國立政治大學應用數學系
數學教學碩士在職專班
趙淑倫碩士學位論文

模糊無母數統計檢定及其在高齡化社會調查之應用

碩專班學生：趙淑倫 撰
指導教授：吳柏林 博士

中華民國一百年八月廿二日

謝　辭

在國民中學執教多年後，能再度以學生身份回到教室修習課程，真是百感交集。一方面欣喜於能有機會在自己任教的科目上有所精進，從另一個高度看待學生及自己的專業；另一方面又對安排得既緊密又多樣化的在職進修學程感到惶恐，不知在家庭與事業之外，是否還能勝任。很幸運地在修業期間，承蒙多位數研所師長的教導及同學的切磋與鼓勵，讓我一路走來完成了研究。其中最為感謝的是吳柏林老師，他既博學又有修養的風範，總是在我遇到困難時，指點迷津，讓人豁然開朗，有如神助一般。

此外，我還要感謝家人的支持。在這三年間，外子因我忙於學業，必須承擔更多的不便與犧牲。尤其令我動容的是，當我在課業上遇到些許不確定時，常與外子討論，圈外人的他每能提供寶貴的建議。這無疑是我倆認識以來，最難忘的一段時光。我不禁要大聲說：「老公，謝謝你！」最後，我要感謝我們可愛的子女。他們曾在我感到沮喪時遞上安慰的字條，真是令我感到貼心。

總之，這篇研究得以完成所要感謝的人太多了，豈能用隻字片語表達，不如就學作家陳之藩一樣「謝天」吧！

趙淑倫　　　於政治大學數學教學研究所

2011 年 9 月

模糊無母數統計檢定及其在高齡化社會調查之應用

摘要

在逐漸高齡化的社會中，關注老人的生活議題並加以分析益顯重要。在研究老人問題時，由於研究對象均曾經歷不同的時空背景與人生閱歷，各個體間存在的差異極大；不同族群的老人對其所慣用語彙的理解與表達亦不盡相同。故若利用傳統的統計分析研究結果，強迫人們採用二元邏輯的方式思考與解釋，可能會導致偏差或錯誤的結論。且傳統的統計檢定方法，往往假定取樣的樣本滿足某個分配，因而導致過多的解釋，影響決策品質。

因此，爲避免因誤解老人而造成虛耗社會成本，使有限的社會資源得以充分運用，本文於研究老人身心特質與個人期待時，嘗試以模糊理論的軟計算，提出反模糊化轉換。並應用中位數檢定及變異數檢定，建立當統計參數爲模糊數或模糊區間時之小樣本無母數模糊統計檢定方法模型。由實證例子分析結果顯示，我們提出的檢定方法，能有效分析模糊樣本的問題，並進而期望能對老人議題的分析和決策有所貢獻，及將此方法運用於其它模糊性議題之研究。

關鍵字：反模糊化轉換，模糊統計分析，中位數檢定，變異數檢定，高齡化社會。

The Fuzzy Nonparametric Statistical Test And Its Application on the Survey of an Aging Society

Abstract

In a gradually aging society, it is important to pay attention to and then analyze elderly people's life issues. When a study about elderly people is undertaken, the subjects are very inconsistent given their diverse life experience, and various subgroups of subjects have quite different understanding of and way of expressing a vocabulary. Therefore, analyzing study result with conventional statistical analysis method, which forces thinking in a binary logic way, may lead to biased or erroneous conclusion. Furthermore, a conventional statistical test, usually assuming a certain distribution for its samples, may lead to exaggerated explanation, which is detrimental to the quality of a decision.

So, in order to avoid the waste of our social cost from misunderstanding of the elderly, and to make the most use of our limited social resource, when we investigated the elderly people's personal characteristics and expectations, we tried to apply the soft calculation of the fuzzy theory, proposed the counter-fuzzy transformation, and, by using the median test and variance test, established a nonparametric fuzzy statistical model for small-sized samples and for parameters of the fuzzy number or fuzzy interval types. The analyses of real-world examples demonstrated that this method of statistical test can analyze the problems of fuzzy samples, and can hopefully contribute to improved analysis and decision making of the elderly people's issues, and apply this method on the investigation of other fuzzy social issues.

Key words: counter-fuzzy transformation, fuzzy statistical analysis, median test, variance test, aging society.

目 錄

頁次

表　目　錄

頁次

圖 目 錄

頁次

1　前言

統計分析自上世紀即廣泛運用於自然及社會科學資訊之處理，幫助人們在複雜的自然或社會現象中，從取樣所得的有限訊息，經歸納、推理、檢定等過程，使我們對現實狀況更清楚瞭解，以更能正確預測現實世界中的問題，並做出決策。其中以平均數是瞭解母體集中趨勢最重要參數。然而在現實生活中， 由於人類思維及主觀意思的複雜，傳統的二元邏輯並不能反映出實際情況，或貼近人類的真實想法。如平均數就常帶有模糊、不確定性的意涵或可能爲一區間，此時傳統的估計量評估準則及估計方法便顯出不足之處。若我們利用假性的精確值來做因果分析與計算度量，則可能擴大預測結果與實際狀態間的差異，造成判定偏差及決策誤導。如要對模糊的人類思維做出較好的判斷，我們必須儘量將所得到的訊息都加以考慮。而模糊理論的概念，正是強調各人喜好程度不同，不需具備非常清晰的數值精確。對人類而言，模糊模式比限定的單一值，更適合評估物體間的多元或相關性。

隸屬度函數是模糊理論最基本的概念，因可利用隸屬度函數來描述模糊集合的性質，並可對模糊集合進行量化，也可利用精確的數學方法來分析和處理模糊資訊。然而關於隸屬度函數要如何建立，脫離不了個人主觀意識的取捨，因此也較具爭議性。本研究是採用常用且計算方便的梯形隸屬度函數來表達語意的模糊性。

傳統的統計檢定方法，都假設母體來自某一分配，最常見的是假設母體樣本滿足常態分配，而能依據 Z分配、t分配、卡方（Chi Square）分配、F分配等抽樣分配進行估計與檢定。但若母體不服從常態分配或母體分配未知，或樣本爲小樣本時，我們必須應用無母數統計方法來做推論與檢定。無母數統計的特性包括計算過程較簡單，限制條件較少，在特殊對象或特殊情況的研究上，不會由於樣本太小而無法做合理的推論；而無母數統計方法常以中位數代表資料的集中趨勢。有鑑於此，本文基於模糊統計分析的理論，嘗試將傳統的無母數統計方法，配合模糊理論的概念，建立模糊無母數統計檢定方法模型。也就是說明如何將一筆來自未知母體分配的模糊資料，做出有效的統計分析。針對多值邏輯模糊數及模糊區間值，本文以較實用的連續分配爲基礎，配合模糊關係之隸屬度函數，提出反模糊化轉換，並應用中位數檢定及變異數檢定，以實例說明其方法的實用性。

依據內政部人口統計資料發現：2007年2月份，台灣老年人口增加到2,296,368人，佔總人口的10.04%，已達聯合國世界衛生組織所訂的高齡化社會指標。另依據行政院經建會推估，至2026年台灣老年人口就會超過20%。也就是說，約15年後即每5人中就有1

人是老年人。台灣現已正式步入高齡化社會，在國人休閒生活充足、平均壽命延長之情形下，65歲以上老人退休後的生活安排，顯得格外重要。老年人在面臨家庭功能的轉型與家庭結構的改變下，適合的休閒、文康活動也與年輕時不同，而老人本身對於提昇精神生活的重視度也益加提高。以上資料顯示高齡化社會之快速變遷，將引發新的需求與問題，因而必須有相對應的規劃、對策與措施，以增進老人生活之適應力及生命之豐富性。在研究老人問題時，由於各研究對象有著不同的人生閱歷，以致各個體間存在著極大的歧異性，且不同族群間對所慣用之語彙的理解與表達亦不盡相同。故傳統具明確定義之方法學並不適用於老人問題之研究。本研究提出以模糊無母數統計檢定方法應用於高齡化社會議題之研究，期能更合理反映老人們的感受，以建造更溫馨的現代社會。同時，也期望本方法能運用於其它模糊議題之研究。

本論文分為六章。第一章為前言，介紹本章研究主題的源由。第二章藉由過去對模糊理論的研究經驗，探討思維的模糊性；於第三章提出反模糊化轉換的定義及方法，及第四章中位數檢定與變異數檢定方法，以應用於第五章的實例研究。最後在第六章做出總結並提出後續研究的建議。

2　思維的模糊性

日常生活中，人類在作判斷時，答案幾乎都是模糊的。例如：「年老」、「聰明」、「心情好」等，不勝枚舉。在人們的實際生活中，不能完全避免模糊性，且有些現象本質上就是模糊的。如刻意使之精確，自然難符合實際。例如：規定70歲為「老年」，但69和70歲之間究竟有多大差異，以致一歲之差要區別為「老」和「不老」，這樣的區別無法使人信服。直至模糊理論（Fuzzy theory）的產生，才讓我們能以數學手段分析與處理具模糊性的人類思維與語言。

2.1 模糊理論

模糊理論是一門相對新興的數學，源於 1965 年美國柏克萊（Berkeley）大學的 L. A. Zadeh 教授在《資訊與控制（Information and Control）》期刊上所發表的論文：模糊集合（Fuzzy sets），至今已近 50 年。

模糊理論是為了解決真實世界中普遍存在的模糊現象所發展的一門學問。模糊理論是以模糊集合為基礎，其基本精神是接受模糊現象存在的事實，而以處理概念模糊不確定的事物為目標，以對不確定的事物做決策。這是相當重要的人類活動，因為人類的思維本身就具有不確定性。

我們可用簡單例子來說明：假若我們用「老」與「不老」來表達我們對一個人外觀的感受，若以機率的角度來描述，我們認定此人是「老」的機率為 0.4，則此人被認為「不老」的機率應該就是 0.6 了，但這樣的描述是不恰當的。因為我們認為此人屬於「老」是 0.4 時，我們也可能認為此人屬於「不老」是 0.4。「老」與「不老」的認定不是可加性的，不適合用機率的特性來描述。事實上，「老」與「不老」往往是個人的感覺與認定，很難有明確的定義。若我們不拘泥於可加性，則不確定性的領域就豐富了，其表達的方式也更寬廣，這正是模糊理論的實際價值。

模糊理論提供了另一種角度思考真實世界中的現象，是為解決真實世界中普遍存在的模糊現象而發展出的一門學問。所以模糊理論不是如字面上不精確，而是面對生活中各種的不確定性時，試圖以更合理的規則去分析、管理、控制，以期得到更有效率、更合乎人性與智慧的決策。

2.2 隸屬度函數

到底該如何使用明確的數學來表達模糊性呢？Zadeh 簡單地將具有 0 與 1 兩個值的特徵函數 $I_A(x)$ 擴展成 [0,1]區間，而稱此函數爲隸屬度函數（membership function）。隸屬度函數在模糊理論上，扮演一個中心的角色。它是從傳統集合的特徵函數所衍生出來的，用以表達元素對模糊集合的隸屬度，其範圍介於 0 到 1 之間。對於元素和集合的關係，傳統集合以特徵函數來描述，亦即 $I(x) = 1$，若 $x \in A$；$I(x) = 0$，若 $x \notin A$。但 Zadeh 提出：若一個元素屬於某一個集合的程度越大，則其隸數度值越接近 1，反之則越接近 0。如此一來，就可將介於「是」與「不是」之間的所有狀態表示出來了。

用傳統集合定義具有模糊性的語言變數時，常會造成許多不合理的現象。例如：「年老」一詞，當考慮 0 到 140 歲的年齡範圍時，若定義 70 歲以後爲「年老」，則根據傳統集合的定義，可繪出「年老」的特徵函數圖，如圖 2.1 所示：

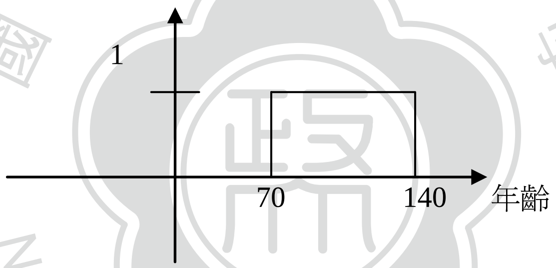


圖 2.1 傳統集合「年老」的特徵函數圖

若今天假設 A、B、C 三人，年紀各爲 69、70、85 歲，其中 A、B 兩人雖只差 1 歲，只有 B 算老人，A 卻不屬於老人。這樣相當不合理。對於傳統的二分法與人類思維格格不入的問題，利用隸屬度函數能夠得到較爲合理的答案。如果某人認爲 80 歲絕對屬於「年老」，則其隸屬度函數值自然爲 1，而 69 歲幾乎可算是老人，則其隸屬度函數值爲 0.9，此表示 69 歲屬於「年老」的程度有 0.9。如此可繪出模糊集合「老人」的隸屬度函數圖（圖 2.2）。

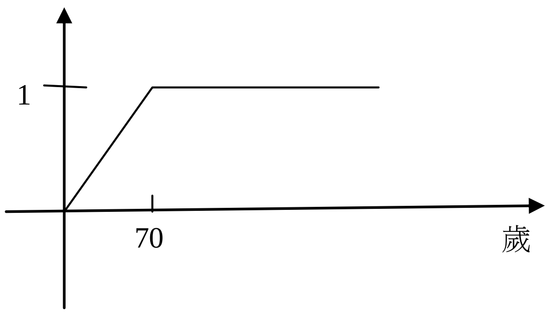


圖 2.2 模糊集合「老年」的隸屬度函數圖

與傳統集合的特徵函數比較，隸屬度函數似乎是將特徵函數平滑化了。而且，隸屬度函數讓每個年齡層都擁有一個介於 0 到 1 間的值，來代表「年老」的程度。相較於傳統集合的特徵值，在描述模糊的概念時，利用模糊集合的隸屬度函數來解釋，更爲適當。

隸屬度函數的設計與建立並非惟一，關於「年老」、「非常老」、「年輕」概念的模糊集合亦可以如下的隸屬度函數描述之：

$$\mu_{年老}(x) = \begin{cases} 0 & ，0 \leqq x \leqq 50 \\ (1+(\frac{x-50}{5})^{-2})^{-1} & ，50 \leqq x \leqq 100 \end{cases}$$

$$\mu_{非年老}(x) = \begin{cases} 0 & ，0 \leqq x \leqq 50 \\ (1+(\frac{x-50}{5})^{-2})^{-2} & ，50 \leqq x \leqq 100 \end{cases}$$

$$\mu_{年輕}(x) = \begin{cases} 0 & ，0 \leqq x \leqq 25 \\ (1+(\frac{x-25}{5})^{-2})^{-1} & ，25 \leqq x \leqq 100 \end{cases}$$

如此一來，隸屬度函數就可以完全表達出模糊集合，如 $\mu_{年老}$ 表達了「年老」這個模糊集合的意思。

隸屬度函數是模糊理論最基本的概念，它不僅可描述模糊集合的性質，更可對模糊集合進行量化，並利用精確的數學方法，來分析和處理模糊資訊。然而要建立一個足以表達模糊概念的隸屬度函數，並不是一件容易的事。其原因在於隸屬度函數的建立脫離不了個人的主觀意識，故沒有通用的定理或公式，通常是根據經驗或統計來加以確定。因此，隸屬度函數如何建立，仍具有爭議性，也沒有一種隸屬度函數可以一體適用於所有的情況。

隸屬度函數通常可分爲離散（discrete）型與連續（continuous）型兩類。離散型隸屬度函數乃是以窮舉法直接給定有限模糊集合內每個元素的隸屬度。而連續型隸屬度函數則以幾種常用的函數形式（s 函數、z 函數、Π 函數、三角形函數、梯形函數、高斯（鐘型）函數）來描述模糊集合。是故隸屬函數所定義的，可以是有限模糊集合的元素及其隸屬度之間的關係，也可以是無限模糊集合的元素及其隸屬度之間的關係。在眾多連續型隸屬度函數的型態中，又以三角形、梯形、鐘形等隸屬度函數較容易理解，且能

夠滿足大部分的邏輯系統設計。其中，梯形隸屬度函數因計算方便且仍貼近語意的模糊性，爲本研究所採用。

3　模糊數與反模糊化轉換

傳統統計檢定方法難以處理參數爲模糊數或模糊區間的情形。如欲應用傳統統計檢定方法，尤其是處理序列樣本的無母數統計方法，於模糊數或模糊區間樣本時，必須先定義模糊樣本的排序問題。以下基於模糊理論，說明模糊問卷調查以及模糊數的建立，並提出反模糊化轉換，以解決統計檢定中資料排序的問題。

3.1 模糊數

日常生活中，人們對於模糊語彙的運用毫無問題。例如：「好熱」、「好美」、「好高興」、「好熱」等。然這些字眼的意義，隨著每個人的主觀認知皆有所不同。而如「約 26 ℃」這種具有不確定性且能以模糊集合來表示的數，就稱爲模糊數。

一般說來，模糊數可設計成兩大類。一類是離散型的模糊數，由離散型隸屬度函數所定義；另一類是連續型模糊數，由連續型隸屬度函數所定義。而連續型的模糊數依其隸屬度函數的形狀又可分爲：(1) 實數區間模糊數；(2) 三角形模糊數(Triangular fuzzy number)；(3) 梯形模糊數(Trapezoidal fuzzy number)；(4) 鐘形模糊數(Bell shaped fuzzy number)；(5) 不對稱模糊數(Non-symmetric fuzzy number)，分別各由其隸屬度函數所定義。

不過在處理較簡單的問題時常採用三角形或梯形的隸屬度函數模型。三角形模糊數雖具備計算簡單的優點，但梯形模糊數卻更能貼近實際狀況，也易爲大多數邏輯系統所接受。在計算時，實數區間模糊數及三角模糊數可視爲梯形模糊數之特例（梯形的上底近於 0)，故於本文中僅以梯形模糊數模型探討連續型模糊數。

首先我們先來定義模糊數如下：

定義 3.1　模糊數

設 U 為一論域，令$\{A_1, A_2 \ldots, A_n\}$為論域 U 的因子集，μ 為一對應到 [0,1]間的實數函數，即 $\mu: U \rightarrow [0,1]$。假若佈於論域 U 之一述句 X，其相對於因子集的隸數度函數以$\{\mu_1(X), \mu_2(X), \ldots, \mu_n(X)\}$ 表示，則述句 X 之模糊數可表示成

(1) 當 U 為離散時：

$$\mu_L(x) = \frac{\mu_1(X)}{A_1} + \frac{\mu_2(X)}{A_2} + \ldots + \frac{\mu_n(X)}{A_n}$$

其中＋是或的意思，$\frac{\mu_i(X)}{A_i}$ 表示述句 X 隸屬於因子集 A_i，i=1, . . , n，的程度。

(2) 當 U 為連續時：

$$\mu(X)= \int_{x\in X} \frac{\mu_i(X)}{A_i}$$

定義 3.2　梯形模糊數之隸屬函數

若 X＝[a,b,c,d]是一組梯形模糊數（圖 3.1）而這組梯形模糊數所對應的隸屬函數定義如下：

$$\mu_x(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & ，a \leqq x \leqq b \\ 1 & ，b \leqq x \leqq c \\ (x-d)/(c-d) & ，c \leqq x \leqq d \\ 0 & ，\text{other} \end{cases}$$

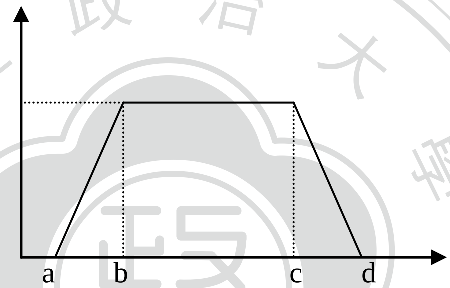


圖 3.1　梯形模糊

當 b=c　　，X 為一三角形模糊數。

當 a=b，c=d，X 為一實數區間模糊數。

例 3.1　離散型模糊數之表達法

X 為老人一天出外走動的時間（小時），以模糊數表示為$\mu_n(X)$，論域 U 可視為整數論域，即出外走動的時數。設 U={1,2,3,4,5,6}，老人一天出外走動的時間的隸屬度函數為 {$\mu_1(X)= 0, \mu_2(X)=0.2, \mu_3(X)=0.5, \mu_4(X)=0.2, \mu_5(X)=0.1, \mu_6(X)=0$}，則老人一天出外走動的時間模糊數可表示為

$$\mu_U(X)= \frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.2}{4}+\frac{0.1}{5}+\frac{0}{6}$$

例 3.2　連續型模糊數之表達法

(1) 如果老人一天的晚上睡覺時間約 6～8 小時，我們可得到一組實數區間模糊數（圖 3.2），記為[6, 8]。

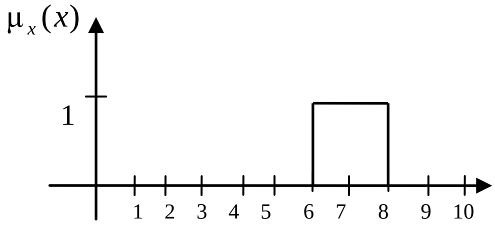


圖 3.2 一組區間模糊數

且對應的隸屬函數關係如下:

$$\mu_x(x) = \begin{cases} 1 , & 6 \leqq x \leqq 8 \\ 0 , & x < 6 ; x > 8 \end{cases}$$

(2) 如果老人一天的晚上睡覺時間約 6 小時且不少於 5 小時，不多於 8 小時，則我們可得到一組三角形模糊數（圖 3.3），記為[5, 6, 8]。

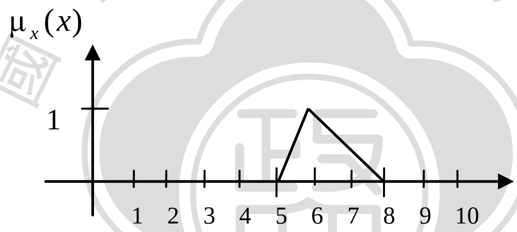


圖 3.3 一組三角形模糊數

且對應的隸屬函數關係如下:

$$\mu_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{6-5} & , 5 \leqq x \leqq 6 \\ 1 & , x=6 \\ \dfrac{8-x}{8-6} & , 6 \leqq x \leqq 8 \end{cases}$$

(3)如果老人晚上睡覺時間通常約為 5～8 小時且不少於 4 小時，不多餘 10 小時，則我們可得到組一梯形模糊數（圖 3.4），記為：[4, 5, 8, 10]

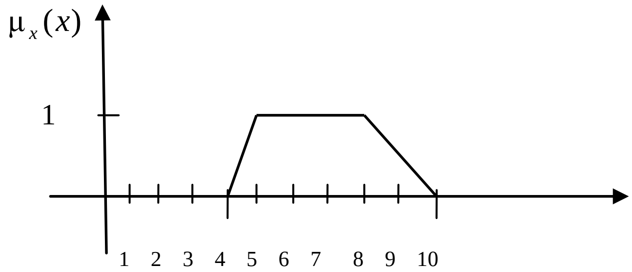


圖 3.4 一組梯形模糊數

且對應的隸屬函數關係如下:

$$\mu_x(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{5-4}, & 4\leqq x\leqq 5\\ 1, & 5\leqq x\leqq 8\\ \dfrac{x-8}{10-8}, & 8\leqq x\leqq 10\end{cases}$$

(4)在(1)中之實數區間模糊數及(2)中之三角形模糊數可視為梯形模糊數之特例，可分別標記為[6, 6, 8, 8]及[5, 6, 6, 8]。

在實地調查時，有別於傳統問卷設計的模糊問卷設計決定了所取樣的模糊數是屬離散型還是連續型。下面以實例說明模糊問卷調查之程序及技巧：

例 3.3　離散型模糊問卷調查

欲調查 6 位老人對生活津貼、醫療體系、休閒聯誼活動、無障礙設施、交通方便、宗教等事項所感重要性之隸屬度選擇，可各予以十枚硬幣，令其依心中重要性之感受將不定數量之硬幣押於諸項目之上，且必須全數押完。而得 6 組離散型模糊數結果如下(表 3.1)：

表 3.1　老人對所感重要事項之隸屬度

	生活津貼	醫療體系	休閒聯誼活動	無障礙設施	交通方便	宗教
1	0	0.1	0.3	0.2	0.4	0
2	0.2	0.4	0.2	0	0.2	0
3	0.2	0.1	0.4	0	0.2	0.1
4	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	0
5	0.1	0.3	0.1	0.2	0.2	0.1
6	0.2	0.1	0.1	0.3	0.2	0.1
總計	0.9	1.3	1.2	0.9	1.4	0.3

若以傳統的問卷調查形式，也就是規定每位受訪者只能勾選一意願最高的項目，則對受訪者而言，所勾選之選項應為心目中隸數度最高者。其結果如下(表 3.2)：

表 3.2　老人對所感重要事項之傳統問卷調查

	生活津貼	醫療體系	休閒聯誼活動	無障礙設施	交通方便	宗教
1					○	
2		○				
3			○			
4		○				
5		○				
6				○		
總計	0	3	1	1	1	0

比較以上兩種調查形式，以傳統問卷調查知六種選項中以醫療體系（眾數最高）最為老人所關切。然以模糊問卷調查之結果，以交通方便（模糊眾數最高）最被關切。因傳統問卷調查捨棄許多資訊，不如模糊問卷貼近實際情形及合理。

例 3.4　連續型模糊問卷調查

連續型模糊語意量表為模糊問卷調查常用的一種形式。由於其易於理解，也適用於老人議題之社會調查。如欲調查所認為的人生「黃金歲月」年齡約為幾歲，可設計如下（圖 3.5）之量表，令受訪者以簽字筆將最確切的「黃金歲月」年歲部分以粗線段塗黑，隨即令受訪者在粗線段左、右分別畫上左括弧、右括弧表示或可稱得上「黃金歲月」的年歲。而產生一組梯形模糊數。

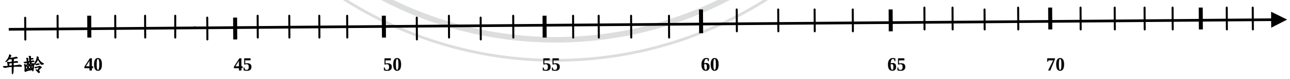


圖 3.5　認為人生的「黃金歲月」年齡約幾歲？

值得注意的是，若詢問的內容爲類別變項時，則僅可能設計爲離散型模糊問卷（如例 3.3）。若詢問的內容爲連續尺度或序列尺度時，則可設計爲離散型模糊問卷，也可設計爲連續型模糊問卷（參見例 4.1；參見第 5.4 節）。至於採取何種方式爲宜，當視所研究之問題或受訪者能否依指示操作而定。

3.2 反模糊化轉換

反模糊化轉換是爲將模糊數轉換爲一實數之手段。不論離散型模糊數（類別變項的離散型模糊數除外）還是連續型模糊數均可藉反模糊化轉換轉變爲一反模糊化值。定義如下：

定義 3.3　離散型模糊數的反模糊化值

設 X 是一模糊數，語言變數$\{L_1, L_2, \ldots L_n\}$為論域 U 中有序的數列，$\mu_{L_i}(x)= m_i$ 為模糊樣本 X 相對於 L_i 的隸屬度且 $\sum_{i=1}^{n} \mu_{L_i}(x)=1$，則 X 的反模糊化值為 $X_f = \sum_{i=1}^{n} m_i L_i$

例 3.5　求離散型模糊數之反模糊化值

X 為老人一天出外走動時間（小時），其論域 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，其隸屬度函數分別為 $\{\mu_1(X)=0, \mu_2(X)=0.2, \mu_3(X)= 0.5, \mu_4(X)=0.2, \mu_5(X)=0.1, \mu_6(X)=0\}$，則老人一天出外走動時間的反模糊化值為 ：

$$1\times 0 + 2\times 0.2 + 3\times 0.5 + 4\times 0.2 + 5\times 0.1 + 6\times 0 = 3.2 \text{ 小時}$$

至於連續型模糊數之反模糊化轉換，則考量代表一連續性的模糊集合，即代表不確定事件之一梯形模糊集合。當提出此一梯形樣本時，我們感興趣的是它在實數線上代表的值，即「反模糊化值」。然在實際應用上，採取一更爲普遍化之非線性單位間轉換，而非原始的線性單位間的變換，更加方便合理。例如，地震的能量既可以以一般的能量單位表示，也可以用指數的芮氏（Richter）單位表示。同樣地，訊號或聲響強度的測度，可以用瓦特（watt）爲單位，也可以用對數的單位，即分貝（decibel）來表示。

當我們將梯形資料合理且有意義地轉化至實數線時，我們需確定兩件事，即：轉換資料必需是（1）有限維度的；（2）此等參數的相依性必需是平滑的（即可微分的）。以數學用語言之，就是此轉換群是一李氏群（Lie group）。

此轉換一旦決定後，我們就有一新的值 y = f(x) ，取代原始梯形資料。在理想狀況下，此一新的量 y 是常態分配的。（實務上，常態分配對 y 可以是一個好的初步估計。）當決定如何轉換時，我們必須理解，由於可能再次變換單位，代表量 x 之數值轉換並非唯一。

定義 3.4　梯形模糊數在實數線上之反模糊化轉換

令 A=[a,b,c,d] 是在論域 U 上的一組梯形模糊數，而這組梯形模糊數的重心座標為

(cx,cy) = ($\dfrac{\int x u_A(x)dx}{\int u_A(x)dx}$, $\dfrac{\int \frac{1}{2}(u_A(x))^2 dx}{\int u_A(x)dx}$)。則模糊數 A = [a,b,c,d]在實數線上的反模糊化值 RA 定義為

$$\text{RA} = \text{cx} + (1-\frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|});$$ 其中 $\|A\|$ 表梯形面積。

其中，cx 可簡化如下：

cx $=\dfrac{-(a+b)^2+(c+d)^2+(ab-cd)}{3((c+d)-(a+b))}$，當 A 為梯形；

cx $=\dfrac{a+b+d}{3}$，當 A 為三角形；

cx $=\dfrac{b+c}{2}$，當 A 為實數區間。

例 3.6　考慮 A_i ，i=1,2,…,6，等 6 組模糊數，其中 A_1 = [10,10,10.8,10.8](實數區間)，A_2 = [8.8,8.8,12,12] (實數區間)，A_3 = [6,10,10,15.2](三角形)， A_4 = [8,10,10,13.2] (三角形)，A_5 = [6,10,12,14](梯形)，A_6 = [8,9,10,14](梯形)，則其反模糊化轉換為：

$\text{RA}_1=10.4+(1-\frac{\ln(1+0.8)}{0.8})=10.4+0.27=10.67$，$\text{RA}_2=10.4+(1-\frac{\ln(1+3.2)}{3.2})=10.4+0.55=10.95$

$\text{RA}_3=10.4+(1-\frac{\ln(1+4.6)}{4.6})=10.4+0.63=11.03$，$\text{RA}_4=10.4+(1-\frac{\ln(1+2.6)}{2.6})=10.4+0.51=10.91$

$\text{RA}_5=10.4+(1-\frac{\ln(1+5)}{5})=10.4+0.64=11.04$，$\text{RA}_6=10.4+(1-\frac{\ln(1+3.5)}{3.5})=10.4+0.60=11.00$

注意本例 6 梯形之重心橫座標恰相等。

定義 3.5　兩梯形模糊樣本之距離

令 A_i=[a_i,b_i,c_i,d_i] 是在論域 U 上的一組梯形模糊數，而這組梯形模糊數的重心座標為(cx,cy) = ($\dfrac{\int x u_A(x)dx}{\int u_A(x)dx}$, $\dfrac{\int \frac{1}{2}(u_A(x))^2 dx}{\int u_A(x)dx}$)。則梯形模糊數 A_i 和 A_j 之間的距離定義為

$$d(A_i,A_j) = \left|cx_i - cx_j\right| + \left|\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|}\right|$$

例 3.7 考慮 A_i，i=1,2,…,6，等 6 個模糊數，其中 A_1 = [10,10,10.8,10.8]，A_2 = [8.8,8.8,12,12]，A_3 = [6,10,10,15.2]，A_4 = [8,10,10,13.2]，A_5 = [6,10,12,14]，A_6 = [8,9,10,14]，則：各模糊數之間之距離 d(A_i , A_j)，i , j =1,2, …,6，如下（表 3.3）：

表 3.3　兩梯形模糊樣本之距離

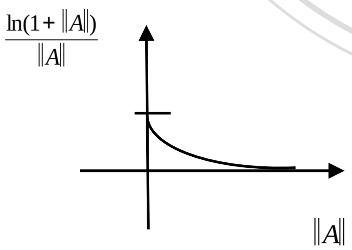
$d(A_i, A_j)$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	0.28	0.36	0.24	0.37	0.3
A_2		0	0.08	0.04	0.09	0.02
A_3			0	0.12	0.01	0.06
A_4				0	0.13	0.06
A_5					0	0.07
A_6						0

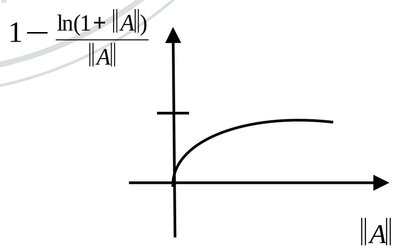
3.3 有關反模糊化轉換的一些性質

針對梯形模糊數之反模糊化轉換，我們將其性質歸納如下：

性質 3.1　反模糊化轉換 y = f(x)為 R → R 之映射。而轉換後之增量，即 f(x) - x = $1-\frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|}$ **為 R → [0,1) 之映成函數。**

證明：以 $\frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|}$ 對 $\|A\|$ 作圖如下：　　　　　則顯然：





性質 3.2　模糊數 A 趨近精確數，為反模糊化轉換後值 RA 趨近於重心 cx 之充分且必要條件。

證明：因為，由 L`Hospital　Rule 定理知：

如果 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$，且 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

所以，$\lim_{A \to 0} \frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{1+\|A\|} = 1$

則當 A→0 時，$RX = cx + (1 - \frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|})$

$\to cx + (1-1)$

$= cx$

性質 3.3　模糊數 A 趨近模糊數，為反模糊化轉換後值 RA 趨近於 重心 cx + 1 之充分且必要條件。

證明：因為，由 L`Hospital　Rule 定理知：

如果 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$，$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$，且 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

所以，$\lim_{A \to \infty} \frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|} = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{1+\|A\|} = 0$

則當 A→∞時，$RX = cx + (1 - \frac{\ln(1+\|A\|)}{\|A\|})$

$\to cx + (1-0)$

$= cx + 1$

性質 3.4　考慮兩梯形模糊數 A_i , A_j。其重心 (cx_i 與 cx_j) 之距 >1 ，為「重心 (cx_i 與 cx_j) 之排序與反模糊化轉換後值 (RA_i 與 RA_j) 之排序方向不變」之充分但非必要條件。

證明： 當 $\left|cx_i - cx_j\right| > 1$

①若 $\mathrm{cx}_i > \mathrm{cx}_j$，則 $\mathrm{cx}_i - \mathrm{cx}_j > 1$

$$\mathrm{RA}_i - \mathrm{RA}_j = \mathrm{cx}_i - \mathrm{cx}_j - \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|}\right]$$

$$> 1 - \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|}\right]$$

$$\geq 1 - 1 \;(\text{因 } 1 \leq \frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \leq 1)$$

$$= 0$$

②若 $\mathrm{cx}_i < \mathrm{cx}_j$，則 $\mathrm{cx}_i - \mathrm{cx}_j < -1$

$$\mathrm{RA}_i - \mathrm{RA}_j = \mathrm{cx}_i - \mathrm{cx}_j - \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|}\right]$$

$$< -1 - \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|}\right]$$

$$\leq -1 - (-1) \;(\text{因} -1 \leq \frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \leq 1)$$

$$= 0$$

性質 3.5　考慮兩梯形模糊數 $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$。其反模糊化轉換後值 ($\mathbf{RA}_i$ 與 $\mathbf{RA}_j$)之距 >1，為「其反模糊化轉換後值 ($\mathbf{RA}_i$ 與 $\mathbf{RA}_j$)之排序與重心($\mathbf{cx}_i$ 與 $\mathbf{cx}_j$)之排序方向不變」之充分但非必要條件。

證明：當 $\left|RA_i - RA_j\right| > 1$，

①若 $RA_i > RA_j$，則 $RA_i - RA_j > 1$

$$cx_i - cx_j = RA_i - RA_j + \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_j\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \right]$$

$$> 1 + \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_j\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \right]$$

$$\geqslant 1 + (-1) \quad (因 -1 \leq \frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \leq 1)$$

$$= 0$$

②若 $RA_i < RA_j$，則 $RA_i - RA_j < -1$

$$cx_i - cx_j = RA_i - RA_j + \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_j\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \right]$$

$$< -1 + \left[\frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_j\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \right]$$

$$\leq -1 + 1 \quad (因 -1 \leq \frac{\ln(1+\|A_i\|)}{\|A_i\|} - \frac{\ln(1+\|A_j\|)}{\|A_j\|} \leq 1)$$

$$= 0$$

4　中位數檢定

4.1 模糊中位數

當樣本數不多、或資料爲序位資料、或資料的測量值不穩定但大小關係仍存在時，我們可以中位數取代平均值來探討母群體的集中趨勢。無母數統計法經常探討具有這類特性之母群體的中位數關係。當樣本爲模糊數而非精確數時，我們可推廣傳統的中位數爲模糊中位數。模糊中位數和傳統中位數相同，不會受到樣本極端值影響，故爲一具穩健性的集中趨勢估計量。

以下我們分別就離散型與連續型兩類模糊中位數做探討。而連續型模糊中位數較離散型複雜，其隸數度函數常以區間均勻分配或不對稱梯形分配兩種情形表達。而區間分配可視爲不對稱梯形分配之特例，故在本文中僅以不對稱梯形分配做說明。

定義 4.1　離散型模糊中位數

設 U 為一論域，令 $L=\{L_1,L_2,L_3,,...,L_n\}$為佈於論域 U 上的 k 個有序變數，

$\{X_i=\frac{m_{i_1}}{L_1}+\frac{m_{i_2}}{L_2}+\ldots+\frac{m_{i_n}}{L_n}$，i=1,2,3,…　,n}，$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}=1$，為自論域中抽出的一組模糊樣本，

X_{if} 為對應模糊樣本 X_i 之反模糊化值。令 $X_{(if)}$ 為 X_{if} 排序後而得到的有序樣本值，則定義離散型模糊樣本中位數為：

$$\text{Fmedian(X)}=\begin{cases} X_{(\frac{n}{2})f} & \text{，若 n 為奇數} \\ (X_{(\frac{n}{2})f}+X_{[(\frac{n}{2})+1]f})/2 & \text{，若 n 為偶數} \end{cases}$$

例 4.1　離散型模糊中位數應用於銀髮族每月基本生活費之調查

政府有多項老人福利政策，用以提供經濟上的安穩。如：中低收入老人生活津貼；中低收入老人特別照顧津貼；敬老福利生活津貼等等。如欲了解老人一個月基本生活費用約需多少錢，以為政策施行之依據，可做模糊中位數調查。以下（表 4.1）是 6 位銀髮族以離散型模糊問卷所得之對基本生活費的隸屬度選擇。

表 4.1　6 位銀髮族對基本生活費的隸屬度選擇

	5000 元	8000 元	10000 元	15000 元	20000 元	25000 元	X_{if}
1					0.8	0.2	21000
2			0.5	0.4	0.1		13000
3						1	25000
4	0.2	0.8					7400
5		0.5	0.5				9000
6				0.8	0.2		16000

由於樣本數 n=6 為偶數，且 $x_{(3)f}=13000$ ，$x_{(4)f}=16000$ 　而對應 $x_{(3)f}$ ，$x_{(4)f}$ 　之

樣本值為： $x_{(3)}=x_2=\frac{0}{5000}+\frac{0}{8000}+\frac{0.5}{10000}+\frac{0.4}{15000}+\frac{0.1}{20000}+\frac{0}{25000}$

$$x_{(4)}=x_6=\frac{0}{5000}+\frac{0}{8000}+\frac{0}{10000}+\frac{0.8}{15000}+\frac{0.2}{20000}+\frac{0}{25000}$$

故模糊樣本中位數為 $=\frac{x_2+x_6}{2}=\frac{0}{5000}+\frac{0}{8000}+\frac{0.25}{10000}+\frac{0.6}{15000}+\frac{0.15}{20000}+\frac{0}{25000}$

值得注意的是離散型模糊樣本之中位數仍為離散型模糊數，不應以諸反模糊化值之中位數為離散型模糊樣本之中位數。

若以傳統的問卷調查方式，也就是規定每位受訪者只能勾選一意願最高的選項。則對於受訪者而言，所勾選之選項當屬心目中隸屬度最高者。其結果如下（表 4.2）：

表 4.2　傳統問卷調查 6 位銀髮族基本生活費選擇

	5000 元	8000 元	10000 元	15000 元	20000 元	25000 元
1					○	
2			○			
3						○
4		○				
5		○　或	○			
6				○		

從上表的資料中我們可以得到6位受訪者的選擇價格，依小到大排序為：8000, 10000, 10000, 15000, 20000, 25000 元或 8000, 10000, 10000, 15000, 20000, 25000 元。而依傳統中位數的取法，取出的結果為：10000 元。但我們知道若以傳統問卷方式進行調查，並無法真正反應受訪者完整的想法。因為傳統中位數只能以受訪者最高意願最為考量，若我們以模糊樣本中位數配合模糊眾數（例 3.3）的理論來思考，更能合理分析這類問題。

定義 4.2　連續型模糊樣本中位數

令 $A_i = [a_i, b_i, c_i, d_i]$，i =1, 2,…, n，是一組梯形模糊數。根據在實數線上的反模糊化值定義，計算出 $A_i = [a_i, b_i, c_i, d_i]$ 之反模糊化值 RA_i，令 $\mathrm{RA}_{(i)}$ 為將 RA_i 排序後而得到的有序樣本值，則定義梯形模糊樣本中位數為：

$$\mathrm{Fmedian(A)}= \begin{cases} RA_{(\frac{n}{2})} & \text{，若 n 為奇數} \\ (RA_{(\frac{n}{2})} + RA_{(\frac{n}{2})+1})/2 & \text{，若 n 為偶數} \end{cases}$$

例 4.2　連續型模糊樣本中位數應用於回味的人生歲數探討

蘇格拉底說：「沒經過反省的人生，不值得活。」回味，是人在午夜夢迴時，常會夢到的念頭，如兒時父母的呵護、與朋友相處的時光，工作上的現實和理想，及在各階段的人生際遇。今以連續型模糊問卷調查得 9 位受訪者對「回味人生的歲數」的梯形模糊數並依定義算出其反模糊化值為（表 4.3）：

表 4.3　9 位受訪者對「回味人生的歲數」的梯形模糊數及反模糊化值

	a_i	b_i	c_i	d_i	RA_i
1	37	38	42	44	40.9
2	55	55	65	65	60.8
3	20	35	35	39	32.1
4	70	72	74	75	73.3
5	70	72	73	74	72.7
6	16	16	20	20	18.6
7	68	70	73	75	72.1
8	14	15	17	18	16.5
9	50	55	55	70	59.1

從上表的資料中，我們可以得到 9 位受訪者對回味的人生歲的數梯形模糊數的反模糊化值，由小到大的排列為：16.5, 18.6, 32.1, 40.9, 59.1, 60.7, 72.1, 72.7, 73.2。根據模糊樣本中位數定義，當 n=9 時，中位數為第 5 位，可得模糊梯形中位數（Fuzzy trapezoid sample median）為：59.1。由此可知這 9 位受訪者所代表之母體認為值得的回味的人生歲數約為 59.1 歲。

例 4.3　連續型模糊樣本中位數應用於適合的生命長度的探究

醫療科技術的發展，使生命得以延長。但隨著科技進步，社會流動，老人之生活經驗與判斷智慧均與以往不同。且隨著年紀漸增，身體各方面的退化及角色的轉變，都將影響老人晚年存在價值的判斷。今以連續型模糊問卷調查探尋多數人認為適合的生命長度為何，得 10 組梯形模糊數列示於下，並計算出其反模糊化值（表 4.4）：

表 4.4　10 位受訪者對「適合的生命長度」梯形模糊數及反模糊化值

	a_i	b_i	c_i	d_i	RA_i
1	78	78	80	80	79.5
2	72	74	75	76	74.7
3	76	78	78	80	78.5
4	72	75	76	78	75.8
5	70	72	75	76	73.8
6	65	70	72	74	70.8
7	70	70	75	75	73.1
8	68	72	72	75	72.2
9	74	76	80	84	79.3
10	76	78	79	80	78.7

從上表的資料中，可知 10 位受訪者對生命長度的梯形模糊數的反模糊化值，由小到大的排列為： 70.8, 72.2, 73.1, 73.8, 74.7, 75.8, 78.5, 78.7, 79.2, 79.5。由定義，當 n= 10 時，中位數位在 $\frac{x_{(5)}+x_{(6)}}{2}$ ，可得模糊梯形中位數（Fuzzy trapezoid sample median）= 75.25。可知這 10 位受訪者所代表之母體認為適合的生命長度為 75.25 歲。

4.2　中位數檢定法

當研究時取樣之母體非為常態分配、其分配型態未知、或樣本數少時，若採用傳統統計檢定法，將導致過多推論，使結論變得不可信。此時可採用無母數統計方法。無母數統計常以中位數代表資料的集中趨勢，也特別適用於資料為序列變項時的處理。無母數統計之中位數檢定，有多種方法。而由 Mood 所提出之中位數檢定法，採用卡方檢定法之統計量，可用於檢定兩組獨立樣本所來自的母體是否具有相同的中位數，應用甚為廣泛。模糊數之中位數檢定，不論是離散型還是連續型模糊數，以各模糊數之反模糊化值為之。此檢定方法是將兩組獨立樣本混合後，找出共同中位數，再分別算出兩組樣本大於或小於共同中位數的個別次數，製成一 2×2 聯立表（表 4.5）：

表 4.5　比較中位數次數的 2×2 聯立表

樣本	樣本Ⅰ	樣本Ⅱ	和
大於共同中位數次數	a	b	a + b
小於共同中位數次數	c	d	c + d
和	$a + c = n_1$	$b + d = n_2$	n

統計量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$ 。當組數為 2，統計量 χ^2 應校正為 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(|o_{ij}-e_{ij}|-\frac{1}{2})^2}{e_{ij}}$ ，

可簡化為＝$\frac{(|ad-bc|-\frac{n}{2})^2 \times n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$。

檢定的假設型式為：

雙尾檢定：
$$\begin{cases} H_0: \text{ 兩組樣本所來自的母體的中位數相等，當 } \chi^2 < \chi^2_{(\alpha,1)} \\ H_1: \text{ 兩組樣本所來自的母體的中位數不相等，當 } \chi^2 \geq \chi^2_{(\alpha,1)} \end{cases}$$

本檢定法的理論基礎為：當兩組樣本所來自之母體具有相同的中位數，則依共同中位數畫分之大於或小於共同中位數的實際次數，必與單純因機率所造成之大於或小於共同中位數的理論次數相去不遠。因此卡方值不應踰越臨界值。故當卡方值大於臨界值時，應拒絕 H_0 。

例 4.4　檢定 A、B 兩社區之老者每週去公園次數是否相等

設有 A、B 兩社區鄰近公園，今欲檢定 A、B 兩社區之老者每週去公園次數是否相等。由 A、B 兩社區分別抽取 13、12 位老者，得各人每週去公園的次數模糊數，並計算其反模糊化值，整理於表 4.6、4.7 及 4.8 為：

表 4.6　A 社區老者去公園的次數模糊數及反模糊化值

	1	2	3	4	5	6	7	X_{if}
1					0.3	0.5	0.2	5.9
2							1	7
3				0.1	0.1	0.4	0.4	6.1
4					0.2	0.7	0.1	5.9
5						0.2	0.8	6.8
6				0.3	0.4	0.2	0.1	4.6
7		0.3	0.4	0.3				2.8
8				0.1	0.4	0.5		5.4
9				0.1	0.3	0.5	0.1	5.5
10						0.2	0.8	6.8
11				0.2	0.7	0.1		4.9
12						0.4	0.6	6.6
13						0.5	0.5	6.5

表 4.7　B 社區老者去公園的次數模糊數及反模糊化值

	1	2	3	4	5	6	7	X_{if}
1			0.1	0.2	0.6	0.1		4.7
2		0.1	0.6	0.3				3.2
3			0.2	0.8				3.8
4		0.2	0.5	0.2	0.1			3.2
5				0.5	0.5			4.5
6						0.8	0.2	6.2
7					0.2	0.5	0.3	6.1
8			0.3	0.7				3.7
9				0.2	0.6	0.2		5
10			0.5	0.4	0.1			4
11				0.1	0.7	0.1	0.1	5.2
12					0.2	0.6	0.2	6

表 4.8　A、B 兩社區的反模糊化值由小到大排列

A 社區	2.8、4.6、4.9、5.4、5.5、5.9、5.9、6.1、6.5、6.6、6.8、6.8、7
B 社區	3.2、3.2、3.7、3.8、 4、4.5、4.7、 5 、5.2、 6、6.1、6.2

現以 α＝0.05，檢定 A、B 兩社區老人每週去公園次數之中位數是否相等？

【方法為】

假設為 $\begin{cases} H_0\text{:兩社區每週去公園次數之中位數相等} \\ H_1\text{:兩社區每週去公園次數之中位數不相等} \end{cases}$

混合後共同中位數為：5.4，整理得聯立表（表 4.9）如下：

表 4.9　比較去公園次數的中位數次數的 2×2 聯立表

去公園次數	A 社區	B 社區	和
大於共同中位數次數	9	3	12
小於共同中位數次數	3	9	12
和	12	12	24

以中位數次數聯立表（表 4.9），計算統計量

$$\chi^2=\frac{(|9\times 9-3\times 3|-\frac{24}{2})^2\times 24}{12\times 12\times 12\times 12}=\frac{60^2\times 24}{12\times 12\times 12\times 12}=4.17$$

$\alpha=0.05$，v=（2－1）（2－1）＝1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,1)}=3.84<4.17$

即差異顯著，故拒絕接受 H_0。

表示 A、B 兩社區老人，每週去公園次數之中位數有可能不相等。

由前例可知，此中位數檢定法並無不限制 A, B 兩組之樣本數必須相等。

例 4.5　檢定男、女銀髮族所認為的每月基本生活費用是否相等

欲檢定男、女銀髮族所認為的每月基本生活費用是否相等，由女、男銀髮族，各隨機抽取 10 人，所認為的每月基本生活費用，得其基本生活費用模糊數及反模糊化值，整理於表 4.10、4.11 及 4.12 為：

表 4.10　女銀髮族基本生活費用模糊數及反模糊化值

I	$[a_i, b_i, c_i, d_i]$	RA_i
1	[12000, 12000, 14000, 14000]	13001
2	[15000, 16000, 18000, 20000]	17287
3	[18000, 20000, 20000, 22000]	20001
4	[26000, 28000, 30000, 35000]	29910
5	[20000, 25000, 28000, 30000]	25616
6	[17000, 18000, 19000, 20000]	18501
7	[23000, 25000, 25000, 28000]	25334
8	[15000, 16000, 16000, 18000]	16334
9	[25000, 28000, 30000, 32000]	28705
10	[38000, 40000, 41000, 42000]	40201

表 4.11　男銀髮族基本生活費用模糊數及反模糊化值

i	$[a_i, b_i, c_i, d_i]$	RA_i
1	[6000, 8000, 8000, 10000]	8001
2	[10000, 15000, 16000, 18000]	14557
3	[23000, 25000, 28000, 30000]	26501
4	[8000, 8000, 10000, 10000]	9001
5	[15000, 16000, 16000, 20000]	17001
6	[18000, 20000, 21000, 22000]	20201
7	[26000, 30000, 31000, 32000]	29572
8	[10000, 12000, 15000, 16000]	13223
9	[18000, 20000, 24000, 26000]	22001
10	[16000, 18000, 20000, 22000]	19001

表 4.12　女、男組基本生活費用反模糊化值由小到大排列

女	13001、16334、17287、18501、20001、25334、25616、28705、29910、40201
男	8001、9001、13223　、14557、17001、19001、20201、22001、26501、29572

現以 α＝0.05，檢定女、男兩組銀髮族老人每月基本生活費用之中位數是否相等？

【方法為】:

假設為 $\begin{cases} H_0\text{:女、男兩組銀髮族老人每月基本生活費用之中位數相等} \\ H_1\text{:女、男兩組銀髮族老人每月基本生活費用之中位數不相等} \end{cases}$

混合後共同中位數為：$\frac{(19001+20001)}{2}$＝19501，可製聯立表（表 4.13）如下：

表 4.13　比較基本生活費用的中位數次數的 2×2 聯立表

基本生活費用	女組	男組	和
大於共同中位數次數	6	4	10
小於共同中位數次數	4	6	10
和	10	10	20

以中位數次數聯立表（表 4.13），計算統計量

$$\chi^2 = \frac{(|6\times 6-4\times 4|-\frac{20}{2})^2\times 20}{10\times 10\times 10\times 10} = 0.20$$

$\alpha=0.05$，v=（2－1）（2－1）＝1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,1)}=3.84>0.20$

即差異不顯著，故接受 H_0。

表示男、女兩組銀髮族老人每月基本生活費用之中位數可能相等。

4.3　變異數檢定法

此檢定法由 Mood 所提出，用於檢定兩個具有相同平均水準之母體是否具有相同的變異數。採用此法檢定須有以下的假定：

(1) 兩個獨立樣本的抽取皆爲隨機的。

(2) 資料的尺度至少爲序列尺度。

(3) 兩母體除了變異程度外，其他性狀皆一致。

Mood 變異數檢定法的假設型式可爲雙尾檢定，亦可爲單尾檢定。雙尾檢定的假設型式爲：

$$\begin{cases} H_0 \ : \sigma_1^2=\sigma_2^2 & \text{即第一組之變異與第二組無不同} \\ H_1 \ : \sigma_1^2\neq\sigma_2^2 & \text{即第一組之變異與第二組不同} \end{cases}$$

其中，σ不僅指母體的標準差，而泛指離勢量數。

以下僅就雙尾檢定做說明，單尾檢定之原理類同。

Mood 變異數檢定之統計量爲：　$M=\sum_{i=1}^{n_1}(r_i-\frac{n_1+n_2+1}{2})^2$

其中，n_1 爲樣本數小的樣本數；n_2 爲樣本數大的樣本數，即 $n_1\leqslant n_2$；r_i 爲 X、Y 混合排列後之第 i 個 X 值的等級，（n_1+n_2+1）/2 是 X、Y 之各觀測值等級的平均數。

M 值求得後，查表得兩臨界值 M' 或 M''。雙尾檢定時，當 M 居於兩臨界值之間，即 $M'<M<M''$ 時，應接受 H_0；否則拒絕 H_0，接受 H_1。

本檢定的理論基礎爲：若兩母體的變異程度不同，則由變異程度大的母體抽取之樣本，在混合排列後會趨向兩端，使等級太大或太小，並使統計量 M 太大或太小。故當檢定統計量 M 大於等於大的臨界值 M'' 或小於等於小的 M' 時，應拒絕 H_0 。

例 4.6　檢定男、女老者所認為人生中「回味的人生歲數」變異度是否相等

已知某族群男、女老者所認為人生中「回味的人生歲數」相等。今欲檢定該族群男、女老者所認為人生中「回味的人生歲數」變異度是否相等，訪問 19 位老者（男 10 位 ,女 9 位）對人生中「回味的人生歲數」的看法，得其模糊數並計算其反模糊化值，整理於下表（表 4.14、4.15 及 4.16）：

表 4.14　10 位男性老者認為「回味的人生歲數」模糊數及反模糊化值

i	$[a_i, b_i, c_i, d_i]$	RA_i
1	[37, 38, 42, 44]	40.9
2	[55, 55, 65, 65]	60.8
3	[70, 72 ,74, 75]	73.3
4	[70, 72, 73, 74]	72.7
5	[68, 70, 73, 75]	72.1
6	[55, 65, 65, 75]	65.8
7	[60, 65, 68, 70]	66.3
8	[65, 70, 70, 75]	70.6
9	[65, 68, 72, 75]	70.7
10	[70, 72, 72, 75]	72.8

表 4.15　9 位女性老者認為「回味的人生歲數」模糊數及反模糊化值

i	$[a_i, b_i, c_i, d_i]$	RA_i
1	[20, 35, 35, 39]	32.1
2	[16, 16, 20, 20]	18.6
3	[14, 15, 17, 18]	16.5
4	[50, 55, 55, 70]	59.1
5	[35, 40, 40, 45]	40.6
6	[34, 35, 44, 50]	41.7
7	[55, 60, 65, 70]	63.3
8	[60, 65, 65, 70]	65.6
9	[65, 70, 73, 75]	71.3

表 4.16 「回味的人生歲數」男、女組反模糊化值由小到大排列

男	40.9、60.8、65.8、66.3、70.6、70.7、72.1、72.7、72.8、73.3
女	16.5、18.6、32.1、40.6、41.7、59.1、63.3、65.6、71.3

現以 $\alpha=0.05$，檢定回首人生歲月中的男、女，其所認為值得回味人生的歲數，是否變異程度不同？

【方法為】:

採双尾檢定 $\begin{cases} H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 & \text{即男、女組所認為「回味的人生歲數」變異度無不同} \\ H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2 & \text{即男、女組所認為「回味的人生歲數」變異度不同} \end{cases}$

$$\frac{n_1+n_2+1}{2}=\frac{19+1}{2}=10$$

表 4.17 男、女組「回味的人生歲數」反模糊化值整理得各觀測值等級為

觀測值	16.5、18.6、32.1、40.6、40.9、41.7、59.1、60.8、63.3、65.6
組別	女、女、女、女、男、女、女、男、女、女
等級	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10

觀測值	65.8、66.3、70.6、70.7、71.3、72.1、72.7、72.8、73.3
組別	男、男、男、男、女、男、男、男、男
等級	11、12、13、14、15、16、17、18、19

以排序後的資料（表 4.17），求其統計量 M

$\alpha=0.05$ ，$n_1=9$、$n_2=10$

$M=(1-10)^2+(2-10)^2+(3-10)^2+(4-10)^2+(6-10)^2+(7-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(15-10)^2=281$

查表得臨界值 $M'=154$ ，$M''=386$，$M'<M<M''$，故接受 H_0。

表示回首人生回味的歲月，男、女測試結果變異程度有可能相同。

由前例可知，此變異數檢定法並無不限制受檢定的兩組之樣本數必須相等。

例 4.7 檢定男、女銀髮族每年旅遊的次數變異度是否相等

已知某族群中男、女銀髮族每年旅遊的次數無差異。今欲檢定該族群中男、女銀髮族每年旅遊的次數之變異程度是否相等，故訪問 20 位銀髮族（男、女各 10 位），

每年旅遊的次數，得其模糊數，並計算其反模糊化值，整理於表 4.18、4.19 及 4.20 如下：

表 4.18　男銀髮族每年旅遊的次數模糊數及反模糊化值

i	$[a_i, b_i, c_i, d_i]$	RA_i
1	[1, 2, 2, 3]	2.3
2	[2, 2, 4, 4]	3.5
3	[5, 7, 7, 8]	7.1
4	[6, 7, 9,10]	8.5
5	[4, 4, 6, 6]	5.5
6	[5, 6, 6, 8]	6.7
7	[2, 3, 3, 4]	3.3
8	[2, 3, 4, 5]	4.0
9	[5, 7, 8, 9]	7.7
10	[2, 3, 4, 5]	4.0

表 4.19　女銀髮族每年旅遊的次數模糊數及反模糊化值

i	$[a_i, b_i, c_i, d_i]$	RA_i
1	[4 ,5 ,5 ,6]	5.3
2	[6, 6, 8, 8]	7.5
3	[3, 4, 4, 5]	4.3
4	[4, 5, 5, 6]	5.3
5	[1, 3, 4, 5]	3.7
6	[3, 4, 5, 6]	5.0
7	[4, 4, 6, 6]	5.5
8	[2, 4, 5, 6]	4.7
9	[3, 4, 5, 6]	5.0
10	[1, 2, 3, 4]	3.0

表 4.20　銀髮族旅遊次數反模糊化值由小到大排列

男	2.3、3.3、3.5、4.0、4.0、5.5、6.7、7.1、7.7、8.5
女	3.0、3.7、4.3、4.7、5.0、5.0、5.3、5.3、5.5、7.5

現以 α＝0.05，檢定銀髮族中的男、女組，每年旅遊的次數，是否變異程度不同？

【方法為】:

雙尾檢定 $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 & \text{即男、女組每年旅遊次數變異度並無不同} \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 & \text{即男、女組每年旅遊次數變異度不同} \end{cases}$

$\frac{n_1 + n_2 + 1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10.5$，

表 4.21　銀髮族旅遊次數反模糊化值整理得各觀測值等級

觀測值	2.3、3.0、3.3、3.5、3.7、4.0、4.0、4.3、4.7、5.0
組別	男、女、男、男、女、男、男、女、女、女
等級	1、2、3、4、5、6.5、6.5、8、9、10.5

觀測值	5.0、5.3、5.3、5.5、5.5、6.7、7.1、7.5、7.7、8.5
組別	女、女、女、男、女、男、男、女、男、男
等級	10.5、12.5、12.5、14.5、14.5、16、17、18、19、20

以排序後的資料（表 4.21），求其統計量 M

α= 0.05 ，$n_1 = 10$、$n_2 = 10$

$$M = (1-10.5)^2 + (3-10.5)^2 + (4-10.5)^2 + (6.5-10.5)^2 + (6.5-10.5)^2 + (14.5-10.5)^2 + (16-10.5)^2 + (17-10.5)^2 + (19-10.5)^2 + (20-10.5)^2 = 471.5$$

查表得臨界值 $M' = 198.50$ ，$M'' = 464.50$，因 $M > M''$，故拒絕接受 H_0。

表示測試結果男、女組每年旅遊次數之變異程度有可能不相同。

5 實例研究

據內政部人口統計，自2007年2月，老年人口即已佔總人口的10.04%。依行政院經建會推估，至2026年老年人口就會超過20%，即約15年後即每5人中就有1位是老年人口。從以上資料顯示高齡化社會的快速變遷，將引發新的需求與問題，已成爲政府及民間關注及研究的焦點。

然而當母體樣本數小，分配來自未知，且資料是序列尺度時，在做研究時我們可應用無母數統計檢定方法。其特性是常以中位數而非平均數代表資料的集中趨勢。此方法是一個合理且易於使用的統計方法，可應用在財管、經營、醫療、教育心理及其它的社會科學的研究，是一種值得重視且可擴大使用的研究工具。

基於此，我們利用模糊統計分析和無母數檢定，並以梯形隸屬函數建立之中位數檢定法模型，對老人相關問題予以測度，以期能更精確地反映年長者的實際想法，並解決老年社會所遭遇的問題。

5.1 應用離散型模糊數分析和檢定老人外出時間

根據社會繼續理論：一個人在他老邁時不會產生戲劇性之改變，它的人格特徵照樣維持跟成年生活時類似，如活躍型、退縮型，依然未變。基於此，想探討不管本身的個性如何，老人一天外出時間，是否受到年齡因素的影響，以做為老人社會資源分配之依據。所以，針對退休後的人，以年齡 65-74 歲及 75-90 歲分成兩組，調查這兩個年齡層在一天中外出時間及其變異度是否不同。

【方法為】

採用離散型模糊問卷（表 5.1），對 8 名 A 組（75-85 歲）及 12 名 B 組（65-74 歲）老人做調查後得模糊數及反模糊化值整理於表 5.2、5.3 及 5.4：

表 5.1　一天外出約多少時間？（單位：小時）

時間 / 受訪者	0	1	2	3	4	5	6	7 以上

表 5.2　A 組（75-85 歲）外出時間的模糊數及反模糊化值

時間 / 受訪者	0	1	2	3	4	5	6	7 以上	X_{if}
1	0.2	0.6	0.2						1
2	0.2	0.4	0.2	0.2					1.4
3	0.3	0.2	0.4	0.1					1.3
4	0.4	0.3	0.3						0.9
5			0.5	0.4	0.1				2.6
6		0.3	0.7						1.7
7	0.3	0.4	0.2	0.1					1.1
8		0.5	0.4	0.1					1.6

表 5.3　B 組（65-74 歲）外出時間的模糊數及反模糊化值

時間 / 受訪者	0	1	2	3	4	5	6	7 以上	X_{if}
1		0.2			0.6	0.2			3.6
2		0.2	0.4	0.4					2.2
3		0.1	0.2	0.4	0.3				2.9
4		0.1		0.4	0.5				3.3
5		0.4	0.6						1.6
6		0.1		0.4	0.4	0.1			3.4
7		0.1	0.3	0.6					2.5
8		0.2	0.4	0.4					2.2
9		0.1	0.7	0.2					2.1
10		0.5	0.3	0.2					1.7
11		0.5	0.5						1.5
12		0.1		0.3		0.6			4

表 5.4　兩年齡層外出時間的反模糊化值由小到大排列

A 組(75-85 歲)	0.9、1 、1.1、1.3、1.4、1.6、1.7、2.6
B 組(65-74 歲)	1.5、1.6、1.7、2.1、2.2、2.2、2.5、2.9、3.3、3.4、3.6、 4

（步驟一）中位數檢定：檢定兩母體是否具有相同的平均水準（即具有相同之中位數）。

統計假設為 $\begin{cases} H_0 \text{：A（75-85 歲）、B（65-74 歲）兩組外出時間的中位數相等} \\ H_1 \text{：A（75-85 歲）、B（65-74 歲）兩組外出時間的中位數不相等} \end{cases}$

混合後之共同中位數為：$\frac{1.7+2.1}{2}=1.9$，故聯立表為：

表 5.5　外出時間中位數次數聯立表

外出時間的反模糊化值	A 組(75−85 歲)	B 組(65−74 歲)	和
大於共同中位數次數	1	9	10
小於共同中位數次數	7	3	10
和	8	12	20

以中位數次數聯立表（表 5.5），求其統計量

$$\chi^2 = \frac{(|1\times3-7\times9|-\frac{20}{2})^2\times20}{8\times12\times10\times10} = \frac{50^2\times20}{8\times12\times10\times10} = 5.21$$

$\alpha=0.05$，v=（2−1）（2−1）=1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,\ 1)}=3.84<5.21$

即差異顯著，故拒絕 H_0。

表示 A（75-85 歲）、B（65-74 歲）兩組老人，外出時間的中位數不相等。

（步驟二）變異數檢定：檢定兩母體是否具有相同的變異度。

因為由（步驟一）之中位數檢定，已知中位數明顯不等，表示不同年齡層的兩組老人是外出時間不同（中位數不同）之不同族群，故無需再做變異數檢定。

所以，就中位數分析足見不同年齡層的老人在外出活動事項上本質互異，不應以單一群體視之。此結論或可作為社區規劃和政府施政的參考，對於較多外出活動者與較少外出活動者，均能設計出適合參與的活動，讓長者能擁有豐富的休閒活動，進而促進身心健康，延緩生理所造成的衰老，解退化所造成的問題。

5.2 應用連續型梯形模糊數分析和檢定理想中的退休年齡

我國勞工強制退休的年齡，從現行 60 歲延後至 65 歲。德國迫於出生率太低，人口急速老化，以及國家財政考量，已決定把強制退休年齡從 65 歲延後到 67 歲。法國也因經濟危機加上人口結構改變，因 60 歲退休年齡之爭，在 2010 年夏季上演激烈的街頭抗爭。而歐盟成員，包括愛爾、希臘、葡萄牙、西班牙和英國，男性平均退休的年齡是 65 歲。美國至少有十州政府都已立法通過延後退休年齡。

然而，現在大家生活水準提高，健康狀況比以往進步，55、60 歲正是可延續事業的黃金期。尤其是於受過高等教育的專業人員，退休標示著另一種生活的開始。基於此，想探討實際已退休的人，認為在現今的時代，不管現行制度規定如何，自己認為適合的退休的年齡為幾歲？是否在適合的退休年齡的認知上男女有著不同的想法？

【方法為】

採用連續型模糊語意量表（圖 5.1）分別對 9 位退休後男性及 10 位退休後女性做調查的結果，以模糊數 [a, b , c , d] 整理於表 5.6、5.7 及表 5.8：

圖 5.1　認為適合的退休年齡約幾歲？

表 5.6　退休後的男性感到適合退休年齡的模糊數及反模糊化值（單位：歲）

	a_i	b_i	c_i	d_i	RA_i
1	62	62	68	68	66
2	55	60	65	70	63
3	60	65	70	72	67
4	65	68	68	70	68
5	55	60	60	65	61
6	60	63	70	71	67
7	63	65	70	72	68
8	58	60	65	70	64
9	64	65	65	68	66

表 5.7　退休後的女性感到適合退休的年齡的模糊數及反模糊化值（單位：歲）

	a_i	b_i	c_i	d_i	RA_i
1	60	65	65	68	65
2	60	64	64	65	63
3	58	60	65	68	63
4	40	48	50	52	48
5	55	60	60	65	61
6	60	65	65	70	66
7	56	60	64	65	62
8	45	50	55	60	53
9	55	58	60	65	60
10	55	55	60	60	58

表 5.8 男、女性感到適合退休年齡的反模糊化值由小到大排列

男	61、63、64、66、66、67、67、68、68
女	48、53、58、60、61、62、63、63、65、66

（步驟一）中位數檢定：檢定兩母體是否具有相同的平均水準（即具有相同之中位數）。

統計假設為 $\begin{cases} H_0：\text{男、女性所感到適合退休年齡的中位數相等} \\ H_1：\text{男、女性所感到適合退休年齡的中位數不相等} \end{cases}$

混合後共同中位數為：63，故聯立表為：

表 5.9　適合退休年齡的中位數次數聯立表

適合的退休年齡	男性	女性	和
大於共同中位數次數	7	2	9
小於共同中位數次數	1	6	7
和	8	8	16

以中位數次數聯立表（表 5.9），求其統計量

$$\chi^2=\frac{(|7\times 6-1\times 2|-\frac{16}{2})^2\times 16}{8\times 8\times 7\times 9}=\frac{32^2\times 16}{8\times 8\times 7\times 9}=4.06$$

$\alpha=0.05$，v=（2－1）（2－1）＝1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,\ 1)}=3.84<4.06$

即差異顯著，故拒絕接受 H_0。

表示退休後男性及退休後女性兩組理想中的退休年齡之中位數不相等。

（步驟二）變異數檢定：檢定兩母體是否具有相同的變異度。

因為由（步驟一）之中位數檢定，已知中位數不相等，表示退休後男性及退休後女性兩組是不同平均水準（中位數不同）之族群，故無需再做變異數檢定。

可知，不同性別之族群由於生涯規劃及預期之老年生活並不相同，對適合退休年齡之期待亦有所不同。此結論可做爲政府制定更合理的退休政策、人力資源部門運用調整人力計畫時之參考，以建構更完善之社會。

5.3 應用連續型梯形模糊數分析和檢定老人看電視時間

所有媒體中，電視是老人最常使用的。因其具有類社會角色，老人可藉由電視尋找熟悉的角色，補償日益減少的社會相關網絡。從自家經驗出發觀察家中的長輩，發現看電視的時間占了清醒時間的大部分，老年族群是電視最忠實的觀眾。一般認為，老年人日常看電視時間應節制，電視節目則應選擇一些新聞性的，因多關注社會能促進大腦思考。希望藉由比較 65-74 歲、75-85 歲兩組受訪者一天看電視時間，了解老人看電視習慣的趨勢，及藉由電視媒體豐富老年生活的可能性。

【方法為】

採用連續型模糊語意量表（圖 5.2）對 65-74 歲（A 組）及 75-85 歲（B 組）老人各 10 名做調查的結果，整理於表 5.10、5.11 及 5.12：

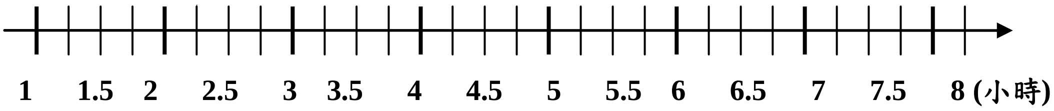


圖 5.2　認為（1）最常固定的看電視時間約多久？

（2）通常看電視的時間約多久？

表 5.10　A 組（65-74 歲）看電視時間的模糊數及反模糊化值（單位：小時）

A 組 (65-74 歲)	梯形模糊數 $[a_i, b_i, c_i, d_i]$	反模糊化值 (四捨五入至小數第一位)
1	[2.75, 3, 4, 4.5]	3.9
2	[1.25, 1.5, 2, 2.25]	2.0
3	[2.75, 3, 3.25, 3.5]	3.3
4	[3.5, 4, 5, 5.5]	4.9
5	[4, 4.25, 4.75, 5]	4.8
6	[2.5, 2.75, 3, 3.5]	3.2
7	[0.75, 1, 2, 2.5]	1.9
8	[1, 2, 3, 4]	3.0
9	[2, 3, 3, 4.5]	3.4
10	[2.5, 3, 3.5, 4]	3.6

表 5.11　B 組（75-85 歲）看電視時間的模糊數及反模糊化值（單位：小時）

B 組 （75-85 歲）	梯形模糊數 $[a_i, b_i, c_i, d_i]$	反模糊化值 (四捨五入至小數第一位)
1	[3, 4, 4.5, 5]	4.5
2	[1.75, 2, 2.75, 3]	2.7
3	[3.5, 3.75, 4, 4.25]	4.1
4	[3.5, 3.75, 4, 4.5]	4.2
5	[0.75, 1, 1, 2.5]	1.7
6	[1, 3, 3, 3.75]	3.0
7	[1.5, 2.5, 2.5, 3.5]	2.8
8	[4, 4, 5, 5]	4.8
9	[3, 3.5, 4, 5]	4.3
10	[3, 4, 4.5, 6]	4.8

表 5.12　兩年齡層看電視時間的反模糊化值由小到大排列

A 組（65-74 歲）	1.9、2.0、3.0 、3.2、3.3、3.4、3.6 、3.9 、4.8 、4.9
B 組（75-85 歲）	1.7、2.7、2.8 、3.0、4.1、4.2、4.3 、4.5 、4.8 、4.8

（步驟一）中位數檢定：檢定兩母體是否具有相同的平均水準（即具有相同之中位數）

統計假設為 $\begin{cases} H_0 \text{：A（65-74 歲）、B（75-85 歲）兩組一天看電視時間的中位數相等} \\ H_1 \text{：A（65-74 歲）、B（75-85 歲）兩組一天看電視時間的中位數不等} \end{cases}$

混合後共同中位數為：$\frac{3.4+3.6}{2}=3.5$，故聯立表為：

表 5.13　A（65-74 歲）、B（75-85 歲）兩組看電視的時間中位數次數聯立表

看電視的時間	A 組（65-74 歲）	B 組（75-85 歲）	和
大於共同中位數次數	4	6	10
小於共同中位數次數	6	4	10
和	10	10	20

以中位數次數聯立表（表 5.13），求其統計量

$$\chi^2 = \frac{(|6\times 6-4\times 4|-\frac{20}{2})^2\times 20}{10\times 10\times 10\times 10} = \frac{10^2\times 20}{10\times 10\times 10\times 10}=0.2$$

$\alpha=0.05$，v=（2－1）（2－1）＝1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,\ 1)}=3.84>0.2$

即差異不顯著，故接受 H_0。

表示 A（65-74 歲）、B（75-85 歲）兩組老人，一天看電視時間的中位數無顯著差異。

（步驟二）變異數檢定：檢定兩母體是否具有相同的變異度。

統計假設為 $\begin{cases} H_0 \text{：A 組（65-74 歲）看電視時間之變異和 B 組（75-85 歲）並無不同} \\ H_1 \text{：A 組（65-74 歲）看電視時間之變異和 B 組（75-85 歲）並不同} \end{cases}$

表 5.14　A 組（65-74 歲）與 B 組（75-85 歲）看電視時間反模糊化值整理得各觀測值等級

觀測值	1.7、 1.9、 2.0、 2.7 、 2.8 、 3.0 、 3.0、 3.2 、3.3 、3.4
組別	B 、A 、A 、B 、B 、A 、B 、A 、A 、A
等級	1 、2 、 3 、4 、5 、6.5 、6.5 、8 、 9 、10

觀測值	3.6、 3.9、 4.1 、 4.2 、 4.3、 4.5 、 4.8 、 4.8、 4.8、 4.9
組別	A 、A 、B 、B 、 B 、B 、A 、B 、 B 、A
等級	11 、 12、 13 、 14 、 15 、 16 、18 、 18 、 18 、 20

以排序後之資料（表 5.14）求統計量

在 $\alpha=0.05$ 顯著水準下， $(n_1+n_2+1)/2 = (10+10+1)/2 = 10.5$

$M=(2-10.5)^2+(3-10.5)^2+(6.5-10.5)^2+(8-10.5)^2+(9-10.5)^2+(10-10.5)^2+(11-10.5)^2+(12-10.5)^2+(18-10.5)^2+(20-10.5)^2 = 302.25$

以 $\alpha=0.05$， $n_1=10$，$n_2=10$，查表得臨界值 $M'=198.50$ ，$M''=464.50$，

而 $198.50 < 302.25 < 464.50$，即 $M' < M < M''$，

故接受 H_0。

表示 A 組（65-74 歲）看電視時間之變異性和 B 組（75-85 歲）並無不同。

即表示：65-74 歲及 75-85 歲兩組看電視時間與其變異是相近的；此兩組可能是來自具相同性質之同一母體；年齡不是決定看電視時間的因素。此結論可作爲傳播當局或民間團體在規劃適合銀髮族觀賞的節目，及利用電視提供銀髮族資訊時的參考，使有限的資源得以充分運用。

5.4 比較應用連續型梯形模糊數及離散型模糊數分析和檢定是否爲成功生活的老人

所謂成功生活的老人，或稱為正常化之老年期，端視其能否維持一成熟的整合人格特質，繼續生活適應環境之變遷。社會支持愈高，對生命意義愈有正向影響，故愈能肯定自我價值，而更能進入超越老化之發展。如要衡量一個人是否達到其成功生活的老年期，就是要衡量其身體、心理、社會的各層面狀況，即對角色轉變、

退休生活、社會活動、經濟來源、健康狀況、人生夢想等面向做測度。總括來看，那就是要測度其身心福祉方面的生活滿意度，即綜合的自我實現程度。

基於此，想探知不同居住地（新北市、台北市）是否影響老人族群進入正常化之老年期，而成為成功生活之老人？

【方法為】

以連續型梯形隸屬度函數設計之問卷（圖 5.3）分別對 11 名新北市（A 組）及 9 名台北市（B 組）老人訪談，其結果整理於表 5.15、5.16 及 5.17：

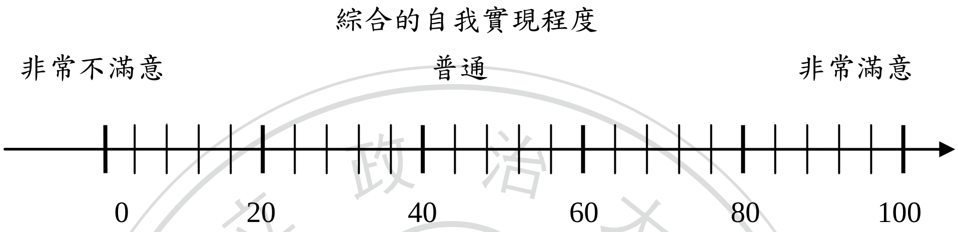


圖 5.3　目前自己感到綜合的自我實現程度

表 5.15　新北市老人所感到綜合的自我實現程度

新北市（A 組）	綜合自我實現程度	反模糊化值(四捨五入至整數)
1	[70, 80,90,96]	85
2	[40, 48, 60, 64]	54
3	[60,68, 76, 80]	72
4	[60, 64, 80, 88]	74
5	[64, 72, 88, 92]	80
6	[72, 84, 92, 96]	86
7	[80, 88 ,96 , 98]	91
8	[24, 32,48, 52]	40
9	[20, 32, 50, 60]	41
10	[64, 76, 90,92]	81
11	[64, 72,84, 90]	78

表 5.16 台北市老人所感到綜合的自我實現程度

台北市（B 組）	綜合自我實現程度	反模糊化值(四捨五入至整數)
1	[45, 50, 60,70]	57
2	[68,72, 84, 90]	79
3	[50, 62, 80, 88]	71
4	[44, 52,70,76]	61
5	[64, 72,88, 92]	80
6	[44, 52, 64, 72]	59
7	[52, 60,72, 84]	68
8	[60, 64, 80, 90]	75
9	[52, 56, 72, 84]	67

表 5.17 新北市及台北市老人所感到綜合的自我實現程度反模糊化值由小到大排列

新北市（A 組）	40、41 、54、72、74、78、80 、81、85、86、91
台北市（B 組）	57、59 、61、67、68、71、75、79、80

（步驟一）中位數檢定：檢定兩母體是否具有相同的平均水準（即具有相同之中位數）

統計假設為
- H_0： 新北市（A 組）與台北市（B 組）老人所感到綜合的自我實現程度的中位數相同
- H_1： 新北市（A 組）與台北市（B 組）老人所感到綜合的自我實現程度的中位數不相同

混合後共同中位數為：$\frac{72+74}{2}$＝73，故聯立表為：

表 5.18 新北市及台北市老人所感到綜合的自我實現程度中位數次數聯立表

自我實現程度	新北市（A）組	台北市（B）組	和
大於共同中位數次數	7	3	10
小於共同中位數次數	4	6	10
和	11	9	20

以中位數次數聯立表（表 5. 18）求其統計量

$$\chi^2 = \frac{(|7\times 6-4\times 3|-\frac{20}{2})^2\times 20}{11\times 9\times 10\times 10} = \frac{20^2\times 20}{11\times 9\times 10\times 10} \fallingdotseq 0.81$$

α＝0.05，v=（2－1）（2－1）＝1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,\ 1)}$ ＝3.84＞0.81

即差異不顯著，故接受 H_0。

表示 A（居住於新北市）、B（居住於台北市）兩組老人，較易成為成功生活的中位數相等。

（步驟二）變異數檢定：檢定檢定是兩母體是否具有相同的變異數。

統計假設為
- H_0： 新北市（A 組）老人所感到綜合的自我實現程度之變異度與台北市（B 組）老人相同
- H_1： 新北市（A 組）老人所感到綜合的自我實現程度之變異度與台北市（B 組）老人不同

表 5.19 新北市（A 組）及台北市（B 組）老人所感到綜合的自我實現程度之反模糊化值整理得各觀測值等級

觀測值	40 、41 、 54、 57 、 59 、 61 、 67 、 68、 71 、 72
組別	A 、 A 、 A 、 B 、 B 、 B 、 B 、 B 、 B 、 A
等級	1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6 、 7 、 8 、 9 、 10

觀測值	74、 75 、 78 、79 、 80 、 80 、 81 、 85 、 86 、 91
組別	A 、 B 、 A 、 B 、 A 、 B 、 A 、 A 、 A 、 A
等級	11、 12 、 1 3 、 14 、 15.5 、15.5 、 17 、18 、 19 、 20

以排序後之資料（表 5.19）求統計量

採雙尾檢定

在 α=0.05 顯著水準下，

$\frac{n_1+n_2+1}{2} = \frac{9+11+1}{2}$＝10.5，

$$M = (4-10.5)^2 + (5-10.5)^2 + (6-10.5)^2 + (7-10.5)^2 + (8-10.5)^2 + (9-10.5)^2 + (12-10.5)^2 + (14-10.5)^2 + (15.5-10.5)^2 = 153.00$$

以 α=0.05，n_1=9，n_2=11，查表得 M'=168.25， M''=432.25

而 168.25 ＞ 153.00，即 M' ＞ M，

故拒絕 H_0。

表示居住在新北市和台北市的年長者，居住地會影響是否達到自我實現、成功生活老人的變異度。

可知，都市化的程度（以新北市和北市為例）雖不影響各該族群中眾多老人感到自我實現，或說達到成功生活境地的均值，但對各成員間之變異度確有影響。政府當局和福利團體，在擬定政策或規劃安排年長者生活時，必需考量處於變異極端處（自感無法自我實現或無法成功生活）之老人是否仍分布眾多。總之，台北市的老人福利政策未必適用於新北市。

另一方面，收集資料之始若採離散型模糊語意量表（表 5.20），可得各受訪者綜合的自我實現程度之模糊數，如表 5.21 、5.22。在離散型模糊語意量表中，語意變數雖為序列尺度，在計算上常予量化為 1~5 之數值，計算方式同本文第 5.1 節，可算出各受訪者綜合的自我實現程度之反模糊化值，如表 5.21 、5.22 及 5.23：

表 5.20 目前自己感到綜合的自我實現程度

自我實現程度 / 受訪者	非常不滿意	不滿意	普通	滿意	非常滿意

表 5.21 新北市（A 組）老人所感到綜合的自我實現程度

自我實現程度 受訪者	1	2	3	4	5	X_{if}
1			0.1	0.2	0.7	4.6
2			0.8	0.2		3.2
3			0.1	0.9		3.9
4			0.1	0.7	0.2	4.1
5				0.7	0.3	4.3
6				0.4	0.6	4.6
7				0.2	0.8	4.8
8		0.4	0.6			2.6
9		0.4	0.5	0.1		2.7
10			0.1	0.6	0.3	4.2
11			0.2	0.6	0.2	4.0

表 5.22 台北市（B 組）老人所感到綜合的自我實現程度

自我實現程度 受訪者	1	2	3	4	5	X_{if}
1			0.5	0.5		3.5
2				0.6	0.4	4.4
3			0.4	0.5	0.1	3.7
4			0.6	0.4		3.4
5			0.1	0.6	0.3	4.2
6			0.8	0.2		3.2
7			0.4	0.5	0.1	3.7
8			0.2	0.7	0.1	3.9
9			0.3	0.6	0.1	3.8

表 5.23　新北市及台北市老人所感到綜合的自我實現程度反模糊化值由小到大排列

新北市（A 組）	2.6、2.7、3.2、3.9、4.0、4.1、4.2、4.3、4.6、4.6、4.8
台北市（B 組）	3.2、3.4、3.5、3.7、3.7、3.8、3.9、4.2、4.4

（**步驟一**）**中位數檢定**：檢定兩母體是否具有相同的平均水準（即具有相同之中位數）

統計假設為
H_0: 新北市（A 組）與台北市（B 組）感到較易成為成功生活老人的中位數相同
H_1: 新北市（A 組）與台北市（B 組）感到較易成為成功生活老人的中位數不相同

混合後共同中位數為：$\frac{3.9+3.9}{2}$＝3.9，故聯立表為：

表 5.24　新北市及台北市老人所感到綜合自我實現程度中位數次數聯立表

自我實現程度	新北市（A）組	台北市（B）組	和
大於共同中位數次數	7	2	9
小於共同中位數次數	3	6	9
和	10	8	18

以中位數次數聯立表（表 5.24）求其統計量

$$\chi^2=\frac{(|7\times 6-3\times 2|-\frac{18}{2})^2\times 18}{10\times 8\times 9\times 9}=\frac{27^2\times 18}{10\times 8\times 9\times 9}=2.025$$

α＝0.05，v=（2－1）（2－1）＝1，臨界值 $\chi^2_{(0.05,\ 1)}$＝3.84＞2.025

即差異不顯著，故接受 H_0。表示 A、B 兩組老人，較易成為成功生活的中位數相等。

（**步驟二**）**變異數檢定**：檢定是兩母體是否具有相同的變異數。

統計假設為
H_0: 新北市（A 組）所感到自己為成功生活的老人滿意度之變異度與台北市（B 組）的年長者並無不同
H_1: 新北市（A 組）所感到自己為成功生活的老人滿意度之變異度與台北市（B 組）的年長者不同

表 5.25 新北市（A 組）及台北市（B 組）老人所感到綜合的自我實現程度之反模糊化值整理得各觀測值等級

觀測值	2.6 、2.7 、3.2 、3.2 、 3.4 、 3.5 、 3.7 、 3.7、 3.8 、3.9
組別	A 、 A 、 A 、 B 、 B 、 B 、 B 、 B 、 B 、 A
等級	1 、 2 、 3.5 、3.5 、 5 、 6 、 7.5 、7.5 、 9 、10.5

測值	3.9、 4.0 、 4.1 、 4.2 、 4.2 、 4.3 、 4.4 、 4.6 、 4.6 、4.8
組別	B 、 A 、 A 、 A 、 B 、 A 、 B 、 A 、 A 、 A
等級	10.5、 12 、 13 、 14.5、 14.5、 16 、 17 、18.5 、 18.5 、 20

以排序後之資料（表 5.25）求統計量

採雙尾檢定

在 $\alpha=0.05$ 顯著水準下，

$$\frac{n_1+n_2+1}{2} = \frac{9+11+1}{2} = 10.5$$

$$M = (3.5-10.5)^2 + (5-10.5)^2 + (6-10.5)^2 + (7.5-10.5)^2 + (7.5-10.5)^2 + (9-10.5)^2 + (10.5-10.5)^2 + (14.5-10.5)^2 + (17-10.5)^2 = 178$$

以 $\alpha=0.05$，$n_1=9$，$n_2=11$，查表得 $M'=168.25$， $M''=432.25$

而 $168.25 < 178 < 432.25$，即 $M' < M < M''$，

故接受 H_0。

表示居住在新北市和台北市的年長者，居住地並不會影響是否達到成功生活老人的變異度。

也就是說，生活在城鄉的老人各自有其理想生活；城鄉差距並不會對老人感到自我實現獲達到成功生活的境地有顯著的影響。因此，台北市的老人福利政策或可適用於新北市。

值得注意的是：此結論與前述應用連續型梯形模糊量表（圖 5.3）調查時所獲致的結論不同。其原因除可歸於隨機的誤差，也可能是因將連續型模糊數（表 5.16，5.17）轉化爲五分法的離散型模糊數（表 5.22，5.23）時，會失去部分有意義的資料。由統計理論知，此舉將使推翻虛無假設（H_0）變得較爲困難；在統計量接近檢定的臨界值時，得到接受虛無假設（H_0）的結論。因此，這也是在做問卷設計時，必須考量之處。

6 結論與討論

模糊邏輯考量了人類思維的複雜及行爲的不確定性，允許人們擁有多重感受的模糊現象存在，較符合現實情況。依據老年社會學的研究，公元兩千年後，無論族群、階級、性別，或生理、心理、社會的特質爲何，老人的異質性將逐漸提高。因此未來的老人世界將愈來愈豐富、奇異和複雜。職是之故，發展出適當的統計分析和檢定方法，方能探知老者內心真實的感受與需求，俾使各項措施或計畫確實符合時代的需求，以能達到建立溫馨社會的目的。

本研究提出反模糊化轉換的定義，建立模糊中位數檢定的模型，期能對年長者的世界或社會科學的相關領域中人類思維的表達，做出更合理的分析和檢定。經由第五章的實證研究發現，應用模糊中位數分析具有模糊性的高齡化社會議題資料，所得到的檢定結果，可讓我們更清楚明瞭，歷練過的人生當事者，對生命中問題的經驗和看法。因此，在社會高齡化的世界趨勢中，模糊中位數分析和檢定方法學，更顯出其重要性。

本研究過程中，仍遇有一些限制及尚待解決的問題，列示如下：

(1) 連續型模糊數之反模糊化轉換，僅討論隸屬度函數型態爲不對稱梯形分配的情況，對於其它連續型隸屬度函數型態，如 S-函數、Z-函數、Π-函數、三角函數與高斯函數等，則無加以探討。

(2) 我們所提出的反模糊化轉換在精度＝1 單位以下可能導致兩模糊數重心之排序與轉換後反模糊化值之排序不同。如欲改變此精度的限制，須對轉換公式加以修改。

(3) 對於未接觸過模糊問卷的年長者，需要花費相當多的時間解釋，甚至於需要以聊天的方式方能探知其意思，往往費時甚久。所以問卷上無法作太多題目的調查。

(4) 對於比較應用連續型模糊數或離散型模糊數做調查時，二者在檢力（推翻虛無假設 H_0）上的差異本質，本文未深入探討。

此爲本研究不足之處，提供後續研究者參考。

參考文獻

1. 吳柏林（2005）。*模糊統計導論方法與應用*， 頁159-173。台北：五南書局。
2. 阮亨中、吳柏林（2000）。*模糊數學與統計應用*，頁233-250；頁319-341。台北：俊傑書局。
3. 吳柏林（1999）。*現代統計學*，頁252-255。台北：五南書局。
4. 顏月珠（1992）。*無母數統計方法*，頁180-183。台北 ： 三民書局。
5. 王文俊（2007）。*認識 Fuzzy*，頁22-29。台北：全華書局。
6. 劉應明、任平（1994）。*模糊數學*，頁33-34；頁66-67。台北 ： 凡異書局。
7. Larson, R., Hostetler, R. and Edwards B. H. (2008). *Essential Calculus: Early Transcendental Functions.* Houghton Mifflin Company, Boston, New York.
8. Nguyen, H.T. and Wu, B. (2006) *Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data.*
9. Chen S.Y. (2006) *"Nonparametric test with fuzzy data,"* NCCU. Master Thesis.