邏輯學歷史發展之研究

張長芳

壹、前言

邏輯學最初是由古代希腊哲人亞里士多德（Aristotele 384-322 B.C.）所組織起來的一種有系統的學問。以後許多人對它又加上了各種不同的定義。不過，時至今日，吾人如欲再給予邏輯學一個定義的話，就非要眞正能適合現代邏輯學的內容不可。

提起邏輯學的內容問題，自從它被亞里士多德組織起來以後，大約經過兩千年的漫長期間，其實質內容迄未發生過任何變化。在這一段期間內，邏輯學幾乎被認爲已是一種完成了的學問。譬如哲學家康德（I. Kant 1724-1804）就曾經以驚嘆的口氣評論過：「邏輯學自亞里士多德以來，旣沒有進步，也沒有退步。」可是，在那以後大約兩百年的時間，正與康德所預想的相反，發生了令人驚訝的激烈變化。甚而時至今日，這種變化仍在不斷的發展之中。

在這種情況下，如果想概括地求得邏輯學全部內容的定義，實在是一項困難的事。因此，本文僅想從邏輯學歷史的發展，來探討邏輯學的大勢，進而理解其在現代學問體系中所居的地位。同時，爲保持專有名詞的眞義，部份地方仍採用原文表達。

貳、古典邏輯學的歷史

邏輯這個名詞，存在於人類用語言表現自已思考的瞬間。因而，邏輯的歷史也像追溯人類求知的活動開始時期那樣，難以確定其古昔的起源。

不過，要談到邏輯學的歷史，那就不同了。當人類對自己求知活動的語言加以反省，因而發現某種規則性或法則性的時候，同時當人類注意到這種規則性或法則性並不受任何特定語言限制的時候；在這個時候，邏輯學的歷史就可以說開始了。

因此，談邏輯學的起源，在歐洲來說，就可以追溯到紀元前的希腊時代。因而，有若干歷史學家乃說紀元前五世紀中葉所

興起的「伊利亞派」(The Eleatic School) 的哲學家們，就是最初有意識地使用今日邏輯法則的人(註一)。不過，不管它的創始者是誰，使邏輯學飛躍地進展，成爲一門學問，並且具有整然體系的人，那就是偉大的希臘哲學家亞里士多德 (Aristotele 384-322 B. C.)。

一、亞里士多德的邏輯學

亞里士多德給後世遺留下大批的著作，其中關於邏輯學的著作，我們總稱之爲「工具論」(註二) (Organum) 即亞氏邏輯學論文集，其內容包括左列六篇：

1.範疇論 (De categoriis)

2.命題論 (De interpretatione)

3.分析論前書 (Analytica priora)

4.分析論後書 (Analytica posteriora)

5.題目論 (Topica)

6.詭辯的論駁 (De sophisticis elenchis)

儘管康德曾錯誤的說過：「邏輯學自亞里士多德以來，既未進步，也未退步。」由此也正可看出亞里士多德在古典邏輯學中所佔地位的重要。實際來說，由邏輯學整體發展中的地位來研究，亞氏才配稱爲具備學問體系邏輯學的創始者。因爲：

1.他曾經記述了形式的法則及規則，他是最初專以此等規則爲研究對象的邏輯學者。

2.形式的包含關係、變項的使用、邏輯諸法則的公理化等等邏輯學的基本思考方法，都是由他開端的，同時也支配着今日的邏輯學。

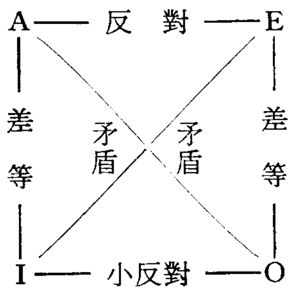
我們並不知道亞里士多德對邏輯學作什麼樣的定義。不過，我們可以知道他並未考慮將邏輯學與其他學問成爲併立的學問

；他認爲邏輯學應該是立於學習其他學問之前的一種工具地位。但這並不表示他輕視邏輯學。他以爲邏輯學的中心課題乃是推理（Syllogismos）。他對此作過定義說：「假若確立某項事情的話，就會因此之故，必然地產生與此確立的事情相異的議論。」很明顯地，他將演繹的推理體系作爲了邏輯學的主要對象。

現在我們將亞里士多德的邏輯學特別是以「文章構成法」（Syntax）爲中心的形式邏輯學，作簡單的介紹。

亞里士多德所認爲最基本的命題是用相當於「是……」以及「不是……」的動詞所結合起來的兩個名詞的命題。亦卽對相當於文法上的主語部份，放上表示個別物體的名詞，這固無不可；但實際在推理之際，就只准放上表示集合的名詞。同時，各名詞並且要暗含着存在的假定。

亞氏完成了古典邏輯學直接推理的「對當方形」如左：



A命題與O命題的關係 ＼
E命題與I命題的關係 ／ 爲「矛盾對當」

A命題與I命題的關係 ＼
E命題與O命題的關係 ／ 爲「差等對當」

A命題與E命題的關係—爲「反對對當」

I命題與O命題的關係—爲「小反對對當」

在此種對當關係（Opposition）圖解之中。可以看出隨着一個命題的眞僞，卽可決定他方命題的眞僞。（註三）

於「對當關係」之外，他並且研究到「換位」（Conversion）問題。他證明了。

1. 將E命題換位，得E命題。
2. 將I命題換位，得I命題。
3. 將A命題換位，得I命題。

亞氏關於直接推理，揭出兩個邏輯學上的根本原則。卽矛盾律(Principle of contradiction)與排中律 (Principle of excluded middle)。所謂矛盾律，它是可以這樣表達：「同一的事物，由於相同的觀點，不可能同時屬於並且不屬於其他同一的事物」。依亞氏的見解，認爲在所有邏輯學原理之中，是最確實的原理。無論對誰都不會有錯誤。至於排中律，它是可以這樣表達：「在兩個矛盾事物之間，不得有任何中間的東西。我們必須肯定或否定其中之一方」。

據說在亞氏後期的思想裡，他對這一邏輯法則深信不疑，認爲它是普遍妥當的原理。時至今天我們來看，矛盾律與排中律也確是恆眞式的。而特別應該將它與其他無數恆眞式相區別開，而置之於邏輯學的崇高地位。其原因，由形式來看它與其他恆眞式固然都具備相同的資格，但它比較其他恆眞式，形式單純，應用於吾人日常生活中的機會較多。

其次我們來討論亞里士多德的三段論法。亞氏非僅把三段論法給形式化了，並且把它細分爲第一格、第二格、第三格。（亞氏並未舉出三段論法的第四格。）同時，對於到第三格爲止的三段論法的格式加以研究，因而確立了探討第四格及「微弱判斷」的十四個三段論法的基礎。

亞里士多德三段論法研究之中，特別可稱爲劃時代的地方。是他將上述十四個式的三段論法，尤其是將第一格的三段論法給演繹起來。因此，他作成了一種關於三段論法的公理體系。根據亞氏自己的說法，認爲公理體系乃是若干尚未論證的公理，加上經過有限還原手續後所演繹出來的公理所共同成立的體系。邏輯的公理其所以爲眞，必須是直觀明顯的。關於此公理體系的邏輯，對三段論法當然也適用了。根據亞氏的看法，第一格各式的妥當問題，由其本身卽可明白。於是他將第二格與第三格各式的三段論法，從這個公理裡，用(1)直接的還原(2)歸謬法。(3) ecthesis 等三種方法加以演繹起來。所謂 ecthesis，乃是由兩個集合重疊部份取出其中某一個體，所用的推論方法。例如：

(1)（因爲所有的M都是P）故P具有M的性質。

(2)（因爲所有的M都是S）故S具有M的性質。

(3)將包含於M中的某種個體N取出。

(4) P及S都具有N的性質。（由(1)(2)項推論所得）

(5) 有S具有P的性質。（由(4)項推論得來）

前述三段論法實際上相當於古典邏輯學中被稱爲「定言三段論法」的東西。亞氏更進一步的研究「假言三段論法」、「選言三段論法」。據說，他也曾開始研究過今日的「命題邏輯學」「關係邏輯學」。此處對此等問題就從略了。

二、亞里士多德以後的古典邏輯學

亞里士多德引起了被稱爲「逍遙學派」(The Peripathetic School)的一派哲學。他的邏輯學受到這一學派的繼續發揚。此派中有兩位有名的邏輯學家，一爲特歐弗拉斯塔斯 (Theophrastus of Eresos)，一爲與特氏同時代的野屋德莫斯 (Eudemus of Rhodos)。時至今日，還不容易將兩位邏輯學的見解加以區別。(註四)

他們的功績，一方面是繼承亞里士多德推進古典邏輯學的形式化工作；另一方面是給予未來的斯多噶・麥加拉學派 (The Stoic-Megaric School)開闢道路。同時，他們附加了左列形式化的「假言三段論法」，成爲三段論法中的新的種類：

$$\{F(x)\supset G(x)\}\wedge\{G(x)\supset H(x)\}\supset\{F(x)\supset H(x)\}$$

$$\{F(x)\supset G(x)\}\wedge\{G(x)\supset H(x)\}\supset\{\sim H(x)\supset\sim F(x)\}$$

$$\{F(x)\supset G(x)\{\wedge\{\sim F(x)\supset H(x)\}\supset\{\sim G(x)\supset H(x)\}$$

$$\{F(x)\supset G(x)\}\wedge\{\sim F(x)\supset H(x)\}\supset\{\sim H(x)\supset G(x)\}$$

$$\{F(x)\supset H(x)\}\wedge\{G(x)\supset\sim H(x)\}\supset\{F(x)\supset\sim G(x)\}$$

在希臘古代，同以亞里士多德爲祖的「逍遙學派」併立而有相當勢力的就是麥加拉・斯多噶學派。它也曾受過亞里士多德思想的若干影響。這兩派互相對抗，曾經展開過哲學上論爭。不過，由邏輯學的歷史來看，後期斯多噶派邏輯學是繼承麥加拉派邏輯學的發展，就是斯多噶派的初期，兩派之間在邏輯學的根本見解上也無太多相異之處。

麥加拉・斯多噶學派與逍遙學派最大相異之點是，逍遙學派是以集合的邏輯爲中心進行研究；而麥加拉・斯多噶學派則在發展今日的命題邏輯學。研究命題邏輯學重視公理體系的記述，以及徹底反省內含關係，對命題邏輯的若干邏輯語提出眞值表式，以上這些都應歸功於麥加拉・斯多噶學派。關於眞值表式，他們對於命題考慮到其包含的要素命題的眞理函數，然後從這個地方想要追溯到邏輯語究竟做些什麼活動。費路（Philo of Megara）提出了「⊃」的眞理值表，斯多噶提出了左列的排反的「或」（以下將此記號化爲 $\overline{V}$）的眞理值表：

$p\overline{V}q$	q	p
F	T	T
T	F	T
T	T	F
F	F	F

當討論邏輯各種命題的時候，斯多噶派的邏輯學家們，曾將恆眞式與推論法則加以嚴格的區分。推論法則乃是在演繹體系內實施推論時所用的法則；敍述這些問題的時候，需要用抽象語言（Meta-language）。於是，由公理推論定理時的「假使……則……」的關係，與定理所包含的「⊃」，兩者在邏輯學的身份是不同的。

抽象語言與對象語言分離的主要原因，被認爲是「說謊的反論」，後來它被邏輯學家們用各種型式表達出來。但此種基本的型式都是相同的。例如：

「我現在所說的是謊話」

這個命題的結論是眞僞不定（無論假定此命題爲眞或爲僞都有矛盾）。斯多噶派對這類「反論」也曾作爲邏輯學的問題，加以熱烈地研究過。

最後到了斯多噶派的巨擘苦利西波斯(Chrysippus of Soloi 281-208 B. C.)時代，古典邏輯學的創造性活動，才很快地消

失。其原因，一方面因斯多噶學派與逍遙學派所作的鬥爭係屬無益的持續；另一方面因爲兩派的折衷，已得到較易的成功。自此以後，一直到中世紀的一段長時間裡，僅有少數邏輯學家，如波野替烏斯 (Boethius) 等對三段論法分類工作有獨創性的活動。

三、中世紀的邏輯學

中世紀的邏輯學透過了波野替烏斯 (Boethius 約 480–524) 的媒介，接受了古代的遺產。波氏在整個中世紀裡，以曾翻譯並解說亞里士多德的「範疇論」與「命題論」而知名。同時，他自己也著作了包含假言三段論法的三段論法。中世紀的邏輯學正是由此而出發的。原來中世紀的邏輯學是由三個流派互相交錯所構成的。這三個流派，一是被麥加拉・斯多噶學派所擴大的亞里士多德邏輯學；二是基督教神學；三是至中世紀後半期爲止的亞里士多德原著。他們將此項結構適用於日常語言（那時爲拉丁文），並且建立了日常語言的文章構成法及語義的體系。這些都是爲一般所公認的中世紀邏輯學的功績。

中世紀最初的偉大邏輯學家，是阿卑拉德(P. Abelard 1079–1142)。他所著的辯證論 (Dialectica) 最爲著名。在其著作中，曾對命題構成要素作過有系統的研究。他對於：

「蘇格拉底是人，人是動物」。

這句話裡面的「是」稱之爲「繫詞」(Copula)，將它與表現存在的「有」加以區別。從而，當兩個名詞因繫詞而結合成命題的時候，此時的名詞所指示的事物的存在並未被包含在內。他從這一立場出發，將波野替烏斯所傳留下來的傳統邏輯學抽出其中的存在假定。試圖創造他的邏輯學。同時，他更進一步地進行繫詞的研究；以爲由主詞、繫詞、謂詞所形成的定言命題，只要是主詞與謂詞都是代表某種事物，就成爲眞。例如：「人是動物」這一命題，只要是人的名詞與動物的名詞兩者代表共通的對象，就成爲眞。

在阿卑拉德的語言分析之中，特別具有深長意味的，是關於「推斷」(Consequentia) 的分析。他認爲推斷是前提與結論結

合一體的某種必然的關係。依他的看法，推斷在其性質上可分爲兩種。其一，如左列命題：

「假如所有的人都是動物，所有的動物都是生物的話；則所有的人都是生物。」

其中的「人」、「動物」、「生物」等既或任意換置其他名詞，其妥當性仍然不變。亦卽此項推斷，隨着命題的構成形式而爲眞。其二，如左列命題：

「假如蘇格底是人，則蘇格拉底就不是石塊。」

這一命題的眞理性，無論由命題的的構成形式，以及「人」「石塊」的定義來說，都無法保證；只好根據「事物的本質」來推斷了。

再者，阿卑拉德也曾反駁以往的主張。他反駁那種不成結論其前提不可能爲眞，而推斷必然爲眞的主張。他認爲假如此類主張爲眞的話，則由錯誤前提所作之推斷，也會有正確的歸結。他舉列說：

「假使蘇格拉底是石塊的話，則蘇格拉底卽是驢。」

這個例子就是對此的說明。據說因而有一段很長時期困擾中世紀邏輯學者。同時，「包含關係的反論」就是從這開始的。

亞里士多德的全部著作，從五世紀後期，由於民族大遷徙的結果，大部份都散失了，因而與歐洲文化圈也斷絕了消息。一直自十二世紀初期，歐洲的邏輯學家們，關於亞里士多德所持的知識，大部份都是透過波野替烏斯的翻譯而得來的。在另一方面，亞里士多德的原著到了阿拉伯人的手中，他的著作在撒拉遜（Sarocen）帝國裡面，被翻譯出來。於是由阿拉伯語以及希臘語譯成拉丁文的著作，乃向歐洲形成了逆輸入的情勢。

此外，在十三世紀裡很活躍，但却與當時的主流完全分開的邏輯學家還可以舉出兩位來。那就是R培根（Roger Bacon 1214–1292）和陸爾（Raymond Lull 1235–1315）。R培根在研究自然方面強調經驗的方法，後來成了FS培根（Francis Bacon 1561–1626）的先驅。而陸爾則倡導完全用機械的手法以結成概念，俾期獲得眞理。他的提倡本身雖係突然的飛躍，但並未脫出空想的領域。他構想體系化的理想語言，其創意本身竟成了近代許多符號邏輯學家（如來布尼茲）的夢想。

十四世紀的邏輯學家之中以奧卡姆(Ockham, W. 1295–1349)最爲知名。他的邏輯學主要著作爲「邏輯學大全」(Summa Totius Logicae)。據說這本書是最先以邏輯學體系的綜觀爲目標的著作。

依據以往的邏輯學史家們的見解，認爲中世紀邏輯學，單純是亞里士多德邏輯學的延長，而稍將細部加以裝配而已。不過我們細加研討，中世紀邏輯學的業績，也有可與亞里士多德以及麥加拉・斯多噶相比擬的地方。其中特別是在中世紀時期所發展的領域，可以舉出左列三點：

(1)「名詞的假設」(Suppositio tenminorum) 理論的。

(2)「推斷」(Consequentia)

(3)關於邏輯及語言的哲學問題的處理。（如「說謊的反論」也包含在此問題內）

現在將「假設的理論」以及「說謊的反論」與現代邏輯學的關係簡述如左：

「假設」(Suppositio) 的理論提出於十二世紀的後半期，以後乃引起了中世紀邏輯學世界很大的爭論。假使把它用現代意義加以整理的話，可成左述情事。

「因爲蘇格拉底、柏拉圖、亞里士多德……都是人，所以具有人的性質。反過來說，我們用「人」這個字來理解蘇格拉底、柏拉圖、亞里士多德……共同具有的性質。假若用「人」這個字來作某種討論的話，我們就可以省略一個一個地去討論如蘇格拉底、柏拉圖、亞里士多德……等具體的人物。譬如：我們主張說：「人是生物」，這時候我們不必一個一個的說蘇格拉底是生物，柏拉圖是生物……等就可以解決。換言之，因對於「人」的討論，就可以作爲代用關於蘇格拉底的討論、關於柏拉圖的討論……等。因此，中世紀的邏輯學家們認爲這樣的事情是可能的，亦卽用「人」這個名詞，可以代表各個個體。（甚至個體性質）

不過，在此情況下，不能依現代的解釋，很妥當的來代表所謂「人」的名詞與人的集合體中成員個人的一般性關係。在中世紀時期裡，關於一個一個的獨立名詞，則不問其代表什麼，只對某項文章中的名詞，作爲假設討論的對象。所謂代表乃是命

題脈絡中的名詞語義的概念。

我們今天所以要重視這個問題，並不是重視此概念的本身，乃是要透過此項概念的研究，以了解中世紀邏輯學的語言邏輯構造的方法。因此，左列的例子其意味就深長了：

(甲)「人是名詞」這句話。與

(乙)「人爲萬物之靈」這句話兩相比較。

我們依據「假設」的理論，這兩句話中所包含「人」的名詞，完全以不同的內包作爲「代表」：(甲)句裡的「人」可理解爲某種語言體系中的符號。(乙)句中的「人」乃表示人的觀念。我們在此可以明白，它可以區分爲：一種是敍述有關語言的問題，另一種是討論用語言敍述什麼的問題。如果以現代方法來說，抽象語言與對象語言區別的想法，早已在這「假設」的理論裡加以認識了。

同時，現在的限量符號理論的萌芽，也可由這地方看出來。中世紀的邏輯學家將代表機能分爲許多種類，他們也曾對每一類別作過哲學的及邏輯的研究。其中在邏輯學上較有份量的是「人稱的假設」(Suppositio personalis)。它還可以分爲三類。卽：

確定的假設 (S. determinata)(例：某「人」跑着。)

曖昧的假設 (S. Confusa)

單純曖昧的假設

(例：所有的人都是「動物」。)

曖昧但周延的假設

(例：所有的「人」都是動物。)

(舉例中有「　」內的字，表示其名詞的假設發生問題。)

某人跑着這句話，其中「人」字代表着「特定」的個人。再有，被稱爲曖昧的假設的原因，是因爲該名詞代表着許多個體；可是却在形式上代表着分配於各個個體上的一個個體。此外，一個名詞能代表它個體全部應該表現的性質的時候，其名詞的假設就可以稱爲「是周延的」。

透過以上的分類，中世紀的邏輯學家們所思考的問題，就是今日的量化理論（關於限量符號用法的理論）。他們並未將這個理論作限量符號予以單獨地取出來，而只是專心一意地想對命題中的個個名詞，運用語義論的分類，加以確立起來。據說，奧卡姆當時已經對包含行使「確定的假設」概念的命題（卽包含的命題），認爲是選言命題。對包含行使「曖昧但周延的假設」概念的命題（卽包含∀的命題）認爲係連言命題了。

「假設」的概念過於繁雜，而且概念規定本身也不明確，因此，到了近代幾乎全被丟棄了。只要少數的周延概念，因在構成推論規則上尙有用途，所以被保留下來。隨着時代的轉變，周延概念也與其本來保持的全稱符號（所有的……）關係疏遠了；結果，只有與名詞指示的集合全體有關，因而使用該指示名詞時，方能稱爲「周延」。

古典邏輯學的A、E、I、O各式的主詞、謂詞的周延不周延問題，如左列情況：

命題	A	E	I	O
主詞	周延	周延	不周延	不周延
謂詞	不周延	周延	不周延	周延

當十五世紀終了的時候，大家都使用這個概念的「三段論法的規則。」也是今天古典邏輯學規則中最有名部份：

甲、前提的媒介概念，最少須有一次周延。

乙、不得將在前提中未周延的概念，在結論時作爲周延。

最後，對「說謊的反論」稍加討論。當十二世紀末期，邏輯學家們重行研究亞里士多德的時候，特別惹起他們注意的，就是亞里士多德的「詭辯的論駁」(De sophlisticis elenchis)。於是，「說謊的反論」也由此得到暗示，並且作爲頭腦的訓練而大加研究。到了後來，在「不能解決的問題」的名義下成了邏輯學上的一項重要題目。同時，也對反論給了各種各樣的評價。譬如：

蘇格拉底說：「柏拉圖所說的是僞的」。

柏拉圖說：「蘇格拉底所說的是眞的」。

然後，兩人此外未說任何話。

那麼，蘇格拉底所說的究竟是眞還是僞呢？

圍繞着此項的難題，曾提出了各種解決方案。不過，無論那一個方案，都未達到由於確定語言水準所得的現代意義的解決。

這類問題一直到一九一〇年懷海德和羅素共同發表了他的「數學原理」(Principia Mathematica)，牽涉到許多邏輯學語言的問題。在這裡羅素才第一次解決了一千多年來一直使人困惑的一個哲學難題。首先羅素在這一個問題上，建立了他的「型範論」(Theory of Types)，指出這一類難題的產生，是由於語言運用的不適當。譬如一個種類的總稱，不能是一個種類的一份子，如同不論力氣多大的人，不能把自己舉起來一般。(一本書目的目錄，用不着把自己列爲內容)。因此，我們在這裡所面對的，不是哲學問題，而是一個語言問題。從而許多學科像一窩蜂似的全都發現了語意思考對他們的重要。同時也導引起人們對現代邏輯語意方面有系統的研究。(註五)

四、近代的邏輯學

中世紀被稱爲人類文化的黑暗時期，但邏輯學却屬例外。而古典邏輯學的黑暗時期，無寧說是近代開始的。因爲在文藝復

與時代，數學與物理學有突飛的進步，人們從未知的領域中感到古典邏輯偏重演繹，只能由已知的前提推知本已蘊涵其內的結論，殊不足以發見新知，來適應科學研究的需要，各方皆欲起而脫離亞氏邏輯的束縛。這些反傳統的思想與主張，若從歷史淵源方面追溯，其具有代表性者，當推英國學者培根(Frances Bacan 1561–1626)，他首先用一種新邏輯，名曰「發明新知的邏輯」，以與亞氏邏輯對抗。他認爲三段論式之論證形式，只宜應用於一般通俗科學、如道德學、法律學、政治學與神學中。而在物理學中，則須用種種努力，以研究自然之理，不似與人爭辯，若用三段論式，卽獲不到眞理。（因極精細的辯論，決不符合於自然變化之法則也）遂著新工具（Novum Organum）一書，來提倡歸納法理論。（註六）但未能進一步構成較爲嚴密的歸納邏輯。

到了十九世紀，另一英國哲學家穆勒（John Stuart Mill 1806–1873）更加補充，完成了求因果關係的歸納五法，（註七）具體地發展爲歸納科學運用的方法，在他劃時代的邏輯名著「邏輯體系」（A System of Logic 1843）一書出版後，奠立了近代科學研究法的基礎。

儘管人們在治學的探究中，多堅決地信賴「自然的齊一」與「因果的秩序」，然在歸納的過程中，以偏概全的推論，永遠不免有發生錯誤的可能性。因而其歸納理論頗爲人所議，認爲其輕視假設之價值及數學在歸納科學中之功用。尤其演繹法在推論形式中仍然是科學研究所不可缺少的過程。於是遂把歸納法與演繹法並存，視爲邏輯學上兩大法則。如美國的杜威（John Dewey 1859–1952）倡導實驗邏輯（Experimental Logic）便是綜合歸納與演繹原理作爲研究思想歷程的手段。

而後實驗邏輯，就以「探究」之方法，實驗之程序，對於一切活動經驗資料，作精細之探討。也就是在思考態度方面，以詳細分析來代替大規模的斷定，以明白的探究來代替暫時的確信，以微小的事實來代替那種極頂曖昧的觀念。因而吾人之一切觀念與理論，須常與事實接觸，而受事實之證驗。此處對此問題就從略了。

培根（Frances Bacan）與穆勒（J. S. Mill）所倡導的歸納邏輯與演繹邏輯在知識尋求上，一樣需要中詞的媒介，二者的分別，僅中詞與主詞和謂詞的關係不同而已。（註八）歸納法雖爲學者極力提倡，但欲求得普遍的眞理，相當困難。尤其對亞氏邏輯學而言，沒有多大益助。所以古典邏輯學在近代幾乎等於沒有發展。現代著名的邏輯史學家波秦斯基（I. M. Bochenski）

曾作左列的敍述：

『形式邏輯學被近代哲學所激烈地忽視，在這段時期裡完全落入了「黑暗的衰退期」。立於指導者立場的哲學家中，可稱為邏輯學家的只有來布尼玆（G. W. Leibniz）一人，其他哲學家們連形式邏輯學的一二三段都不明瞭的也很多』。因而，我們說近代在邏輯學史發展上，它是黑暗時期，並不為過。

叁、符號邏輯學的歷史

符號邏輯學整備成今日之體裁，這是自十九世紀後半期的數學家弗瑞格（G. Frege 1848-1925）所開始的。但是，對於古典邏輯學想樹立一種新的邏輯學的努力，則可追溯到很久以前去。

想將傳統邏輯學與符號邏輯學相區別的人，乃因他對於後者特別抱有理想。兩者的區別具體說來，後者的特點是：

甲、變換日常語言的音標文字，使用表意文字。

乙、演繹方法的徹底。

丙、語意具有特定領域，並且使用變項等。（註九）

我們假若探討此一意義的「符號邏輯學」歷史的語，則可發現在來布尼玆（G. W. Leibniz 1646-1726）時代，此一新的邏輯學觀念已經被提出了。

一、來布尼玆的普遍數學

來布尼玆的主要著作曾用「普遍學」（Scientia Universalis）「結合術」（Ars Combinatoria）「邏輯計算」（Calculus rationator）「普遍數學」（Mathematique Universelle）等不同的名稱。所謂普遍數學，就是將所有的概念單純地分解成不含矛盾的小數要素，同時，假如發理表現此要素的符號的話，則根據此符號（一種數學）的結合，非僅可以發現旣知的眞理，並且可

以發現新的眞理。於是他對自然科學、形而上學、倫理學等一切學問，提供了方法論。據說他曾終生抱定此普遍數學的觀念。他更進一步地想，所有的學問都應該運用這種方法並依據理想的語言加以改寫；也就是使之重新構成編入一部龐大的百科全書之中。吾人今日仍然可以由此十七世紀哲學家的思想之中，讀到支配符號邏輯學理想的一端。

不過，來布尼茲本身僅僅發表了普遍數學以及依此爲基礎的理想語言的構想；但却並未將它的具體構成拿出來。吾人僅能知道他對傳統邏輯學（平常的集合邏輯學）的兩三個符號化的嘗試而已。其嘗試的一端例學如左：

現在，將A、B任意集合起來，將A乘上B作爲A、B的共通部份的時候，可以表示如左：

A式：$A \times B = A$

E式：$A \times B$：不存在

I式：$A = B$存在

O式：$A \times B \neq A$

假如應用此項表示，我們在「A存在着」的假定之下，可簡單地證明差等對當、反對對當，小反對對當等項。來布尼茲所學出的，可以認爲係今日所謂的「集合的邏輯」的原型。

來布茲在此以外，也曾經考慮過其他符號化與算法。譬如：替代前項的的「×」而採用「＋」及引用減法等。不過，來布尼茲所實施的符號邏輯學研究並不詳細。只能說：因爲他的開始研究符號邏輯學，使符號邏輯學得以樹立了基本趨勢；這點有很大的歷史意義。一直到二十世紀開頭爲止，被哲學家所忽視的來布尼茲的此種構想（樹立以符號邏輯學爲樞紐的普遍科學的體系），甚至今天來講，吾人談論到符號邏輯學的發展與電子計算機的威力的時候，仍然不能不承認來布尼茲早已達成了它的一半路程了。

二、來布尼茲以後的發展

符號邏輯學的歷史，自從天才哲學家來布尼茲出現以後，幾乎有一個世紀期間，都是苦惱於停滯狀態之中。在這段期間裡，努力使來布尼茲的意圖得以開花結果的邏輯學家，可以舉出幾個來。譬如郎波特 (J. H. Lambert) 郝蘭特 (Holland) 等，以及與布勒 (G. Boole 1815–1864) 同時代的戴莫根 (De Morgan 1806–1878)。此等繼承來布尼茲理念的先驅們也遭遇到來布尼茲所無法超越的障礙。亦即是：

(1)將內包的立場與外延立場予以嚴格區分的問題。

(2)將傳統邏輯學加以符號化時，自然產生的「存在問題」的問題。

(3)忠實地作與數學算法的類推所無法避免的不合理問題。

(4)超越傳統邏輯學的束縛，建設新的邏輯學所遭遇的問題；例如：「關係的邏輯」之問題。

在所指之(1)，就是左列的事情：

就傳統的邏輯學來說，譬如，命題中包含的主詞或謂詞，有時是表現具備某種意義內容的抽象「觀念」；有時其意義則是具體的集合某種具體個體從而表現「集合」。因此，其符號化的工作也就各不相同了。前者是內包的立場；後者為外延的立場假如將此等議論擴張到命題上去的話：在內包的立場，對命題要考慮到它的意義內容；至於在外延的立場，對命題則僅照顧它的真偽觀念而已。假如是今日的我們，見到內包性的語言，就會很容易想到用數學的符號化是很難辨到的。茲以名詞為例，內包性的概念敘述「存在」，幾乎是辦不到的。將特殊命題由內包的立場加以符號化的事情，連言也是不可能。同時，就命題來說，假如由內包的立場，想作命題間邏輯的結合（所謂邏輯語），無論是誰都難以用可理解的方法加以說明。即使勉強地將它表現出來，仍然極不易使它與數學的算法相平行。因此，來布尼茲以後的符號邏輯學，乃捨棄了內包的立場，而站在外延的立場，方得到很大的發展。這點隨後將在討論布勒 (G. Boole, 1815–1864) 的時候再加分析。

至於前述(3)的意義，大概如次：

譬如：我們現在用「＋」來表現兩個內包的概念之和：

人＝動物＋理性

可是在這種情形下，對於「一」的情況情況則無法得到圓滿的定義。我們用算術類推的話，就變成：

動物＝人－理性

這樣的推算就不行了。

三、布勒的集合邏輯

假如我們因來布尼茲爲符號邏輯學打好了基礎，而稱他爲符號邏輯學的創始人的話：就可以稱英國的數學家布勒(G. Boole 1815-1864)爲符號符號邏輯學的第二創始人。因爲布氏曾將符號邏輯學大加整理，提出了完全接近公理體系的意見。他之所以能獲得這種榮譽的原因有二：

(一)紙粹用符號體系來研究公理體系

(二)在從事符號體系解釋的時候，能澈底地維持着外延的立場。

布勒邏輯學的主要著作，爲「思考的法則」(An Investigation of the Laws of Thought 1854)。他所要加深基礎之處即今日被稱爲「集合的邏輯」。據布勒的意見，邏輯乃是操作人類集合（不問是事物的集合或事情的集合）概念時的法則。而此「集合」概念的本身，完全是邏輯的與形式的概念；是允許用與數學相類似方式處理的。換言之，無論那種集合都是由若干（〇個以上）要素所集成，帶有某種擴展性；因而就可加以某種量的操作。我們不問具體的何種集合是如何被增加的；但我們只要任意取兩個集合爲例；這兩個事物有時是相重覆，有時是一方包括他方，有時是完全分離的……等等情況。對這些構造一定可以加以研究。而且這種研究又一定可以用與數學（代數）相平行的方式移動。這就是布勒的基本觀念。

布勒所有形式化的集合公理體系：

(甲)變項

x, y, z, …………表示集合。

O表示「空集合」（一個個體都未包含的集合）

I表示「全集合」（包含一切個體的集合）

任意取 a, b. 兩集合。

a=b　表示 a 與 b 其擴展性完全一致。

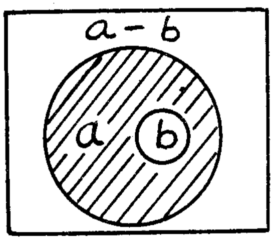
a×b　表示 a 與 b 的共通部份的集合。

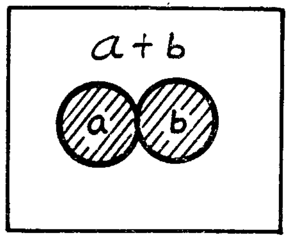
a+b　如果 a×b=O時卽（a 與 b 未具有共通部份時）表示 a 與 b 之和的集合。

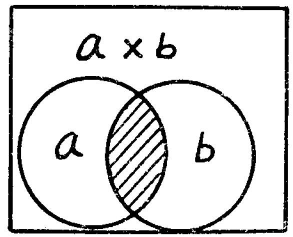
（a×b＼O時則 a+b 爲無意義之式）

a−b　表示 b 爲 a 之一部份或與 a 相等或係由 a 取出 b 所殘餘部份的集合。

如果用圖表示斜線部份卽所求各集合







（乙）布勒邏輯的基本法則如左，但此等法則作爲公理尙不充分。因爲他從事實際證明的時候，對於加法與減法的各法則，以及有關1與0的基本法則，暗中借用了代數的緣故。

本　法　則

(a). x×y=y×x

(b). x+y=y+x

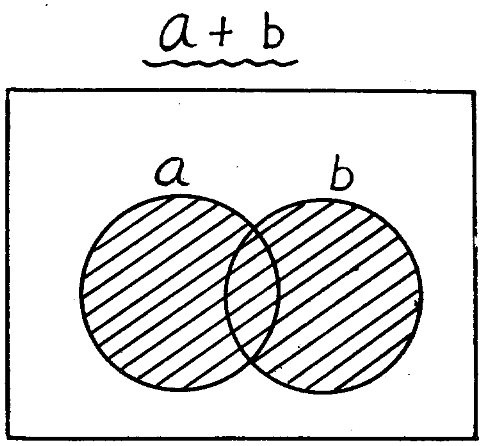
(b). z×(x+y)=z×x+z×y

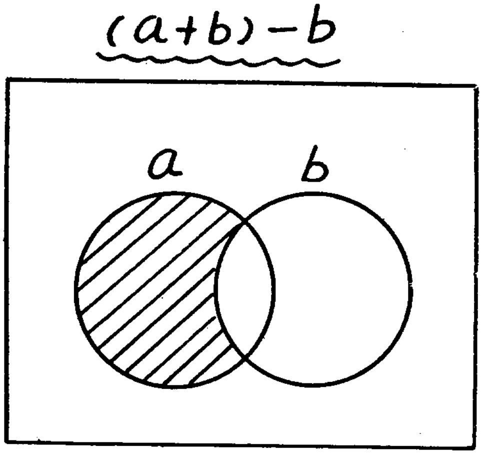
(d). z×(x−y)=z×x−z×y

(e). x×x=x

(f). 假若 x+y=z, 則 x=z−y

此等基本法則之中特別重要的是(e)。布勒稱此爲「指數律（The index law）。這項指數律的定義是，假如某一集合與同一集合相乘的話，其操作無論應用多少次，結果仍與原來的集合相等。再者，因將「+」定義爲係互相排斥的集合之和，則其結果(f)卽將成立。假使，將（+）定義爲包括左列圖示那樣兩立的集合的時候，一般來說(f)不能成立。





但是，根據「+」的排反的定義 1+x, x+x 等並無成爲式的資格。但是他援用了以上基本法則以及代數的各種法則，來證明邏輯學的各種命題。譬如，他以 x+(1−x)=1 來表現排中律。這項成立是很明顯的。同時，他還對矛盾律的 x×(1−x)=0 作左列之證明：

$(1).\ x \times x = x$　　（依據前列(e)項）

$(2).\ x = x \times x$　　（由(1)項推論所得）

$(3).\ x - (x \times x) = 0$　　（由(2)項推論所得）

$(4).\ x \times (1 - x) = 0$　　（由(3)及前列(d)項推論所得）

同時，全稱肯定命題「所有的x都是y」，就可用左列式來表示：　$x \times (1-y) = 0$

其次，布勒更研究一種可稱爲「選言標準形」。他首先設置變項x與用（+）（−）（×）（÷）的操作所構成的式爲f(x)。此時一般來說，卽可成爲左列之定理：

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1-x)$$

右式之成立，由於：$x(1-x) = 0$之緣故，不過x只能取價的0或1。

布勒將符號體系中所展開的演算與其演算的解釋，加以嚴格的區別。不過，他表示(x)(y)……符號爲集合，而（+）（×）（−）（÷）等符號爲集合之間的算法。而這些都不屬於解釋，而屬於解釋前有關形式的議論，至於最抽象的「集合」概念，並無必限定爲「事物」之集合，必與命題之集合任選一方，以區別形式體系的解釋。

尤其命題之集合：布勒的思想與現代型的邏輯學相合。現在，我們將布勒的集合邏輯所表現的符號(x)、(y)、(z)、……等，解釋爲表示眞命題集合。同時解釋「1」係表示彙集所有眞命題的集合：「0」係表示空集合。更解釋「+」、「−」、「×」，係由此項集合所作的構成「和」、「差」、「積」的操作。不過，這樣解釋的體系，實際上不外是一種命題邏輯的體系。他想要根據這個思想，將集合的邏輯以及命題加以公理化。

布勒提倡的集合邏輯，也有困難之點。譬如，除算「÷」的操作，依此解釋卽不能成功。儘管有許多困難，但就符號邏輯學的歷史立場來看，他所完成的任務仍極大的。以後，他所奠定基礎的集合邏輯，經過了鳩文斯（W. S. Jovons 1835–1882）的改良，再經過舒露德（E. Schröder 1842–1902）的集大成，乃到了今日的情況。

四、裴爾士的關係邏輯

美國的哲學家邏輯學家，兼數學家的裴爾士（C. S. Peirce 1839-1914）在邏輯學上的業績是多采多姿的。他首先改良了布勒的體系，引入了表示集合包含關係的邏輯符號。他更進一步地將表示集合 x，與集合 y 之間的包含關係，改稱爲命題間的條件關係（如是 x 則爲 y）。其式及符號是 $(x \cup y)$。此種關係的實際，因其命題 x 與 y 的眞理值而加以定義。他所用的此種符號的邏輯法則如左：

$$x \subset (y \subset x) \quad , \quad \{(x \subset y) \subset x\} \subset x$$

$$x \subset x \quad , \quad \{x \subset (y \subset z)\} \subset \{y \subset (x \subset z)\}$$

不過，要研究裴爾士的最大業績，無論怎麼說，都要由關係邏輯的領域中探求。關於集合的邏輯已經由布勒極巧妙地體系化了。繼承布勒思想的邏輯學家們所注意的地方，就是如何用同樣的手法，將包括關係邏輯的全部邏輯學加以擴大與適用。在關係邏輯學方面已經由英國數學家，戴莫根（De Morgan 1806–1878）加以開發了。但是，在這一部門裡的獨創觀念及有意義的定理方面，裴爾士的貢獻却很多。

裴爾士首先着手研明的是關係概念相互間特殊邏輯的構造問題。他繼承戴莫根的思想，對關係的型式舉出左列三種。現在將 m、l 作爲任意的兩項關係：

(1), 將（m 的 l）寫成（$l \mid m$）。例如（主人的愛人）寫成（愛人｜主人）

(2), 將（所有的m的l）寫成 l^m。例如（所有的主人的愛人）寫成（愛人$^{\text{主人}}$）

(3), 將（只有m的l寫成 ${}^{l}m$。例如（只有主人的愛人）寫成（${}^{\text{愛人}}$主人）

如果這樣將符號加以定義的話，就可以發現許多邏輯的關係。現在我們集合 a 與 b 的和用 $a+b$ 來表示，對其積用 $a \times b$ 來表示的話，則關於兩項關係 l、m、s 成左列之定理：

(1). $l \mid (m \mid s) = (l \mid m) \mid s$

(2). $l \mid (m + s =) l \mid m + l \mid s$

例如：（主人與僕人）的愛人＝主人的愛人與僕人的愛人。

(3). $s^{(n+1)} = (s \mid m) \times (l \mid s)$

例如：〔所有的（主人與愛人）〕的僕人＝（所有的主人）的僕人，並且（所有的愛人）的僕人

(4). m如果不是空集合的時候：$l^m \subset l \mid m$

例如：（所有的主人）的愛人⊂主人的愛人

以後，他又研究關於「逆關係」的問題。（例如「雙親」的逆關係爲「子女」，而子女的逆關係爲「雙親」；「主人」的逆關依爲「僕人」，而僕人的逆關係爲「主人」之類是）。現在假如我們將 a 的逆關係寫成 a 的話，則可得左列定理：

(5). $\smile(\smile l) = l$

(6). $\smile(l + m) = \smile l + \smile m$

(7). $\smile(l \times m) = \smile l \times \smile m$

(8). $\smile(l \mid m) = \smile l \mid \smile m$

(9). $(l \dot{-} m) = \smile m \dot{-} \smile l$

(10). $-(\smile l) = \smile(-l)$（假設 $-a$ 爲 a 的補集合）

不過，此處重要之點不在於裴爾士所討論的各個關係的特色。其引起我們興趣的地方，乃是透過此項的討論他逐趨向於留意關係概念的內部構造（包括其概念命題的內部構造），因而開闢了通向現在述語邏輯學道路的事實。

他繼承了布勒的構想，認爲「關係」也屬於一種集合，在這種解釋之下，想要對「補集合」、「和集合」、積集合」等予以定義。不過，對兩項關係 m，怎樣方能賦予它集合的定義呢？裴爾士的構想是這樣的：

將包含於成爲問題的個體領域的個體用 a. b. c. d.……等來表示。然後在此個體之中任意選取兩個作成一組。(例如將 (x, y) 與 (y,x) 看作不同的組別)。其次，將此組別（按順序）全部彙齊作成集合。其要素將成左列：

(a, a), (a, b), (a, c), (a, d),…………

(b, a), (b, b), (b, c), (b, d),…………

(c, a), (c, b), (c, c), (c, d),…………

(d, a), (d, b), (d, c), (d, d),…………

可是，兩項關係M，對於此按順序的各個組別，一定是成立的或不成立的。假若，M只是a與a，b與a，a與b，b與c，d與c等之間成立兩項關係的話，則M就可定義爲要素 (a, a), (b, a), (a, b), (b, c), (d, c) 所成之集合。其他關係的情況，也以此爲準。

此時需要注意之點，乃是裴爾士將「在個體 i 與 j 之間成立關係M」這一問題用 $(M)^{ij}$ 的符號來表示；更對於「構成關係M的個體I，J的組別」將它符號化爲 $(M)^{ij}(I{:}J)$。假如將和與積再分別借用數學符號Σ、Π的話，則集合M一定可用述語定義爲 $\Sigma i\Sigma j\,(M)^{ij}(I{:}J)$。同時，若使用此種記載法的話，則集合關係的和與積，以及「—」「⌣」等也可得而定義了。將這個定義依現在的記載法加以介紹的話，可如左式在：

$$M+L \underset{\text{def.}}{=} \Sigma i\Sigma j\,[(M)^{ij}\vee(L)^{ij}](I{:}J)$$

$$M\times L \underset{\text{def.}}{=} \Sigma i\Sigma j\,[(M)^{ij}\wedge(L)^{ij}](I{:}J)$$

$$M\mid L \underset{\text{def.}}{=} \Sigma i\Sigma j\,[(\exists h)\{(M)^{ih}\wedge(L)^{hj}\}](I{:}J)$$

$$(\smile M)^{ij} \underset{\text{def.}}{=} (M)^{ij}$$

此處的 $(M)^{ij}$ 相當於現在要素式 $M(i,j)$ 是很明顯的。

裴爾士對此項關係邏輯的研究，對開拓吾人今日的述語邏輯，有相當清楚的預見。他並且巧妙地流用集合算所用的記號：

用「十」號來表示連結命題兩端的選言，用「×」號相同地表示命題的連言，用「≡」號來表示命題的同値關係。那時候的（πx）及（Σx）與現在的限量符號（∀x）及（∃x）完全具有相同的機能。

此外，他還發表了關於現今所謂「冠頭標準型」的研究。建立符號邏輯學形式體系基礎的功績，固然應歸功於以下所述的弗瑞格；而爲了構成體系所作的必要準備，大體上是由裴爾士所準備完成的。如果用極概略的說法：裴爾士曾使符號邏輯學飛躍的進展，由集合的邏輯走向命題的邏輯，由關係的邏輯走向述語的邏輯。而且均各個地完成了「發展的解消」的步驟。

五、弗瑞格的數學與邏輯

我們前面曾討論過來布尼茲的開創符號邏輯學；以後又提到了樹立邏輯學學問方針的邏輯學家布勒及裴爾士。可是，如果談到建立這項學問體系基礎的邏輯學家，就不能不提到德國的數學家兼哲學家的弗瑞格（G. Frege 1948–1925）了。他一生遭遇很壞，業績很少被人承認。他却透過了對羅素與懷德海所合著的「數學原理」（Russell-Whitehead, Principia Mathematica 1910–1913）確立了現代邏輯學的最基本部份。

前面也曾談過，布勒曾致力於將邏輯體系比照數學（代數）加以構成。在那個時候，形式化的邏輯與數學的關係，儘管不能說前者是後者的一部份，但在身份上被排在同列也確屬事實。弗瑞格所以在邏輯學史上被認爲是劃時代的地方，就在於他將數學與邏輯的關係加以倒轉；確立了數學（最低是「古典的」數學的主要部份）是應該靠邏輯而構成的思想；並且把這種思想加以實行了。他在這方面的主要著作是「代數學的基本法則」。

所謂依邏輯學構成數學。乃是在邏輯學的語言之中將數學加以公理化的意思。對弗瑞格來說其中還包括左列各項：

(1)將數學的各種概念（如數0.1.2……等）純粹依邏輯的手續給予定義。

(2)將數學的推論局限於邏輯學允許的推論之內。

關於這項構成的意圖，在前述「數學原理」一書中大致已經完全實施。事實上，以弗瑞格爲契機使邏輯學對數學有此種優

越性的事實，時至今日仍未稍動搖。而關於第(2)項的事實已經成爲大家的常識了。

爲了使邏輯能完成如此偉大的任務，首先，必須使邏輯學本身從布勒及裴爾士的業績範圍中，得悉其飛躍發展。而弗瑞格的作法，有布勒與裴爾士所未想到的，那就是取消一切對古典邏輯學的考慮。因此弗瑞格未被布勒的集合算所拘束，得以構成與集合算爲基礎，並且具有廣大適用範圍的邏輯（述語邏輯）。他以爲「命題」爲語言的基本單位，而不是集合。同時，將要素式用 $F(x)$, $G(x,y)$ 等記載法來表示，也是由弗瑞格開始的。而且，他認眞地採用聯想數學函數表現的表示方法，決不是反覆無常，而是他對現代符號邏輯學的根本思想。

依弗瑞格的看法，認爲命題固然是語言意義的最小單位；但由邏輯的構成來看，則命題可分解爲主語的名詞與述語等。而此等主語、述語、命題的身分，他有如次的論列：

我們如果研究命題主語的固有名詞，就可以看出它有兩個側面。首先，使用符號的人們，透過其符號，抱有共通的影像(image)。而就是人們授給其符號的「語義」。於是名詞先有了特定的意義。其次，其符號作爲一個固有名詞，又指示着某項「事物」。指示着什麼，這就是名詞的指示。所以名詞的兩個側面就是語義與指示。但是此項語義與指示並不完全限於一對一的相對。譬如。「傍晚的亮星」與「黎明的亮星」確實具有不同的意義與內容。但其指示則均係對實在的「金星」而言。兩個名詞是共通的。

弗瑞格繼續想將此語與指示的區別擴展到命題上去。當人們理解某項命題的時候，均有其某種共通的理解內容。他稱此理解內容爲「思考」，把它看作命題的語義。而命題的指示，則不外是命題的眞僞問題。在此需要特別注意的是，大凡「指示」（無論是名詞的指示或命題的指示）都被認爲是語言實在的關係側面。就弗瑞格來說，無論「傍晚的亮星」所指示的金星，無論「二加二」所指示的四，無論「蘇格拉底是人」所指示的眞理，以及「柏拉圖憎惡蘇格拉底」所指示的虛僞等；均屬於實在。於是邏輯學乃是提出語言與實在相接觸的側面，具有發現法則性的使命。由此可以清楚地看出，邏輯學的任務是被限定了。

現在，我們由此觀點來考慮命題的構造的話，就可以明白何以弗瑞格想用函數形式 $F(x)$, $G(x,y)$,……來表現命題的原因

了。一般所謂函數，不外是若干值（或組）與某一值的對應規則。譬如，所謂x的函數爲x^2，乃表現數的一對一、二對四、三對九……等有對應關係的規則。同時，x與y的函數x－y，乃表現○對（1,1），1對（2,1），－1對（1,2），……等的應對規則。於是，在數學上，一般都將函數表現爲 F, G,……而將與 x，y……之值相對應的各值寫爲 F(x), G(x,y)……等式。可是，如果將函數的想法一般化的話，則邏輯學的「述語」也與此有着完全相同的作用。譬如：

「……是人。」

如果將這項述語的「……」部份，分塡入指示名詞的「蘇格拉底」的話，就可作成具有「眞」值的命題；如果塡入指示名詞的「米老鼠」(Mickey mouse) 的話，就成爲具有「僞」值的命題。換言之，所謂「人」的概念（正確地說，所謂「……是人」的述語），可以想到對蘇格拉底、柏拉圖等爲眞；對「米老鼠」，「醜小鴨」等爲僞……各類相對應的函數。於是，從邏輯學的專門研究語言指示的前提來說，則命題就要依函數的形式來表現；同時，述語的異同也要歸結到此函數作用的異同了。

我們從今日的立場來看，弗瑞格只論列了符號的純粹形式的法則性。他並未將狹義的邏輯（Syntax）與討論其概念作實地上適用的議論，而加以嚴格的區分。他以爲，討論這種連「眞」「僞」等概念都捨棄了全無內容的符號體系的邏輯，本來是不夠資格稱爲邏輯的（可見他決不是「形式主義者」）。由此看來，既然這項主張對眞的邏輯學是一種誤解；或者，他的邏輯學全體係基於形而上學爲吾人所難承認的；但他的功勞還是極大的。原因是，他對邏輯的體系作解釋的時候，給與了明確的指針的事實。易言之，弗瑞格曾對邏輯作了抽調內包的處理。例如，根據弗瑞格的看法，(2＋2), (2×2), (5－1) 等雖各有其不同的意義，但可以認爲，它是具有相同指示的名詞，於是，邏輯學只要是遵循着專門以語言的指示爲對象的方針，把一切都視爲同一；其結果，名詞將被整理得便於處理。可是，假若想處理這些意義微妙而相異的事物，則邏輯學將會陷於非常混亂的境地。首先是，決定意義異同的客觀標準並不存在；相關的事情，處理述語或命題的時候，也可就地吻合。如果對此再加上前述「外延」「內包」的話，「意義」與「思考」無論那項都是表示語言內包的概念；與此相對的，所謂「指示」則係表示語言的外延。弗瑞格所取的立場，就是澈底使邏輯學由外延的觀點加以構成。基於此一立場，語言的函數處理也成爲可能了。於是事實上，

所有記述的命題方能作爲某種基本要素的函數加以表現。這就是現代邏輯學的根本思想。

正如以前所述，數學依邏輯學而再構成，是弗瑞格以「代數學的基本法則」所作的目標。這樣地以邏輯學爲數學基礎的嘗試（其終極的目的乃是保證數學的無矛盾性），由他與其同時代的數學家皮亞諾（G. Peano 1858–1932）共同發端，以後又經過羅素（B. Russell 1872–197），懷海德（A. U. Whitehead. 1861–1947），成爲了現代邏輯學的中心課題之一。不過，介紹邏輯學與數學的關係，超越了本文的主題：因此談到弗瑞格時，其他也就從略了。但是，關於純粹邏輯學的範圍，在弗瑞格所完成的業績方面，最後還要敍述幾點：

弗瑞格展開自己的邏輯學所採用的符號，極爲特殊。他首先用左列符號表示命題A爲眞：

$$\vdash A$$

如果拿掉其中的|線，則成爲－A。此時表示在未下眞僞判斷以前的，所謂關於眞理値懸而未定的命題。至於表示命題A否定的時候，則用符號：

$$\vdash\!\!\!\top A$$

表示命題B爲眞，命題A爲僞時候的僞命題，用符號：

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\!- A \\ \quad\;\llcorner\; B \end{array}$$

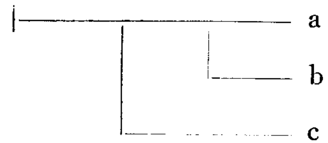
這個命題不外是羅素所用符號的：B ⊃ A。

因而我們可以明白，今日的 B∧A，A∨B，如用前述表記法，卽可簡單地作定義了。

弗瑞格使用以上的表記法（邏輯學史上最初的嘗試），提出了命題的完全公理體系。其情況如左：

公理：以 a. b. c.…………爲命題符號

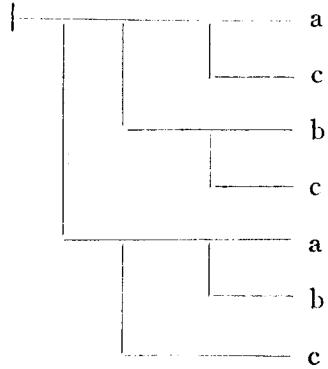
1.



依現在的記號爲

$\vdash a \supset (b \subset a)$

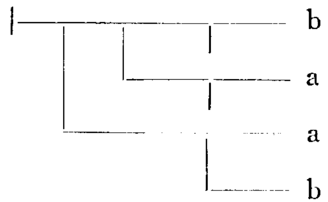
2.



依現在的記號爲

$\vdash \{c \supset (b \supset a)\} \supset \{(c \supset b) \supset (c \supset a)\}$

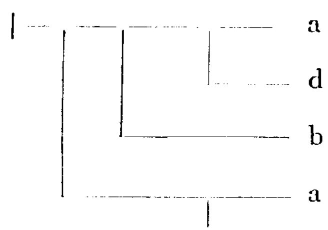
3.



依現在的記號爲

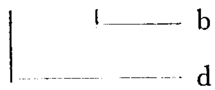
$\vdash (b \supset a) \supset (\sim a \supset \sim b)$

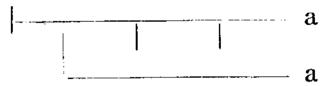
4.



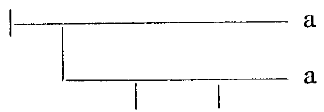
依現在的記號爲

$\vdash \{d \supset (b \supset a)\} \supset \{b \supset (d \supset a\}$



5. 

依現在的記號爲 $\vdash a \supset \sim\sim a$

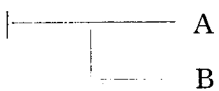
6. 

依現在的記號爲 $\vdash \sim\sim a \supset a$

變形規則

1.雖未明確地敍述代入規則，但使用並無問題

2.推理規則



而且如果是 $\vdash$——B則爲 $\vdash$——A

依現在的記號爲 $\vdash B \supset A$，而且如是 $\vdash B$ 則爲 $\vdash A$

關於述語邏輯，弗瑞格雖然未成功地完全予以公理化，但他也相當徹底硏究過述語邏輯，表示了若干適當的公式與推論規則。(註一〇)

肆、結　　語

現代的符號邏輯學由其內容方面來看，也可以說是古典邏輯學的繼續發展。不過，假使我們回溯十九世紀以來邏輯學的歷史，就可以看出在這段期間內，古典邏輯學體系內部，幾乎一點都沒有發展。同時，現在致力符號邏輯學開拓的學者們與在敎壇上講授古典邏輯學的學者們之間，也沒有作太多意見的溝通。因此，本文僅將古典邏輯學與符號邏輯學的歷史發展分別加以

敍述。

在古典邏輯學方面，從亞里士多德對文章構成法 (Syntax) 及三段論法等之研究，構成區別命題眞僞與論證有效無效形式的系統規則以來，它已成爲一門有組織的學術；稍後斯多噶・麥加拉學派 (The Stoic-Megaric School) 及中世紀邏輯學家阿卑拉德(P. Abelard)等都應用亞氏邏輯學並加以補充，使古典邏輯學的體系更見完整。

在符號邏輯學方面，首先由來布尼茲 (G. W. Leabniz) 開創，布勒 (G. B. Boole) 與裴爾士 (C. S. Peirce) 分別以集合邏輯與關係邏輯樹立起符號邏輯學學問之方向，最後由德國數學家兼哲學家弗瑞格 (G. Frege) 提出命題演算，爲符號邏輯學建立了不可動搖的體系基礎。尤其是弗瑞格所著「代數學的基本法則」在此門學問中，佔有相當的份量。所謂以邏輯學構成數學，就是在邏輯學的語言之中將數學公理化。具體的說，邏輯學與數學是相連續的，其首先以邏輯學爲基礎，然後再順序構成「集合」「自然數」「函數」等數學的各種概念。這種嘗試是否已全完成功，固然還有很多爭端。但是，由此可以充分看出強調邏輯學與數學的親近性。

這種傾向到了最近年代，邏輯學家與數學家之間又更進一步，很明顯地擴展開一種新的看法；那就是所謂「集合」的概念。以及想把以往用直觀形式所實施的自然數論，加以形式化的嘗試。因而它又直接關聯到，隨着最近計算機理論的開展所伴同的「可計算性」(Computability) 與「可解答性」(Solvability) 等問題。而這些事項都被認爲是邏輯學的延長問題。

所以，從邏輯學歷史的發展看，將來邏輯學與數學間的關係，勢必更加深了一層。其不僅是外延上變化，在內包方面也將更加充實。尤其是邏輯學與數學都在追求形式的眞理前提下，這種發展亦是必然的傾向。易言之，最低限度將來想把邏輯學與數學中間，很清楚地劃一道界線，越是困難的事。

參考資料

註一　參見謝幼偉著：西洋哲學史第六章及傅偉勳著：西洋哲學史第一章。

註二 參見唐君毅著：哲學概論。第一部哲學總論第三章

註三 參見亞里士多德著呂穆迪譯述、邏輯史料（論句之分析與訓解）

註四 W. Kneale, M. Kneale, The Development of Logic 1964

註五 人類很早就注意到語言和它所指示的實際事物的關係。在十六七世紀中英國的幾位大哲，像洛克（John Locke）、柏克萊（George Berkeley）、休謨（David Hume）等對語意理解（Semantical insights）都極爲深刻。但是許多哲學家多用以改良和加強自己的思考，却很少把這些規則向大家傳說出來。就是有，也祇是三言兩語的片段陳述，從未有人作大規模有系統的探究。一直到韋爾貝夫人（Lady Viola Welby）在一九〇三年發表了一部叫做「意義是什麼」（What is Meaning?）指出語言與經驗的相互關係，使人注意到語言對於知識的重要性。以及一九一〇年懷海德和羅素共同發表了「數學原理」牽涉到許多邏輯和語言的問題。與一九二三年奧格登（C. K. Ogden）和李察茲（I.A. Richards）共同發表了一本書，叫做「意義的意義」（The Meaning of Meaning）論說語言怎樣影響思想與行動等都作精密有系統的分析與說明。因而語意學之被有系統的研究，至今不過數十年的歷史。

註六 培根的歸納法理論，爲了發現事物的「形式」或因果法則，採取了三大步驟：㈠蒐集（Collectio）㈡拒斥（exclusio）與㈢總括（Vindeminatio）。卽首先蒐集有關的經驗資料，而後排除無用的，最後總括起來，作一有系統的整理。

註七 穆勒（J. S. Mill）把歸納推理列爲五種方法如左：

㈠契合法（Method of agreement）若研究的對象，發生於兩個或更多的例子，而這些例子中，只有一種共同情況，而在各個例子中的唯一共同情況，便是那現象發生的原因或結果。

㈡差異法（Method of difference）若所研究的現象，發生於一個事例，而不發生於另一個事例中，這兩個事例除一差異點外，其餘情況則完全相同。那麼此一差異點，便是該現象的原因或結果。

㈢同異併用法（Joint method of agreement and difference）是前二法的共同使用。是利用兩個或兩個以上事例的一致點，和利用兩個或兩個以上事例的差異點，作爲推論的基礎。這種反面正面的證明，推論的效果較單一的更爲正確。

㈣共變法（Method of Concomitant）在某事例中有一現象變化時，另一現象也隨着變化，則此二現象之間必有因果關係。

㈤剩餘法（Method of Residual）有數事例，其中除一事例外，其他的事例前後項的因果，或互相影響的關係，皆已明瞭，那麼，剩餘的這一事例的前項與後項也必有因果或影響的關係。

註八　參見宋稚青與林如豪合著：邏輯與科學方法第十章歸納法。

註九　C. I. Lewis. A survey of Symbolic Logic 1918

註十　A. Church, Introduction to Mathematical Logic §29, 49, 1956