數學教學有關的空間事物有兩個基本類型：

一與眞實世界有關的空間事物：我們周遭的物理世界。

二與眞實世界之表徵有關的事物，又可分兩類：

1. 圖形(Pictures)：表達空間概念的空間式方法。此種方法是以平面的圖形來代表三度空間的立體事物。
2. 圖示(Diagrams)：表達非空間概念的空間式方法，如用數線代表數的順序。

凡赫里(Van Hiele)在其空間發展理論中提出了空間概念之發展的五個階段(Dikson et al., 1984. P.18-19)：

一形狀(Figures)被區分出來是因爲它們個別的形狀，而不是不同形狀間的關係。例如，一個六歲的幼兒能夠利用方法做出正方形、菱形、長方形與平行四邊形，並且記得它們的名字；但是他們卻無法將正方形視作是一種特別的菱形，或是把菱形視作特別的平行四邊形。對幼兒來說，這些都是不同的圖形。

二第二個階段是幼兒開始知覺到這些圖形的組成部分，如：角、線、邊等部份，這些特點是來自於幼兒自身的經驗，如測量、畫畫、做模形等。

三幼兒開始可以在引導下弄清楚關係與定義，譬如：正方形是長方形的一個特例；而長方形又是平行四邊形的一個特例。透過實際的實驗與推理，邏輯關係開始獲得建立。

四第四與第五個階段則是與演繹式推理(Deductive Reasoning)與完全抽離具體解釋的理論建構(Theory Construction)有關。第五階段由於較少的幼兒能夠達到，在此不做深入的敘述。

由於第三至第五階段都超過幼兒階段，因此以下即分述第一和第二階段的活動：

一階段一的活動：形狀的辨識(Shape Recognition)

在階段一時，教學活動應該著重於個別形狀的辨識、提出與命名，目的在爲日後

的發展打下基礎。

福森和墨瑞(Fuson & Murray，1978)以二至七歲的幼兒為對象，研究他們根據觸摸來辨識物體形狀的能力。結果發現，三歲半的幼兒大部分都能正確地辨識出形狀來，圓形是最容易的，然後是正方形、三角形與菱形。研究者認為是三角形的斜邊部分使得它的辨識較正方形更為困難，而菱形的左右、上下半邊都是相同的也使得它的辨識最為困難。而畫出形狀方面，以準確度來論，次序仍是圓形、正方形、三角形與菱形。即使用最鬆的標準來看，只有五歲的孩子能正確地畫出三角形與菱形。若以嚴格的標準來看，甚至到了六歲半的時候，都還只有不到百分之二十的孩子能正確確地畫出三個直線邊。

諾爾丁(Noelting，1979)也做了類似前者的研究，不過所包括的形狀較前者更多，圖5即是他部分的研究成果。渥得(Ward，1979)對十歲的孩子做研究，發現孩子能正確地叫出形狀的仍以正方形、長方形最多，其次是三角形，最少的是五邊形。然而其中可能的因素，是由於幼兒對這些形狀熟不熟悉的緣故，而不是與幼兒的空間思考能力有關。

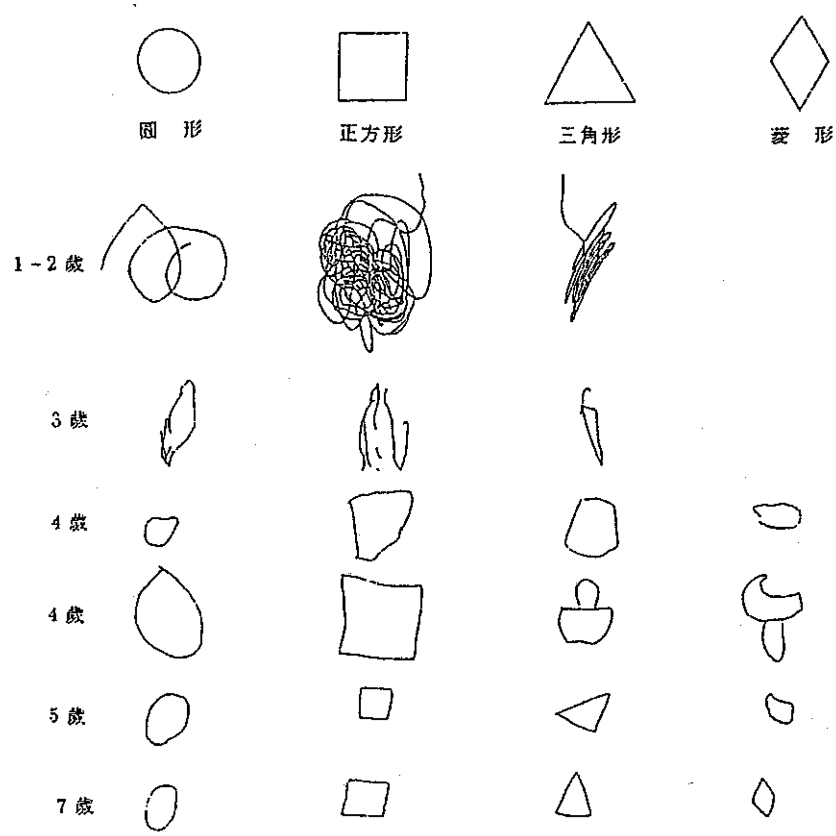


圖5 兒童之形狀的模倣畫

溫維格 (Weinzweig ， 1978) 則指出幼兒最初的經驗 (無論是三度空間的物體或是平面圖形，大概都是圓形或圓柱、正方體或長方體，所以幼兒較易辨識出來這些形狀。而不同大小的同形狀物體也應常提供孩子，用以加深幼兒的印象。

基於形狀所產生的分類活動可以幫助幼兒注意各立體形狀的相似處與不同處，艾格思賈 (Egsgard ， 1970) 建議使用一些有顏色的多邊多形讓幼兒來畫並根據邊的數目該孩子進行分類，然後幼兒可以學到一些諸如三角形、四邊形、五邊形及六邊形等名稱，而如等邊三角形、正五邊形、平行四邊形、菱形等名稱則要等到幼兒開始學習長度的測量與平行的概念才開始。儘管是在第一階段，對幼兒來說太早學習到一些不規則形狀的圖形是不太好的，還不如讓他去學習一些如正六邊形的圖形概念。

二階段二的活動：發展對於形狀之特點的知覺

將不同形狀放在一起 (Fitting Shapes Together) 是發展形狀特點之知覺的好方法之一。若格思賈 (1970) 強調在幼兒注意平面之前，就開始認識三度空間立體的重要性。例如築牆的活動——把物體堆在一起而中間沒有空隙——就提供了一個發展直角概念的重要基礎。

中國的七巧板 (透過重組其中的圖形，可以產生不同的形狀) 並不單只是一種娛樂，它們能發展直角與平行的概念，它們創造出問題情境，在促進空間思考的過程中佔有一重要地位。

費爾可 (Fielker ， 1973) 則建議多給予不同形狀間關係之有關的活動。例如，讓幼兒去發現由兩個全等的三角形可以作出怎樣的圖形來；或是將兩個正方形重疊起來，看看經重疊後的圖形有幾個邊。

在幫助幼兒發展「角」的概念上，費爾可也提出了一些建議。他的研究是以兩條直線間的關係爲基礎。他的建議是幼兒在兩張透明描寫紙上各畫出一條直線，並將其中一張放在另一張之上。藉著移動上面的紙，幼兒可以經驗到直線與角之間關係的改變；而垂直與平行的特例在此也可以看出。相似地，兩個角之間的關係也可以此方式來加以探索，如兩個角可以形成一個正方形或長方形。費爾可還提議其他的關係也可以此方式來進行實驗，如兩組平行線的關係，這將會對於第三階段的發展有所幫助。

有關於「角」之概念的發展情形，筆者所看到之資料尚闕，但「線」方面的發展情況， APU(APU ， 1980) 提出的報告中指出：大約有一半的 11 歲孩子能夠區分出兩組平行線與不平行線，而大概只有 30% 能夠正確地選出具有一對以上之平行邊的四邊形。

除了上述形狀、角、線的概念外，下面再敘述一下幼兒階段裡所面臨到的二度空間代表三度空間之概念的發展及參照系統的發展情形。

1.二度空間代表三度空間之能力的發展

在二度平面與三度空間之間的關係有一種是立體形狀的「網」(net) ，就某種意義來說，網就是立體的二度平面的呈現。在皮亞傑與殷海德(1956)的研究中發現，5至8歲的幼兒尚未區分出他們眼中的物體與物體的「網」有何不同(見圖6)。而大約7至9歲時，他們在畫網時就逐漸能畫出圓柱、圓錐與正方體等的「網」，但要到了11歲半時或更大時，幼兒才能成功地畫出四面體(見圖7)。不過皮亞傑也認爲，在學校中已對網有經驗的幼兒可能比缺乏經驗的幼兒要早上三年。

畢夏普(Bishop ， 1977)指出以二度平面來呈現三度空間的物體通常是一件與保留概念有關的事物，是透過例子來學習的，而不是生來發展的。

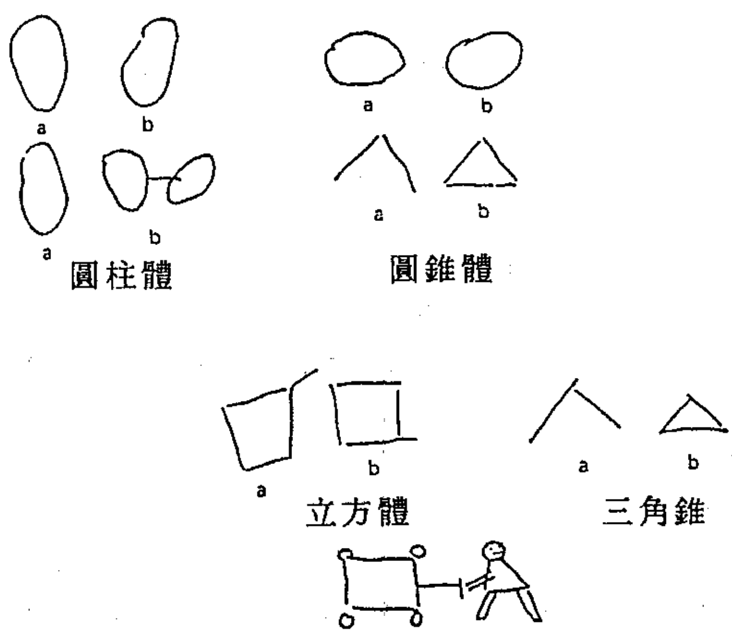


圖6　立體形狀之「網」之一

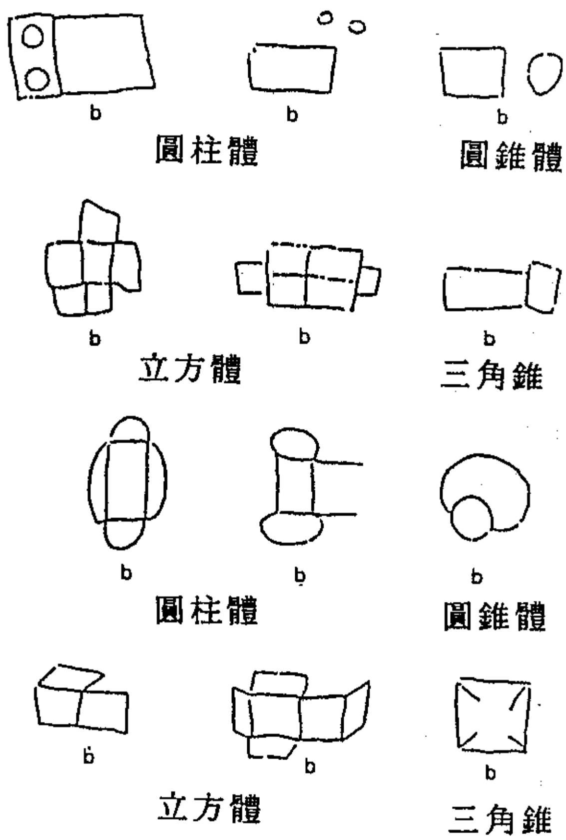


圖7　立體形狀之「網」之二

2. 參照系統的發展

在空間中的移動需要使用到參考點來做爲尋找位置與方向的方法。研究中顯示在空間辨識的發展中有一種要的因素，那就是使用某種參照系統的能力。參照系統的本質就是移動的部分與某些空間中不動部分的關連。

由皮亞傑和殷海德 (1956) 的研究中可知，參照系統的發展是以「自然參照架構」(Natural Reference Frame) 爲基礎，也就是與自然地使用水平的、垂直的能力有關。

在參照架構中另一種要的因素是對於方向的知覺。葛林 (Greene ，1979) 認爲最初在探索空間關係時，都是延著垂直線來發展，也就是上下地看；接下來便是水平導向關係的發展，亦即水平導向較垂直導向的發展的晚，主要是由於身體在水平面上的移動較易。

皮亞傑與殷海德做了一個實驗，把一個瓶子裝了四分之一的水，然後再給幼兒看另一個同樣大小的空瓶子，以不同的空瓶傾斜角度要幼兒說出那一裝水的瓶內的水平

面會怎樣變化。結果發現，大約五到七歲的幼兒才能開始比較水平面與另一瓶子的位置。不過在最初時，幼兒是以瓶子作爲參照點，而非以情境中其他不變的部分，之後他才逐漸了解參照系統不是瓶子和水，然後開始把水面與地面或桌子扯上關係。根據皮亞傑的看法，要一直到九至十二歲時，幼兒才能把所有的一切統合在一起。

伍、邏輯關係知識結構及其發展趨勢

邏輯關係有很多種，本文僅探討分類概念。「將事、物歸類」是人組織其經驗的重要方式之一。探討兒童分類能力的發展歷程有助於我們瞭解兒童如何組織其經驗。另外，分類能力與概念的形成有密切的關聯，同時在皮亞傑的理論架構中，數概念導自集合與序列關係。對物體的心智活動若只有順序關係的話，就不會有「量」的概念，因爲孩子可以一次想一個，而不必同時想到一組。因此數概念的形成係導自於集合和序列關係。

皮亞傑(Ginburg ，H. & Opper ，S., 1979；程小危，民81 ，頁193-194) 認爲合乎邏輯的分類架構應該滿足以下幾個條件：*1.* 任一項目不能同時屬於兩個類，換句話說，某一分類架構的不同類是互斥的(Mutually Exclusive)；*2.* 分爲同一類的各項目間具有某些共同的屬性；*3.* 描述某一個類別的方式有二，其一即列舉此類別包含的項目，稱爲「外延定義」(Extension)；*4.* 另一即指出此類別各項目共有的屬性，稱爲「內涵定義」(Intension)。具備定義性屬性的項目方能歸於此類，換句話說，「內涵」決定外延定義。皮亞傑就根據這些標準(例如其分類架構中的各類別是否是互斥的，分爲同一類的各個項目是否具有共同的屬性)來判別兒童的分類能力。

皮亞傑用的方法多半是給兒童一堆東西(如一堆不同顏色、大小的積木、塑膠片或是一些實物模型)，請兒童「把一樣的放在一齊」，讓兒童自行分類(Free Sorting)。結果顯示兒童的表現可大約分爲三個階段。第一個階段(2-5 歲)的兒童很可能利用這些積木排出一些幾何圖形(Small Partial Alignment)，例如先把六個圓形排成一列，把一個黃色三角形放在藍色正方形之上，再把一個紅色正方形放在兩個藍色三角形之間，最後把剩下的三角形和正方形排成一直線；或者是將這些積木組成一樣東西(Complex)，例如將一些圓形和方形積木作垂直排列，號稱爲比薩斜塔；把幾個半圓形的排在正方形之間成爲一座橋。如果是實物模型，可能會根據其間的關係，兒童把認爲有關係的放在一起(Collective Objects)，例如把娃娃跟搖籃放在一起，

把兩個輪子跟一隻馬放在一起。這樣所形成的群聚之間顯然不是互斥的，同一群聚之內各項目也不具共同的屬性，第二個階段（5-7 歲）的兒童能根據「相似性」分類。開始時會根據不同的標準形成好幾個小類，同時剩下一堆未納入任何一類的。稍進一步，所形成的類別仍然導自不同的標準，但不再留下未歸類的。更進一步，每一個項都能納入同時只能納入根據一致標準劃分的某一類。最進步的，還能形成階層分類，譬如先根據形狀分，同一形狀之下再依不同顏色分出次級類別。但是皮亞傑認爲只是能作到這樣還不夠，兒童要能瞭解階層集合的包含關係（Class-inclusion）。何謂「包含」？所謂包含是指種類和次種類（Subclass）間質與量的關係，如當孩子說：狗比動物多時，就表示他對種類和質與量的關係，如當孩子說：狗比動物多時，就表示他對種類和次種類間的關係尚無法協調。又如要求五、六歲以下孩子算一下如圖 8(a) 所顯所的依序排列好的 8 個物體，問他們有多少個時，孩子會說有 8 個；若問：「指給我看 8 個」時，他們通常會指最後一個。這表示在這小孩的概念架構中，1 、2 、3...... 是該序列中某一個別要素的名稱，就像小葳、元元、玲玉、倫培等名字一樣，當我們問一共有多少位同學，學生答：倫培、倫培這個名字是一序列裡的最後一個個體，而不是整體學生，將體物視爲一組學生必須將物體放置在一種包含的關係中去，這種關係，如圖 8(b) 表示在幼兒心智裡是 1 包含在 2 裡頭；2 是包含在 3 裡頭...... 。

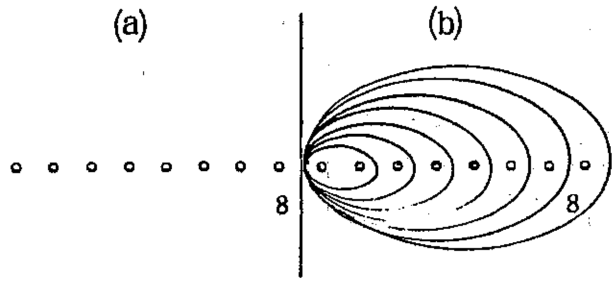


圖 8　階層集合的包含關係

當幼兒被問及：「桌子上有紅、藍兩種顏色的珠子。一個小朋友把所有紅色的珠子串成一條項鍊，另外一個小朋友把所有的珠子串成一條項鍊。那一個小朋友的項鍊比較長？」幼兒必須知道由子集合形成的上層集合永遠大於任一子集合，才算眞正掌握階層分類的邏輯基礎。第二階段的兒童還不能很流暢地掌握 $A+A'=B$ ，$B-A'=A$ 這些包含關係，以致將紅色的珠子（紅多藍少）與「所有的珠子」作比較時會只考慮到減去紅色珠子之後剩下的藍色珠子，答：「紅色珠子串成的項鍊比較長」。根據卡

蜜(Kamii，1982)的解釋是因爲：當大人問話時，幼兒心理上已經將一整體(動物)分成二部分(貓和狗)，而就這二部分來思考了，這時候，整體已經是不存在了，他們只能在未分成二部分時去思考整體，在思考部分時就無法思考整體了，要比較整體和部分時，必須在同時間裡經過二個相反的心智活動(Mental Actions)——即將整體切成兩半和將兩半再合併成整體，皮亞傑認爲這種心智活動是四歲孩子所無法做到的。多數7-8 歲的幼兒就可以逆轉了，所謂逆轉是指心智上可以同時做相反的運作，在生理上，我們無法同時做二件彼此相反的事，但在心智上是可能的，即當思考能力變機動到可以逆轉時。

第三階段的兒童才不但能作階層分類同時也瞭解階層集合之間的包含關係。皮亞傑指出：當幼兒思考能力變得更可變動性時，就得以獲得「包含」的階層結構(即階層分類)，這就是爲什麼對兒童而言，將所有的事件、物品放入各種關係中是那麼地重要了，當小孩將所有的內容放入各種關係中時，他們的思考能力就變得更可變了，可變性的結果之一就是如圖2-8(b)所顯示的數目的邏輯——數學結構。

以上這些早期的研究留下的印象是學前兒童尚未具備分類的邏輯基礎，不能依據相似性，把握一致的標準作階層分類，新進的研究對這項結論提出質疑。

羅許(Rosch et al., 1976)指出，這世界充滿了無數種可區辨的刺激，個體可以在好幾個不同的層次上將這些刺激歸類，但在其中一個層次，稱爲基礎層次(Basic Level)，最容易區辨。比基礎層次包涵性(Inclusiveness)高的爲「超基礎層次」(Superordinate Level)，比基礎層次包涵性低的爲「隸屬層次」(Subordinate Level)。基礎層次(例：汽車)最容易區辨，因爲與「超基礎層次」(例：交通工具)相比較，同一類的成員具有較多共同的屬性；「隸屬層次」(例：不同種類的汽車)同一類成員間雖然相似性更高，但是不同類間也具有較多共有的屬性。此外與「超基礎層次」相比較，「基礎層次」各成員具有相似的外形(將各種椅子的圖形重疊，還能看出是個椅子；將各種傢俱的圖形重疊，則無從辨識)。人跟「基礎層次」各成員互動的反應模式也比較接近。羅許及其合作者提出證據顯示，幼兒習母語時，最早學會的都是事、物「基礎層次」的命名。以比較簡單的歸類問題(從三個當中選出兩個一樣的)作爲測試的方式，三歲的兒童(99/100答對)就能在基礎層次上(例：兩隻不同的貓、一隻狗)，根據相似性選出同一類的。即使採用與皮亞傑等研究者相同的「自由歸類」測試法，五歲的兒童能非常有效地從事基礎層次的分類(例：汽車、火車、摩托車、飛機)。

皮亞傑研究中所提供的材料多半只能在「超基礎層次」歸類，這種條件下，學前兒童就容易有「中途改變標準」、「留下一些無法歸類的」——等表現，原因何在？

前面已提過，「基礎層次」的類別間在屬性、互動方式、外形上都比較容易找到清楚的劃分界限，而「超基礎層次」同屬一類的成員未必具有相似的外形，同時有許多不相干的屬性干擾其間。面對這樣一堆東西，如吉爾曼和貝拉津(1983)所說，兒童的困難很可能在於找不到一組能涵蓋所有項目的分類依據。費雪和羅勃(Fischer & Roberts，1980，引於程小危，民81，頁194)以一歲多到六歲多的兒童爲測試的對象，顯示在「由實驗者先示範然後讓他們模倣」的情況下，十五個月的幼兒就能將兩個只在一個向度上不同的類別(例如三角形和圓形)區分開來；二歲左右的幼兒能處理更多一些只在一個向度上不同的類別(例如三角形和圓形)區分開來；二歲左右的幼兒能處理更多一些只在一個向度上不同的類別(例如三角形、圓形、正方形)；二歲半的兒童能學著把不同的三角形、不同的圓形,不同的正方形歸爲一類;到了第四步(大約三～三歲半歲的兒童)才能模倣將在兩個向度上互相干擾的類別(例如由3種形狀、3種顏色組成9個類)，先根據其中一個向度分類(例如形狀)，同一形狀之下再分出不同的顏色。另外，有時兒童找不出一個恰當的分類架構，並非所涉及的持徵比較抽象或複雜，可能只是因爲他們欠缺相關的知識(不瞭解鰓與肺之別的兒童，不可能將之納入分類的標準)學前兒童並非完全欠缺作高階層分類的能力，要看特定高階層類別之複雜程度、抽象程度以及對兒童的意義。在前一段所提到羅許等人(1976)的研究中，「超基礎層次」題目上表現固然比「基礎層次」差，但三歲組能答對55%，四歲組能答對90%這種簡化的「三選二」超基礎層次歸類問題。一般八、九歲的兒童已能將日常生活中的實物作超基礎階層的歸類，但是當安格林(Anglin，1970)給他們一堆不同詞性的字詞，要他們把相似的放在一齊，他們多半將語意相關或是在句子中常常一齊出現的歸爲一類。例如將「白色的」跟「花」放成一堆，把「聽」跟「意見」放成一堆，或是把「生氣」跟「笑」歸爲一類。吉爾曼和貝拉津認爲以上種種實徵現象表示兒童一旦能找到一個恰當的分類架構，就能根據此標準作有系統的歸類，而並非如皮亞傑等研究者所說，學前兒童基本上欠缺掌握一致標準、作有系統分類的邏輯能力。因此，隨著年齡所發展的只是「將基本的分類邏輯應用到屬性組成更複雜的事物上」。

階層集合包含關係

至於兒童在「階層集合包含關係」問題上的表現，根據溫納(Winer，1980)的文獻回顧，大部分研究皆顯示一般七、八歲的兒童仍然很容易錯答這個問題。而各種操弄中，強化高階層集合之「整體性」最能有效降低難度、提高答對比例。例如：「是躺下的牛多還是水牛多？」；馬克曼(Morkman，1976)將集合包含關係措辭爲

群體與組成部分間的比較也具有相同的效果。此實徵結果似乎支持皮亞傑所作的解釋：兒童的困難在於不容易同時考慮子集合以及由子集合所組成高階層集合之間的關係。但是史密斯(Smith，1979)問四～七歲兒童以下三組問題：「所有的狗都是動物嗎？」、「所有的動物都是狗嗎？」、「有些動物是狗，對不對？」、「有些狗是動物，對不對？」；「X是一種狗，X一定是一種動物，對不對？」、「X是一種動物，X一定是一種貓對不對？」；「所有的牛奶都含有X，那是不是所有的巧克力奶都含有X？」、「所有的牛奶都含有X，那是不是所有的飲料都含有X？」(以上問題中的X在實驗裡皆以無意義音節形成的假名代替，同時問題的內容不限於上述特例)。雖然整體而言，四歲組的兒童只能答對64.66%，絕大部分四歲組的兒童能答對三組問題中的某一組。在另一組問題上，(A是一種食物，但不是肉，A是漢堡嗎？A是一種水果，但不是香蕉，A是不是一種食物？)，答對的比例更高，四歲組合部加起來，能答對總數的91%。由於四歲組在部分問題上也具有根據包含關係作推論的能力，史密斯認爲，不同年齡組之間的差異並不在於「有關階層分類架構的概念表徵(Conceptual Representation)」，而是根據此概念架構導出某些結論的能力，年幼的兒童只能在比較有限的情況下導出正確的推論。然而另一方面，馬克曼(1978)的研究顯示，不少二～六年級的學童雖能答對典型的「集合包含關係」問題，但是他們只是將「上層集合大於其隸屬集合」視爲一項實徵事實而尚未能掌握其邏輯上的必然性，以致在訊息不充分的情況下，例如對子集合的屬性所知有限時，往往無法確定兩者間的比較關係，同時認爲如果不斷增加子集合的個數，有可能使之超過其上層集合(和小危，民81，頁197-200)。

陸、數學知識結構及其發展趨勢之文獻結論

根據前面文獻探討的結果，筆者加以統整後，繪成圖9。從圖9可以更清晰的看出來數學知識架構中，「數」的概念下包括了唱數、計數(計數概念下還分一一對應和次序無關兩個次概念)、基數、序數(序數概念下遇分次序和標記二個次概念)四個次概念；「量」的概念下包括了序列測量(測量概念還可細分成保留與遞移、單位和估計三個次概念)、時間和金錢四個次概念；「空間」的概念下分成形狀、線、三度空間轉換成二度空間、和參照點四個次概念；「邏輯與關係」中只談分類概念，而在分類概念下又可分爲一個向度的分類、二個向度的分類、包含和階層集合包含四

個次概念。從圖 9 還可以看出各概念的一個發展趨勢，筆者以條例方式或許將更有助於閱讀：

1. **數概念的發展**

(1)從發展之先後順序來看，由先到後依序爲唱數、計數、基數、序數。

(2)各個概念之出現或成熟年齡的情況大約是：

a. 唱數：多數二、三歲的幼兒都會數 1 到 2 ；四歲到四歲半的幼兒已能從 1 數到 39 ；二歲到六歲的幼兒間有很大的差異，但多數在六歲時都已能從 1 數到 100 。

b. 一一對應概念：大約三到五歲間，幼兒可以發展出一一對應概念。

c. 次序無關原則：大約四到五歲間，幼兒可以發展出次序無關原則。

d. 基數：大約四歲八個月左右到五歲間，幼兒可以發展出基數概念來。

e. 數字序列／大小比較：大約三歲到六歲大的幼兒，可以發展出數字大小的概念。

f. 標記：大約在五歲到八歲間，孩子可以發展出序數的標記來。

2. **量概念的發展**

(1)從測量之各概念的發展的先後順序來看，依序是長度與面積的概念、質量保留概念、重量保留概念、體積保留概念。

(2)各個概念之出現或成熟年齡的情況大約是：

a. 保留與遞移概念：長度與面積概念大約在六到七歲間形成；質量保留概念大約在七到八歲間形成；重量保留概念大約在九到十歲間形成；體積保留概念大約在十一歲到十二歲間形成。

b. 單位概念：大約在八到十歲間形成。

c. 估計能力：約在八歲開始，有的估計對大人而言都是很難的。

d. 時間：大約 21 個月大的孩子已懂得「過一會兒」的意思了；二歲半左右，已有「上午」、「下午」的概念；42 個月大的孩子已能了解「現在」、「過去」和「未來」；五歲大時，多已能了解何謂「星期」了；六歲時對「四季」已有概念了；七歲時對「月份」已能了解了；八歲時對「年」、「幾點鐘」的涵意已有所了解。

e. 金錢：五歲多到七歲左右，孩子已具辨識小額金錢的能力。

3. **空間概念的發展**

(1)形狀概念的發展先後順序依序爲：圓形、正方形、長方形、三角形、菱形和五邊形；發展成熟的年齡大約在三歲到八歲之間。

(2)三度空間轉換成二度空間之能力成熟的年齡大約在七歲到十一歲之間。

(3)線概念發展成熟年齡大約在十一歲以後。

(4)參照點概念發展成熟年齡大約在五歲到十二歲之間。

4.邏輯關係——分類

(1)各概念之發展先後順序依序爲：一個向度的分類、二個向度的分類、包含，最後才是階層集合包含。

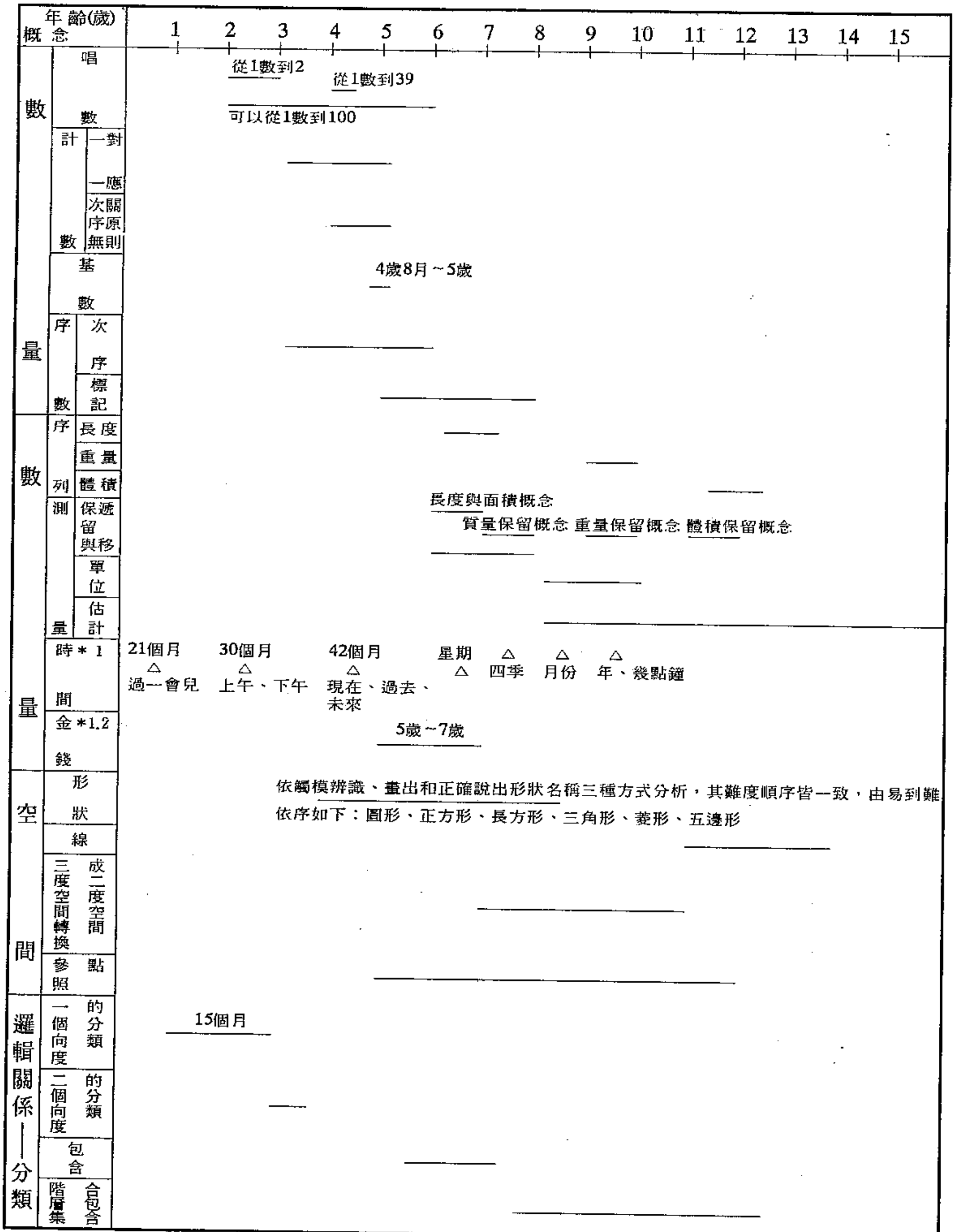
(2)各概念形成的年齡情況大約是：

a. 一個向度的分類：在15個月到三歲之間

b. 二個血度的分類：在三歲到三歲半之間

c. 包含：在五歲半到七歲之間

d. 階層集合包含：在七歲半到十二歲左右



※序列概念之內涵不僅是數字而已，另外還包括長度、重量和體積序列概念，因此，以次序代表數字的序列；另外長度、重量和體積序列則在放在「序列」，歸在「量」項下。
※1時間和金錢雖然也屬測量，但爲將之獨立出來，因此「測量」採狹義定義，即只指與空間、重量、質量有關的測量。
※2這裡只分析孩子對錢幣辨識之能力的發展。

圖9　數學知識之結構及其發展趨勢圖

參考書目

一、中文部分

1. 王文科(民72) 認知發展理論與教育。台北：五南圖書出版公司。
2. 簡楚瑛(民77) 幼兒・親職・教育。台北：文景出版社。
3. 蘇建文等(民81) 發展心理學。台北：心理出版社。

二、英文部分

1. Ames, L.B., "The Development of the Sense of Time in the Young Child, " Journal of Genetic Psychology, 1946.
2. Anglin, J. Word, object, and conceptual development. New York: Norton & Company, 1977.
3. Assessment of Performance Unit (APU)-see Department of Education and Science.
4. Baroody, A.J., Children's Mathematical Thinking, N.Y.: Teacheis College of Columbia University, 1987.
5. Bearison, D.J. "Role of measurement operations in the acquisition of conservation." Developmemal Psychology, 1969, 1, 653-660.
6. Beilin, H. Studies in the cognitive basis of language development. New York: Academic Press, 1975.
7. Blackstock, E.G., & King, W.L. "Recognition and reconstruction memory for seriation in four-and five-year-olds." Developmental Psychology, 1973, 9, 255-259.
8. Brainerd, C.J. "Inducing ordinal and cardinal representations of the first five natural numbers." Journal of Experimental Child Psychology, 1974, 18, 520-534.
9. Brainerd, C.J., "The origins of the number concept. New York: Praeger, 1979.
10. Briars, D., & Siegler, R.S., Preschoolers' abilities to recognize counting errors. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Re-

search in Child Development, Boston, April 1981.

11. Bruner, Jerome S. On fnouring. Cambridge, Mess.: Harvard University Press, 1962.

12. Carpenter, T. P., The role of equivalence and order relations in the development and coordination of the concepts of unit size and number of units in selected conservation type measurement problems. Report from the Project on Analysis of Mathematics Instruction (Tech. Rep. No. 178). Madison: THe University of Wisconsin, Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Leaming, August 1971.

13. Carpenter, T.P. "Measurement concepts of first-and second-grade students. "Journal for Research in Mothematics Education, 1875, 6, 3-14.

14. Capenter, T. P., Corgbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquitst, M. M., & Reys, R. E. National assessment. In E. Fennema (Ed.), Mathematics education research: Implications for the 80's. Alexandria, Va.: Association for Supervision and Cumiculum Development, 1981.

15. Carpenter. T. P., & Lewis R. "The development of the concept of a standard unit of measure in young children. " Journat for Research in Mathematics Education. 1976, 7, 53-64.

16. Carpenter, T. P. and Osborne, A. R. "Needed Research on Teaching and Learning Measure." In Number and Measurement: Papers for a Research Warkshop (Ed) Lesh, R. A. Ohio: Eric/SMEAC Center, Ohio State University, 1976.

17. Carpenter, T. P. "Analysis and Synthesis of Existing Research on Measurement" In Number and Measurement" Papers for a Research Workshop (Ed) Lesh, R. A. Ohio: Eric/SMEAC Center, Ohio State University, 1976.

18. Carpenter, T.P. "Results and Implications of the second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School. "Arithmetic Teacher, 1980, 27(8), 44-47.

19. Davydov, V. V. "The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction" (A. Bigelow, trans.). In L. P. Steffe (Ed.). Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathe-

ics (Vo. 7). Chicago: The

20. Davydov, V. V. "The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical opcrations in children. "In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Rombery (Eds.), Addition and subtraction" A developmental perspective. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates. 1982.

21. Department of Education and Science. APU-Assessment of Performance Unit (1980a) Mathematica Development, Primarv Survey Report No. 1. HMSO.

22. Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O., Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research, Oxford: Alden Dress, 1984.

23. Egseard. J. C. "Some Ideas in Geometry that can be Taught from K-6," Educational Studies in Mathematics, 1970, 478-495.

24. Fielker. D. S. "A Structural Approach to Primary School Geometry." Mathematics Teaching, 1973, 63, 12-16.

25. Fuson. K. "An Analysis of Research Needs in Projective Affine and Similarity Geometries Including an Evaluation of Piaget's Results in These Areas. "In Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts (Ed) Lesh, R. The Ohio State University: ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education, 1978.

26. Fuson, K. C., Richards, J. Children's construction of the act of counting. Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, Boston, April 1980.

27. Fuson, K. C., & Richards, J. Children's construction of the counting numbers: From a spew to a bidirectional chain. Unpublished paper, Northwestem University, Evanston, Ill ., 1979, and paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, April 1981.

28. Fuson, K. C., & Richards, J., & Briars, D. J. "The acquisition and elaboration of the number word sequence. "In C. Brainerd (Ed.). Progress in cognitive development. children's logical and mathematical coguition

Vol. 1). New York: Springer-Verlag, 1982.

29. Fuson, K. C., "Research on Whole Number Addition and Subtraction" in Growns, D. A. (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, U. Y.: Macmillan, 1992.

30. Fuson, K. C., & Hall, J. W., "The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review", in Ginsburg, H. (Ed.), The Development of Mathematical Thinking, N. Y.: Academic Press, 1983.

31. Galpenin, P. Y. and Georgiev, L. S. (1969) "The Formation of Elementary Mathematics Notions." In Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. 1: The Learning of Mathematical Concepts (Ed.) Kilpatrick, J. E., Wirszup, I. -School Mathematics Group, Stanford University.

32. Gelman, R., Meck, E., & Merkin, S., Young Children's niumerical competence. "Cognitive Development," 1986, 1, 1-29.

33. Gelman, R., & Gallistel, C. R. The child's understanding of number. Cambridge, Mass.: Harvard University Prss, 1978.

34. Gelman, R. & Tucker, M. F. "Further investigations of the young child's conception of number," Child development, 1975, 46, 167-175.

35. Gelman, R. & Baillargeon, R., "A review of Piagetian concepts." In P. H. Mussen (Ed.), Handbook of child psychology, New York: John Wiley and Sons, 1983.

36. Gibson, O. E. A Study of the Ability of Children with Spina Bifida to Handle Money-Ph. D. thesis. University of London, 1981.

37. Giles, G. School Mathematics under Examination 2: A Comparison of the Cognitive Effects of Individualised Learning and Conventional Teaching. University of Sterling, 1977.

38. Ginsburg, H. & Russell, R. L. "Social-class and racial influcnces on early mathematical thinking." in Monographs of the Society for Ressarch in Child Development, 46, 1981.

39. Ginsburg, H., Children's arithmetic: The learning process. New York: D. Van Nostrand, 1977.

40. Ginsburg, H. & Opper, S. Piaget's theory of intellectval development, New Jersey: Prentice-Hall, 1979.

41. Ginsburg, H. ced., The Development of Mathematical Thinking, N. Y.: Academic Press, 1983.

42. Greenes, C. E. "The Learning disabled Child in Mathematics." Focus-on Learning Problems, in Mathematics (Framinghan, Massachusetts), 1(1), 1979.

43. Harris, M. Dissecting a Clockface Struggle: Mathematics for Low Attainers, 4, 26-28, 1981.

44. Hendrickson, A. D. "Inventory of mathematical thinking done by incoming first-grade children." in Journal for Research in Mathematics Education, 1979, 10, 7-23.

45. Hiebert, J. The effect of cognitive development on first-grade children's ability to learn linear measurement concepts (Tech, Rep. No. 506), Madison: Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling, 1979.

46. Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M., Learning and the development of cognition, Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 1974.

47. Kamii, C., Number in preschool and kinderqarten, Washington, D. C.: NAEYC, 1982.

48. Kerslake, D.(1975) "Taking Time Out." Mathematics Teaching, 1975, 73, 8-10.

49. Kingsley, R., & Hall, V. "Training conservation through the use of eqaming sets." Child Development. 1967, 38, 1111-1126.

50. Klahr, D., & Wallace, J. G. "The role of quantification operators in the development of conservation of quantity." Cognitive Psychology, 1973, 4, 301-327.

51. 2Lovell, K. The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children-5th edition Sevenoaks: Hodder & Stoughton Educational, 1966.

52. Mandler, G., & Shebo, B. J., Subitizing: An analysis of its component processes. Paper presented at the Psychonomic Society, St. Louit, Mo.,

November, 1980.

53. Markman, E. M. & Siebert, J.(1976). "Classes and collections: Internal organization and resultingt holistic properties." Cognitive psychology, 1976, 8, 561-577.

54. Markman, E. M., "Empirical versus logical solutions to partwhole comparison problems concerning classes and collections. Child development, 1978, 49, 168-177.

55. Montgomery, M. E., "The interaction of three levels of aptitude determined by a teach-test procedure with two treatments relat to arca. Journal for Research in Mathematics Education, 1973, 4, 271-278.

56. 2Mussen, P. H., Handbook of Child Psycholagy, N. Y: John Wiley & Sons, 1983.

57. Noelting, G. Hierarchy and Process in the Construction of the Geometrical Figure in the Child and Adolescent, University of Warwick: Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1979.

58. Phillips, Jr. J. L., The Origins of Intelleet: Piaget's theory. San Francisco, W. H. Freeman & Co., 1975.

59. Piaget, J. and Inhelder, B., The Prychology of the Child, New York: Basic Books, 1969.

60. Piaget, J. Six psychological Stnties, New York: Random house, 1967.

61. Piaget, J., The Child's Child's Conception of Time, London: Routledge and Kegan Paul, 1969.

62. Piaget, J: Inhelder, B; Szeminska, A., The Child's Conception of Geometry, London: Routledge and Kegan Paul, 1960.

63. Pringle, R., Development of the normalization strategy in comparative mumerosity judgments, Paper poresented at the Annual Meeting of the Psychonomic Society, St. Louis, Mo., November, 1980.

64. Resnick, L. B., "A Developmental Theory of Number Understanding" in Ginsbury, H. (Ed.), The Development of Mathematical Thinking N. Y.: Academic Press, 1983.

65. Rosch E.; Mervis, C. B.; Gray, W.; Jonson, D.; Boyes-Braem, P., "Basic

objects in natural categories," Cognitive psyciology, 3, 382-439.

66. Saxe, G. B. "Development relations between notational counting and number conservation," Child Development, 1979, 50, 180-187.

67. Schaeffer, B., Eggleston, V. H., & Scott, J. L., "Number development in young children," Cognitive Psychology, 1974, 6, 357-379.

68. Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. Children's judgment. 1977, 48, 630-633.

69. Siegel A., Goldsmith, L. T., & Madson, C. R. How many words on this page? The development of children's estimation strategies. Paper presenied at the Annual Meeting of the Psychonomic Society, St. Louis, Mo., November 1980. Now published as Siegel, A., & Goldsmith, L. T., in press, see preceding refercnce.

70. Siegler, R. S., & Robinson, M. The development of numerical understanding." In H. W. Reese & L. P. Lipsitt (Eds.), Advances in child development and behavior (Vol. 16). New York: Academic Press, 1982.

71. Springer, D. "Development in Young Children of an Understanding of Time and the Clock." Journal of Psychology, 1952, 80, 83-96.

72. Thyer. D. & Maggs, J., Teaching Mathematics to Young Children, Eastbourne: Holt, Rinehan an Winston Ltd, 1971.

73. Underwood, D. J., Developmental concerns related to place volue, Paper presented at the 55th Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Cincinnati, Ohio, April 1977.

74. Wang, M. C., Resnick, L. B. & Boozer, R. F. "The sequence of development of some early mathematics behaviors." Child Development, 1971, 42, 1767-1778.

75. Ward. M. Mathematics and the 10-year-old-Schools Council Working Paper 61. Evans/Methucn for the Schools Council, 1979.

76. Weinzweig, A. I. "Mathematical Foundations for the Development of Spatial Concepts in Children," In Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts (Ed.) Lesh, R. The Ohio State University: ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education. College of Education, 1978.

77. Winer, G. A., "Class-inclusion reasoning in children: A review of the empirical literature." Child development, 1980, 51, 309-328.