動態規劃應用於企業決策

劉一忠

壹、動態規劃的意義及特性

動態規劃 (Dynamic Programming) 是一種計量的運算技巧，用以分析各種多階段的決策程序 (Multi-stage Decision Procedure)，以尋求最有利的策略來解決連續性的決策問題 (Sequential Decision-making Problems)(註一)。動態規劃的求解方法是將一個整體的複雜問題，依照順序分成許多個彼此相關連的局部問題 (Subproblems)，而使問題簡化，以便各別分析考慮，逐次尋求最有利的答案(註二)。

動態規劃的特性是較少規律性的法則可資遵循，所以應用動態規劃求解的問題，不像應用線性規劃 (Linear Programming) 的問題，必須要符合一組特定形式的方程式；也不像線性規劃，有一種通用的演算邏輯順序 (Computational Algorithm)。

企業的決策階層，時常會遭遇到一些需要作一連串決策的問題，而每項決策所尋求的有利答案，除根據該階段之已知條件外，尚需視其前項決策的結果而定。在此種情形下，每項決策必須考慮到它受其前項決策之影響及其對相連接的後項決策之影響。因此，應用動態規劃求解的問題都含有許多相互關連的決策。此種重複出現的多階段決策過程，也是動態規劃的主要特性。

在一項多階段的決策過程中，每一階段的最有利決策，都提供相連接的下一階段決策之基礎。在最初階段時，問題比較單純，根據已知條件即可選出較有利之決策；下一階段的情況即較複雜，除參考該階段之已知條件外，尚須依據上一階段之最有利決策，才能求出該階段之最有利決策；依此循序進行，直至求出最後階段之最有利決策。動態規劃即本此種重現特性，而尋求一項可應用於整體問題的連串決策 (Chain-like Decision)，以求解決問題，並使其預期的標的函數 (Objective Function)

爲最大（或最小）。此種使營業活動之總效益爲最大（或總費用爲最小）的一連串決策，稱爲一項最有利策略 (Optimal Policy)（註三）。

貳、動態規劃之運算模式

動態規劃的求解技巧是基於拜勒曼 (Richard Bellman) 的最有利原理 (Principle of Optimality)。其要點是：「最有利策略有一項特性，即無論最初階段之情況和決策如何，其餘階段之決策，對於由最初階段決策所產生的現階段情況，必須構成最有利策略。(An optimal policy has the property that, whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision)」。動態規劃所運用的求解模式 (Model)，即是根據此一最有利原理而演化得來。但此項原理太抽象，不容易獲得具體的概念，必須要與以下的模式及動態規劃之應用實例對照，才能瞭解其眞意。

應用動態規劃求解的問題，通常都含有某種數量有限的經濟資源，如人員、機器、資金、或者廠房的空間等。我們可以運用不同的方式，將某種資源的部份或全部分配給某項或某些營業活動，以求獲致若干收益 (Returns)；收益的多寡，需視各該營業活動的營利能力及分配的資源數量之多少而定。假定各項營業活動彼此不相依屬，而且由不同營業活動所獲致之收益可以用一種共同單位予以測度，則運用某種資源於各項營業活動的總收益，應是各別營業活動收益之總和。研究此類問題的目的是求如何將有限的可用資源適當的分配於各項有利的營業活動，以求總收益爲最大。

茲以n代表營業活動的項數，每項營業活動的獲益能力需視分配的資源數量而定，此種關係可用一個收益函數表示之；若以 X_i 代表分配給第i項營業活動的資源數量，則 $g_i(X_i)$ 爲其收益函數式。因爲假定各項營業活動是彼此獨立的，故各項營業活動之收益可以相加；因此，總收益可用下式表示之：

$$R\ (X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n) = g_1(X_1) + g_2(X_2) + \cdots\cdots + g_n(X_n)$$

如果以Q代表某項資源的數量，而該項資源又是有限的，乃又導致以下的拘束式，即

$$Q = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n \qquad \text{式中 } X_i \geqq 0$$

標的函數在合乎拘束式的條件下，以求各項營業活動的總收益爲最大。

總收益R之最大需視資源的數量Q及營業活動項數n而定，此種依存關係可用以下之函數式表示之：

$$f_n(Q) = \mathrm{Max}\{R(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

式中函數 $f_n(Q)$ 代表將資源Q分配給n項營業活動所能獲得之最大預期總收益。若沒有資源分配給第i項營業活動，則其預期收益必等於零，即

$$\begin{aligned} f_i(0) &= g_i(0) \\ &= 0 \qquad \text{式中 } i = 1, 2, 3, \cdots\cdots。\end{aligned}$$

同理，如果將全部資源分配給第一項營業活動，則其預期收益應如下式：

$$f_1(Q) = g_1(Q) \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

設n和Q爲任意值，若 X_n 代表分配給第n項營業活動的資源數量，$0 \leqq X_n \leqq Q$，則該種資源的餘額應爲 $Q - X_n$；由其他 $n-1$ 項營業活動所可能獲得的收益之函數式應爲 $f_{n-1}(Q - X_n)$。因此，由n項營業活動所可能獲得之總收益應爲

$$g_n(X_n) + f_{n-1}(Q - X_n)$$

關於分配給第n項營業活動的資源數量 X_n 之適當選擇，應爲能使此函數式的總收益爲最大之數量。將此函數式代入①式，即得以下之動態規劃基本模式：

$$f_n(Q) = \underset{0 \leqq X_n \leqq Q}{\mathrm{Max}} \{g_n(X_n) + f_{n-1}(Q - X_n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

當 $n=1$ 時，式中 $f_1(Q)$ 之值可由②式求得；當 $n=2$ 時，將所求得 $f_1(Q)$ 之值代入 $f_{n-1}(Q - X_n)$，即可求得使 $f_2(Q)$ 的總收益爲最大之 X_2 值，同樣方法順次進行，即可求得各階段之最有利決策；最後階段之最有利決策，即爲使整體問題總收益爲

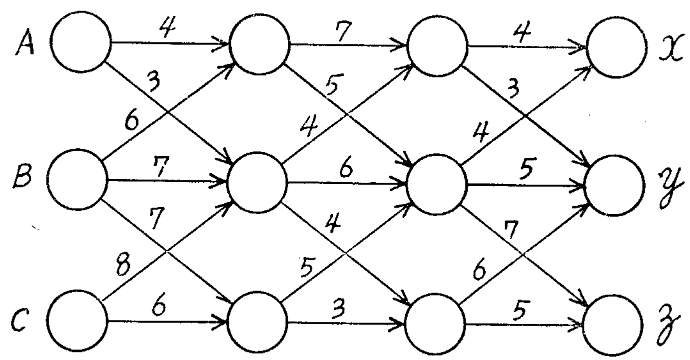
最大之最有利策略。

以上之動態規劃模式，係基於拜勒曼的最有利原理演化而來。但此等模式只限於處理單一變數的一元方程式（One Dimensional Equation)。

叁、動態規劃的運算程序

由以上的解說可知，$f_1(Q)$ 有助於決定 $f_2(Q)$ 的最大值，而 $f_2(Q)$ 又導致對 $f_3(Q)$ 的最大值之決定，此種連串關係一直進行到 $f_{n-1}(Q)$ 決定 $f_n(Q)$ 的最大值爲止。所以，一旦由②式確定了 $f_1(Q)$ 的值，則其他各階段之最大值，都可根據各該階段之已知條件及上一階段之決策結果而由③式求得。

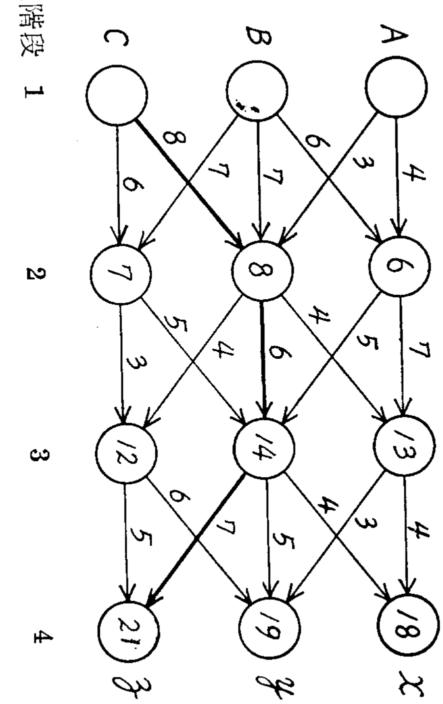
圖一的網路分析，可用以說明動態規劃的運算技巧。圖中顯示，該項網路有A、B、C三個可供選擇的起點，經過四個決策階段，而有x、y、z三個可能的終點。各箭形線段上的數字，用以代表一項營業活動的收益（或費用）。



決策階段　1　2　3　4

圖一　網路分析圖解

如果我們希望尋求使總收益爲最大之各項營業活動，有許多不同的運算方法；我們可以試行連接所有可能的途徑，並計算出每一途徑的值，比較各值，而選出最有利之答案。但是如此逐一計算，則過程太複雜，而且也可能遺漏重要的途徑。若應用動態規劃求解，可將此問題視爲一個多階段的處理過程。由第一階段到第二階段之三個數值最大的途徑都記錄在第二階段的每一終點，這是依照最有利原理所說的：「對於一項最有利的兩階段策略（Two-stage Policy），無論起點是怎樣選的，通往終點的途徑必須是最大值」。這樣即可運用最簡易的計算而確定出有利的兩階段策略。同樣的，亦可依照最有利原理，藉上項最有利的兩階段策略之結果，而求出最有利的三階段策略（Three-stage Policy）之每一個終點的最大值，運用同樣方法循序進行，即可求出最有利的四階段策略。最後求得含有最大值之途徑，如圖二中粗線所顯示者，其終點值是 21。同理，如果我們希望尋求各種營業活動的預期最低費用，亦可運用同樣方法，只是在各決策階段中都選擇最小值即可。



圖二　動態規劃運算之網路分析圖解

由以上所介紹之運算方法可知，動態規劃提供一項比直接運算更簡易有效的求解技巧；因此，動態規劃之應用於解決多階段的連續性決策問題是一種非常有效的運算工具。

肆、動態規劃之應用

在工業先進國家，動態規劃已被企業界應用於許多複雜的多階段決策問題，諸如生產日程之安排、存貨之控制、物料之採購、設備之汰換及保養、資金之運用、預算之分析、畜牲之繁殖、以及統計資料選樣（Sampling）之設計等。本節將列舉三個簡單的例子，即資金運用問題、物料採購問題、及生產日程和存貨問題，以說明如何應用動態規劃的求解技巧，來尋求最有利的策略，俾解決多階段的連續性決策問題。

一、資金運用問題

假定某企業有8個單位資金可供運用，有三項營業活動可以考慮投資，將資金的全部或一部份運用於任何一項投資都可以獲得若干收益；總收益的多寡需視資金的運用方式而定，決策者的目標在尋求最有利的運用方式，以使總收益爲最大。

表一彙列8個單位資金的各種運用方式之預計收益函數，假定各項收益之測定單位相同，而各項投資又係彼此獨立，所以總收益是各項投資收益之總和。表中資料顯示，各項投資之收益在起初幾個單位增加的很快，當投資金額繼續增加則收益却增

表一　投資收益函數表

Q	$g_1(Q)$	$g_2(Q)$	$g_3(Q)$
1	5	8	4
2	15	16	20
3	42	40	38
4	80	60	49
5	91	69	53
6	95	72	56
7	98	74	58
8	100	75	59

加的越來越少；這是因爲收益遞減的關係，事實上，許多營業活動都受此一法則的支配。

應用直接演算也可以求得將8個單位資金運用到三項投資的各種可能方法，但是太繁雜了，因爲共有 $8^3=512$ 種可能方法。將上節所討論的動態規劃模式用來解決此種問題，可以避免許多複雜的運算，而且可以輕易求出正確的結果，玆列解如下：

若全部資金都用於第一項投資，其預期收益可由②式求得，即

$$f_1(1)=g_1(1)=5$$

$$f_1(2)=g_1(2)=15$$

$$f_1(3)=g_1(3)=42$$

$$\vdots$$

$$f_1(8)=g_1(8)=100$$

以上各式表示將全部資金都用於第一項投資，$f_1(Q)$ 的各種結果，將各項數值記於表二的第三欄，以作第二項投資之決策依據。

以第一項投資所可能獲得的收益（即 $f_1(Q)$ 的結果）爲基礎，可用③式求得關於第二項投資的兩階段決策之最有利答案，即 $f_2(Q)$ 的各項有利結果。當 $Q=1$ 時，

$$f_2(1)=\underset{0\leq X_2\leq 1}{\text{Max}}\{g_2(X_2)+f_1(1-X_2)\}$$

式中 X_2 的值可以是0，也可以是1；因此，

$$f_2(1)=\text{Max}\begin{Bmatrix}g_2(0)+f_1(1)=5\\ g_2(1)+f_1(0)=8\end{Bmatrix}$$

此項結果顯示 $f_2(1)$ 的最大值是8。

當 $Q=2$ 時，

$$f_2(2)=\underset{0\leq X_2\leq 2}{\text{Max}}\{g_2(X_2)+f_1(2-X_2)\}$$

式中 X_2 的值係從0到2，因此，

$$f_2(2)=\text{Max}\begin{Bmatrix}g_2(0)+f_1(2)=15\\g_2(1)+f_1(1)=13\\g_2(2)+f_1(0)=16\end{Bmatrix}$$

以上的結果顯示 $f_2(2)$ 的最大值是16。

當 $Q=3$ 時。

$$f_2(3)=\underset{0\leq X_2\leq 3}{\text{Max}}\{g_2(X_2)+f_1(3-X_2)\}$$

式中 X_2 的值可以從0到3，因此，

$$f_2(3)=\text{Max}\begin{Bmatrix}g_2(0)+f_1(3)=42\\g_2(1)+f_1(2)=23\\g_2(2)+f_1(1)=21\\g_2(3)+f_1(0)=40\end{Bmatrix}$$

由以上的結果可以選出，$f_2(3)$ 的最大值是 42。

此種運算過程一直繼續到求出 $f_2(8)$ 的最大值。$f_2(Q)$ 式中Q的每一個值之最有利結果（最大值）都選定後，記在表二的第五欄，與該表第四欄中相關連的 X_2 值相對應。

表二　資金運用收益表

Q	X_1	$f_1(Q)$	X_2	$f_2(Q)$	X_3	$f_3(Q)$
1	1	5	1	8	0	8
2	2	15	2	16	2	20
3	3	42	0	42	0	42
4	4*	80	0	80	0	80
5	5	91	0	91	0	91
6	6	95	1	99	2	100
7	7	98	3	120	0	120
8	8	100	4*	140	0*	140

以表二第五欄中 $f_2(Q)$ 的各項最有利結果爲基礎，便可應用③式進一步求出 $f_3(Q)$ 的各項最大值，像前面的運算一樣，

當 $Q=1$ 時，

$$f_3(1)=\max_{0\leq X_3\leq 1}\{g_3(X_3)+f_2(1-X_3)\}$$

式中 X_3 的值可以是0，也可以是1；因此，

$$f_3(1)=\mathrm{Max}\begin{Bmatrix}g_3(0)+f_2(1)=8\\ g_3(1)+f_2(0)=4\end{Bmatrix}$$

所以 $f_3(1)$ 的最大値是8。

當 $Q=2$ 時，

$$f_3(2)=\max_{0\leq X_3\leq 2}\{g_3(X_3)+f_2(2-X_3)\}$$

式中 X_3 的值可以從0到2，因此，

$$f_3(2)=\mathrm{Max}\begin{Bmatrix}g_3(0)+f_2(2)=16\\ g_3(1)+f_2(1)=12\\ g_3(2)+f_2(0)=20\end{Bmatrix}$$

以上的結果顯示 $f_3(2)$ 的最大値是 20。

當 $Q=3$ 時，

$$f_3(3)=\max_{0\leq X_3\leq 3}\{g_3(X_3)+f_2(3=X_3)\}$$

式中 X_3 的值可以從0到3，因此，

$$f_3({}_3)=\mathrm{Max}\begin{Bmatrix}g_3(0)+f_2(3)=42\\ g_3(1)+f_2(2)=20\\ g_3(2)+f_2(1)=28\\ g_3(3)+f_2(0)=38\end{Bmatrix}$$

由以上的結果可以選出 $f_3(3)$ 的最大值是 42。

同樣情形，此種運算過程一直繼續到求出 $f_3(8)$ 的最大值。$f_3(Q)$ 式中 Q 的每一個值之最有利結果都選出記錄在表二的第七欄，與第六欄中相關連的 X_3 值相對應。

現在可以從表二的各項最有利結果中選出使投資總收益爲最大的資金運用方式。表二第七欄最末一項的最大總收益是 140 單位，與此項最大總收益相對應的資金分配是在第六欄末項 $X_3=0$ 時，即 $f_3(0)=140$；也就是說第三項營業活動不作投資，8 個單位資金都運用於前面兩項營業，可以使投資總收益爲最大。在第二決策階段中，產生最大收益140單位的是在 $X_2=4$ 時，即 $f_2(4)=140$，也就是說第二項營業只投資4個單位資金；因此，還有4個單位資金運用於第一項營業活動。將8個單位資金如此分配運用，所產生之總收益爲最大。表二中每項營業活動所分配之最有利投資額都用星號(*)標示出。

在表二中也可以求得營業項目較少的及資源數量較少的最有利策略，例如6個單位資金運用於1、2兩項營業活動，其最大總收益爲99個單位，即當 $X_2=1$ 時，$f_2(1)=99$；因此，還有5個單位資金可運用於第一項投資，即 $X_1=5$ 時，$f_1(5)=91$。將該6個單位資金，如此運用於1、2兩項投資，才能產生最大總收益。同樣方法也可以求得營業項目及資源數量較多的情形下，使總收益爲最大的最有利策略。

動態規劃的運算技巧，不但可以應用於求解最大效益的決策問題，也可以用於尋求最少費用的決策問題；而且動態規劃不但可以應用於確定的情況下，也可以應用於不確定的情況。尤有進者，動態規劃的運算程序不僅僅可以由前向後演算，也可以倒過來由後向前推算。下面將列舉一個簡單的例子，說明動態規劃如何應用於不確定的情況下，以尋求使總成本爲最低的策略，而且例中的運算過程是由後向前推算。

二、物料採購問題

假定某生產企業的採購經理必須在5個星期之內購得某項物料備用，而且該項物料的價格每星期都有波動。爲了計算簡便起見，假設其價格漲落的範圍大致如下表所列，而且其波動之可能性如以下的機率（Probability）：

價　格	機　率
@$500	0.3
550	0.3
600	0.4

該經理可以在五週內的任何一週採購，如果他決定在某一週末採購此項物料，即必須依照該週的時價支付價款。若在第五週之前還沒購妥，即必須在第五週依照時價採購，以備下星期應用。該經理希望尋求一項最有利的採購策略，俾使此項物料的採購成本爲最低。

因爲該項問題含有不確定的因素，而且需作連續性的多階段決策，所以應用其他計量分析方法求解都有困難，尤其是運算也太複雜；但是應用動態規劃却可以輕易的求得答案，茲試行分析如下：設

n代表週數，n＝1, 2, 3, 4, 5；

X_n 代表第n週的物料價格；

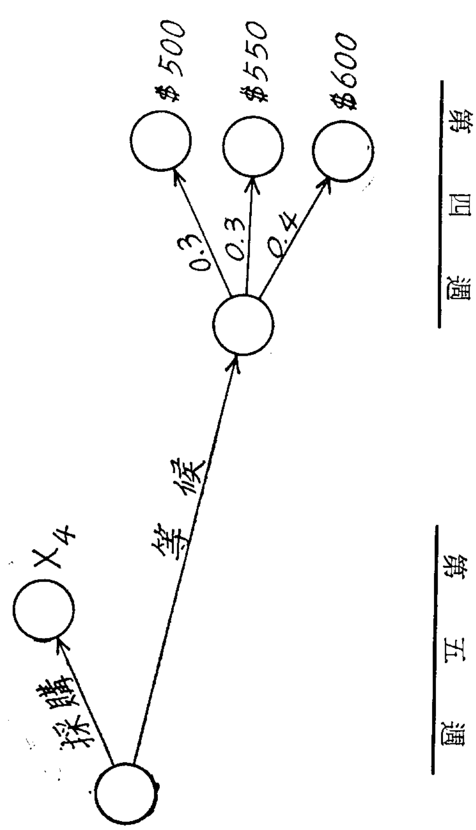
$f_n(X_n)$ 代表第n週的物料價格爲 X_n 時之預期最低成本。

例題中最後一週（第五週）的情況比較單純，所以運算程序宜從最後一週開始向前推算較爲簡便。應用第二節介紹的動態規劃模式，該階段的決策方程式應爲

$f_5(X_5)=X_5$ ……………………………………④

此式表示如果在第五週以前還沒購妥，該經理必須在第五週依照時價採購備用，再無考慮之餘地。

現在可以進一步考慮倒數第二週（即第四週）的決策情況，在第四週該經理有兩種選擇，他可以依照第四週的時價 X_4 採購，也可以等到第五週再買，所以該經理第四週所面臨的問題可以用圖三的決策樹表示如下：



圖三　決策樹圖解

依照以上的圖解可知，第四週的最低預期成本 (Minimum Expected Cost) 應爲：

$$f_4(X_4)=\mathrm{Min}\{X_4, f_5(500)(\cdot 3)+f_5(550)(\cdot 3)+f_5(600)(\cdot 4)\} \qquad ⑤$$

同樣情形，第三週的最低預期成本應爲：

$$f_3(X_3)=\mathrm{Min}\{X_3, f_4(500)(\cdot 3)+f_4(550)(\cdot 3)+f_4(600)(\cdot 4)\} \qquad ⑥$$

由以上⑤、⑥兩式求取最低預期成本的方式，可以爲第 n－1 週演化出一項通式 (General Form)，即

$$f_{n-1}(X_{n-1})=\mathrm{Min}\{X_{n-1}, f_n(500)(\cdot 3)+f_n(550)(\cdot 3)+f_n(600)(\cdot 4)\} \qquad ⑦$$

式中 $n=2, 3, 4, 5.$

爲了便於求得⑤式中第四週的最低預期成本，可以設採購與等候兩種選擇的結果相等，而解出 X_4 的均衡值(Break-even

Value)，以 X_{4b} 表示之，即

$$X_{4b}=500(0\cdot3)+550(0\cdot3)+600(0\cdot4)$$
$$=150+165+240$$
$$=555。$$

此項結果顯示，若第四週的物料價格在 \$555 以下，應該立即採購；若售價在 \$555 以上，應該等到下星期（即第五週）再採購。由於此項瞭解，則第四週的最低預期成本應爲：

$$f_4(X_4)=\begin{cases}500, & 若\ X_4=500\\ 550, & 若\ X_4=550\\ 否則爲\ 555\end{cases}$$

既然第四週的預期物料價格是 \$555，將此值代入⑥式即可決定第三週的最低預期價格，即

$$f_3(X_3)=\mathrm{Min}\{X_3,500(\cdot3)+550(\cdot3)+555(\cdot4)\}$$
$$=\mathrm{Min}\{X_3,(150+165+222)\}$$
$$=\mathrm{Min}\{X_3,537\}$$

由此項結果又可得到 X_3 的均衡值，若以 X_{3b} 表示之，則

$$X_{3b}=537。$$

此一結果顯示，若第三週的物料價格在 \$537 以下，應該立即採購；如果價格在 \$537 以上，則應該等下週或以後再買。由於此項採購決策，則第三週的最低預期成本應爲：

$$f_3(X_3)=\begin{cases}500, & 若\ X_3=500\\ 否則爲\ 537。\end{cases}$$

以上的結果顯示，第三週的預期物料價格應爲 \$537，將此值代入⑦式即可求得第二週的最低預期價格：

$$f_2(X_2)=\mathrm{Min}\{X_2,500(\cdot 3)+537(\cdot 3)+537(\cdot 4)\}$$
$$=\mathrm{Min}\{X_2,(150+161.1+214.8)\}$$
$$=\mathrm{Min}\{X_2,525.9\}$$

即　$X_{2b}=526$。

所以第二週的最低預期成本爲：

$$f_2(X_2)=\begin{cases}500,\ 若\ X_2=500\\ 否則爲\ 526。\end{cases}$$

同樣方法亦可用以決定第一週的最低預期物料價格：

$$f_1(X_1)=\mathrm{Min}\{X_1,500(\cdot 3)+526(\cdot 3)+526(\cdot 4)\}$$
$$=\mathrm{Min}\{X_1,(150+157.8+210.4)\}$$
$$=\mathrm{Min}\{X_1,518\}$$

即　$X_{1b}=518$。

因此，第一週的最低預期成本應爲：

$$f_1(X_1)=\begin{cases}500,\ 若\ X_1=500\\ 否則爲518。\end{cases}$$

此項結果顯示，如果該經理依照最有利策略從事採購，若第一週的物料價格在$ 518 以下，應立卽購買：否則，若價格超過$518，應等到第二週或以後再採購。

依照以上所計算的各項結果，將該採購經理所應遵循的使採購成本最低之最有利策略摘要如下：如果第一週、第二週、和第三週的物料價格是 $500 ，應該立卽採購；否則，等以後再買。若第四週的價格是 $500 或 $550 ，應立卽購買；否則，等下週再採購。到第五週時，如果物料還沒買妥，卽必須依照第五週的時價採購，再無選擇的餘地。

三、生產日程及存貨問題

在繼續營業或存貨生產的情形下，本期的產量及期末的存貨數量，都直接影響到下期之期初存貨量，而且間接影響到相關

連各期之生產成本及存貨費用；因此，生產日程之安排及存貨策略之決定等複雜問題，都可以視爲連續性的多階段決策問題，而應用動態規劃來尋求使生產及存貨之總成本爲最低的有利策略。

設某工廠與顧客簽約製造18部機器，依契約規定在簽約後三個月內分三批交貨，第一個月底及第二個月底各交出5部，其餘8部於第三個月底全部交淸。又假定該廠因受生產設備的限制，必須加班趕工，俾能如期交貨；以致該批產品必須在成本遞增的情況下增產，若以 M_n 代表在第 n 個月內製造 X_n 部機器的成本，設其生產成本方程式爲：

$$M_n = 5000 + 1000X_n(X_n - 1)$$

式中 $X_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3.$

如果任何一個月製造過多而有期末存貨，該項存貨卽必須貯存至下月底才能交貨。存貯費用（Holding Cost——包括利息、倉租、保險費、及保管費等）每部機器每月 $1000，部份成品亦按比例分攤存貯費用。若以 U_n 代表在第 n 個月貯存的機器數量（U_n 不一定是整數），則第 n 個月的存貨費用應爲：

$$H_n = 1000U_n$$

爲了運算方便，有關之金額都以千元爲單位，故以上兩式可以簡化爲：

$$M_n = 5 + X_n(X_n - 1) \quad \cdots\cdots ⑧$$

$$H_n = U_n \quad \cdots\cdots ⑨$$

該工廠希望能尋求一項最有利的生產日程，俾使生產成本及存貨費用之總和爲最少，故此問題之標的函數爲求總成本之最低。在本質上，這是一個非線性規劃問題（Nonlinear Programming Problem），而且成本函數又是連續的，因此需用微分（Differential Calculus）以求得最有利的結果。該問題之總成本（Total Cost）方程式應爲：

$$TC = H_1 + H_2 + H_3 + M_1 + M_2 + M_3$$

將⑧式及⑨式代入此式，則得

$$TC=U_1+U_2+U_3+15+X_1(X_1-1)+X_2(X_2-1)+X_3(X_3-1) \quad\cdots\cdots⑩$$

該式受制於以下各拘束式：

$X_1 \geq 5$

$X_1+X_2 \geq 10$

$X_1+X_2+X_3=18$

設簽約時該項機器沒有期初存貨，故

$U_1=0$

$U_2=X_1-5$

$U_3=X_1+X_2-10$

將各值代入⑩式則

$$TC=X_1-5+X_1+X_2-10+15+X_1^2-X_1+X_2^2-X_2+X_3^2-X_3$$

$$=X_1-X_3+X_1^2+X_2^2+X_3^2 \quad\cdots\cdots⑪$$

在此例中，最後一期（即第三個月）的問題比較單純，故以從最後一期向前推算爲易。設

$g_n(U_n,X_n)$＝從第n月起及其以後月份的最有利生產日程之總成本；

$f_n(U_n,X_n)$＝第n月之總成本加以後各月之最有利總成本。

故此例中將應用的動態規劃模式爲：

$$f_n(U_n,X_n)=H_n+M_n+g_{n+1}(U_{n+1},X_{n+1}) \quad\cdots\cdots⑫$$

第三個月既爲最後一期，則其最有利生產日程之總成本即爲該期之最有利總成本加以後各期之最有利總成本，亦即

$f_3(U_3,X_3)=g_3(U_3,X_3)$

$$=H_3+M_3$$

$$=U_3+5+X_3(X_3-1) \cdots\cdots ⑬$$

該廠只依合約製造18部特殊規格的機器，所以最後一期所需製造的適當數量，應是該期末所需要的8部減去該期的期初存貨，即

$$X_3=8-U_3 \cdots\cdots ⑭$$

將⑭式代入⑬式則得

$$f_3(U_3,X_3)=U_3+5+(8-U_3)(8-U_3-1)$$

$$=U_3+5+(8-U_3)(7-U_3)$$

$$=U_3+5+56-15U_3+U_3^2$$

$$=61-14U_3+U_3^2 \cdots\cdots ⑮$$

因為 U_3 是以前兩期的決策所產生之結果，所以對於第三期所希望的最低總成本暫時只能計算到此為止，現在可以繼續向前推算第二期的最低總成本，即

$$f_2(U_2,X_2)=H_2+M_2+g_3(U_3,X_3)$$

此式表示該期及最後一期的最有利成本之總和，將各項已知數代入，則得

$$f_2(U_2,X_2)=U_2+5+X_2(X_2-1)+(61-14U_3+U_3^2)$$

$$=U_2+5+X_2^2-X_2+61-14U_3+U_3^2$$

$$=66+X_2^2-X_2+U_2-14U_3+U_3^2$$

但是第三期之期初存貨應是第二期的期初存貨加該期之產量再減去該期的交貨數量之餘額，即

$$U_3=U_2+X_2-5$$

所以第二期之總成本應為

$$f_2(U_2,X_2)=66+X_2^2-X_2+U_2-14(U_2+X_2-5)+(U_2+X_2-5)^2 \quad \cdots\cdots⑯$$

此式一次微分後，令導來式（Derivative）等於零即可求出第二月的產量 X_2 之值，即

$$\frac{d}{dX_2}[f_2(U_2,X_2)]=2X_2-1-14+2(U_2+X_2-5)$$
$$=2X_2-15+2U_2+2X_2-10$$
$$=4X_2-25+2U_2$$

令　$4X_2-25+2U_2=0$

$$\therefore\quad X_2=\frac{25-2U_2}{4} \quad \cdots\cdots⑰$$

此時還無法保證 X_2 所代表的數量足够第二月的交貨數量，為了能保證按時交貨，在第二個月底，該廠至少應有成品5部機器，即

$$U_2+X_2\geq 5$$

為了使運算簡化，先將⑰式的 X_2 之值代入⑯式中括弧內，而予以整理，即

$$U_2+X_2-5=U_2+\frac{25-2U_2}{4}-5$$
$$=\frac{4U_2+25-2U_2-20}{4}$$
$$=\frac{5+2U_2}{4}$$

再將此式及⑰式代入⑯式則得

$$f_2(U_2,X_2)=66+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2-\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)+U_2-14\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2$$

$$=66+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2-\left[\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)-U_2+14\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)\right]+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2$$

$$=66+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2-\left(\frac{25-2U_2-4U_2+70+28U_2}{4}\right)+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2$$

$$=66-\left(\frac{95+22U_2}{4}\right)+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2$$

$$=\frac{264-95}{4}-\frac{22U_2}{4}+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2$$

$$=\frac{169}{4}-\frac{11}{2}U_2+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

此式不需再簡化，現在可以繼續向前推算第一期的總成本。在推算第一期總成本所用模式中之 $g_2(U_2,X_2)$，就是第二期所求得之最有利總成本 $f_2(U_2,X_2)$ 的結果，所以

$$f_1(U_1,X_1)=H_1+M_1+g_2(U_2,X_2)$$

$$=U_1+[5+X_1(X_1-1)]+\left[\frac{169}{4}-\frac{11}{2}U_2+\left(\frac{25-2U_2}{4}\right)^2+\left(\frac{5+2U_2}{4}\right)^2\right]$$

因爲假定簽約之初該項機器沒有期初存貨，所以 $U_1=0$，而 $U_2=X_1-5$ ∴因此，上式中

$$\frac{25-2U_2}{4}=\frac{25-2(X_1-5)}{4}=\frac{25-2X_1+10}{4}=\frac{35-2X_1}{4};$$

$$\frac{5+2U_2}{4}=\frac{5+2(X_1-5)}{4}=\frac{5+2X_1-10}{4}=\frac{2X_1-5}{4}。$$

將各值代入以上之第一期總成本模式，則

$$f_1(U_1,X_1)=0+[5+X_1^2-X_1]+\left[\frac{169}{4}-\frac{11}{2}(X_1-5)+\left(\frac{35-2X_1}{4}\right)^2+\left(\frac{2X_1-5}{4}\right)^2\right]$$

此式一次微分則得

$$\frac{d}{dX_1}\left[f_1(U_1,X_1)\right]=2X_1-1-\frac{11}{2}+2\left(\frac{35-2X_1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{2X_1-5}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2X_1-\frac{13}{2}-\frac{35}{4}+\frac{X_1}{2}+\frac{X_1}{2}-\frac{5}{4}$$

$$=3X_1-\frac{33}{2}$$

令此項導來式等於零，將可求得 X_1 的值，即

$$3X_1-\frac{33}{2}=0$$

$\therefore\quad X_1=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$ 部機器。

又　$U_2=X_1-5=5\frac{1}{2}-5=\frac{1}{2}$ 部機器。

此值代入⑰式則得

$X_2=\frac{25-2U_2}{4}=\frac{25-1}{4}=6$ 部機器。

因爲　$U_3=X_1+X_2-10=5\frac{1}{2}+6-10=1\frac{1}{2}$ 部機器，

或者　$U_3=U_2+X_2-5=\frac{1}{2}+6-5=1\frac{1}{2}$ 部機器。

此值代入⑭式即得

$X_3=8-U_3=8-1\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}$ 部機器。

以上之各項結果顯示，既能符合契約上的交貨條件而又能使生產及存貨的總成本爲最低之生產日程，應爲第一個月生產5部半機器，第二個月生產6部，第三個月生產6部半。

應用動態規劃所尋求之最有利生產日程究竟能否使總成本爲最低？爲了證實此一問題，茲將通常採用的幾種不同生產日程之總成本與動態規劃所求得之生產日程的總成本比較如下。此例題之生產日程排列方法很多，以下只列舉兩種，即依照每期之

交貨數量生產及每期生產相同數量。各種不同生產日程之總成本都可以用⑾式很簡單的算出，即

$$TC = X_1 - X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2。$$

茲將三種不同生產日程之總成本比較如下：

㈠依照每期交貨數量生產

若依照交貨數量生產，則三期各應製造5部、5部、及8部機器，其三期之總成本應爲：

$$TC = 5 - 8 + 25 + 25 + 64 = \$111(千)。$$

㈡每期生產相同數量

若每期生產之數量相同，則三期各應製造6部機器，其總成本應爲：

$$TC = 6 - 6 + 36 + 36 + 36 = \$108(千)。$$

㈢依動態規劃所求得之最有利日程生產

若依照以上求得之最有利日程生產，則三期各應製造 $5\frac{1}{2}$ 部、6部、及 $6\frac{1}{2}$ 部機器，其總成本應爲：

$$TC = 5\frac{1}{2} - 6\frac{1}{2} + 30{\cdot}25 + 36 + 42{\cdot}25 = \$107.5(千)。$$

當然還有許多不同的生產日程可以排列，但以所列擧之三種日程的總成本較低，而其中又以動態規劃所求得之最有利生產日程的總成本爲最低。在此例中應用動態規劃所能節省的成本不够顯著，但在龐大而又複雜的生產計劃中，應用動態規劃運算技巧所求得之最有利策略，往往能將有關之成本降至最低；節省成本即相對的增加企業之利潤，而且也增加在同業間之競爭能力。由此可知，動態規劃之運用爲現代企業的決策階層不可或缺之知識。

伍、結　論

動態規劃應用的範圍相當廣泛，時下採用較多的是在商業、經濟、工程、政治科學、及生物學等的連續決策問題上。由上

節的三個例題可知，動態規劃的求解方法可以用於解決非線性關係的問題，也可以用於解決含有機率之不確定的問題。應用時雖然也有許多複雜的演算，但是動態規劃提供一種有效的運算技巧，能使問題簡化，故可用以解決許多以往無法求解的問題，而且此種方法之運用可以減少企業決策上的許多風險。

應用動態規劃時，在問題中的每一階段及在每種情形下的運算過程，都在使該階段所增加的效益與以往各階段所產生的效益之總和爲最大（或費用之總和爲最小）。在每一決策階段都求得一項與前面各階段相關連的最有利決策，再將此項最有利決策遞轉至下一階段，爲該階段決策之依據，也只將此一最有利決策向下一階段遞轉，以循序求得解決整個問題之最有利策略。此種求解過程，可以將一個複雜的 n 次式問題 (N Dimensional Problem) 轉換爲 n 個簡單的一次式問題，但不改變問題之本質；此種一次式的問題，即比較容易求解及尋求最有利的決策。

由於動態規劃之運用缺少規律性的法則可資遵循，而且將複雜的多元問題轉化爲多階段的一元問題也有很多困難，尤其在含有許多決策階段的問題裏，求解時的運算過程往往很繁雜，有時還需要用微積分或其他分析方法才能求得最大或最小值，以致使動態規劃無法普遍應用。但是現在由於電腦 (Electronic Computer) 的廣泛運用，許多複雜的演算過程都可以用電腦來處理，而且電腦的性能更是日益精良，因此，我們可以預期，動態規劃在將來可用以解決更多困難的決策問題，其應用的範圍亦必愈來愈廣泛。

註（一）Richard Bellman, *Dynamic Programming* (Princeton, N.J,: Princeton University Press, 1957.)

註（二）Harold Bierman, Jr., Charles P. Bonini, & Warren H. Hausman, *Quantitative Analysis for Business Decisions*, third ed. (Homewood, Illinois: Richard D. Irwin, Inc., 1969.) p. 432.

註（三）同　註（一） p. 86.

註（四）Richard Bellman, "Some Applications of the Theory of Dynamic Programming—A Review," *Journal of the Operations Research Society of America*, August, 1954, p. 285.