國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

有關 k 元數列的探討

A Study about k-Sequences

碩士班學生：江玲慧 撰

指導教授： 李陽明博士

中華民國 105 年 01 月 08 日

國立政治大學
National Chengchi University

國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系
江玲慧君所撰之碩士學位論文

有關 k 元數列的探討

A Study about k-Sequences

業經本委員會審議通過
論文考試委員會委員：

指導教授：
系主任：

中華民國 105 年 1 月 8 日

國立政治大學 National Chengchi University

致 謝

再次進入校園，感謝這兩年半中所有曾經指導過我的每一位教授，還有系上的學長姐與同學們，幫助我順利完成學業，也達成自己想念數學系的夢想。首先，特別感謝我的指導教授李陽明老師，不論是平常上課或是準備資格考時，老師耐心地教導，論文準備的過程中，老師更是協助我突破重重關卡，讓我能不至於失去方向。謝謝我最愛的家人，唸書後與家人相處時間減少甚多，父母雖不捨我體力的上負荷，仍給予精神上十足的關懷與協助！也感謝陳勇志先生，在我唸書這段期間的包容體諒，一路上耐心陪伴。另外，謝謝工作上的老闆與同事們，包容我唸書後無法全心全意專注在工作上，在不影響工作的情況下，可以自在地追求個人夢想，提升自我能力。

最後，謝謝我的學生們，讓我長時間持續對數學保持熱情，在工作十年後，利用工作之餘，再次進入校園學習，增加自我能力。期許未來能將在政治大學應用數學系中所學的知識與態度，回饋給學生。

國立政治大學
National Chengchi University

摘 要

本篇論文主要探討長度為 n 的 k 元數列，其中若有 i 個偶數，j 個奇數，k−i−j 個不限制其奇偶，符合條件的數列個數。第一章 先預備後面計算所需要的基本知識，第二章 由生成函數開始推導公式，第三章 再討論 i= j 時的特殊情況，並利用組合方法來加以證明。第四章 針對生成函數推導出的公式再深入探討。第五章 檢討與展望。

國立政治大學
National Chengchi University

Abstract

This thesis mainly discusses k-sequences with the length n. There are i even numbers, j odd numbers, and k-i-j not specified. The first chapter introduces the basic knowledge for the calculation used in the following chapters. The second chapter is the derivation of the formula by using generating functions. The third chapter is a combinatorial proof of special cases when i is equal to j. The fourth chapter is further discussion of formula derived from generating functions. The last chapter is review and future research.

國立政治大學
National Chengchi University

目 錄

第一章 預備知識..... p.1

第二章 利用生成函數推導 k 元數列.....p.5

第三章 奇偶個數相同時的特殊公式.....p.9

第四章 利用多項式定理的深入探討.....p.15

第五章 結論.....p.19

參考文獻..... p.20

國立政治大學
National Chengchi University

國立政治大學
National Chengchi University

第一章　預備知識

本章節先介紹後面所需要使用的幾個基本知識。

1-1 二項式定理與多項式定理

【定理 1.1】

二項式定理 (Binomial Theorem)

$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_i^n a^i b^{n-i}$ ，C_i^n : the binomial coefficient

證明：

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots\cdots(a+b)}_{n\text{ 個}}$$

利用分配律展開時，若要求得 $a^i\cdot b^{n-i}$ ，則需從n個 $(a+b)$ 中任選i個括號乘a，剩下 $n-i$ 個乘b，其情況有 $C_i^n\cdot C_{n-i}^{n-i}=C_i^n$ 種，可得 $a^i\cdot b^{n-i}$ 的係數即為 C_i^n ，所以 $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_i^n a^i b^{n-i}$ ，得證。 ❑

【定理 1.2】

多項式定理 (Multinomial Theorem)

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)^n=\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_m\ge 0\\ n_1+n_2+\cdots+n_m=n}}\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_m!}a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdots\cdots a_m^{n_m}$$

$$=\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_m\ge 0\\ n_1+n_2+\cdots+n_m=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdots\cdots a_m^{n_m}$$

證明：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_m)\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_m)\cdots\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_m)}_{n\text{ 個}}$$

由[定理 1.1]的證明同理可得

$a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdots\cdots a_m^{n_m}$ 項的係數為 $C_{n_1}^{n}\cdot C_{n_2}^{n-n_1}\cdots\cdots C_{n_m}^{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}=\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_m!}$ ，

國立政治大學 National Chengchi University

所以$\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)^n=\sum\limits_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_m\geq 0\\ n_1+n_2+\cdots+n_m=n}}\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_m!}a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot a_m^{n_m}$

$$=\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_m\geq 0\\ n_1+n_2+\cdots+n_m=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot a_m^{n_m}$$ ，得證。 ❑

1-2 生成函數

設$\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}=\left\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\right\}$是一無窮數列，其中$a_n\in\mathbb{C}$

【定義 1.3】

(一般)生成函數 （Ordinary）generating functions:

$$a(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$$

【定義 1.4】

指數生成函數 Exponential generating functions:

$$a(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x^1+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$$

【定理 1.5】

已知$a(x)=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 、$b(x)=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{b_n}{n!}x^n$ 皆為指數生成函數，若$\dfrac{c_n}{n!}=\sum\limits_{r=0}^{n}\dfrac{a_r}{r!}\cdot\dfrac{b_{n-r}}{(n-r)!}$ ，則

$c(x)=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{c_n}{n!}x^n=a(x)\cdot b(x)$ 。

證明：

若 i 位男生中選 r 人排成一列方法數為$a_r=C_r^i\times r!\Rightarrow C_r^i=\dfrac{a_r}{r!}$

若 j 位女生中選$(n-r)$人排成一列方法數為$b_{n-r}=C_{n-r}^j\times(n-r)!\Rightarrow C_{n-r}^j=\dfrac{b_{n-r}}{(n-r)!}$

且 $a(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x^1+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n!}x^n$

$b(x)=b_0+\frac{b_1}{1!}x^1+\frac{b_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{b_n}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n\ge 0}\frac{b_n}{n!}x^n$

今從 i 位男生，j 位女生中，任選 n 人

方法數為 $C_n^{i+j}=\sum_{r=0}^{n}C_r^i\cdot C_{n-r}^j$

令 $\frac{c_n}{n!}=C_n^{i+j}$，則 $\frac{c_n}{n!}=\sum_{r=0}^{n}\frac{a_r}{r!}\cdot\frac{b_{n-r}}{(n-r)!}$

$$\Rightarrow\ \sum_{n\ge 0}\frac{c_n}{n!}x^n=\sum_{n\ge 0}\left(\sum_{r=0}^{n}\frac{a_r}{r!}\cdot\frac{b_{n-r}}{(n-r)!}x^n\right)=\left(\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n!}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\ge 0}\frac{b_n}{n!}x^n\right)$$

$\therefore c(x)=\sum_{n\ge 0}\frac{c_n}{n!}x^n=a(x)\cdot b(x)$，得證。 ❑

【定義 1.6】

由[定義 1.4]，$\forall n\ge 0$，$a_n=1$，則 $a(x)=e(x)=\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}x^n$

且 $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots=\frac{e(x)+e(-x)}{2}$ (偶次項係數和)

$x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}+\cdots=\frac{e(x)-e(-x)}{2}$ (奇次項係數和)

【定理 1.7】

$e(\alpha x)\cdot e(\beta x)=e(\alpha x+\beta x)$

證明：

由[定理 1.5]可知，指數生成函數可相乘並結合為新的生成函數

$$e(\alpha x)\cdot e(\beta x)=\left[\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}(\alpha x)^n\right]\cdot\left[\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}(\beta x)^n\right]$$

$$=\left(\sum_{n\ge 0}\frac{\alpha^n}{n!}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\ge 0}\frac{\beta^n}{n!}x^n\right)=\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n!}x^n$$

$\because \frac{a_n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!}\cdot\frac{\beta^{n-i}}{(n-i)!}$

國立政治大學 National Chengchi University

$$\Rightarrow a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\alpha^i \cdot \beta^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} C_i^n \alpha^i \cdot \beta^{n-i} = (\alpha+\beta)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(\alpha x+\beta x)^n = e(\alpha x+\beta x)$$

$$\therefore e(\alpha x)\cdot e(\beta x) = e(\alpha x+\beta x)$$

由 [定理 1.7] ，我們進而可推廣成

$$(1)\, e(x)\cdot e(-x) = e(x-x) = e(0) = 1$$

$$\Rightarrow e(-x) = \frac{1}{e(x)} = \left[e(x)\right]^{-1}$$

$$(2)\left[e(x)\right]^n = \underbrace{e(x)\cdot e(x)\cdot\cdots\cdot e(x)}_{n\text{ 項}} = e(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\text{ 項}}) = e(nx)$$

$$(3)\, e(nx)\cdot e(-nx) = e(nx-nx) = e(0) = 1$$

$$\Rightarrow e(-nx) = \frac{1}{e(nx)} = \left[e(nx)\right]^{-1} = \left[e(x)^n\right]^{-1} = \left[e(x)\right]^{-n}$$

國立政治大學 National Chengchi University

第二章　利用生成函數推導 k 元數列

【定義 2.1】

長度為 n 的 k 元數列$\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，其中有 i 個偶數，j 個奇數，k-i-j 個不限制其奇偶，則a_n表示符合其奇偶限制的數列個數。

【定理 2.2】

以數字 0 構成長度為 n 的數列，若滿足

(1) 0 出現偶數次，其指數生成函數為$\dfrac{e(x)+e(-x)}{2}$

(2) 0 出現奇數次，其指數生成函數為$\dfrac{e(x)-e(-x)}{2}$

證明：

當$n=0$，數列為ϕ

當$n=1$，數列為0

當$n=2$，數列為00

當$n=3$，數列為000

當$n=4$，數列為0000

⋮

(1)由上可知，滿足 0 出現偶數次的數列個數為$a_{2m}=1$、$a_{2m+1}=0$，$m\geq 0$，由[定義 1.6]

我們可將指數生成函數表示為$\sum_{n\geq 0}a_n x^n = 1+x^2+x^4+\cdots=\dfrac{e(x)+e(-x)}{2}$

(2)同理，滿足 0 出現奇數次的數列個數為$a_{2m}=0$、$a_{2m+1}=1$，$m\geq 0$

我們可將指數生成函數表示為$\sum_{n\geq 0}a_n x^n = x+x^3+x^5+\cdots=\dfrac{e(x)-e(-x)}{2}$，得證。❑

國立政治大學 National Chengchi University

【定理 2.3】

長度為 n 的 k 元數列$\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，其中有 i 個偶數，j 個奇數，k-i-j 個不限制其奇偶，則

$$a_n=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^i C_b^j(k-2a-2b)^n$$

證明：

由 [定義 2.2] 可得知，

長度為 n 的 k 元數列，有 i 個偶數，j 個奇數，k-i-j 個不限制其奇偶

i 個偶數的指數生成函數為$\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i$

j 個奇數的指數生成函數為$\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^j$

k-i-j 個不限制其奇偶的指數生成函數為$\left[e(x)\right]^{k-i-j}$

則全部的指數生成函數可合成為

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^j\cdot\left[e(x)\right]^{k-i-j}$$

$$=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^j\cdot\left[e(x)\right]^k\cdot\left[e(x)\right]^{-i}\cdot\left[e(x)\right]^{-j}$$

$$=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^j\cdot\left[e(kx)\right]\cdot\left[e(-x)\right]^i\cdot\left[e(-x)\right]^j$$

$$=\left[\frac{1+\left(e(-x)\right)^2}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{1-\left(e(-x)\right)^2}{2}\right]^j\cdot e(kx)$$

$$=\left[\frac{1+e(-2x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{1-e(-2x)}{2}\right]^j\cdot e(kx)$$

國立政治大學 National Chengchi University

$$=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\left(\sum_{a=0}^{i}C_a^i\left(e(-2x)\right)^a\right)\cdot\left(\sum_{b=0}^{j}(-1)^a\cdot C_b^j\left(e(-2x)\right)^b\right)\cdot e(kx)$$

$$=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\left(\sum_{a=0}^{i}C_a^i e(-2ax)\right)\cdot\left(\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_b^j e(-2bx)\right)\cdot e(kx)$$

$$=\frac{1}{2^{i+j}}\left(\sum_{a=0}^{i}C_a^i\right)\cdot\left(\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_b^j\right)\cdot e(-2ax)\cdot e(-2bx)\cdot e(kx)$$

$$=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^i C_b^j e((k-2a-2b)x)$$

$$=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^i C_b^j\sum_{n\geq 0}\frac{(k-2a-2b)^n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^i C_b^j\frac{(k-2a-2b)^n}{n!}x^n$$

所以 $a_n=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^i C_b^j(k-2a-2b)^n$，得證。 ❑

[定理2.3]可讓我們得到一般情況下長度為n的k元數列公式

國立政治大學 National Chengchi University

國立政治大學
National Chengchi University

第三章　奇偶個數相同時的特殊公式

3-1 i＝j時的特殊公式

若在 i=j 的情況下，我們可將 [定理 2.2] 中的a_n，推導出另一個公式。

【定理 3.1】

若 $i=j$，則 $a_n=\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i(k-4r)^n$

證明：

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^j\cdot\left[e(x)\right]^{k-i-j}$$

$$=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[e(x)\right]^{k-i-i}$$

$$=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[e(x)\right]^{k}\cdot\left[e(x)\right]^{-i}\cdot\left[e(x)\right]^{-i}$$

$$=\left[\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right]^i\cdot e(kx)\cdot\left[e(-x)\right]^i\cdot\left[e(-x)\right]^i$$

$$=\left[\frac{1+\left(e(-x)\right)^2}{2}\right]^i\cdot\left[\frac{1-\left(e(-x)\right)^2}{2}\right]^i\cdot e(kx)$$

$$=\left[\frac{1-\left(e(-x)\right)^4}{4}\right]^i\cdot e(kx)$$

$$=\frac{1}{4^i}\left(1-e(-4x)\right)^i\cdot e(kx)$$

$$=\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i(e(-4x))^r\cdot e(kx)$$

$$=\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i e((k-4r)x)$$

國立政治大學 National Chengchi University

$$=\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i\sum_{n\geq 0}\frac{(k-4r)^n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i\frac{(k-4r)^n}{n!}x^n$$

所以 $a_n=\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i(k-4r)^n$ ，得證。 ❑

3-2 i＝j時的組合等式

若將 i=j 代入 [定理 2.2] 中，我們可得到 $a_n=\frac{1}{2^{i+i}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i(k-2a-2b)^n$

與 [定理 3.1] 相互比較，發現等式：

$$\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i=\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i=\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i\ (k-2a-2b)^n$$

我們再用二項式定理證明。

【定理 3.2】

$$\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i(k-4r)^n=\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i(k-2a-2b)^n$$

證明：

1° 當 $2a+2b\neq 4r$ 時，即 $a+b\neq 2r$ ：

a、b 兩數必為一奇一偶，則存在 $(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i+(-1)^a\cdot C_b^iC_a^i=0$

2° 當 $2a+2b=4r$ 時，即 $a+b=2r$ ：

我們可利用二項式定理展開，來驗證兩者相等：

$$(1+x)^i\cdot(1-x)^i=(1-x^2)^i$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{a=0}^{i}C_a^ix^a\right)\cdot\left(\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_b^ix^b\right)=\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^ix^{2r}$$

$$\Rightarrow\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i=\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i$$ ，得證。❑

下一節，我們再利用簡單的組合方法，來證明上式為何成立。

國立政治大學 National Chengchi University

3-3 利用組合方法證明 $i=j$ 時的等式成立

設 A 為男生所形成的集合：$A=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_i\}$

B 為女生所形成的集合：$B=\{y_1,y_2,y_3,\cdots,y_i\}$

現從 A、B 中共挑選 2r 人，選出來的人為 $C=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_a},y_{j_1},y_{j_2},\cdots,y_{j_b}\}$

且 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_a}\in A$，$y_{j_1},y_{j_2},\cdots,y_{j_b}\in B$，其中 $i_1<i_2<\cdots<i_a$，$j_1<j_2<\cdots<j_b$

【定義 3.3】

若 $(x_p\in C$，$y_p\in C)$，則我們稱其為成對元素

若 $(x_p\in C$，$y_p\notin C)$ 或 $(x_p\notin C$，$y_p\in C)$，則我們稱其為單身元素。

【定理 3.4】

$$\frac{1}{2^{i+i}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{i}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^i(k-2a-2b)^n=\frac{1}{4^i}\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_r^i(k-4r)^n$$，其中 $a+b=2r$

證明：

(i)當 r 為奇數時

若選出來的男女生人數皆為偶數，不失一般性的情況下，假設 $a\geq b$，

則存在 $x_p\in C$ 為第一個單身元素，我們將 x_p 換成 y_p，即可將男女生人數皆調整成奇數，

但調整後，缺少皆為 r 對的成對元素，由此，我們可得知

$$\sum_{k=0}^{2r}C_{2r-2k}^iC_{2k}^i+C_r^i=\sum_{k=0}^{2r}C_{2r-2k-1}^iC_{2k+1}^i$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{2r}C_{2r-2k}^iC_{2k}^i-\sum_{k=0}^{2r}C_{2r-2k-1}^iC_{2k+1}^i=-C_r^i=(-1)^r\cdot C_r^i$$

$$\Rightarrow\sum_{b=0}^{2r}(-1)^b\cdot C_{2r-b}^iC_b^i=(-1)^r\cdot C_r^i$$

(ii)當 r 為偶數時

若選出來的男女生人數皆為奇數，不失一般性的情況下，假設 $a \geq b$，

則存在 $x_p \in C$ 為第一個單身元素，我們將 x_p 換成 y_p，即可將男女生人數皆調整成偶數，

但調整後，缺少皆為 r 對的成對元素，由此，我們可得知

$$\sum_{k=0}^{2r} C_{2r-2k-1}^{i} C_{2k+1}^{i} + C_r^i = \sum_{k=0}^{2r} C_{2r-2k}^{i} C_{2k}^{i}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{2r} C_{2r-2k}^{i} C_{2k}^{i} - \sum_{k=0}^{2r} C_{2r-2k-1}^{i} C_{2k+1}^{i} = C_r^i = (-1)^r \cdot C_r^i$$

$$\Rightarrow \sum_{b=0}^{2r} (-1)^b \cdot C_{2r-b}^{i} C_b^i = (-1)^r \cdot C_r^i$$

由以上(i)、(ii)之討論情形，可用組合證明 $\sum_{b=0}^{2r} (-1)^b \cdot C_{2r-b}^{i} C_b^i = (-1)^r \cdot C_r^i$ 成立。

$$\sum_{b=0}^{2r} (-1)^b \cdot C_{2r-b}^{i} C_b^i = (-1)^r \cdot C_r^i$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{i} \sum_{b=0}^{2r} (-1)^b \cdot C_{2r-b}^{i} C_b^i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \cdot C_r^i$$

$$\Rightarrow \sum_{2r-b=0}^{i} \sum_{b=0}^{i} (-1)^b \cdot C_{2r-b}^{i} C_b^i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \cdot C_r^i$$

$\therefore \sum_{a=0}^{i} \sum_{b=0}^{i} (-1)^b \cdot C_a^i C_b^i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \cdot C_r^i$，其中 $a+b=2r$ ，得證。 ❑

以下利用 $i=j=3$，來說明 [定理 3.4]。

【例題 3.5】

利用組合方法說明等式 $\sum_{a=0}^{3} \sum_{b=0}^{3} (-1)^b \cdot C_a^3 C_b^3 = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \cdot C_r^3$ 成立，其中 $a+b=2r$。

$$\sum_{a=0}^{3} \sum_{b=0}^{3} (-1)^b \cdot C_a^3 C_b^3 = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \cdot C_r^3 \text{，其中 } a+b=2r$$

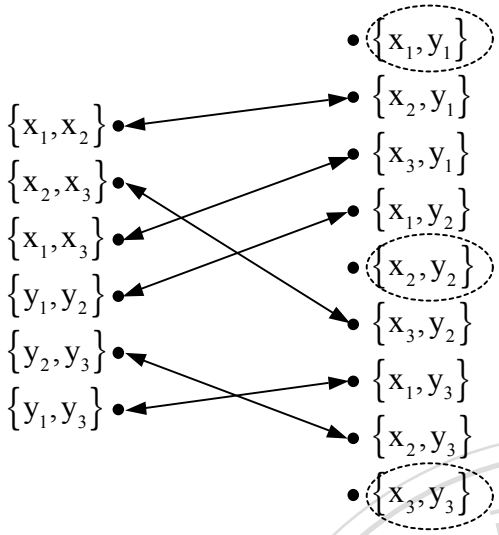
即 $\sum_{r=0}^{3} \sum_{b=0}^{2r} (-1)^b \cdot C_{2r-b}^3 C_b^3 = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \cdot C_r^3$

(i) $r=0$：3 男 3 女共選 0 人等於 3 對成對元素選 0 對

即 $C_0^3 C_0^3 = 1 = C_0^3$，顯然成立

(ii) $r=1$：3 男 3 女共選 2 人的情況，分析如下：

男女皆為偶數　　男女皆為奇數



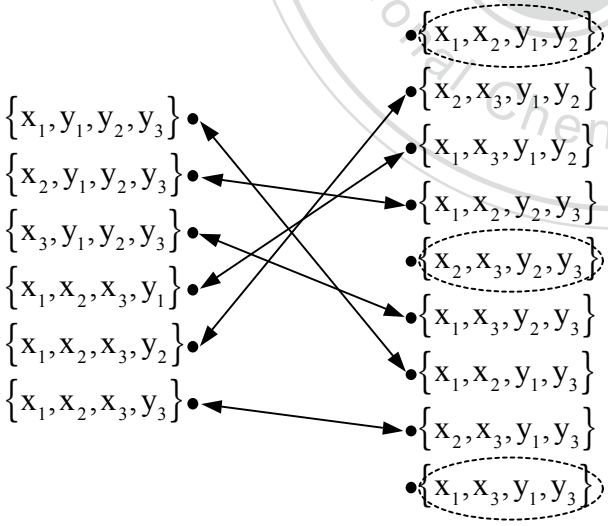
顯然為一對一函數，但非映成，且非映成的部分皆為 1 對的成對元素。

因此，$C_2^3C_0^3+C_0^3C_2^3+C_1^3=C_1^3C_1^3 \Rightarrow C_2^3C_0^3-C_1^3C_1^3+C_0^3C_2^3=-C_1^3=-3$

$$\Rightarrow \sum_{b=0}^{2}(-1)^b\cdot C_{2-b}^3C_b^3=(-1)^1\cdot C_1^3$$

(iii) $r=2$：3 男 3 女共選 4 人的情況，分析如下：

男女皆為奇數　　男女皆為偶數



顯然為一對一函數，但非映成，且非映成的部分皆為 2 對的成對元素。

因此，$C_1^3C_3^3+C_3^3C_1^3+C_2^3=C_2^3C_2^3 \Rightarrow -C_1^3C_3^3+C_2^3C_2^3-C_3^3C_1^3=C_2^3=3$

$$\Rightarrow \sum_{b=0}^{4}C_{4-b}^3C_b^3\cdot(-1)^b=C_2^3\cdot(-1)^2$$

國立政治大學 National Chengchi University

(iv) $r=3$：3 男 3 女共選 6 人等於 3 對成對元素選 3 對 $\Rightarrow C_3^3C_3^3=1=C_3^3$，顯然成立

由以上(i)~(iv)討論，可得

$$C_0^3C_0^3+\sum_{b=0}^{2}(-1)^b\cdot C_{2-b}^3C_b^3+\sum_{b=0}^{4}(-1)^b\cdot C_{4-b}^3C_b^3+C_3^3C_3^3=C_0^3+(-1)^1\cdot C_1^3+(-1)^2\cdot C_2^3+C_3^3$$

$$\Rightarrow \sum_{b=0}^{0}C_{0-b}^3C_b^3+\sum_{b=0}^{2}(-1)^b\cdot C_{2-b}^3C_b^3+\sum_{b=0}^{4}(-1)^b\cdot C_{4-b}^3C_b^3+\sum_{b=0}^{6}C_{6-b}^3C_b^3$$

$$=(-1)^0\cdot C_0^3+(-1)^1\cdot C_1^3+(-1)^2\cdot C_2^3+(-1)^3\cdot C_3^3$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{3}\sum_{b=0}^{2r}(-1)^b\cdot C_{2r-b}^3C_b^3=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r\cdot C_r^3$$

$$\Rightarrow \sum_{2r-b=0}^{3}\sum_{b=0}^{3}(-1)^b\cdot C_{2r-b}^3C_b^3=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r\cdot C_r^3$$

令 $a=2r-b$

所以 $\sum_{a=0}^{3}\sum_{b=0}^{3}(-1)^b\cdot C_a^3C_b^3=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r\cdot C_r^3$，其中 $a+b=2r$，得證。❑

由 [例題 3.5]可確定，在 $i=j$ 的情況下，由組合證明亦可得到相同的公式，且比生成函數更容易讓人理解且算式也較簡單。

國立政治大學 National Chengchi University

第四章　利用多項式定理的深入探討

長度為 n 的 k 元數列$\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，我們由不同的方法求得的結論，可更深入探討解釋。

【定理 4.1】

$$2^k\cdot k^n=\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}a_n \text{，其中 } a_n=\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^j(k-2a-2b)^n$$

證明：

$$\because\left[\left(\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right)+\left(\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right)+e(x)\right]^k$$

$$=\left(2\cdot e(x)\right)^k=2^k\cdot\left(e(x)\right)^k=2^k\cdot e(kx)=2^k\cdot\sum_{n\ge 0}\frac{(kx)^n}{n!}=\sum_{n\ge 0}\frac{2^k\cdot k^n}{n!}x^n\cdots\cdots①$$

由多項式定理，可得

$$\left[\left(\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right)+\left(\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right)+e(x)\right]^k$$

$$=\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\left(\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right)^i\cdot\left(\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right)^j\cdot\left(e(x)\right)^{k-i-j}\cdots\cdots②$$

綜合①、②兩式，

$$\sum_{n\ge 0}\frac{2^k\cdot k^n}{n!}\cdot x^n=\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\left(\frac{e(x)+e(-x)}{2}\right)^i\cdot\left(\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right)^j\cdot\left(e(x)\right)^{k-i-j}$$

$$=\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n!}x^n$$

$$\therefore\sum_{n\ge 0}\frac{2^k\cdot k^n}{n!}=\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n!}=\sum_{n\ge 0}\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\cdot\frac{a_n}{n!}$$

$$\Rightarrow 2^k\cdot k^n=\sum_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\cdot a_n$$ ，得證。❑

國立政治大學 National Chengchi University

根據 [定理 4.1] 的結論，長度為 n 的 k 元數列$\{0,1,2,\cdots,k-1\}$

我們可以將等式$2^k \cdot k^n = \sum_{\substack{i+j\le k \\ i,j\ge 0}} \frac{k!}{i!\cdot j!\cdot (k-i-j)!} a_n$，解釋如下：

左式為先計算每個數字是否有奇、偶數的限定，且決定 n 個位置各數字的方法。

右式為討論奇偶個數且決定其限定的數字，並再計算各情況的個數，最後加總為所有的總和。

由[定理 2.2]，可以整理等式為

$$2^k \cdot k^n = \sum_{\substack{i+j\le k \\ i,j\ge 0}} \frac{k!}{i!\cdot j!\cdot (k-i-j)!} \cdot \frac{1}{2^{i+j}} \cdot \sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j} C_a^i C_b^j (-1)^b \cdot (k-2a-2b)^n$$

以下利用 $k=3$，$n=2$ 來說明。

【例題 4.2】

長度為 2 的 3 元$\{0,1,2\}$數列，討論限定的奇偶個數，再依各情況去決定數字並加以計算。

長度為 2 的 3 元數列中，有 i 個偶數，j 個奇數，3-i-j 個不限制其奇偶

(1) i=0 , j=0

$$\frac{3!}{0!\cdot 0!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{2^{0+0}} \sum_{a=0}^{0}\sum_{b=0}^{0} (-1)^b \cdot C_a^0 C_b^0 \cdot (3-2a-2b)^2 = 9$$

00　01　02　10　11　12　20　21　22

共 9 個數列。

(2) i=1 , j=0

$$\frac{3!}{1!\cdot 0!\cdot 2!} \cdot \frac{1}{2^{1+0}} \sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{0} (-1)^b \cdot C_a^1 C_b^0 \cdot (3-2a-2b)^2 = 15$$

$\boxed{0}$ 為偶: $\boxed{0}\boxed{0}$　11　12　21　22

$\boxed{1}$ 為偶: 00　02　$\boxed{1}\boxed{1}$　20　22

國立政治大學 National Chengchi University

$\boxed{2}$ 為偶: 0 0　0 1　1 0　1 1　$\boxed{2}\boxed{2}$

共 15 個數列。

(3) i=0 , j=1

$$\frac{3!}{0!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2^{0+1}}\sum_{a=0}^{0}\sum_{b=0}^{1}(-1)^b\cdot C_a^0C_b^1\cdot(3-2a-2b)^2=12$$

$\boxed{0}$ 為奇: $\boxed{0}1$　$\boxed{0}2$　$1\boxed{0}$　$2\boxed{0}$

$\boxed{1}$ 為奇: $0\boxed{1}$　$\boxed{1}0$　$\boxed{1}2$　$2\boxed{1}$

$\boxed{2}$ 為奇: $0\boxed{2}$　$1\boxed{2}$　$\boxed{2}0$　$\boxed{2}1$

共 12 個數列。

(4) i=1 , j=1

$$\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2^{1+1}}\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{1}(-1)^b\cdot C_a^1C_b^1\cdot(3-2a-2b)^2=12$$

$\boxed{0}$ 為偶 $\boxed{1}$ 為奇: $\boxed{1}2$　$2\boxed{1}$

$\boxed{1}$ 為偶 $\boxed{0}$ 為奇: $\boxed{0}2$　$2\boxed{0}$

$\boxed{2}$ 為偶 $\boxed{0}$ 為奇: $\boxed{0}1$　$1\boxed{0}$

$\boxed{0}$ 為偶 $\boxed{2}$ 為奇: $1\boxed{2}$　$\boxed{2}1$

$\boxed{1}$ 為偶 $\boxed{2}$ 為奇: $0\boxed{2}$　$\boxed{2}0$

$\boxed{2}$ 為偶 $\boxed{1}$ 為奇: $0\boxed{1}$　$\boxed{1}0$

共 12 個數列。

(5) i=2 , j=0

$$\frac{3!}{2!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2^{2+0}}\sum_{a=0}^{2}\sum_{b=0}^{0}(-1)^b\cdot C_a^2C_b^0\cdot(3-2a-2b)^2=9$$

$\boxed{0}$,$\boxed{1}$ 為偶: $\boxed{0}\boxed{0}$　$\boxed{1}\boxed{1}$　2 2

$\boxed{0}$,$\boxed{2}$ 為偶: $\boxed{0}\boxed{0}$　1 1　$\boxed{2}\boxed{2}$

$\boxed{1}$,$\boxed{2}$ 為偶: 0 0　$\boxed{1}\boxed{1}$　$\boxed{2}\boxed{2}$

共 9 個數列。

國立政治大學 National Chengchi University

(6) i=0 , j=2

$$\frac{3!}{0!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2^{0+2}}\sum_{a=0}^{0}\sum_{b=0}^{2}(-1)^b\cdot C_a^0C_b^2\cdot(3-2a-2b)^2=6$$

$\boxed{0},\boxed{1}$ 為奇: $\boxed{0}\boxed{1}$ $\boxed{1}\boxed{0}$

$\boxed{0},\boxed{2}$ 為奇: $\boxed{0}\boxed{2}$ $\boxed{2}\boxed{0}$

$\boxed{1},\boxed{2}$ 為奇: $\boxed{1}\boxed{2}$ $\boxed{2}\boxed{1}$

共 6 個數列。

(7) i=1 , j=2

$$\frac{3!}{1!\cdot 2!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{2^{1+2}}\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{2}(-1)^b\cdot C_a^1C_b^2\cdot(3-2a-2b)^2=6$$

$\boxed{0}$ 為偶, $\boxed{1},\boxed{2}$ 為奇: $\boxed{1}\boxed{2}$ $\boxed{2}\boxed{1}$

$\boxed{1}$ 為偶, $\boxed{0},\boxed{2}$ 為奇: $\boxed{0}\boxed{2}$ $\boxed{2}\boxed{0}$

$\boxed{2}$ 為偶 $\boxed{0},\boxed{1}$ 為奇: $\boxed{0}\boxed{1}$ $\boxed{1}\boxed{0}$

共 6 個數列。

(8) i=3 , j=0

$$\frac{3!}{3!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{2^{3+0}}\sum_{a=0}^{3}\sum_{b=0}^{0}(-1)^b\cdot C_a^3C_b^0\cdot(3-2a-2b)^2=3$$

$\boxed{0},\boxed{1},\boxed{2}$ 為偶: $\boxed{0}\boxed{0}$ $\boxed{1}\boxed{1}$ $\boxed{2}\boxed{2}$

共 3 個列。

由(1)~(8)討論，可得共 9+15+12+12+9+6+6+3=72 個數，與 $2^k\cdot k^n=2^3\cdot 3^2=8\cdot 9=72$ 相同

且，可以加以解釋：

先計算 3 元各數字是否有奇、偶數的限定(2^3)，再決定 2 個位置各位數字的情況(3^2)，所以

共 $2^3\cdot 3^2=72$ 種。

國立政治大學 National Chengchi University

第五章　結論

本文的主旨是以生成函數來推導 k 元數列，與先前兩位學長截然不同。張維格學長的四元數列，以建立雙射函數來討論，當 $k>3$ 時，再以矩陣輔助解之。林宥廷學長的三元數列，先以遞迴關係解法，後再建立函數。相較於兩位學長，本文雖然使用需要具備觀念較多的生成函數，但推導出的公式，可符合任一 k 元數列，不再侷限數字，可一致性的全盤考量，不用因為 k 的大小而改變其計算方式。而在 $i=j$ 時推導出另一公式，利用簡單易懂的組合方法來證明，也較讓一般人可輕易理解！

礙於時間考量，第四章的公式 $2^k\cdot k^n=\sum\limits_{\substack{i+j\le k\\ i,j\ge 0}}\frac{k!}{i!\cdot j!\cdot(k-i-j)!}\cdot\frac{1}{2^{i+j}}\cdot\sum\limits_{a=0}^{i}\sum\limits_{b=0}^{j}(-1)^b\cdot C_a^iC_b^j(k-2a-2b)^n$ 未能相同以簡單的方法證明，實屬遺憾！希望，將來對此問題有興趣的學弟妹們，能共同深入來討論。

國立政治大學 National Chengchi University

參考文獻

1. Brualdi , R. A.：*Introduction to Combinatorics* ,3rd ed , Prentice Hall ,Upper Saddle River , N J , 1999。
2. P.Cameron ： *Combinatorics : Topic , Techniques , Algorithms* , Cambridge University Press , Cambridge, 1994。
3. C.L.Liu：*Introduction to Combinatorial Mathematics* (International editions 2000) , McGraw-Hill。
4. Roberts, F. and Tesman, B.：*Applied Combinatorics,* 2nd ed., Prentice Hall, 2003。
5. Alan Tucker：*Applied Combinatorics* (sixth edition) , John Wiley & Sons ,Inc。
6. Srivastava , H. M. ,and Manocha , H. L.：*A Treatise on Generating Functions* , Halsted Press , New York , 1984。
7. Wilf , H. S.：*generatingfunctionology* , Academic Press,Boston ,1994。
8. 林宥廷：有關三元數列的探討，國立政治大學應用數學系碩士學位論文，2014。
9. 張維格：以雙設函數探討四元數列，國立政治大學應用數學系數學教學碩士在職專班碩士論文，2011。

國立政治大學 National Chengchi University