從相關到因子分析

林岩哲

（作者現為本校法學院政治學系兼任副教授）

一、緒　言

在行爲科學中，因子分析（factor analysis）（註一）是極複雜、極不易了解、却多方面在應用的一種計量方法。從心理學，到政治學、社會學、經濟學、教育學、大衆傳播研究、生物學、醫學、農業學、氣象學、甚至物理學，無不有應用因子分析的事例。雖然因子分析的歷史迄今也不過七十多年，但其可應用範圍之廣泛，而有關討論與應用因子分析的文獻，多得不勝枚舉。單據B. Fruchter的統計，從一九四〇年到一九五二年的文獻，就多達八百多篇（註二），堪稱汗牛充棟。

所謂因子分析，就像調查（Survey），並非單一程序而已。調查工作可包括種種不同的抽樣法、種種不同的問卷格式、種種不同的資料蒐集法、以及種種不同的統計分析，而無一定的技術程序。同樣的，因子分析也是一個通稱。因子分析是一組同樣起點，同樣目標，而包括數種理論模型及方法。因此，以本文篇幅之所限，自不可能對各種因子分析模型及方法作詳細解說（註三）。本文之主要目的，在於從相關概念解析因子分析的基本理論，而不在說明因子分析法。換言之，本文主要在解析相關與因子分析的邏輯關係。

如果要對因子分析作一界說，可以說因子分析是一種應用統計與數學的方法。因子分析是要從許多變項間、找出少數隱藏於其間而爲其共有的基本東西，來解釋這許多變項間的關係，以達到在解釋上科學兼經濟的目的。或者，說得更簡明一點，因子分析就是簡化解釋複雜現象的一種應用統計與數學的方法。

在我們平常觀察研究中，我們往往可發現到許多類似因子分析目標的例子。舉例來說，我們對一批小學生作各種學科的測驗，往往會發現，閱讀測驗分數愈高的學生，他的作文和算術測驗會愈高；反之，閱讀測驗分數愈低的學生，他的作文與算術測驗分數也愈低。我們往往會將各種測驗分數歸因於智力這項因子。

不過，因子分析並不作如此簡單的推論。事實上，我們觀察許多現象時，通常變項間也沒有如此顯而易見的關係。因子分析就是先以統計方法計算出變項間的相關係數，再應用數學方法，將因子抽繹出來，進一步解釋因子。

雖然因子分析的產生與發展與心理學有極密切的關係，也最常見於心理學方面的應用，但是因子分析不是心理學的一部分。嚴格言之，因子分析是統計學的一部門（註四）。因子分析的理論基礎是皮爾遜的相關係數和變異數，而皮爾遜的相關係數是來自廻歸線概念，所以我們先從廻歸線概念解析起。

二、廻歸分析

設有二變項X和Y，X爲自變項，Y爲依變項。X和Y之間最簡單的關係爲直線型關係。又設X和Y的直線關係式爲 $Y = a + bX$，其中a爲該線在Y軸上的截距，b爲該線的斜

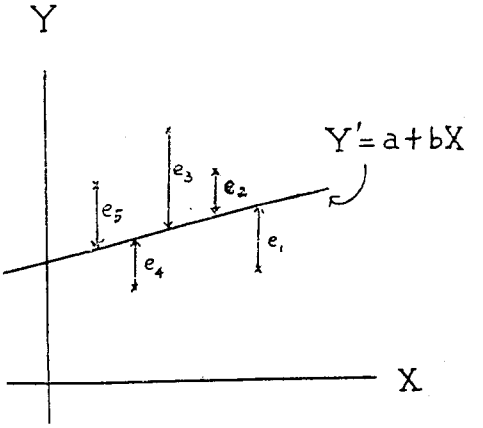
率。

如果上式$Y=a+bX$ 能完全正確地表示X和Y的關係，只要知道X的值，就能準確的推出Y的值。問題是自變項與依變項之間，雖有線型關係存在，但通常不能完全準確地從X推測Y的值，除非X和Y之間有完全關係存在。通常我們所能作的，只能從X推測Y的近似值而已。那麼我們如何求出一條直線，從X來推測Y，而且使推測值近似Y？這條直線稱爲廻歸線。如圖一。設從X推測Y的值爲Y'，而推測值Y'和依變項Y之間有誤差，誤差值設爲e_1，則照廻歸線之定義，廻歸線式爲：

$$Y'=a+bX$$

誤差爲： $e_1=Y_1-Y_1'$

只要將各e_i的值儘量減小，即可求得最佳的廻歸線。



圖一

若將各e_1值予總和，則有一問題發生。當$Y_1>Y_1'$時，則e_1爲正；當$Y_1<Y_1'$，則e_1爲負。總和所有e_1的結果，將因正負相抵消，和值等於零（留後證明）。所以爲避免正負值相抵消，可取最小平方法，將各e_1予平方，再予總和，亦即求

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_1-Y_1')^2=\sum_{i=1}^{n}e_1^2=\text{極小}$$

其中n爲觀察項數。從求Σe_1^2的極小，即可解得a、b。將解得的a、b代入廻歸線式，即最佳的廻歸線式。

且讓我們從數學式來解這一問題。依誤差之定義：

$$e_1=Y_1-Y_1'$$

爲了簡化符號，將下標字母省略，同時予等號兩邊予總和，得：

$$\begin{aligned}\Sigma e_1^2&=\Sigma(Y-Y')^2\\&=\Sigma(Y-a-bX)^2\\&=\Sigma(Y^2-2aY+a^2-2bXY+2abX+b^2X^2)\end{aligned}$$

求Σe^2之極小，即偏微分a、b，使等於零：

$$\frac{\partial(\Sigma e^2)}{\partial a}=2\Sigma(Y-a-bX)=0$$

$$\frac{\partial(\Sigma e^2)}{\partial b}=-2\Sigma(YX-aX-bX^2)=0$$

上二式可化簡爲：

$$\Sigma(Y-a-bX)=0 \qquad (2.1)$$

$$\Sigma(XY-aX-bX)=0 \qquad (2.2)$$

聯立上二式，消去a得，

$$\Sigma X \Sigma Y - b\ (\Sigma X)^2 - n\Sigma XY + nb\Sigma X^2 = 0$$

$$\therefore\quad b = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \qquad (2.3)$$

將b代入 (2.1) ，解得：

$$a = \frac{\Sigma X^2 \Sigma Y - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \qquad (2.4)$$

將 (2.1) 等號兩邊同除以n，得：

$$\frac{\Sigma Y}{n} - \frac{a\,n}{n} - \frac{b\,\Sigma X}{n} = 0$$

設 $\frac{\Sigma Y}{n} = \bar{Y}$， $\frac{\Sigma X}{n} = \bar{X}$，故上式化爲

$$\bar{Y} - a - b\bar{X} = 0$$

$$\bar{Y} = a + b\bar{X} \qquad (2.5)$$

將上式與原先設定的廻歸線 $Y' = a + bX$ 比較。我們可發現到，這兩式在形式上完全相同，只不過$\bar{Y}$取代Y'，$\bar{X}$取代X，故知廻歸線必通過（$\bar{X}$，$\bar{Y}$）這一點。換言之，二變項的平均數必落在廻歸線上。

又根據定義，$e = Y - Y'$，則：

$$\Sigma e = \Sigma\ (Y - Y')$$
$$= \Sigma\ (Y - a - bX)$$
$$= \Sigma Y - \Sigma a - b\Sigma X$$

$$\because\quad n\bar{Y} = \Sigma Y,\quad n\bar{X} = \Sigma X$$

$$\therefore\quad \Sigma e = n\bar{Y} - na - bn\bar{X}$$
$$= n\bar{Y} - n\ (\bar{Y} - b\bar{X}) - bn\bar{X}$$
$$= n\bar{Y} - n\bar{Y} + bn\bar{X} - bn\bar{X} = 0$$

由此可證，推測誤差的總和必等於零，誤差的平均數$\bar{e}$也就必然等於零。

又由定義：$e = Y - Y'$，則

$$Y = e + Y'$$
$$\Sigma Y = \Sigma\ (e + Y')$$
$$\Sigma Y = \Sigma e + \Sigma Y'$$
$$\frac{\Sigma Y}{n} = \frac{\Sigma e}{n} + \frac{\Sigma Y'}{n}$$
$$\bar{Y} = \bar{e} + \bar{Y}'$$
$$\therefore\quad \bar{Y} = \bar{Y}'$$

若以離均差求廻歸線，則依定義：

$$x = X - \bar{X}$$
$$y' = Y' - \bar{Y}'$$
$$y = Y - \bar{Y}$$

將上三式代入原設之廻歸線 $Y' = a + bX$，則得：

$$y' - \bar{Y} = a + b\,(X - \bar{X})$$

此式所代表的圖，即將原來的座標軸移軸至以（$\bar{X}$，$\bar{Y}$）爲原點。又從上式可得：

$$y' + \bar{Y} = a + bx + b\bar{X}$$
$$y' = a + bx + b\bar{X} - \bar{Y}$$
$$y = a + bx + b\bar{X} - (a + b\bar{X})$$
$$y' = bx \qquad (2.6)$$

又依推測誤差的定義，可得：

$$\begin{aligned}\Sigma e^2 &= \Sigma\,(Y - Y')^2 \\ &= \Sigma\,(y + \bar{Y} - y' - \bar{Y})^2 \\ &= \Sigma\,(y - y')^2 \\ &= \Sigma\,(y - bx)^2 \\ &= \Sigma\,(y^2 - 2bxy + b^2x^2)\end{aligned}$$

欲使 Σe^2 爲極小，則偏微分 b，使等於零，即：

$$\frac{\partial\,(\Sigma e^2)}{\partial b} = \Sigma\,(-2xy + 2bx^2) = 0$$
$$-\Sigma\,(xy - bx^2) = 0$$
$$\Sigma xy - b\Sigma x^2 = 0$$
$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \qquad (2.7)$$

或 $$b = \frac{S_{yx}}{S_x^2} \qquad (2.8)$$

求得 b 之值，即可照前述方式，求得 a 之值。

又從 (2.6) 式，知：

$$y' = bx$$
$$y'^2 = (bx)^2$$
$$\Sigma\,(y')^2 = \Sigma\,(bx)^2$$
$$\frac{\Sigma (y')^2}{n} = \frac{\Sigma (bx)^2}{n}$$

依變異數之定義，上式等號左邊，爲 Y' 的變異數，以符號 $S^2_{y'}$ 表之、則上式可化爲：

$$S^2_{y'} = \frac{\Sigma (bx)^2}{n} \qquad (2.9)$$

又依變異數之定義，變項 Y 的變異數 S^2_y，即：

$$S_y^2=\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}$$

$$=\frac{\sum y^2}{n}$$

$$=\frac{\sum y^2+2b\ (\sum xy-\sum xy)}{n}$$

但從 (2.7) 式得知$\sum xy=b\sum x^2$。將此式代入上式，得：

$$S_y^2=\frac{\sum y^2+2b\ (b\sum x^2-\sum xy)}{n}$$

$$=\frac{\sum y^2-2b\sum xy+b^2\sum x^2+b^2\sum x^2}{n}$$

$$=\frac{(\sum y^2-\sum 2bxy+\sum b^2x^2)\ +\sum b^2x^2}{n}$$

$$=\frac{\sum\ (y-bx)^2+\sum\ (bx)^2}{n}$$

$$=\frac{\sum\ (y-y')^2+\sum\ (bx)^2}{n}$$

$$=\frac{\sum e^2+\sum\ (bx)^2}{n}$$

$$=\frac{\sum e^2}{n}\ +\ \frac{\sum(bx)^2}{n}$$

從變異數的定義，推測誤差 e 的變異數 $=\frac{\sum(e-\bar{e})^2}{n}=\frac{\sum e^2}{n}$ 。以符號 S_e^2 表示 e 的變異數（S_e^2的開方根稱爲估計標準誤），則 $S_e^2=\frac{\sum e^2}{n}$。又因爲 (2.9) 式知 $S_{y'}^2=\frac{\sum(bx)^2}{n}$，故上式可寫作：

$$S_y^2=S_e^2+S_{y'}^2 \qquad (2.10)$$

由此可知，從 X變項推測Y變項，Y變項的變異數 S_y^2 係由兩部分所構成：一部分是由廻歸線推測值Y'之變異數，另一部分是不能由廻歸線推測之誤差變異數。

三、相關係數分析

如果要了解某一變項的分配情況，而不能從他變項來推測時，最常用的一個推測辦法，就是從平均數着手。所以在尙不知X變項時，要推測Y，可以從Y的平均數來看。不過單從平均數與觀察值之間的差總和，來推知Y的分配狀況，則將因正負值相抵消的結果，總和必等零。這一點在前已有證明。因此，可取其差的平方和，亦卽取$\sum\ (Y-\bar{Y})^2$，不失爲衡量Y變項分配狀況的一個辦法。

進一步來看，如果已知第二變項X，而且從X變項可大約推測Y變項，則可用廻歸線求之。若X和Y有完全相關，自然從X變項可準確推測Y變項。但是一般情形，兩變項之間雖

然有關，但並不完全相關。從X推測出的推測值Y'，與Y變項之各觀察值之間，仍有誤差存在。誤差的大小視X變項與Y變項間的相關程度而定。換言之，我們可以從Y－Y'爲基礎，來衡量X變項和Y變項間的相關程度。

雖然Y－Y'可以作爲衡量X變項和Y變項之間的相關程度基礎。但是，當Y＞Y'時，其差爲正；當Y＜Y'時，其差爲負。其總和將因正負值而相抵消的結果，總和值必等於零。所以可取其平方和$\Sigma(Y-Y')^2$，以避免正負相消。

不過單取平方和$\Sigma(Y-Y')^2$，仍不是衡量相關程度的一個理想方法。因爲若X變項和Y變項之間極相關時，此值自趨於零；若兩變項相關極小時，此值將趨於極大之數值。況且此值之大小又因變項之多寡而定，不能作不同資料的客觀比較。爲了克服這一問題，我們可除以其極大值（maximum），亦即：

$$\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\max\Sigma[\Sigma(Y-Y')^2]} \qquad (3.1)$$

此值將介於 0與1 之間。那麼什麼是$\Sigma(Y-Y')^2$的極大值？$\Sigma(Y-Y')^2$的極大值可從（2.10）式求得：

$$S_y^2=S_e^2+S_{y'}^2$$

亦即：
$$\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{n}=\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{n}+\frac{\Sigma(Y'-\bar{Y})^2}{n}$$

$$\Sigma(Y-\bar{Y})^2=\Sigma(Y-Y')^2+\Sigma(Y'-\bar{Y})^2$$

因爲$\Sigma(Y-\bar{Y})^2\geq 0$，$\Sigma(Y-Y')^2\geq 0$，$\Sigma(Y'-\bar{Y})^2\geq 0$，故知

$$\max[\Sigma(Y-Y')^2]=\Sigma(Y-\bar{Y})^2$$

所以（3.1）式可化爲：

$$\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2} \qquad (3.2)$$

雖然（3.2）式可用來客觀地呈現兩變項間的相關程度，但是當兩變項間相關程度甚大時，則（3.2）式的值近於零；反之，兩變項間相關程度甚微時，則（3.2）式的值近1。所以（3.2）式所求得之值與變項間的相關程度呈反方向之變化。我們還得校正此式，使此值不但仍能介於0與1之間，且與變項間的相關程度呈同方向之變化：

$$0\leq\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}\leq 1$$

不等號兩邊同乘－1，得：

$$0\geq-\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}\geq-1$$

不等號兩邊皆加＋1，得：

$$1\geq 1-\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}\geq 0 \qquad (3.3)$$

從上式求得之值，即可表示出兩變項間的相關程度。此值在統計學上稱爲確定係數（coefficient of determination），其平方根稱爲皮爾遜積矩相關係數（Pearson pruduct-moment correlation coefficient），或簡稱相關係數。以符號表示：

$$r_{yx} = \pm\sqrt{1-\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}} \qquad (3.4)$$

$$r^2_{yx} = 1-\frac{\Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2} \qquad (3.5)$$

從上式可進一步化爲：

$$r^2_{yx} = 1-\frac{\Sigma(Y-Y')^2/n}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2/n}$$

$$= 1-\frac{S^2_e}{S^2_y} \qquad (3.6a)$$

$$= \frac{S^2_y-S^2_e}{S^2_y}$$

$$= \frac{S^2_e+S^2_{y'}-S^2_e}{S^2_y}$$

$$= \frac{S^2_{y'}}{S^2_y} \qquad (3.6)$$

我們在前面已分析過，依變項Y的變異數是由推測值的變異數和推測誤差的變異數兩部分所合成，所以從（3.6）式，可將相關係數的平方解釋爲：推測值的變異數對依變項的變異數之比。換言之，若X爲自變項，Y爲依變項，則相關係數平方 r^2_{yx} 所代表之意義，即從X推測Y的準確度。例如 $r_{yx}=0.5$，即從X推測Y，可有25%的準確度。

相關係數可由離均差、標準分數、觀察值等直接計算。公式推論如下：

$$r^2_{yx} = \frac{S^2_{y'}}{S^2_y} = \frac{\Sigma(bx)^2/n}{\Sigma y^2/n} \qquad \text{〔從（2.9）式〕}$$

$$= \frac{b^2\Sigma x^2}{\Sigma y^2} \qquad \text{〔分子分母皆乘}\Sigma x^2\text{〕}$$

$$= \frac{b^2(\Sigma x^2)^2}{\Sigma x^2\Sigma y^2}$$

$$= \frac{(b\Sigma x^2)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2} \qquad \text{〔從 (2.7) 式〕}$$

$$= \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2} \qquad (3.7)$$

或 $$r^2_{yx} = \frac{Syx}{S_x S_y} \qquad (3.8)$$

又因爲：

$$r_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} = \frac{\Sigma xy}{n\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} \cdot \frac{\Sigma y^2}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}} \cdot \frac{y}{\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n}}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma Z_x Z_y \qquad (3.9)$$

又因爲：

$$\begin{aligned}
\Sigma xy &= \Sigma \left[(\bar{X} - X)(Y - \bar{Y}) \right] \\
&= \Sigma \left[XY - XY - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y} \right] \\
&= \Sigma \left[XY - \frac{(\Sigma X)}{n} Y - X\frac{(\Sigma Y)}{n} + \left(\frac{\Sigma X}{n}\right)\left(\frac{\Sigma Y}{n}\right) \right] \\
&= \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n} - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n} + n\left(\frac{\Sigma X}{n}\right)\left(\frac{\Sigma Y}{n}\right) \\
&= \Sigma XY - 2\frac{\Sigma X \Sigma Y}{n} + \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n} \\
&= \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n} \\
&= n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

又：

$$\begin{aligned}
\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2} &= \sqrt{\Sigma (X - \bar{X})^2} \sqrt{\Sigma (Y - \bar{Y})^2} \\
&= \sqrt{\Sigma (X^2 - 2X\bar{X} - \bar{X}^2)} \sqrt{\Sigma (Y^2 - 2Y\bar{Y} + \bar{Y}^2)} \\
&= \sqrt{\Sigma X^2 - 2\frac{(\Sigma X)^2}{n} + \frac{(\Sigma X)^2}{n}} \sqrt{\Sigma Y^2 - 2\frac{(\Sigma Y)^2}{n} + \frac{(\Sigma Y)^2}{n}} \\
&= \sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}} \sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}} \\
&= \sqrt{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \sqrt{n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

故得

$$r_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}} \qquad (3.12)$$

了解了相關係數的意義，我們可進一步看相關係數與迴歸線斜率的關係。從 (2.8) 式得知：

$$b = \frac{S_{yx}}{S^2_x}$$

故得：

$$b \cdot S_x = \frac{S_{yx}}{S_x}$$

$$b \frac{S_x}{S_y} = \frac{S_{yx}}{S_x S_y}$$

$$b \frac{S_x}{S_y} = r_{yx}$$

$$\therefore \quad b = r_{yx} \cdot \frac{S_y}{S_x} \qquad (3\cdot13)$$

以上所分析的，是假定從自變項X 來推測依變項Y ，由迴歸線$Y' = a + bX$ 進而推論出相關係數 r_{yx} 。其中在符號使用上， b代表從自變項X 推測依變項Y 之迴歸線斜率，而相關係數 r_{yx} 在拉丁字母 r 之下方標二小字母，前一個字母代表依變項、後一個小字母代表自變項。如果我們從相反的方向作推測，以Y 變項爲自變項， X 變項爲依變項， 而且又設 $X' = A + BY$ 爲從變項 Y 推測變項X的迴歸線 ， 則變項X 的變異數仍然爲 S^2_x ，變項 Y 的變異數仍然爲 S^2_Y，二變項之共變數亦爲 S_{xy} 。又依求得 (3.13) 式同樣的方法，將得B等於 $\frac{S_{xy}}{S^2_y}$，其與 b之差別僅在分母由 S^2_y 取代 S^2_x 。

從 (3.8) 式知以X推測 Y的相關係數爲：

$$r_{yx} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

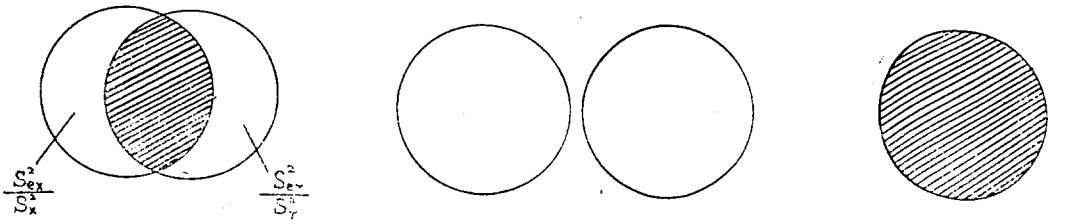
$$= \frac{\sqrt{S_{xy}}}{S_x} \quad \frac{\sqrt{S_{xy}}}{S_y}$$

$$= \sqrt{\frac{S_{xy}}{S^2_x} \cdot \frac{S_{xy}}{S^2_y}}$$

$$= \sqrt{b \cdot B} \qquad (3.14)$$

所以相關係數的平方等於兩種迴歸線的斜率積，從而也可知$r_{yx} = r_{xy}$，二變項間的相關係不受變項之地位（自變項或依變項）而有所影響。相關係數的平方也可解釋爲：兩變項所共同擁有之變異數的比率。因此，若$r_{yx} = 0.5$，則我們從X 推測Y ，可有 25% 的準確度；同樣的，我們從Y 推測X ，也可有 25% 的準確度。

相關係數和變異數的關係，可用圖表示。例如下圖二，圓代表變項之總變異數（total variance），其值等於1。圓與圓交疊部分爲決定係數（r^2），即圖中畫有陰影之部分



$r^2 = 0.49$	$r^2 = 0$	$r^2 = 1$
$(r = 0.7)$	$(r = 0)$	$(r = 1)$
(A)	(B)	(C)

圖　二

。在（A）圖中，相關係數爲0.7，故決定係數爲 0.49，圖（B）兩變項間的相關係數爲零，故兩圓分開，不交疊。圖（C）爲兩變項完全相關，故兩圓完全重疊。

雖然相關係數所代表的意義，是從一種變項推測另一變項的準確度。但是若兩變項間的相關係數甚大時，不能因而認爲這兩變項間有因果關係存在。這兩變項間有高度相關，也許共同受第三個變項所造成。舉例來說，若發現體重與體力有高度的相關係數，則在未明瞭年齡變項之前，我們不能認定體重與體力之間的因果關係。假定控制年齡變項，限以40歲到60歲的人爲對象，則可能使體重與體力之間的相關係數趨於甚低。所以如果我們能將兩變項以外的第三變項加以控制，再求這兩變項之相關係數，則這種相關係數可視爲這兩變項的「純粹」相關程度。此種控制第三變項而求得之相關係數，在統計學上稱爲偏相關係數（the partial correlation coefficient）。偏相關係數的符號爲 $r_{ij \bullet k}$，在r之右下方所標字母，以一點分爲兩部分，點之左記相關變項，點之右記被控制之第三變項。當然，第三變項並不以一個爲限，若有數個第三變項，則偏相關係數記爲 $r_{ij \bullet klm.....}$。

偏相關係數的求法，我們可借用圖解來說明。設X和Y爲相關之二變項，T爲第三變項。又設從T推測X的誤差爲 e_x，估計標準誤爲 S_{ex}，其迴歸線爲 $X' = a+bT$；從T推測Y的誤差爲e_y，估計標準誤爲S_{ey}，其迴歸線爲$Y'=A+BT$。我們同樣用圓代表變項之總變異數，則X,Y，T三變項之關係示如圖三。變項間的決定係數即兩圓交疊部分。所以 $r^2_{xy.}$爲圖上黑色及畫線條之部分。$r^2_{xy.T}$即黑色部

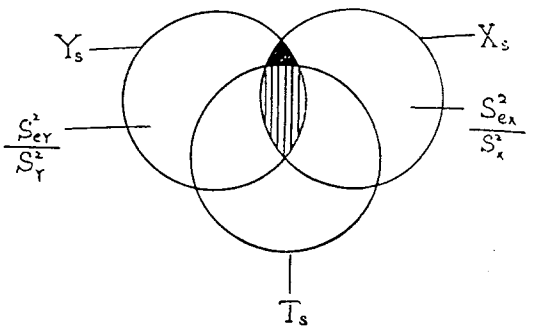


圖　三

分。若將三個圓看作三個集合，分別以符號Y_s，X_s，T_s爲代表，則從圖上可看出：

$$r^2_{xy\cdot T}=X_s\cap Y_s\cap -T_s$$

$$=\frac{S^2_{ex}}{S^2_x}\cap\frac{S^2_{ey}}{S^2_y}$$

因此，要求出X和Y的偏相關係數$r_{xy\cdot T}$、也就是將 e_x和e_y 看作兩個變項，而求e_x和e_y之間的相關係數，故

$$r_{xy\cdot T}=r_{exey}=\frac{\Sigma\,(e_x-\bar{e}_x)\,(e_y-\bar{e}_y)/n}{S_{ex}\quad S_{ey}}\qquad[\bar{e}_x=\bar{e}_y=0]$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\Sigma e_x.e_y}{S_{ex}\,S_{ey}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\Sigma\,(X-X')\,(Y-Y')}{S_{ex}\quad S_{ey}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\Sigma\,(X-a-bT)(Y-A-BT)}{S_{ex}\quad S_{ey}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\Sigma\,(X-\bar{X}+b\bar{T}-bT)\quad(Y-\bar{Y}+B\bar{T}-BT)}{S_{ex}\qquad S_{ey}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\Sigma\,[(X-\bar{X})-b\,(T-\bar{T})]\quad[(Y-\bar{Y})-B\,(T-\bar{T})]}{S_{ex}\qquad S_{ey}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\Sigma\,[(X-\bar{X})\,(Y-\bar{Y})-b(T-\bar{T})(Y-\bar{Y})-B(X-\bar{X})\cdots\cdots\cdots(T-\bar{T})+bB(T-\bar{T})^2]}{S_{ex}\qquad S_{ey}}$$

$$=\frac{S_{xY}-b\,S_{yT}-B\,S_{xT}-Bb\,S_T{}^2}{S_{ex}\;.\,S_{ey}}$$

$$=\frac{S_{xy}-b\,S_{yT}-BS_{xT}+Bb\,S_T{}^2}{S_x\;S_y\sqrt{(1-r^2_{xT})\,(1-r^2_{yT})}}\qquad[\text{見 (3.6a)}]$$

$$=\frac{\frac{S_{xy}}{S_xS_y}-b\frac{S_{yT}}{S_xS_Y}-B\frac{S_{xy}}{S_xS_y}+Bb\frac{S_T{}^2}{S_xS_y}}{\sqrt{(1-r_{xT}{}^2)\,(1-r^2_{yT})}}$$

$$\because\quad b=r_{xT}\frac{S_x}{S_T}\qquad B=r_{yT}\frac{S_y}{S_T}\qquad[\text{見 (3.13)}]$$

$$\therefore \quad r_{xy\cdot T}=\frac{r_{xy}-r_{xT}\,r_{yxT}-r_{yT}\,r_{xT}+r_{xT}\,r_{yT}}{\sqrt{(1-r^2_{xT})\ (1-r^2_{yT})}}=\frac{r_{xy}-r_{xT}r_{yT}}{\sqrt{(1-r^2_{xT})(1-r^2_{yT})}} \qquad (3.14)$$

四、相關與因子

我們在上節分析過，兩種變項之間的相關係數不一定完全由這兩變項之變化所造成。有時兩變項之間的關係還受第三個變項的影響。如果我們能够將第三個變項加以控制，再求這兩變項的純粹關係，所得之相關係數即偏相關係數。

了解了偏相關的意義，就可進一步借用偏相關概念來解釋因子。同樣地，我們要解釋因子，也要借用圖解來說明。設X、Y爲變項，T爲加以控制的第三個變項，各變項之總變異數分別爲 X_s，Y_s，T_s，這三變項的相關係數爲，r_{xy}，r_{xT}，r_{yT}，X與Y的偏相關係數爲 $r_{xY\cdot T}$。三變項之間的關係示如圖四。圖中的三個圓同樣代表各變項之總變異數。假定X與Y的偏相關甚小而近於零時，則根據(3.14)式可得知 r_{xY}^2 幾近似於 r_{xT}和 r_{yT} 的積，亦即$r^2_{XY}\doteq r_{XT}\ r_{YT}$。從另一方面來看，$r_{Xy}$在圖上之範圍爲$X_s\cap Y_s\cap T_s$(因爲$r^2_{XY\cdot T}=0$)，而 $r^2_{xT}=X_s\cap T_s$，所以$r^2_{XY}\subseteq r^2_{XT}$。同樣道理，$r^2_{XY}\subseteq r^2_{YT}$。進一步看，假定$r^2_{XY}\subseteq r^2_{XT}$，則不論$r^2_{XY}\subset r^2_{YT}$ 或 $r^2_{XT}=r^2_{XT}$，r_{XT} 與 r_{YT} 之積必大於 r^2_{XY} ($r^2_{XY}<r_{Xy}\cdot r_{YT}$)，此與原先的假定不符合。因此，$r_{XY}=r_{XT}$ (或$r^2_{XY}=r^2_{XT}$)，別無選擇。同理，$r_{XY}=r_{YT}$。從而可知，當X和Y的偏相關係數等於零時，則必然地，$r_{XY}=r_{YT}=r_{XT}$

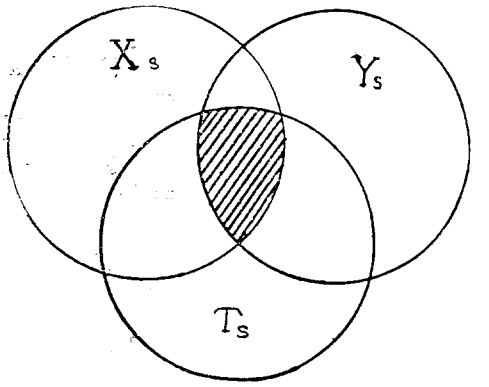


圖　四

既然X與Y的偏相關係數甚小時，我們可從第三變項T，以同樣準確度來推測X和Y兩變項。如果X和Y的簡單相關又甚大時，我們只要說明一個變項T的變化，就可代替解釋兩個變項X和Y的變化。因子分析的目的就在於此，從觀察X和Y的關係中，找出另一變項T，從而用T來解釋X和Y。不過一般情形，我們在觀察由多變項（至少三個變項）所構成的複雜現象，而需要以較少數的概念來解釋這多變項的複雜現象時，就可以應用因子分析。上述觀察變項只有X和Y，這是爲便於解釋因子概念而加以簡化。通常觀察變項有數個，而因子分析的目的是要從其關係間，找出比變項數（the number of variables）更少數的一個或幾個T。當然這一個或幾個T，不是我們直接可觀察的變項，而是從觀察變項關係間抽繹出的第三變項。這幾個不可直接觀察的第三變項，稱爲因子。所以因子也是一種變項

，是隱藏的變項，更是人工特意設計出來的變項。因子因而也有其變異數，不但因子與觀察變項間有相關係數，因子與因子之間也有相關係數。

解釋了什麼是因子之後，接着來分析因子和相關係數的關係。我們先從一個變項一個共子同因解析起，再推展到兩個變項、三個變項。多個變項、有一共同因子。最後再分析多變項多因子的問題。

在前面曾解析過，一個變項可分割爲兩部分，一部分可由自變項推測，另一部分不能由自變項說明的。設依變項 X，而從某一共同的自變項推測X 的推測值爲 F，其誤差爲 E_1，則其關係式爲：

$$X = F + E_1$$

將等式兩邊予總和，得：

$$\Sigma X = \Sigma (F + E_1)$$

$$\frac{\Sigma X}{n} = \frac{\Sigma (F + E_1)}{n}$$

$$\frac{\Sigma X}{n} = \frac{\Sigma F}{n} + \frac{\Sigma E_1}{n}$$

$$\overline{X} = \overline{F} + \overline{E}_1$$

再將原來之程式減上面最後一程式，得：

$$X - \overline{X} = (F - \overline{F}) + (E_1 - \overline{E}_1)$$

$$(X - \overline{X})^2 = [(F - \overline{F}) + (E_1 - \overline{E}_1)]^2$$

$$\Sigma (X - \overline{X})^2 = \Sigma [F - \overline{F}) + (E_1 - \overline{E}_1)]^2$$

$$\frac{\Sigma (X - \overline{X})^2}{n} = \frac{\Sigma [(F - \overline{F}) + (E_1 - \overline{E}_1)]^2}{n}$$

$$S^2_x = \frac{\Sigma (F - \overline{F})^2}{n} + \frac{\Sigma (E_1 - \overline{E}_1)^2}{n} + \frac{2\Sigma (F - \overline{F})(E_1 - \overline{E}_1)}{n}$$

$$= S_F^2 + S_{E1}^2 + 2S_{FE1}$$

但由 F 和 E_1 的定義，知 F 和 E_1 不相關，亦即 $r_{FE1} = 0$，$S_{FE1} = 0$

$$\therefore \quad S^2_x = S^2_F + S^2_{E1} \qquad (4.1)$$

又從共變數之定義，得：

$$S_{XF} = \frac{\Sigma (x - \overline{x})(F - \overline{F})}{n}$$

$$= \frac{\Sigma [(F - \overline{F}) + (E_1 - \overline{E}_1)](F - \overline{F})}{n}$$

$$= \frac{\Sigma (F - \overline{F})^2}{n} + \frac{\Sigma (E_1 - \overline{E}_1)(F - \overline{F})}{n}$$

$$= S^2_F + S_{FE1}$$

$$= S^2_F \qquad (4.2)$$

又設有第二個依變項Y，其與X有一共同的自變項。且與X有共同的推測值F，則與上述同理，得：

$$Y = F + E_2$$

$$S^2_Y = S^2_F + S^2_{E2} \quad \text{———} \quad (4.3)$$

$$S_{YF} = S^2_F \quad \text{———} \quad (4.4)$$

依共變數的定義，X與Y的共變數 S_{XY} 爲：

$$S_{XY} = \frac{\Sigma (X-\overline{X})\ (Y-\overline{Y})}{n}$$

$$= \frac{\Sigma [(E_1-\overline{E}_1)+(F-\overline{F})]\ [(E_2-\overline{E}_2)+(F-\overline{F})}{n}$$

$$= \frac{\Sigma (E_1-\overline{E}_1)\ (E_2-\overline{E}_2)}{n} + \frac{\Sigma(F-\overline{F})(E_2-\overline{E}_2)}{n} + \frac{\Sigma(E_1-\overline{E}_1)((F-\overline{F})}{n} + \frac{\Sigma (F-\overline{F})^2}{n}$$

$$= S_{E1E2} + S_{F1E2} + S_{FE1} + S^2_F$$

但從誤差的定義，E_1，E_2 爲X，Y之獨有部分，與其他任何變項無關，亦即

$$S_{E1E2} = S_{FE1} = S_{FE2} = 0$$

$$\therefore \quad S_{XY} = S^2_F \quad \text{———} \quad (4.5)$$

所以從相關係數的定義，r_{XY} 爲：

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X\ S_Y}$$

$$= \frac{S^2_F}{S_X S_Y}$$

$$= \frac{S_F}{S_X} \bullet \frac{S_Y}{S_Y}$$

$$= r_{XF} \bullet r_{YF} \quad \text{———} \quad (4.6)$$

又進一步看第三個自變項W。若W變項與X、Y變項有一共有部分F，亦即$W = F + E_3$，則照上述同樣推論，可得：

$$r_{YW} = r_{YF} \bullet r_{WF} \quad \text{———} \quad (4.7a)$$

$$r_{XW} = r_{XF} \bullet r_{WF} \quad \text{———} \quad (4.7b)$$

$$r_{XY} = r_{XF} \bullet r_{YF} \quad \text{———} \quad (4.7c)$$

設 j，k爲任何二變項，且其共有部分爲F，則可得： ——— (4.8)

$$r_{jk} = r_{jF} . r_{kF}$$

又將 (4.7a) 與 (4.7b) 相乘，得：

$$r_{YW} \cdot r_{xW} = r_{YF} \cdot r_{xF} \cdot r^2_{WF}$$

$$\therefore \quad r^2_{WF} = \frac{r_{YW} \cdot r_{xW}}{r_{YF} \cdot r_{xF}}$$

$$= \frac{r_{YW} \cdot r_{xW}}{r_{xY}} \qquad (4.9a)$$

同理得：

$$r^2_{xF} = \frac{r_{Yx} \cdot r_{Wx}}{r_{YW}} \qquad (4.9b)$$

$$r^2_{YF} = \frac{r^2_{Yx} \cdot r_{YW}}{r_{xW}} \qquad (4.9c)$$

以 j，k，l代表任何三個變項，而有一共同部分F，則得：

$$r^2_{jF} = \frac{r_{jk} \cdot r_{jl}}{r_{kl}} \qquad (4.10)$$

四個以上的變項有一共同部分時，我們可照上述同樣方法求出變項與因子之間的關係，如 (4.8) 和 (4.10) 式。因爲四個變項間有六個相關係數，故有六個等式如 $r_{jk} = r_{jF} \cdot r_{kF}$，其中 j，k 爲任何二觀察變項，F爲因子。從四個變項擴展到m個變項有一共同因子時，則有 ${}_mC_2 = \frac{m(m-1)}{2}$ 個變項間的相關係數，以及 $\frac{m(m-1)}{2}$ 個如 (4.8) 式的關係式。

雖然 r_{jF}或 r_{kF} 爲觀察變項與因子之間的相關係數，但是在因子分析中不稱爲相關係數，而稱爲因子負荷量 (factor loading) (註五)，用符號 a_{jF}代替 r_{jk}，則因子與變項間的關係式可寫作：

$$r_{jF} = a_{jF}$$

$$\therefore \quad r_{jk} = a_{jF} \; a_{kF} \qquad (4.11)$$

我們所以稱爲因子負荷量，而不稱爲相關係數，一則這是長久以來的習慣用法，我們不便予更改名稱。二則，我們之所以稱因子，而不稱爲第三變項（其實因子可看作第三變項），乃因爲因子是一觀察變項的構成部分而已，而不是一種獨立的變項。我們可以直接觀察變項，而不能直接觀察因子。因子是假設變項 (hypothetical variable)，不是獨立眞實存在的變項。再者，經因子分析的結果，其有如數學上的因數或因式分解，經分解出的因子，可以再彼此相乘，即得原本觀察變項間的相關係數。

至於 (4.10) 式中的 r^2_{jF}，我們也可改寫爲 a^2_{jF}。在因子分析中，此值稱爲共性數 (communality)。習慣上用符號 h^2_j 表示 j 變項的共性數。關於共性數，我們在後文中再

予解釋。若變項間有一共同因子時，則 j 變項之共性數即：

$$h_j^2 = a_{jF}^2 \quad \text{———————————} \quad (4.12)$$

或

$$h_j^2 = \frac{r_{jk} \cdot r_{jl}}{r_{kl}} \quad \text{———————————} \quad (4.13)$$

其中 k，l 爲 j 以外任何二觀察變項。

以上所述，是從一個變項一個共同因子，分析到多個變項一個共同因子。不過一般自然及社會現象中，只有一個共同因子的情形極少。所以一個共同因子的模型，其應用性極爲有限，只可當作一項理論模型。我們還得推展到多變項共有 p 個共同因子的模型。（$p \geq 2$，$p < m$）。同樣地，要分析多因子模型，還得以最簡單的多因子（二因子）分析起，然後推展到二個以上共有因子的因子模型。

爲了區分不同的因子，我們在因子符號 F 之下標以不同的數字。設有二個共同因子，第一個因子以F_1表示，第二因子以F_2表示。從前述的解析，一個變項可分解爲：

$$X = F_1 + F_2 + E_x$$

其中E_x代表X變項的獨有部分（誤差）。照上節的分析，同樣可得知：

$$\overline{X} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{E}_x$$

將上二式相減，得：

$$X - \overline{X} = (F_1 - \overline{F}_1) + (F_2 - \overline{F}_2) + (E_x - \overline{E}_x)$$

等式兩邊皆予平方，再予Σ：

$$\Sigma (X - \overline{X})^2 = \Sigma [(F_1 - \overline{F}_1) + (F_2 - \overline{F}_2) + (E_x - \overline{E}_x)]^2$$

上式等號兩邊皆除以 n，得：

$$S_X^2 = S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 + S_{E_x}^2 + 2(S_{F_1F_2} + S_{F_1E_x} + S_{F_2E_x})$$

因爲從F_1，F_2，E_x 的定義，知F_1，F_2，E_x 彼此各不相干，亦即 $S_{F_1F_2} = S_{F_1E_x} = S_{F_2E_x} = 0$，故上式可化爲：

$$S_x^2 = S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 + S_{E_x}^2 \quad \text{———————} \quad (4.14)$$

又設有第二個變項 Y，則X和 Y 的共變數 S_{xY}爲：

$$S_{xY} = \frac{\Sigma (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{n}$$

$$= \frac{\Sigma [(F_1 - \overline{F}_1) + (F_2 - \overline{F}_2) + (E_x - \overline{E}_x)][(F_1 - \overline{F}_1) + (F_2 - \overline{F}_2) + (E_Y - \overline{E}_Y)]}{n}$$

$$= S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 + 2\ S_{F_1F_2} + S_{F_2E_x} + {}_{F_1E_x} + S_{F_1E_Y} + S_{F_2E_Y} + S_{E_xE_Y}$$

$$= S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 \quad \text{———————————} \quad (4.15)$$

因此又可推知：

$$r_{xY}=\frac{S_{xY}}{S_x\ S_Y}=\frac{S^2_{F_1}+S^2_{F_2}}{S_xS_Y}$$

$$=\frac{S^2_{F_1}}{S_x\ S_Y}+\frac{S^2_{F_2}}{S_x\ S_Y}$$

$$=\frac{S_{F_1}}{S_x}\cdot\frac{S_{F_1}}{S_Y}+\frac{S_{F_2}}{S_x}\cdot\frac{S_{F_2}}{S_Y}$$

$$=r_{XF_1}\cdot r_{YF_1}+r_{XF_2}\cdot r_{YF_2}$$

以因子負荷量代入因子相關，得：

$$r_{xY}=a_{x1}\cdot a_{Y1}+a_{x2}a_{Y2} \qquad (4.16)$$

若以 j，k 代表任何二變項，共有 p 個共同因子 F_1，F_2，F_3，……，F_p，則同理推論，可得下列各式：

$$S^2_j=S^2_{F_1}+S^2_{F_2}+\cdots\cdots+S^2_{F_p}+S^2_{Ej} \qquad (4.17)$$

$$S_{jk}=S^2_{F_1}+S^2_{F_2}+\cdots\cdots S^2_{F_p} \qquad (4.18)$$

$$r_{jk}=a_{j_1}\cdot a_{k_1}+a_{j_2}\cdot a_{k_2}+\cdots\cdots+a_{jp}\cdot a_{kp}=\sum_{f=1}^{p}a_{jf}\cdot a_{kf} \qquad (4.19)$$

$$h^2_j=\sum_{f=1}^{p}a^2_{jf} \qquad (4.20)$$

五、因子理論

從上一節的分析，我們知道，m個變項間有個 p 共同因子時，則任何一變項的變異數可分解爲兩部分：一部分是由各因子的變異數所構成。這一部分可稱爲共同變異數（common variance）。以符號 Vco代表共同變異數，即：

$$V_{co}=S^2_{F_1}+S^2_{F_2}+\cdots\cdots+S^2_{F_p}$$

另一部分是與其他任何變項及因子不相關的變異數，即 S^2_{Ej}，一般稱此變異數爲獨有變異數（unique variance）。不過，我們要知道，獨有變異數並非僅共同變異數除外而原爲

該變項的實有部分而已。獨有變異數尚包括一部分由抽樣或機率所造成的誤差。這種誤差不是該變項本身原有之部分。所以獨有變異數可包括專有變異數（specific variance）和抽樣誤差變異數（error variance）。設以 V_s 代表專有變異數，V_E 代表抽樣誤差變異數，則變項之變異數可分解爲：

$$S_j^2 = S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 + \cdots\cdots + S_{F_p}^2 + S_{Ej}^2$$

$$= V_{co} + V_s + V_E \quad \text{———} \quad (5.1)$$

其中： $V_{co} = S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 + \cdots\cdots + S_{F_p}^2$

$$S_{Ej}^2 = V_s + V_E$$

將 (5.1) 式等號兩邊同除以 S_j^2，得：

$$\frac{S_j^2}{S_j^2} = 1 = \frac{S_{F_1}^2}{S_j^2} + \frac{S_{F_2}^2}{S_j^2} + \cdots\cdots + \frac{S_{F_p}^2}{S_j^2} + \frac{V_s}{S_j^2} + \frac{V_E}{S_j^2}$$

$$= a_{j_1}^2 + a_{j_2}^2 + \cdots\cdots + a_{jp}^2 + \frac{V_s}{S_j^2} + \frac{V_E}{S_j^2}$$

設 $S_{jj}^2 = \frac{V_s}{S_j^2}$，$E_{jj}^2 = \frac{V_E}{S_j^2}$。又因爲 $h_j^2 = \sum_{f_1}^{p} a_{jf}^2$，故上式簡化爲：

$$1 = h_j^2 + S_{jj}^2 + E_{jj}^2 \quad \text{———} \quad (5.2)$$

所以一個變項的總變異數扣除其抽樣誤差部分，稱爲該變項之可靠性（reliability），以 r_{jj}^2 表示，即： $r_{jj}^2 = 1 - E_{jj}^2 = h_j^2 + S_{jj}^2$ ——— (5.3)

同樣的，若以 U_{jj}^2 表示變項之獨有性（uniqueness），則：

$$U_{jj}^2 = S_{jj}^2 + E_{jj}^2 = 1 - h_j^2 \quad \text{———} \quad (5.4)$$

從以上的分析，我們藉因子理論，可將變項之變異數歸納爲如下的分解組織：

(1)總變異數 $1 = h_j^2 + S_{jj}^2 + E_{jj}^2 = h_j^2 + U_{jj}^2$

(2)可靠性 $r_{jj}^2 = h_j^2 + S_{jj}^2 = 1 - E_{jj}^2$

(3)共性數 $h_j^2 = 1 - U_{jj}^2 = \sum_{f=1}^{p} a_{jf}$

(4)獨有性 $U_{jj}^2 = S_{jj}^2 + E_{jj}^2 = 1 - h_j^2$

(5)專有性 $S_{jj}^2 = U_{jj}^2 - E_{jj}^2$

(6)誤差變異數 $E_{jj}^2 = 1 - r_{jj}^2$

變項的變異數分解組織也可用圖予解示：

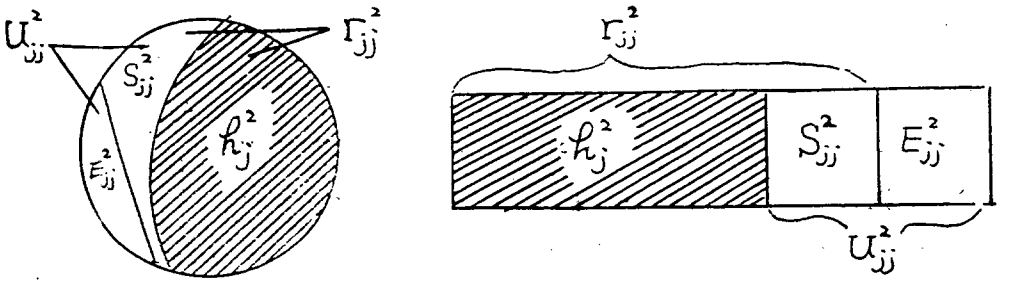


圖　　五

通常作因子分析的工作，是先對 n 個觀察項作 m個變項的觀察。將觀察的結果作成如下列的矩陣：

		變項 1	2	3	……	m
觀察項	1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	……	X_{1m}
	2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	……	X_{2m}
	3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	……	X_{3m}
	⋮	⋮	⋮	⋮	X_{ij}	⋮
	n	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}	……	X_{nm}

上表中 X_{ij} 代表第 j 變項的第 i 觀察項的觀察值。我們根據上表的觀察值來計算出各變項間的相關係數。不過，我們可將上表的觀察值全化爲標準分數 z_{ij} 。由標準分數所構成的矩陣，稱爲標準分數矩陣，（the matrix of standard scores），以符號Z表示，即：

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots\cdots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots\cdots & Z_{2m} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots\cdots & Z_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & Zij & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \cdots\cdots & Z_{nm} \end{pmatrix}$$

若將所有相關係數合成一矩陣，稱爲相關矩陣，如下表：

		變項 1	2	3	……	m
變項	1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	……	r_{1m}
	2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	……	r_{2m}
	3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	……	r_{3m}
	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮
	m	r_{m1}	r_{m2}	r_{m3}	……	r_{mm}

因子分析的工作就以這種相關矩陣爲分析起點。若相關係數由觀察值直接計算出，則通常在相關矩陣中主對角線上的係數 r_{jj} 爲空白。通常因子分析的工作是以 h_j^2 代入 r_{jj} 的位置。若以標準分數矩陣直接計算，則 r_{jj} 皆爲 1。亦即 $Z'Z/n=R$， 其中Z' 代表標準分數矩陣的倒置矩陣，(transpose of the matrix) R爲相關矩陣，其主對角線上之係數皆爲 1。此外，相關矩陣在形式上呈 $m \times m$ 階的方形對稱矩陣，亦即 $r_{jk}= r_{kj}$。

從相關矩陣，經抽出因子後，得各因子負荷量。由因子負荷量所構成的因子矩陣，如下表：

		因子 I	II	III	……	p
變項	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	……	a_{1p}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	……	a_{2p}
	3	a_{31}	a_{33}	a_{33}	……	a_{3p}
	⋮	⋮	⋮	⋮	a_{jf}	⋮
	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	……	a_{mp}

因子矩陣通常 $m > p$ ，上表 a_{jf} 表示 j 變項對 f 因子的因子負荷量。

設 U^2 爲對角矩陣（ diagonal matrix ），其主對角線元素爲各變項的獨有性 U^2_{jj} ，亦即：

$$U^2 = \begin{pmatrix} U^2_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & U^2_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & U^2_{33} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & U^2_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

又設A爲因子矩陣，則根據 (4.19) 和(4.20)兩式可得：

$$R - U^2 = AA' \qquad \text{———————————} \quad (5.5)$$

因爲AA'的主對角線元素爲 Σa^2_{jf} ，其餘元素爲 $\Sigma\ a_{jf}\ a_{kf}$ ，故 $R - U^2$ 的主對角線元素爲，$\Sigma\ h^2_j$ ，而其餘元素爲 r_{jk} 。

又從 (4·19) 式，相關係數與因子負荷量的關係：

$$r_{jk} = a_{j_1} \cdot a_{k_1} + a_{j2} \cdot a_{k2} + \cdots\cdots + a_{jp} \cdot a_{kp}$$

亦即 $$r_{jk} - a_{j_1} \cdot a_{k_1} = a_{j_2} \cdot a_{k_2} + \cdots\cdots + a_{jp} \cdot a_{kp}$$

上式等號右邊稱爲第一因子剩餘。(first factor residual)。通常以符號 ${}_f r_{jk}$ 表示因子剩餘，其中 f 代表已抽出的因子數， j ，k 代表變項。故：

$$\begin{aligned} {}_2 r_{jk} &= r_{jk} - a_{j1}\ a_{k1} \\ {}_1 r_{jk} &= {}_1 r_{jk} - a_{j2}\ a_{k1} \\ {}_f r_{jk} &= {}_{(f-1)} r_{jk} - a_{jf}\ a_{kf} \qquad \text{————————} \quad (5.6) \end{aligned}$$

我們分析到此，也該將 r_{jf} 和 a_{jf} 作區別的時候。前者 r_{jf} 表示因子與變項的相關係數，稱爲因子相關 (factor correlation) ；而後者 a_{jf} 表示因子的變異數與變項變異數的比，即， Sf/Sj。 a_{jf} 稱爲因子負荷量，或稱因子係數 (factor coefficient) 。我們之所以在前述各節中將 r_{jf} 和 a_{jf} 同一視之，乃有一個前提假設：即各因子間不相關。如果沒有這一條件存在，則前述（4.6）式將成爲 $r_{xy} \neq r_{xF} \cdot r_{yF}$， 但以因子負荷量之定義，則可以 $r_{xF} = a_{xF} \cdot a_{yF}$。因子相關，所以不等於因子負荷量，另可從下列證明之：

$$\therefore \quad X-\overline{X} = (F_1-\overline{F}_1) + (F_2-\overline{F}_2) + (E-\overline{E})$$

$$\frac{(X-\overline{X})}{S_x} = \frac{(F_1-\overline{F}_1)}{S_x} + \frac{(F_2-\overline{F}_2)}{S_x} + \frac{(E-\overline{E})}{S_x}$$

$$Z_x = \frac{(F_1-\overline{F}_1)}{S_{F1}} \cdot \frac{S_{F1}}{S_x} + \frac{(F_2-\overline{F}_2)}{S_{F2}} \cdot \frac{S_{F2}}{S_x} + \frac{(E-\overline{E})}{S_E} \cdot \frac{S_E}{S_x}$$

$$Z_x = z_{F1}\, a_{x1} + z_{F2}\, a_{x2} + z_E\, r_{xE}$$

從標準分數求變項X與因子F_1的相關係數：

$$r_{XF1} = \frac{1}{n}\sum Z_x Z_{F_1}$$

$$= \frac{1}{n}\sum (Z_{F1} a_{x1} + Z_{F2} a_{x2} + Z_E r_{XE}) Z_{F1}$$

$$= \frac{1}{n}\sum (a_{x1} Z_{F1} Z_{F1} + a_{x2} Z_{F1} Z_2 + r_{XE} Z_{F1} Z_E)$$

$$= a_{x1} \cdot \frac{\sum Z^2_{F1}}{n} + a_{x2} \cdot \frac{\sum Z_{F1} Z_{F2}}{n} + r_{XE} \cdot \frac{\sum Z_{F1} Z_E)}{n}$$

因爲 $\sum Z^2_{F1} = \sum [\frac{(F_1-\overline{F}_1)}{S_{F1}}]^2$

$$= \frac{\sum (F_1-\overline{F}_1)^2}{(S_{F1})^2}$$

$$= \frac{n\sum (F_1-\overline{F}_1)^2}{\sum (F_1-\overline{F}_1)^2} = n$$

$$\therefore \quad r_{XF1} = a_{X1} + a_{X2}\, r_{F1F2} + r_{XE}\, r_{F1E}$$

又因爲從E的定義，E皆與F_1和F_2不相關，$r_{F1E} = 0$故得：

$$r_{XF1} = a_{X1} + a_{X2}\, r_{F1F2} \text{———————————} (5.7)$$

同理可得：

$$r_{XF2} = a_{X2} + a_{X1}\, r_{F1F2} \text{———————————} (5.8)$$

若 $r_{F1F2} = 0$ ，則上二式卽成爲：

$$r_{XF1} = a_{X1}$$

$$r_{XF2} = a_{X2}$$

此與原先的設定相同。但當 $r_{F1F2} \neq 0$時，則從 (5.7) 式和 (5.8) 式可得知：

$$r_{XF1} \neq a_{X1}$$

$$r_{XF2} \neq a_{X2}$$

由此可見，任何變項 j 與他變項共有因子，且因子與因子之間又有關時，因子相關（因子與變項間的相關係數）不等於因子負荷量。用通式表示：

$$r_{jf} \neq a_{jf}$$

其中 j 爲任何變項，f 爲因子間有關的任何共同因子。

同樣地，若除去因子間無關的前提假設，我們也可看出變項間的相關係數與因子負荷量

之關係，不是 (4.19) 式的結果。

設 j，k爲任何二變項，F_1，F_2爲二共同因子，且有如下關係：

$$j = F_1 + F_2 + E$$

$$k = F_1 + F_2 + e$$

其中 E，e 爲誤差。求變項 j 與 k 之間的相關係數：

$$r_{jk} = \frac{1}{n} z_j z_k$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma (z_{F1} a_{j1} + z_{F2} a_{j2} + z_E r_{jE}) (z_{F1} a_{k1} + z_{F2} a_{k2} + z_e r_{ke})$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma (z^2_{F1} a_{j1} a_{k1} + z_{F1} z_{F2} a_{j2} a_{k2} + z_E z_{F1} r_{jE} a_{k1}$$

$$+ z_{F1} z_{F2} a_{j1} a_{k2} + z^2_{F2} a_{j2} a_{k2} + z_E z_{F2} r_{jE} a_{k2}$$

$$+ z_{F1} z_e r_{ke} a_{j1} + z_{F2} z_e a_{j2} r_{ke} + z_E z_e r_{je} r_{ke})$$

因爲，$r_{F1E} = r_{F2E} = r_{F1e} = r_{F2e} = r_{Ee} = 0$，故上式可簡化爲：

$$r_{jk} = a_{j1} a_{k1} \frac{\Sigma Z^2_{F1}}{n} + a_{j2} a_{k2} \frac{\Sigma Z^2_{F2}}{n} + (a_{j2} a_{k1} + a_{j1} a_{k2} r_{F1F2})$$

又因爲，$\Sigma Z^2_F = n$，故得：

$$r_{jk} = a_{j1} a_{k1} + a_{j2} a_{k2} + (a_{j2} a_{k1} + a_{j1} a_{k2}) r_{F1F2}$$

同理，有 p 個共同因子時，則變項間的相關係數與因子負荷量之關係，可用下列通式表示：

$$r_{jk} = \sum_{f=1}^{p} a_{jf} a_{kf} + \sum_{\substack{f,g=1 \\ f \neq g}}^{{}_pC_1} (a_{jf} a_{kg} + a_{jg} a_{kf}) r_{fg} \text{———————} (5.10)$$

其中 j，k爲任何二變項，g，f，爲任何二因子，但 $f \neq g$。

若將上式(5.10)與 (4.19) 式比較，很顯然的可看出，這兩式不同的地方。在 (5.10) 式中，若因子間有關時（$r_{fg} \neq 0$），變項間的相關係數，非僅僅由因子負荷量所構成，而且還有接受因子之間的相關程度高低所影響。

六、相關和因子的幾何學解釋

從變項間的相關係數、到因子負荷量、因子相關、以及其間的各種關係概念，如共性數等，我們都可以用幾何學及圖解方法加以解釋。利用幾何學和圖解方法，至少可以將其間的關係視覺化，從而使我們得到具體的了解。當然，在高維（度）的空間上，尚無法用圖形畫出，但是我們可以從二維（度）空間的平面圖和三維（度）空間的立體透視圖加以推廣。

將變項和其相關係數幾何化的方法，即將變項看作向量（vector）、或幾何圖上的點。所謂向量，即有大小、有方向的線段。或說得更確切，所謂向量、即按一定之次序而排列的實數組。例如，向量 p（x_1，x_2，x_3）代表三維（度）空間上自原點至一點 p 的線段。p 點

在這立體空間的位置分別 X_1, X_2, X_3 爲其座標。如圖六。所以變項 X，有 n 個觀察項時，以向量視之，則：

$X(X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots, X_n)$ 同理，另一變項Y以向量視之，即

$Y(Y_1, Y_2, Y_3, \cdots\cdots, Y_n)$

因爲向量 X和向量Y皆含有 n 個元素，故X 和Y各代表 n 維空間上的二個不同點。不過， X和Y爲不同基本單位的變項，所以 X和Y要先化爲標準分數，然後才可以在同一維數空間圖形上表示。故X和 Y在 n 維（度）空間的座標爲：

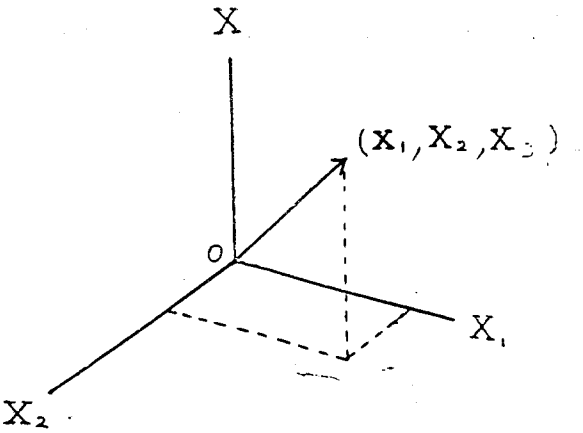


圖　六

$$X(Z_{x1}, Z_{x2}, Z_{x3}, \cdots\cdots, Z_{xn})$$

$$Y(Z_{Y1}, Z_{Y2}, Z_{Y3}, \cdots\cdots, Z_{Yn})$$

又設X向量的長度爲ρ_x，Y向量的長度爲ρ_Y，則根據直角三角形畢氏定理〔參閱圖六即可自證〕，得：

$$\rho_x^2 = Z_{x_1}^2 + Z_{x_2}^2 + Z_{x_3}^2 + \cdots\cdots + Z_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_{xi}^2 \text{———————} \quad (6.1)$$

又因爲從上節分析得知，任何變項的標準分數平方總和（ΣZ^2）等於觀察項數 n，故上式又可化爲

$$\rho_x^2 = n$$

$$\rho_x = \sqrt{n} \text{———————————————} \quad (6.2)$$

同理可得：

$$\rho_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_{Y_i}^2 \text{———————————————} \quad (6.3)$$

$$\rho_Y^2 = n \text{———————————————} \quad (6.4)$$

又設二變項的距離爲 d，即自X點到Y點的距離爲 d，則根據二向量間的距離定義〔參閱圖七，應用畢氏定理〕，得：

$$d^2 = (z_{x_1} - z_{Y_1})^2 + (z_{x_2} - z_{Y_2})^2 + \cdots\cdots + (z_{x_n} - z_{Y_n})^2$$

$$= \Sigma z_{x_i}^2 + \Sigma z_{Y_i}^2 - 2\Sigma z_{x_i} z_{Y_i} \text{———————————} \quad (6.5)$$

另據餘弦定理，任何二線，ρ_x，ρ_Y，其夾角爲θ，則二線之距離爲：

〔參閱圖八〕

$$d^2=(\rho_x \sin\theta)^2+(\rho_Y-\rho_x \cos\theta)^2$$
$$=\rho_T^2 \sin^2\theta+\rho_Y^2-2\rho_x\rho_Y \cos\theta+\rho^2{}_x\cos^2\theta$$
$$=\rho_x^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\rho_Y^2-2\rho_x\rho_Y\cos\theta$$
$$=\rho_x^2+\rho_Y^2-2\rho_x\rho_Y\cos\theta$$
$$=\sum z_{x_1}^2+\sum z_{Y_1}^2-2\sqrt{n}\sqrt{n}\cos\theta \qquad (6.6)$$

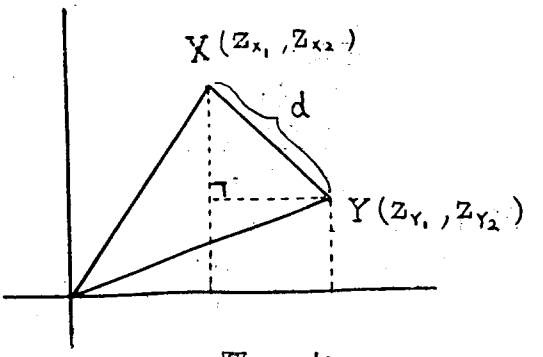


圖　七

將 (6.5) 和 (6.6) 兩式相減，得：

$$2\ n\ \cos\theta=2\sum z_{x1}\ z_{Y1}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sum z_{x_1}\ z_{Y_1}}{n}=r_{xY} \qquad (6.7)$$

由此可知，若將任何二變項以向量視之，則其相關係數等於其夾角之餘弦。也因此，

當 $\theta=0°$ 時，則 $r=1$

$\theta=90°$ 時，則 $r=0$

$\theta=180°$ 時，則 $r=-1$

$\theta=270°$ 時，則 $r=0$

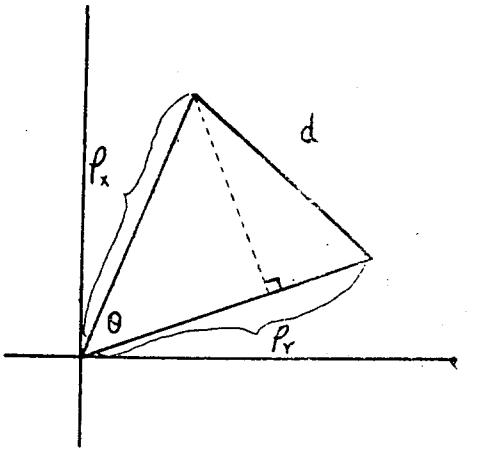


圖　八

又進一步來看，將向量規格化，（normalization），即向量長化爲 1（$\rho=1$）時，則相關係數爲一向量對他向量之投影。此可由圖九證之：

$$r=\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$$

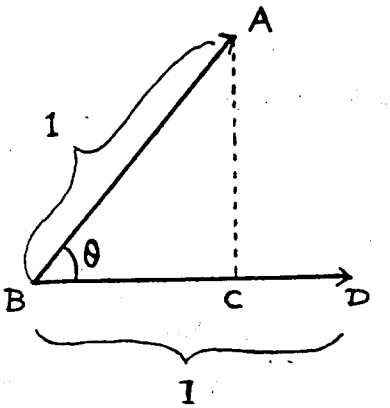


圖　九

從以上分析，我們可圖解變項與因子間的關係。設因子爲座標軸，取長爲1，則變項對因子之因子負荷量(假定因子之間無關)爲對該因子軸之座標。例如，變項 X的第一因子負荷量爲0.3，則 X變項的位置即過第一因子軸上0.3的位置，而垂直於第一因子軸一條直線上的某一點，亦即 X變項的第一因子軸座標爲0.3。

爲了便於簡化圖解說明，設有二變項，有二共因子F_1和F_2，且設F_1與F_2無關。根據上述，F_1可作爲水平軸，F_2作爲垂直軸。二軸交點卽原點，座標爲（0.0）。以原點爲心，取單位長爲半徑，作一圓，如圖十。在圖上我們可以表示出任何變項之位置。因爲變項對某因子的因子負荷量卽其座標，所以變項X對第一因子的座標爲a_{x1}，對第二因子的座標爲a_{x2}。X變項在圖上之座標爲（a_{x1}，a_{x2}）。同理，Y變項之座標爲（$-a_{Y1}$，a_{Y2}）。如圖十所示。

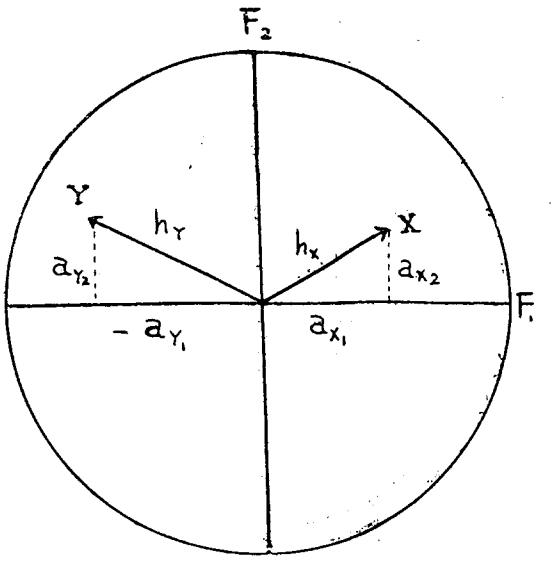


圖　十

根據畢氏定理，X向量長爲：

$$\rho_x = a_{x1}^2 + a_{x2}^2$$

又根據前述因子理論，一變項之共性數等於該變項對各因子之因子負荷量的平方和，卽：

$$h_x^2 = a_{x1}^2 + a_{x2}^2$$

$$\therefore \quad \rho_x = h_x$$

（變項向量長＝共性數的平方根）

所以圖上從原點伸長至X點之向量，卽代表共性之平方根h。h的長度通常小於1。h或h^2，所以通常小於1，乃因爲總變數爲1，而總變異數中除共通性外，還含有專有因子及誤差。

從因子理論，知二變項之相關係數可由因子負荷量求得，卽：

$$\begin{aligned} r_{XY} &= \sum a_{xf}\, a_{Yf} \\ &= a_{X1}(-a_{Y1}) + a_{X2}\, a_{Y2} \\ &= -a_{X1}\, a_{Y1} + a_{X2}\, a_{Y2} \end{aligned}$$

又設X向量與第一因子軸之夾角爲 ϕ，X向量與Y向量之夾角爲 θ，則：

$$\begin{aligned} a_{x1} &= h_x \cos\phi \\ a_{x2} &= h_x \sin\phi \\ -a_{Y1} &= \cos(\phi+\theta) \\ a_{Y2} &= h_Y \sin(\phi+\theta) \end{aligned}$$

故得：

$$\begin{aligned} r_{XY} &= h_X h_Y \cos_Y\phi \cos(\phi+\theta) + h_X h_Y \sin\phi \sin(\phi+\theta) \\ &= h_X h_Y [\cos\phi \cos(\phi+\theta) + \sin\phi \sin(\phi+\theta)] \\ &= h_X h_Y [\cos(\phi+\theta-\phi)] \\ &= h_X h_Y \cos\theta \qquad (6.8) \end{aligned}$$

由此可見，兩變項間的相關係數並不與因子軸發生任何直接關係。二變項之間的相關高低，

完全決定於向量之長短與夾角角度之大小，而絲毫不受因子軸的位置所影響。即使任意廻轉因子軸，也不致增損兩變項之相關係數的大小。從而亦可知，同樣的相關矩陣，可求得各不同的因子、因子負荷量、以及不同的因子解釋。

如果因子間有相關時，也可從圖解上看出因子負荷量與因子相關之不同。設F_1和F_2的相關係數爲 $r_{F_1F_2}$，F_1與F_2之夾角爲θ，$\theta \neq 90°$，如圖十一，其中X點代表變項。從X點作一線平行於F_1，與F_2交於B；從X點作一線平行於F_2，與F_1交於A。根據前述分析，變項X與因子F_1的相關係數（因子相關），即X在F_1軸上之投影；變項X與因子F_2的相關係數（因子相關）爲X在F^2上之投影。依相關係數之定義：

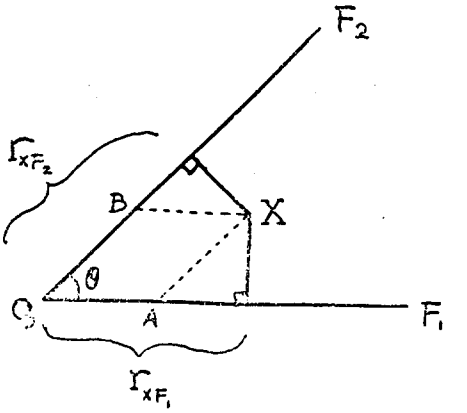


圖 十 一

$$r_{F_1F_2}=\cos\theta=\frac{r_{xF_1}-\overline{A0}}{\overline{AX}}$$

$$=\frac{r_{xF_1}-\overline{A0}}{\overline{B0}}$$

$$\therefore\ r_{F_1F_2}(\overline{B0})=r_{XF_1}-\overline{A0}$$

$$r_{XF_1}=\overline{A0}+(\overline{B0})\,r_{F_1F_2}$$

設$\overline{A0}=a_{x1}$，$B0=a_{x2}$，則：

$$r_{xF_1}=a_{x_2}+a_{x_2}r_{F_1F_2}$$

上式與（5.7）式完全相同。由此可見，0 A線段爲X變項對F_1的因子負荷量，而r_{XF_1}爲變項X與F_1因子的因子相關。同理，0 B爲變項X對F_2的因子負荷量，r_{xF_2}爲變項X對F_2的因子相關。當θ趨於90°時，即F_1與F_2成正交，F_1與F_2無關，則因子負荷量與因子相關重合。此與前述分析的結果完全相同。

註　解

〔註一〕 Factor analysis 有譯爲因素分析。其實這種譯法並不妥當，容易產生誤解。因爲因素一詞含有質的意義，誤以是眞實存在的某基本東西。從後述文中，我們可以看到，所謂 factor 是人工設計出來的概念，並非自然的一部分。又 factor 一詞是含有計量的性質，不但有其平均數及變異數，且彼此間可以相乘。其性質有如數學5×2＝10中，5和2的所謂因數或因子。在物理學中，我們有原子、中子、電子、粒子等概念，而不稱它爲原素、中素、電素、粒素，其道理是相同

的。

〔註二〕See B. Fruchter, Introduction to Factor Analysis (New York: D. Van Nostrand, 1954) pp.199,221-66.

〔註三〕對因子分析有興趣的讀者，欲全盤深入了解因子分析，宜參閱下列三本書：Harry H. Harman, Modern Factor Analysis (Chicago: The University of Chicago Press, 1967)；Stanley A. Mulaik, The Foundations of Factor Analysis (New York: McGraw-Hill, 1972)；R.J. Rummel, Applied Factor Analysis (Evanston Ill.: Northwestern Universiy Press, 1970)

〔註四〕在一般統計學書上，似乎惟一有專章討論因子分析的是 Dennis J. Palumbo, Statistics in Political and Behavoral Science (New York: Applenton-Century-Crofts, 1966) chap. XIII.

〔註五〕因子與觀察變項間的相關係數 r_{jF}，稱爲因子相關 (factor correlation)，略不同於因子負荷量 a_{jF}。此在後述文中可看出這兩者的不同。不過於此，我們暫不作區分，將因子係數或因子負荷量與因子相關同等視之。

主要參考書目

B. Fruchter, Introduction to Factor Analysis. New York: D. Van Nortrand, 1954.

Harry H. Harman, Modern Factor Analysis. Chicago: The Unversity of Chicago Press, 1967.

Duncan MacRae, Jr, Issues and Parties in Legislative Voting. New York: Harper and Row, 1970.

Stanley A. Mulaik, The Foundations of Factor Analysis. New York: McGraw-Hill, 1972.

Dennis Palumbo, Statistics in Political and Behavioral Science. New York: Applenton-Century-Crofts, 1969.

R. J. Rummel, Applied Factor Analysis Evanston, Ill.: Northwestern University Press, 1970.

Karl Schuessler, Analyzing Social Data. Boston: Houghton Mifflin, 1971.

John P. Van de Geer, Introduction to Multivariate Analysis for the Social Sciences San Francisco: Freeman, 1971.